

١٢



حکومەتی هەرێمی کوردستان - عێراق
وەزارەتی پەرۆدرە - بەرپۆڵەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپمەنبەکان

بیرکاری بوۆ هەمووان

کتیپی راهینان
پۆلی دوازدەهەمی زانستی

چاپی شەشەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ کوردی / ١٤٣٦ ک

سہرپہرشتی ہونہری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ناری محسن احمد

1	وینہ پروونکردنہ و ہیبہ کان و نمونہ ہیلیہ کان Graphs and Linear Models	بہشی یہ کہم
4	دہروازہ یہ ک بو ہہ ژمارکردنی جیاکاری و تہواوکاری Introduction to Calculus	بہشی دووہم
9	داتاشراو و نمونہ ی لیکہوت Derivative and the Tangent Problem	بہشی سیہم
13	جیبہ جیکردنی داتاشراو Applications of Differentiation	بہشی چوارہم
18	تہواوکاری بیسنور Indefinite Integral	بہشی پینجہم
22	برگہ قوچہ کیہ کان Conics Sections	بہشی شہ شہم
25	ژمارہ ئاویتہ کان و ئہ ندازہ Complex Numbers And Geometry	بہشی حہفتہم

بۇ خويندكار

كتيبي رايونان داريژراوه بۇ ئووهي رايوناني زياده بۇ خويندكار پيدا بكات، پيوهسته بهو كارامهينانهي لههر وانهيهدا فيري بووه. ئو كتيبه پيكهاتوو له بهشيك بوهر وانهيهدا. وهر رايونانيك لهو بهشانهي كارامهي وجيبه جيكردنيان دهگريتهوه، كه خويندكار لهو وانهيهدا فيري بووه.

راھینان

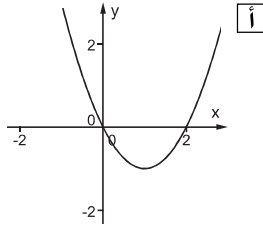
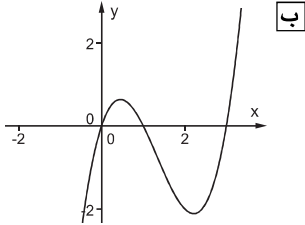
وانه

1-1

Graphs

وینە پروونکردنەوھییەکان

ئەو پروونکردنەوھییە دیاریکە کە بۆ نەخشەى راھینانەکە دەگەریتەوھ.



$f(x) = (x - 1)^2 - 1$ 1

$f(x) = (x - 1)^3 - x^2 + 1$ 2

پروونکردنەوھى نەخشەکە بە خال بکیشە.

$f(x) = 4 - x^2$ 3

$f(x) = |x| - 1$ 4

یەکتەبرینە ئاسۆییەکان و ستوونیەکانى پروونکردنەوھى نەخشەکە بکیشە.

$f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$ 5

$f(x) = \frac{3(2 - \sqrt{x})}{x}$ 6

دیاریکە ئەگەر نەخشەکە تاکە یان جووتە، یان هیچیان نییە؟

$f(x) = x^3 - 4x$ 7

$f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x}$ 8

$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ 9

خالەکانى یەکتەبرینى پروونکردنەوھى دوو نەخشەکە بدۆزەوھ:

$g(x) = 1 - x^2$ و $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ 10

$g(x) = 6 - x$ و $f(x) = -|2x - 3| + 6$ 11

وینەمی راسته‌هیڵه‌که بکێشه که لاری و ئەو خالەمی پێیاندا دەروات دراوه.

- 1 $(-2, 1)$; 3 $(2, \frac{5}{4})$ 2 $(3, 5)$; 0 3 بیئاسه نه‌کراوه : $(2, \frac{5}{4})$

هاوکێشه‌می ئەو راسته‌هیڵه‌که به دوو خالە دیاریکراوه‌که‌دا دەروات بدۆزه‌وه.

- 4 $(1, 2)$ و $(4, 3)$ 5 $(-2, -4)$ و $(-2, 4)$

هاوکێشه‌می ئەو راسته‌هیڵه‌که به خالە دراوه‌که دادەروات به راسته‌هیڵه‌که دراوه‌که ته‌ریبه‌ بدۆزه‌وه.

- 6 $(1, 2)$; $2x - 3y = 1$ 7 $(-5, 3)$; $x = 1$

هاوکێشه‌می ئەو راسته‌هیڵه‌که به خالە دراوه‌که دادەروات و له‌سه‌ر راسته‌هیڵه‌که دراوه‌که ئەستوونه‌ بدۆزه‌وه.

- 8 $(-2, 3)$; $4x - 5y = 3$ 9 $(3, 1)$; $y = -2$

دووری نیوان خالی d و راسته‌هیڵی M بدۆزه‌وه.

- 10 $M(4, 5)$; $d : 4x + 3y = 4$ 11 $M(1, 3)$; $d : y = 2x - 1$

12 کۆمپانیایه‌که دوو ده‌رخسته‌ی پێشکه‌ش به‌ فه‌رمانبه‌ریکی نوێ کرد، بۆ ئەوه‌ی یه‌کێکیان هه‌لبژێریت. له‌ ده‌رخسته‌ی یه‌که‌م 6500 دینار به‌رامبه‌ر هه‌ر کاتژمێریکی کار وهرده‌گریت، له‌گه‌ڵ 500 دینار بۆ هه‌ر یه‌که‌یه‌کی به‌ره‌م. له‌ ده‌رخسته‌ی دووهم 5100 دینار وهرده‌گریت به‌رامبه‌ر هه‌ر کاتژمێریکی کار له‌گه‌ڵ 700 دینار بۆ هه‌ر یه‌که‌یه‌کی به‌ره‌م.

ا) هاوکێشه‌یه‌کی هێلی بۆ هه‌ر ده‌رخسته‌یه‌که بنوسه، که کرییه‌که به‌ کاتژمێر w به‌پێی ژماره‌ی یه‌که‌کانی به‌ره‌مه‌ینراو له‌ کاتژمێر x بنوینیت.

ب) هه‌ر دوو هاوکێشه‌که له‌ هه‌مان پروته‌ختی پۆوتانه‌کان بنوینه، و پۆوتانی خالی یه‌کتبرپینی دوو پروونکردنه‌وه‌که بدۆزه‌وه.

ج) خالی یه‌کتبرپینه‌که‌ی لقی ب چی ده‌نوینیت؟

چۆن ئەم زانیارییانه به‌کارده‌هینیت، بۆ ئەوه‌ی ده‌رخسته‌ی گونجاو بۆ فه‌رمانبه‌ره‌که هه‌لبژێریت؟

بههای داواکراوهکانی نهخشهکه نهگهکرکه ههژمار بکه، نهجامهکان به سادهترین شیوه بنوسه.

1 $h \geq -\frac{1}{2}$ کاتیک $f(1+h)$ ، $f(5)$ ، $f(\frac{5}{2})$ ، $f(1)$ ، $f(x) = \sqrt{2x-1}$

2 $\frac{f(2+\sqrt{x})-f(2)}{\sqrt{x}}$ ، $f(\sqrt{2})$ ، $f(1)$ ، $f(-1)$ ، $f(x) = x^3 - 2x^2$

3 $f(\frac{5\pi}{2})$ ، $f(\frac{\pi}{6})$ ، $f(-\frac{\pi}{3})$ ، $f(0)$ ، $f(x) = \sin 2x$

4 $f(-1)$ ، $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+1} & x \geq 1 \\ \frac{3}{x-1} & x < 1 \end{cases}$

بوارو مهودای هه نهخشهیهک دیاریکه.

6 $f(x) = \frac{2}{|x-1|}$

5 $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

7 بههای $(f \circ g)(2)$ بدوزهوه کاتیک $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

8 پوونکردنهوهی نهخشهی بنهپهتی $f(x) = |x|$ بو وینهکیشانی پوونکردنهوهی ههیهک لهه نهخشانه بهکاربهینه.

ج $y = |2x - 4|$

ب $y = |x + 1|$

ا $y = |x| + 1$

9 سی نهخشهی وهک f ، g ، h بدوزهوه بو نهوهی نهخشهی $k = f \circ g \circ h$ نهخشهی $k(x) = 2 \sin(3x)$ پیکبهینیت.

10 دیاریکه نهگه نهخشهی f جووته یان تاکه.

ج $f(x) = x + |x|$

ب $f(x) = x^2 \sin x$

ا $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

11 نهو جیگورکی یهک له دواییهکانه دیاریکه که پوونکردنهوهی نهخشهی $f(x) = x^3$ بو پوونکردنهوهی هه نهخشهیهک دهگورپیت

ج $f(x) = 2(x+1)^3$

ب $f(x) = 2x^3$

ا $f(x) = (x-1)^3 + 1$

12 وینه بهرامبهر سیگوشهیهکی وهستاو له چاریکی یهکهم له پروتهختی پوتانهکان که

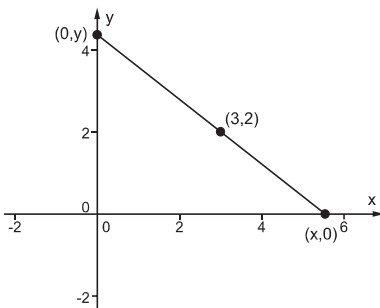
لهگهل دوو تهوهری پوتانهکان و راستههیلک به خالی $(3, 2)$ دا دهروات پیکدیت

پووندهکاتهوه، درژیژی ژبی سیگوشهکه وهک نهخشهیهک بهپیی x بنوسه.

13 پوونبیکهوه نهجامی لیکنانی دوو نهخشهی تاک، نهخشهیهکی جووته؟

14 نهجامی لیکنانی نهخشهیهکی تاک و نهخشهکی جووت، بریتیه له

نهخشهیهکی تاک.



راهیټنان

وانه

1-2

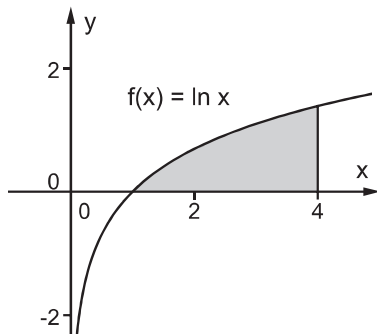
Introduction to calculus د هروازیهک بۆ ههژمارکردنی جیاکاری و تهواوکاری

له راهیټناتی 1 و 3 دا، ئهگهر کرا شیکاری راهیټنانهکه بکه، بئ پنهابردن بۆ چه مکی نامانج و شیکارکردنی و بۆچوونی خۆت پوونبکهوه ئهگهر په نات بۆ چه مکی نامانج برد، پاشان پئیگی ژمارهیی یا پوونکردنهوهیی بۆ خهملاندنی وهلامهکته بهکاربهیټنه.

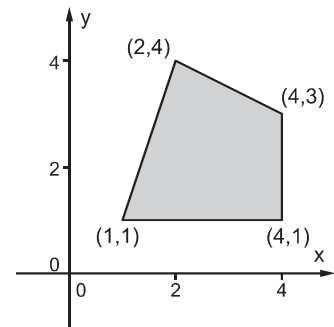
1 ئهوه دوورییهی تهنه جوولاهوهکه له ماوهی 20 چرکهدا دهیبرپیت بدۆزهوه، ئهگهر تهنهکه به خیراییهکی نهگۆر پرهکهی 8m/s بجوولیت.

2 خالیئک لهسهه پوونکردنهوهی نهخشهیی $f(x) = 0.2x^2 + x$ دهجوولیت، کاتیئک x بهرهوپیشچوونی ئاسویی خالهکه بیټ و $f(x)$ بهرزبونهوهی بهرامبههه دهنوینیت. تیکرای گۆرانی بهرزی خالهکه له $x = 3$ بدۆزهوه.

له راهیټناتی 3 و 4 دا، پوویهری ناوچه سیبههراوهکه بهبهکارهییټناتی لاکیشهکان بدۆزهوه.



4



3

5 نهخشهیی $f(x) = x^2 - 2x$ و خالی $P(1, -1)$ که دهکهوینته سهه پوونکردنهوهکهی بهکاربهیټنه.

ا) وینهی پوونکردنهوهی نهخشهکه و ئهوه برهانهی به خالی P و خالهکانی $(x, f(x))$ دا دهروات بکیشه کاتیئک x ئهه بههایانه وهردهگریټ 2، 1.5، 1.2.

ب) لاری ههریهک لهو برهانه بدۆزهوه.

ج) ئههجامهکانی لقی ب بۆ خهملاندنی لاری لیکهوتی نهخشهیی f له خالی P بهکاربهیټنه. ئینجا باسیبکه چۆن لاری برههکه له لاری لیکهوتهکه نزیك و نزیکتر دهکهیهوه.

6 نهخشهیی $f(x) = \sqrt{x}$ و خالی $P(4, 2)$ که دهکهوینته سهه پوونکردنهوهکهی بهکاربهیټنه.

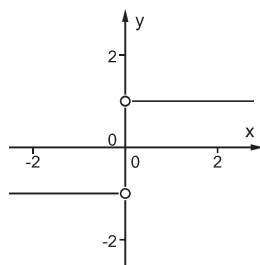
ا) وینهی نهخشهکه و ئهوه برهانهی به خالی P و خالهکانی $(x, f(x))$ دا دهروات بکیشه کاتیئک x ئهه بههایانه وهردهگریټ 1، 3، 5.

ب) لاری ههریهک لهو برهانه بدۆزهوه، ئینجا بههای نزیکیی لاری لیکهوتی پوونکردنهوهی نهخشهکه له خالی P دا بدۆزهوه.

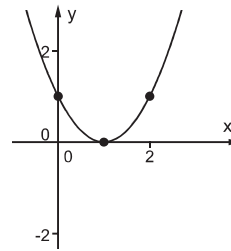
دۆزینه‌وه‌ی ئامانجه‌کان به پوونکردنه‌وه‌یی و ژماره‌یی

Finding Limits Graphically and Numerically

ئامانج به پوونکردنه‌وه‌یی (نه‌گهر هه‌بیئت) بدۆزه‌وه، نه‌گهرنا به‌لگه بو نه‌بوونی ئامانجه‌که به‌په‌نه‌وه.

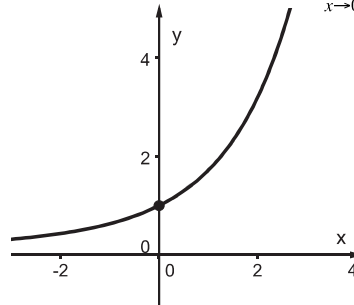


$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 2



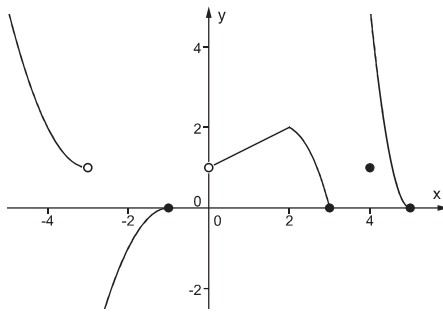
$\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^2$ 1

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ 3



4 به ژماره‌یی ئامانجی $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$ بدۆزه‌وه

5 وینه پوونکردنه‌وه‌یی‌هه‌که به‌کاربه‌په‌نه بو بریاردان له هه‌بوونی به‌هایه‌که، نه‌گهر به‌هایه‌که زانراو بیئت به‌هایه‌کی نزیکه‌یی بو‌ی دیاربکه، نه‌گهرنا به‌لگه به‌په‌نه به نه‌بوونی ئامانجه‌کان.



ا $f(-2)$ ب $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

ج $f(-3)$ د $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

ه $f(2)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ز $f(4)$ ح $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

6 پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی f به‌کاربه‌په‌نه و به‌هاکانی c دیاربکه، له‌کاتی

نه‌بوونی $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$

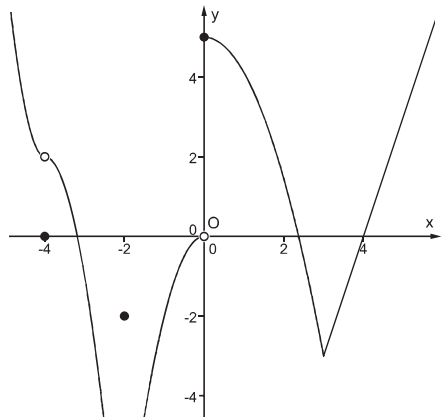
7 پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی f بکیشه که مه‌رجه‌کانی خواره‌وه جیبه‌جی ده‌کات.

• $f(0)$ نییه.

• $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6$

• $f(2) = 6$

• $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$



له پاهيئنانى 1-7 ، ئامانجى داواكراو بدۆزه وه:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \quad \boxed{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} \quad \boxed{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x} \quad \boxed{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \quad \boxed{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} \quad \boxed{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+1| - |x-1|}{x} \quad \boxed{7}$$

له پاهيئنانى 8 و 9 دا، سه لميئراوى دوو مه رج بۆ دۆزينه وهى $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ به كار بهيئنه.

$$3 + 2x - x^2 \leq f(x) \leq 3 + 2x + x^2, \quad c = 0 \quad \boxed{8}$$

$$x - |x - 1| \leq f(x) \leq x + |x - 1|, \quad c = 1 \quad \boxed{9}$$

10 نهخشهى f و g بدۆزه وه كه ئه مانه پاسادان دهكهن: ئهم دوو ئامانجه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ نه بيئت، به لام $[f(x), g(x)]$ $\lim_{x \rightarrow 0}$ هه بيئت.

11 نهخشهى $s(t) = -4.9t^2 + 200$ لادانى بهرديك له بهرزى 200m پاش t چركه له كهوتنى دهنويئيت.

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$

ئامانجى برىتبييه له خيئرايى ته نه كه له $t = a$.

ا) خيئرايى بهر ده كه له $t = 2$ بدۆزه وه.

ب) خيئرايى بهر ده كه له كاتى بهر كهوتنى به زهوى ده بيئته چهنده؟

12 ا) پرونبيكه وه كه $|a| \leq a \leq -|a|$ ژماره ي پاستى a هه رچه نديئيت.

ب) پرونبيكه وه، ئه گه $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ ئه و $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$.

راهینان

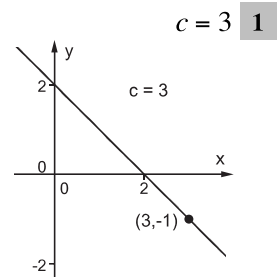
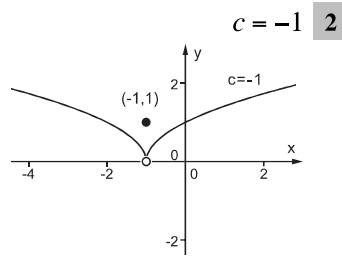
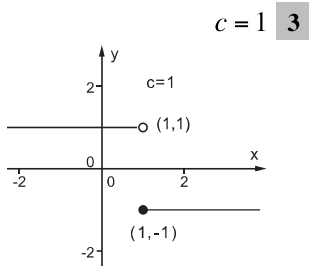
وانه

Continuous Function

نهخشه‌ی بهرده‌وام

4-2

له راهینانی 1 تا 3، وینه روونکردنه‌وه‌که به‌کاربهیننه، بۆ دیاریکردنی ئامانجی نهخشه‌که کاتیگ x له‌لای راست و له‌لای چه‌پی c نزیکه‌بیته‌وه. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ (ئه‌گهر هه‌بیته) بدۆزه‌وه پاشان به‌رده‌وامی نهخشه‌که له $x = c$ تاوتویبکه.



له راهینانی 4 تا 6، به‌رده‌وامی نهخشه‌که تاوتویبکه.

6 $f(x) = \frac{|x+1|-|x|}{x}$

5 $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

4 $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

له راهینانی 7 و 8 دا، به‌های x (ئه‌گهر هه‌بیته) که نهخشه‌که تیايدا پچراوه بدۆزه‌وه و دیاریکه ئه‌گهر پچرانه‌که‌ی لابرده‌ی له توانادایه.

8 $f(x) = \frac{e^x-2}{x-1}$

7 $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$

9 به‌های a و b دیاریبکه بۆ ئه‌وه‌ی نهخشه‌که خالی پچرانی نه‌بیته.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 1 \\ ax + 3 & 1 < x \leq 4 \\ bx + 1 & x > 4 \end{cases}$$

10 بۆچی نهخشه‌که له نیوان a و b دا ره‌گی هه‌یه؟

$b = 1, a = 0, f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

11 قسه‌کردنه‌کان: تیچوونی قسه‌کردن له نیوان هه‌لویر و دهره‌وه به‌م شیویه هه‌ژمارده‌کریت: 1040 دینار بۆ دوو خوله‌کی به‌که‌م، 360 دینار بۆ هه‌ر خوله‌کیگ یان به‌شیک له خوله‌کی زیاده، نهخشه‌ی ته‌واوی $[x]$ (گه‌وره‌ترین ژماره‌ی ته‌واو له x زیاتر نییه) به‌کاربهیننه بۆ نووسینی تیچوونی قسه‌کردن به‌پێی کاته‌که‌ی t به‌خوله‌که‌کان. روونکردنه‌وه‌ی ئه‌م نهخشه‌ بکیشه و به‌رده‌وامیبه‌که‌ی تاوتویبکه.

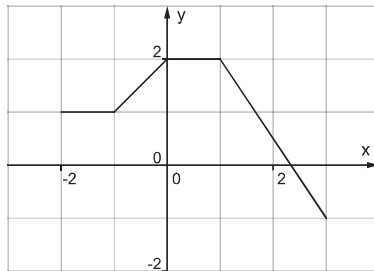
دەرکەنارە ستوونیەکان (ئەگەر هەبێت) بۆ روونکردنەوێی نەخشەکان بدۆزەو:

$f(x) = \frac{x}{\sin x}$ 3

$f(x) = \frac{2+x}{x^2(1-x)}$ 2

$f(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$ 1

ئەگەر نەخشەکە دەرکەناری ستوونی هەبێت، یان پچرانیك لابردنی لە توانادا هەبێت دیاریکە، لە $x = -1$.



$f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x + 1}$ 4

$f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x+1}$ 5

6 روونکردنەوێی نەخشەى f بەرامبەر بۆ نووسینی هاوکیشەى نەخشەى $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ لە ماوەى $[-2, 3]$ بەکاربھێنە.

لاری نهخشهکه له خالی دیاریکراو بدۆزهوه.

(0, 1), $f(x) = x^3 + 1$ **3**

(1, $\frac{2}{3}$), $f(x) = \frac{2x}{2+x}$ **2**

(1, 2), $f(x) = x^2 - 2x + 3$ **1**

داتاشراوی ههر نهخشهیهک بهبهکارهیتانی ئامانجهکان بدۆزهوه.

$f(x) = \sqrt{2x+3}$ **6**

$f(x) = \sin x$ **5**

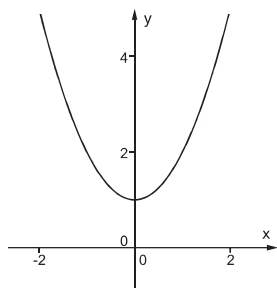
$f(x) = x^2 + x$ **4**

هاوکیشهی لیکهوتی پروونکردنهوهی نهخشهکه که تهریبه بهو راستههیلهی هاوکیشهکهی دیاریکراوه، بدۆزهوه.

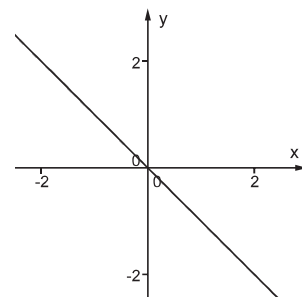
$2x - y + 2 = 0$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$ **7**

$x - 4y + 5 = 0$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ **8**

ئهگهر پروونکردنهوهی نهخشهی f ت ههیت. ئهوا پروونکردنهوهی داتاشراوهکهی بکیشه.



10



9

11 لیکهوتی پروونکردنهوهی نهخشهی h له خالی (3, 1) دا به خالی (1, 3) دهپوات. $h(3)$, $h'(3)$ بدۆزهوه.

12 بههایهکانی x بدۆزهوه که نهخشهی $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x < 0 \\ 2x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ توانای داتاشراوی ههیت.

دیاریبکه ئهگهر نهخشهکه له $x = 1$ توانای داتاشراوی ههیت

$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & x \leq 1 \\ (x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$ **14**

$f(x) = |x-1|$ **13**

داتاشراوی نهخشهکه بدۆزهوه

$$f(x) = x^2 + xe^x \quad \mathbf{3}$$

$$f(x) = x^2 \sin x \quad \mathbf{2}$$

$$f(x) = x^2 + 4 - \frac{5}{x^2} \quad \mathbf{1}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \mathbf{6}$$

$$f(x) = \sqrt{1 + e^x} \quad \mathbf{5}$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad \mathbf{4}$$

$$f(x) = \tan \sqrt{x} \quad \mathbf{8}$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \mathbf{7}$$

هاوکیښه می لیکهوتی نهخشهکه له خالی دیاریکراو بدۆزهوه.

$$(3, 6), f(x) = x\sqrt{x+1} \quad \mathbf{9}$$

$$(0, 1), f(x) = x^2 e^x + 1 \quad \mathbf{10}$$

بۆ دیاریکردنی بههای $f'(1)$ پیدراوهکان بهکاربیهینه.

$$h'(1) = 3 \text{ و } h(1) = -2, \quad g'(1) = -1 \text{ و } g(1) = 1$$

$$f(x) = g(x^2) \times h(x) \quad \mathbf{12}$$

$$f(x) = 3g(x) - 2h(x) \quad \mathbf{11}$$

$$h'(1) = 5 \text{ و } g'(0) = -2 \text{ و } g(0) = 1 \text{ بهکاربیهینه: } f'(0) \text{ بههای } f(x) = h(g(x)) \quad \mathbf{13}$$

$$\mathbf{14}$$
 بههای C و K دیاریبکه بۆ ئهوهی نهخشه می $f(x) = x^3 + kx^2 + c$ لیکهوتی ئاسۆیی له خالی $(1, 2)$ دا هه بیئت.

$$\mathbf{15}$$
 خیرایی: بیسهلمینه که ناوهنده خیرایی ته نیکی جولاو له ماوهی $[t_0 - 4, t_0 + 4]$ دهکاته خیرایی

$$\text{ساتی له } t = t_0, \text{ ئهگەر زانیت نهخشه می لادان بریتیبه له } s(t) = -\frac{1}{2}at^2 + c$$

$$\mathbf{16}$$
 هاوکیښه می برپه هاوتای $f(x) = ax^2 + bx + c$ بدۆزهوه که به خالی $(0, 1)$ دا دهروات

$$\text{و راسته هیلی } y = x - 1 \text{ له خالی } (1, 0) \text{ دهبیته لیکهوتی.}$$

Implicit Defferentiation and Higher Derivative

y' بدۆزهوه.

$x^2 + \ln y = e^y$ 3

$x = y + \sin y$ 2

$x^3 y + xy^2 = 2$ 1

y' و لاری چهماوهکه له خالی دیاریکراو بدۆزهوه.

$(-1, 2) : xy + x^2 + y^2 = 3$ 5

$(1, 1) : 2x^2 + 5y^2 = 7$ 4

داتاشرای دووهمی نهخشهکه بدۆزهوه.

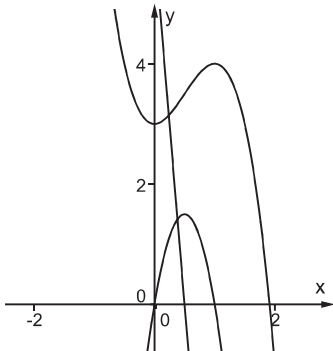
$f(x) = e^x + \ln^2 x$ 7

$f(x) = x + \sqrt{x+1}$ 6

داتاشرای داواکرا بوٲ نهو نهخشهی یهکیک له داتاشرایهکانی دراوه بدۆزهوه.

$f^{(6)}(x), f'''(x) = x^2 + e^x$ 9

$f^{(4)}(x), f''(x) = x \sin x$ 8



10 وٲینهی بهرامبهر، پوونکردنهوهی نهخشهی f و پوونکردنهوهی نهخشهی f' و f'' دهنوٲنٲت، دیاریبکه کام لهم سی پوونکردنهوانه، پوونکردنهوهی نهخشهکهیه، کامیان پوونکردنهوهی f' و کامیان هی f'' دهنوٲنٲت، باسی چوونیهتی دیاریکردنی ههرسی پوونکردنهوهکه بکه.

11 به دووباره نووسینهوهی نهخشهکه ئامانجی داواکراو بدۆزهوه، پاشان ئامانجهکه به بهکارهٲنانی سهلمٲنراوی لوبیتال بدۆزهوه.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}}$ ج

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$ ب

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$ ا

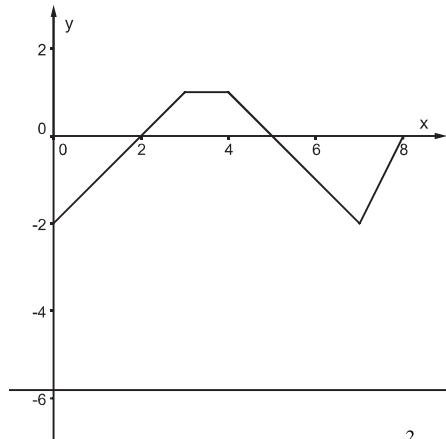
12 خالیك یان زیاتر دیاریبکه که تٲیدا لٲکهوتی پوونکردنهوهی پهیوهندی $y^4 = y^2 - x^2$ ئاسوٲی بیٲ.

13 ههموو خالهکانی سهز بازنهی $x^2 + y^2 = 25$ بدۆزهوه کاتیك لاری لٲکهوت یهکسانه به $\frac{3}{4}$.

14 نهو خالانه بدۆزهوه که تٲیدا لاری پوونکردنهوهی هاوکٲشهی $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$ ئاسوٲی بیٲ.

1 درېژي لاکېشهيهک $(3t + 2)$ و پانييهکهي $(\sqrt{t+1})$ يهکه پېوانه بېټ، تیکرایی گۆرانی پروبهري ئه و لاکېشهيه به گۆرانی t بدۆزهوه.

2 لولهکيکی بازنهيي وهستاو نيوهتيرهی بنکهکهي $(\sqrt{t+2})$ و بهرزييهکهي $(\sqrt{2t+1})$ بېټ تیکرایی گۆرانی قهبارهی ئه و لولهکيکه به گۆرانی t بدۆزهوه.



3 له وينهیی بهرامبهر پروونکردنهوی نهخشهیی $v = f(t)$ دهردهکويټ، که خیرایی ئاراستهکراوی خالیکی تهوهري x دهنويټيټ.

- ا) کهی خالهکه بۆ دواوه دهجوولټ؟ کهمی خالهکه بۆ پېشهوه دهجوولټ؟ کهی خیراییهکهي زياد دهکات؟ و کهی کهم دهکات؟
- ب) کهی تاودانی خالیک موجهب يا سالب يا سفر دهبيټ؟
- ج) کهی خالیک به ئهوپهري خیراییهکهي دهجوولټ؟
- د) کهی خالهکه له جووله دهوستيټ؟

4 بهرديک لهسهر پرووی مانگ بۆ سهروهه ههلدرا به خیرایی بهرپهتي 32 m/s نهخشهیی $s(t) = 32t - 0.8t^2$ نمونهيهک بۆ دۆزينهوهی بهرزي بهردهکه پاش t چرکه دهنويټيټ.

- ا) خیرایی بهردهکه وهک نهخشهيهک بهپي کات t بدۆزهوه، ههروهها تاودانهکهي وهک نهخشهيهک بهپي کات t بدۆزهوه.
- ب) پاش چهند چرکه بهردهکه دهگاته ئهوپهري بهرزييهکهي؟
- ج) ئهوپهري بهرزييهکهي دهکاته چهند؟
- د) کهی بهردهکه دهگاته بهرزييهک نيوهی ئهوپهري بهرزييهکهي بېټ؟
- ه) چهند چرکه بهردهکه له بۆشایی (ئاسمان) دهمنيټهوه؟

له راهیټنایی 5 و 6 دا، وادابنی x و y دوو نهخشهمن بهپي t و توانای داتاشراویان ههيه، داواکراوهکه بهپي پیدراوهکه بدۆزهوه.

پیدراو	داواکراو	پهيوهندي نیوان x و y
$\frac{dx}{dt} = 10$	له $x = 8$	$xy = 4$
$\frac{dy}{dt} = -6$	له $x = 1$	
$\frac{dx}{dt} = -2$	له $x = 1$ $y = 1$	$2x^2 + 3y^2 = 5$

7 نيوهتيرهی بازنهيهک 3 cm/s زياد دهکات.

- ا) تیکرایی گۆرانی چپوهی بازنهکه کاتيک $r = 9 \text{ cm}$ بدۆزهوه.
- ب) تیکرایی گۆرانی پروبهري بازنهکه کاتيک $r = 6 \text{ cm}$ بدۆزهوه.

8 تیکرایی گۆرانی دووری نیوان خالیک لهسهر پروونکردنهوی نهخشهیی $y = x + \cos^2 x$ دهجوولټ و خالی بهرپهت بدۆزهوه ئهگهر زانيت $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}$.

له راهیتانی 1 تا 4، ماوه‌کانی پوو له‌زیادبوون و پوو له‌که‌مبوون دیاریبکه.

$f(x) = x^3 - 12x + 1$ 2

$f(x) = 4x + \frac{1}{x}$ 1

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 4

$f(x) = xe^x$ 3

له راهیتانی 5 تا 8 ئەمانه بدۆزده: (أ) به‌ها شلوۆقه‌کان (ب) ماوه‌کانی پوو له‌زیادبوون و که‌مبوون (ج) تاقیکردنه‌وهی داتاشراوی یه‌که‌م به‌کاربهیتنه بۆ دۆزینه‌وهی به‌هایه‌کانی ئەویه‌ری خۆجییه‌تی (د) پووئکردنه‌وهی نه‌خشه‌که بۆ پاسه‌دانکردنی راستی وه‌لامه‌که‌ت بکیشه.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ 6

$f(x) = x^2 + 4x$ 5

$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ 8

$f(x) = -4x + \frac{4}{x}$ 7

له راهیتانی 9 تا 12، هه‌مان داواکارییه‌کانی پرسیاره‌کانی پيشوو له ماوه‌ی $[0, 2\pi]$ جیبه‌جیبه‌که.

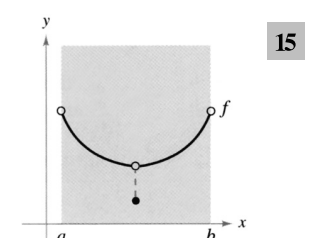
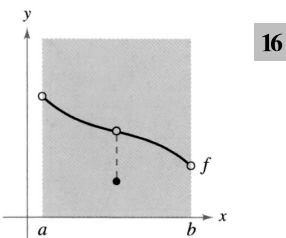
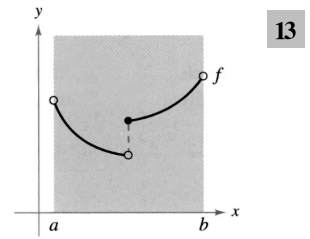
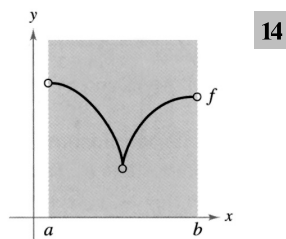
$f(x) = \sin 2x$ 10

$f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$ 9

$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$ 12

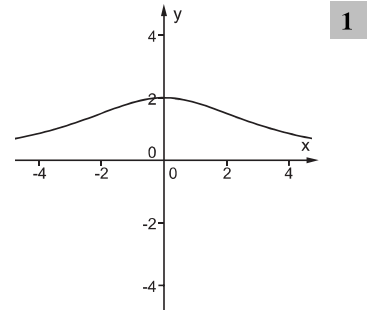
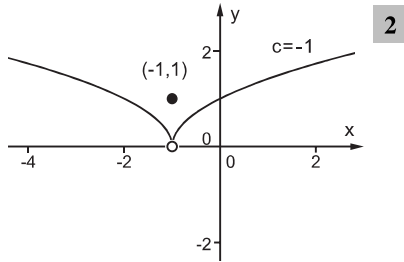
$f(x) = x^2 + \cos x$ 11

له راهیتانی 13 تا 16، دیاریبکه ئەگه‌ر نه‌خشه‌که به‌های بچووکتیرین خۆجیی له ماوه‌ی $[a, b]$ هه‌یه به‌پیی پووئکردنه‌وه‌که‌ی له‌و ماوه‌یه‌دا.



Second Derivative Test تاقىكردنهوھى داتاشراوى دووھم

له رايھينانى 1 و 2 دا، ماوه كراوھكان بدۆزھوھ كاتيگ رoonكردنهوھى نەخشەكە قوڤز يا قوڤاو بېت.



له رايھينانى 3 تا 6، خالھكانى وەرگەران (ئەگەر ھەبېت)، بدۆزھوھ، ناوچەكانى قوڤز و قوڤاوى رoonكردنهوھى نەخشەكە بدۆزھوھ.

4 $f(x) = x\sqrt{x+1}$

3 $f(x) = 2x^4 - 8x + 3$

6 $f(x) = xe^{x^2}$

5 $f(x) = x - \cos x$ لە ماوھى $[0, 2\pi]$

له رايھينانى 7 تا 10، بەھاي ئەويەرى (گەرەتريين و بچووتريين) كۆتايى خۆجيبھتى بدۆزھوھ بە بەكارھينانى داتاشراوى دووھم ئەگەر كرا.

8 $f(x) = -\frac{1}{8}(x+2)^2(x-4)^2$

7 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

10 $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$ لە ماوھى $[0, 2\pi]$

9 $f(x) = x \ln x$

له رايھينانى 11 و 12، ويئھى رoonكردنهوھى نەخشەكە بكيئشە كە پاسەدانى مەرجه ديارىكراوھكان دەكات

12 $f(0) = f(2) = 0$

11 $f(0) = f(2) = 0$

$f'(x) < 0$ لە ماوھى $x < 1$

$f'(x) > 0$ لە ماوھى $x < 1$

$f'(1) = 0$

$f'(1) = 0$

$f'(x) > 0$ لە ماوھى $x > 1$

$f'(x) < 0$ لە ماوھى $x > 1$

$f''(x) > 0$

$f''(x) < 0$

13 نەخشەى $C(x) = 2x + \frac{320000}{x}$ نموونەيەك بۆ ھەژماركردنى تېچوونى كړين و داكردنى x يەكە له بەرھەميكى ديارىكراو پيكدەھينيت چەند يەكە له x پيويستە بكرديت و دابكرت بۆ ئەوھى تېچوون كەمترين بېت.

14 نەخشەى $S = \frac{100t^2}{65+t^2}$ كاتيگ $t > 0$ نموونەيەك پيكدەھينيت بۆ ديارىكردنى خيراىى چاپكەريگ لەسەر ئامپىرى چاپ (بە ژمارەى وشەكان له خولەكيگ) بەپيى ژمارەى ھەفتەكان t پاش رايھينانكردنى.

ب) ئايا خيراىى كەسەكە بە بەردەوامى زياد دەكات كاتيگ موجه بېت؟ بەھاي t زيادبېت؟ رoonييكەوھ.

ا) نيشانەى داتاشراوى يەكەم چيبە كاتيگ t موجه بېت؟

له راهیټناني 1 تا 6، ئامانجی داواکراو بدۆزهوه.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 5} \quad \mathbf{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}} \quad \mathbf{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{2x-3} \quad \mathbf{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{x+1} \quad \mathbf{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 5x}{x} \quad \mathbf{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x+2 \cos x} \quad \mathbf{4}$$

له راهیټناني 7 تا 12، روونکردنهوهی نهخشهکه بکېشه بهبهکارهیټناني بههای ئهوپهړی خوځیټی و بهکتر برینهکان لهگهټ دوو تهوهړی پۆوتانهکان و هاوجیټوون و درکهنارهکان،

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16} \quad \mathbf{9}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad \mathbf{8}$$

$$f(x) = \frac{3+x}{2-x} \quad \mathbf{7}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad \mathbf{12}$$

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x} \quad \mathbf{11}$$

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2} \quad \mathbf{10}$$

13 راستههیټنیک لاریبهکهی m بیټ و به خالی $(0, -2)$ دا دهروات.

ا بهیټی m دووری $d(m)$ له نیوان خالی $(2, 4)$ و ئهو راستههیټله بدۆزهوه.

ب $\lim_{x \rightarrow -\infty} d(m)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(m)$ بدۆزهوه.

راهیټنان

وانه

4-4

Curve Sketching

کیشانی پروونکردنه‌وهی نه‌خشه‌کان

له راهیټنای 1 تا 6، وینه‌ی پروونکردنه‌وهی نه‌خشه‌که بکیشه.

3 $f(x) = (x-1)^5$

2 $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

1 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

6 $f(x) = x^5 - 5x$

5 $f(x) = |2x-5|$

4 $f(x) = x\sqrt{16-x^2}$

له راهیټنای 7 تا 9، وینه‌ی پروونکردنه‌وهی نه‌خشه‌که بکیشه.

7 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ له ماوه‌ی $[0, 2\pi]$

8 $f(x) = 2x - \tan x$ له ماوه‌ی $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

9 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ له ماوه‌ی $]0, \frac{\pi}{2}[$

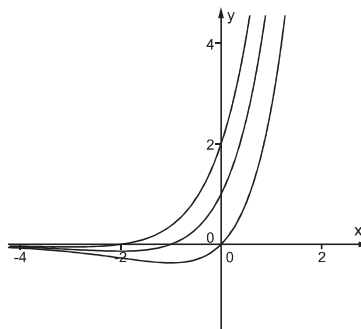
له راهیټنای 10 تا 12، نه‌خشه‌یه‌که بدۆزه‌وه، پاسادانی مهرجه‌کانی پرسپاره‌که بکات.

10 نه‌خشه‌که هیلیکی دهرکه‌ناری ستوونی $x = 1$ و دهرکه‌ناری ئاسویی $y = 3$ هه‌یه.

11 نه‌خشه‌که هیلیکی دهرکه‌ناری ستوونی $x = -2$ و دهرکه‌ناری لاری $y = -x + 1$ هه‌یه.

12 نه‌خشه‌که هیلیکی دهرکه‌ناری ستوونی $x = 1$ و دهرکه‌ناری لاری $y = 2x + 3$ هه‌یه.

13 له وینه‌که پروونکردنه‌وه‌کانی نه‌خشه‌ی f و داتا‌شراوه‌که‌ی یه‌که‌م f' و دووهم f'' دهرده‌که‌وئیت. پروونکردنه‌وه‌کانی نه‌خشه‌ی f و f' و f'' جیا‌بکه‌وه.



14 $f(x) = \frac{1}{2}(ax)^2 - ax$ کاتیك $a \neq 0$

1 \square له هه‌مان پرووته‌ختی پۆتانه‌کان، پروونکردنه‌وه‌کانی نه‌خشه‌که بۆ چوار به‌های جیاوازی a بکیشه.

2 \square دیاریبکه، ئەگەر گۆرانی به‌های a ، یه‌کترب‌پینه‌کانی پروونکردنه‌وه‌که‌و به‌های ئه‌وپه‌ری قۆپاوی یان قۆقزی نه‌خشه‌که ده‌گۆرپیت.

راهینان

وانه

5-4

Optimization

گه‌ران به‌دوای به‌هاکانی ئه‌وپه‌ری

1 دوو ژماره بدۆزهوه، سه‌رجه‌میان 120 بیټ و ئه‌نجامی لیكدانیان گه‌وره‌ترین بیټ.

2 دوو ژماره‌ی موجهب بدۆزهوه، په‌کیکیان هه‌لگه‌راوه‌ی ئه‌وی تریان بیټ و سه‌رجه‌میان بچووکتترین بیټ.

3 دوو ژماره‌ی موجهب بدۆزهوه، سه‌رجه‌می دووجای هه‌ردووکیان ده‌کاته 72، ئه‌نجامی لیكدانیان گه‌وره‌ترین بیټ.

4 دریژی و پانی لاکیشه‌یه‌ک بدۆزهوه بۆ ئه‌وه‌ی رووبه‌ره‌که‌ی گه‌وره‌ترین بیټ، ئه‌گه‌ر زانیت چۆه‌که‌ی 120m.

له‌ راهینانی 5 و 6 دا، خالیکی پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ دراوه‌که‌ بدۆزهوه‌ که‌ نزیکترین خالی بیټ له‌ خاله‌ دراوه‌که‌.

6 $f(x) = \sqrt{x+8}$; $(2, 0)$

5 $f(x) = x^2$; $(2, \frac{1}{2})$

7 بچووکتترین رووبه‌ر: سه‌رجه‌می چۆه‌ی سیگۆشه‌یه‌کی رپک (لایه‌کسان) و چوارگۆشه‌یه‌ک 10m، دریژی

هه‌ریه‌ک له‌لایه‌کی سیگۆشه‌که‌و لایه‌کی چوارگۆشه‌که‌ بدۆزهوه بۆ ئه‌وه‌ی سه‌رجه‌می دوو رووبه‌ره‌که‌ بچووکتترین بیټ.

8 گه‌وره‌ترین رووبه‌ر: دریژی و پانی گه‌وره‌ترین لاکیشه‌ بدۆزهوه، که‌ ده‌توانریت له‌ ناو نیو بازنده‌دا

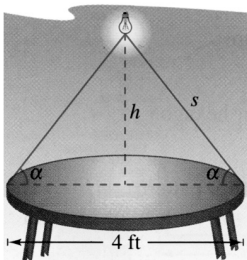
بکیشریت، نیوه‌تیره‌که‌ی 2 بیټ.

9 ته‌لیکی کانزایی دریژییه‌که‌ی 30 m و ده‌ته‌ویټ دوو وینه‌ی (شیوه‌ی) پی‌ دروست بکه‌یت، پۆیسته‌ چهند له‌و

ته‌له‌ بۆ هه‌ر وینه‌یه‌که‌ به‌کاربه‌ینیت ئه‌گه‌ر زانیت رووبه‌ری گشتی ده‌وره‌دراو گه‌وره‌ترین بیټ. باسی ئه‌م بارانه‌ی خواره‌وه‌ بکه‌ کاتیك دوو وینه‌که‌:

ا سیگۆشه‌یه‌کی رپک و چوارگۆشه‌ بیټ.

ب چوارگۆشه‌ و بازنه‌ بیټ.



10 پۆشنایی، گلوپیک ده‌که‌ویته‌ سه‌ر میزێکی بازنه‌یی که‌ نیوه‌تیره‌که‌ی 4 پییه‌. تیشکی I که‌ له‌

پووناکییه‌وه‌ ده‌رده‌چیت به‌ یاسای $I = \frac{k \sin \alpha}{2}$ دریژ ده‌بیته‌وه‌ کاتیك k به‌هایه‌که‌ی نه‌گۆره‌و s

دریژی تیشکه‌یه‌ له‌سه‌رچاوه‌ی پووناکییه‌که‌ بۆ لایه‌کی میزه‌که‌، α ئه‌و گۆشه‌یه‌ که‌

تیشکه‌که‌ له‌گه‌ل ئاستی میزه‌که‌ پیکده‌هینیت. به‌های h بدۆزهوه‌ که‌ واده‌کات تیشکه‌که‌

گه‌وره‌ترین بیټ.

له راهینانی 1 و 2 دا، بهبهکارهینانی داتاشاراوه له راستی تهواوکارییهکه دلتیا به.

1 $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)} + c$

2 $\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + c$

3 نهخشه $f(x)$ بدۆزهوه ئهگهر زانیت $f'(x) = 2 - 3x^2$ و پروونکردنهوهی نهخشه f به خالی $(-1, 3)$ دا دهپوات.

له راهینانی 4 تا 10، تهواوکاری بیسنوور بدۆزهوه:

4 $\int (2x^3 - 3 \sin x) dx$

5 $\int (2\sqrt{x} - 1)^2 dx$

6 $\int \frac{2-3\cos x}{4} dx$

7 $\int \frac{dx}{3x\sqrt{x}}$

8 $\int \frac{4x^4 - 1}{x^2} dx$

9 $\int (x-2)(x+2)(x^2+4) dx$

10 $\int \frac{(2x-1)^2}{2\sqrt{x}} dx$

11 له وینهی بهرامبهر پروونکردنهوهی داتاشاراوی نهخشه f

دهردهکهویت، وینهکه بهکاربهینه بو وه لامدانهوهی ئهه پرسیارانهی

خوارهوه کاتیکه $f(1) = 0$.

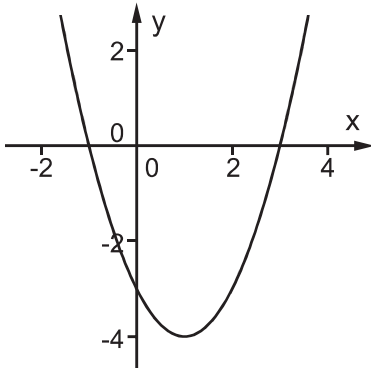
ا لاری نهخشه f له خالی $x = 0$ بدۆزهوه.

ب هاوکیشهی لیکهوتی پروونکردنهوهی نهخشه f له $x = 1$ بدۆزهوه.

ج بهراورد له نیوان $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$ بکه.

د ئهگهر $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ هاوکیشهی f' بیته ئهوا $f(x)$

به پینی x بدۆزهوه.



12 ئۆتۆمبیلایک به تاودانیکی نهگۆر برهکهی $3m/s^2$ بو برینی دوری 150 m به پیکهوت.

ا ئۆتۆمبیلایکه بو برینی ئهه دورییه چهند کاتی پیویسته؟

ب خیراییهکهی لهکاتی گهشتن دهبیته چهند؟

راهینان

وانه

Definite Integral

ته‌واوکاری سنووردار

2-5

له راهینانی 1 تا 4، هه‌ژماری ته‌واوکارییه سنوورداره‌که بکه.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 3\cos x) dx \quad \mathbf{2} \qquad \int_0^1 (x-2)(x+1) dx \quad \mathbf{1}$$

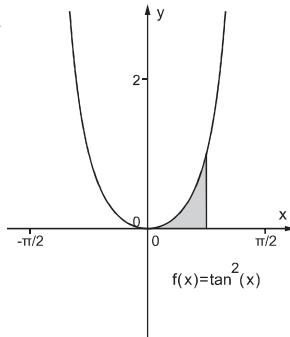
$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + |\sin x|) dx \quad \mathbf{4} \qquad \int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx \quad \mathbf{3}$$

له راهینانی 5 و 6 دا، وینه‌ی ئه‌و ناوچه‌یه بکیشه که رووبه‌ره‌که‌ی ده‌کاته ته‌واوکارییه سنووردراوه‌که، پاشان ئه‌وه‌ی له یاساکانی هه‌ژمارکردنی رووبه‌ر له ئه‌ندازه ده‌یزانیته به‌کاربه‌ینه بو دۆزینه‌وه‌ی به‌های ته‌واوکارییه‌که.

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx \quad \mathbf{6} \qquad \int_{-2}^2 (1+|x|) dx \quad \mathbf{5}$$

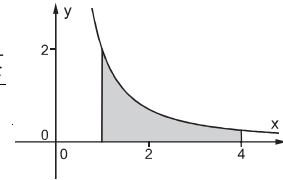
له راهینانی 7 و 8 دا، رووبه‌ری ناوچه سیبه‌رکراوه‌که هه‌ژمار بکه.

$$f(x) = \tan^2 x$$



8

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x^2}$$



7

9 ئه‌گه‌ر $\int_1^5 f(x) dx = 3$ و $\int_1^3 f(x) dx = 5$ به‌های ئه‌مانه‌ی دین بدۆزه‌وه.

$$\int_3^5 (x + 2f(x)) dx \quad \mathbf{ب} \qquad \int_1^3 \frac{x^2 f(x) - 1}{x^2} dx \quad \mathbf{ا}$$

10 رووبه‌ری ناوچه‌ی سنووردراو به پوونکردنه‌وه‌ی نه‌خشه‌ی $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x}$ ته‌وه‌ری x و هه‌ردوو راسته‌هه‌ی $x=1$ ، $x=4$ بدۆزه‌وه.

11 ناوه‌نده به‌های نه‌خشه‌ی $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ له ماوه‌ی $[1, 4]$ بدۆزه‌وه.

12 وادابنی نه‌خشه‌ی $M(x) = 3x^2 - 36x + 105$ تیچوونی په‌راویزی به هه‌زاران دینار بو به‌ره‌مه‌ینانی x یه‌که بو یه‌کێک له به‌ره‌مه‌کان ده‌نوینیت ($0 \leq x \leq 8$).

ا) ئه‌و نه‌خشه‌یه بدۆزه‌وه که تیچوونی گشتی $C(x)$ ده‌نوینیت، ئه‌گه‌ر زانیت تیچوونی نه‌گۆر ده‌کاته له 56000 دینار.

ب) تیچوونی گشتی به‌ره‌مه‌ینانی 6 یه‌که بدۆزه‌وه.

له راهیٲنانی 1 تا 4، تهواوکاری داواکراو بدۆزهوه.

$$\int_0^{\pi} x \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad \mathbf{2} \qquad \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx \quad \mathbf{1}$$

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx \quad \mathbf{4} \qquad \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3e}{2}} \ln\left(\frac{2x}{3}\right) dx \quad \mathbf{3}$$

5 $\int \ln x dx$ تهواوکاری بهشبهشکردن بهکاربهیٲنه.

ب) نهخشهی بنهپهتی نهخشهی $f(x) = \ln^2 x$ بدۆزهوه که پروونکردنهوهکهی به خالی (1, 1) دا دهپوات.

6 تهواوکاری $\int x\sqrt{x+3} dx$ بدۆزهوه بهبهکارهیٲنانی:

ا) لهجیاتی گۆپاوهکه $u = x + 3$ دا بنی.

ب) تهواوکاری به بهشبهشکردن لهگهڵ $dv = \sqrt{x+3}$.

له راهیٲنانی 7 و 8 دا، بهبهکارهیٲنانی تهواوکاری به بهشبهشکردن زیاتر له جاریک تهواوکاری داواکراو بدۆزهوه.

$$\int \frac{x^2}{e^x} dx \quad \mathbf{7}$$

$$\int e^{-x} \cos 2x dx \quad \mathbf{8}$$

له راهیٲنانی 9 و 10، پروبهیری سنووردراو به پروونکردنهوهی $f(x)$ و تهوهری x و دوو راستههیٲلی $x = a$ و $x = b$ بدۆزهوه.

$$. b = 1, a = 0, f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \quad \mathbf{9}$$

$$. b = \ln 2, a = 0, f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \quad \mathbf{10}$$

11 تهواوکاری $\int e^{\sqrt{x}} dx$ بدۆزهوه

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx \quad I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \quad \mathbf{12}$$

ا) I_n بدۆزهوه کاتیك $n = 0$ و $n = 1$.

ب) تهواوکاری به بهشبهشکردن بهکاربهیٲنه بۆ سهلماندنن $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

ج) بههای I_3 دههئهنجام بکه.

راهینان

وانه

Applications of Integral

جیبه جیکردنی تهواوکاری

4-5

له راهینانی 1 تا 4، پووبهیری ئهوا ناوچهیه بدۆزهوه که به نهخشهی $f(x)$ و تهوهیری x له لایهک و ههردوو راستههی $x=a$ و $x=b$ له لایهکی تر سنووردراوه.

$b = \frac{\pi}{2}, a = 0, f(x) = x \cos 2x$ 3

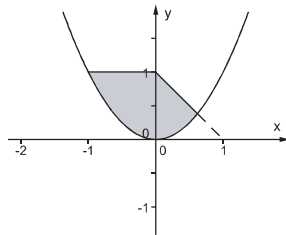
$b = 3, a = 0, f(x) = x^3 - 3x^2$ 1

$b = \ln 2, a = -\ln 2, f(x) = e^x - e^{-x}$ 4

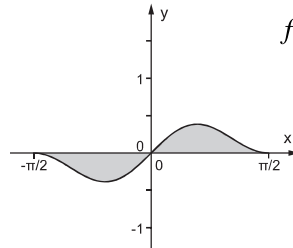
$b = e, a = \frac{1}{e}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 2

5 تهواوکاری به کاربهینه بۆ ههژمارکردنی پووبهیری بازنهیهک، چهقهکهی $(0, 0)$ و به خالی $(4, 3)$ دا دهپوات.

له راهینانی 6 و 7 دا، پووبهیری ناوچهی سیبهرکراو ههژماریکه.



$f(x) = x^2$ 7



$f(x) = \sin x \cos^2 x$ 6

$f(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ 8

1 تهواوکاری به به شیه شکردن به کاربهینه بۆ ههژمارکردنی پووبهیری سنووردراوی نیوان پوونکردنهوهی نهخشهی $f(x)$ و تهوهیری x و ههردوو دوو راستههی $x=1$ و $x=e$.

2 قهبارهی ئهوا تهنهی پهیداده بیئت له نهجی سورانوهی ناوچهی سنووردراوی لقی A به دهوری تهوهیری x بدۆزهوه

له راهینانی 9 و 10، قهبارهی ئهوا تهنهی پهیداده بیئت له نهجی سورانوهی ناوچهی سنووردراو به پوونکردنهوهی هاوکیشهکه به دهوری تهوهیری x بدۆزهوه.

$x = 2, y = 1, f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ 10

$x = \ln 2, y = 0, f(x) = e^{2x} - e^{-x}$ 9

له راهینانی 11 و 12، خالهکانی یهکتربیرینی پوونکردنهوهی دوو نهخشهکه بدۆزهوه، پاشان پووبهیری ئهوا ناوچهیه بدۆزهوه که سنووریان داوه.

$g(x) = x - 1, f(x) = xe^{-x} - e^{-x}$ 11

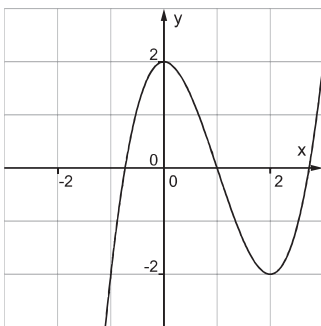
$g(x) = x^2, f(x) = x^4 - 2x^2$ 12

13 وینهی بهرامبهر پوونکردنهوهی نهخشهی بنهپهتی f نهخشهی $f(x)$ دهردهکه ویت

1 ا ههژماریکه $\int_{-1}^3 f(x) dx$.

2 ب ئایا نهخشهی $f(x)$ له ماوهی $[2, 3]$ موجهه یان سالبه؟

3 ج پووبهیری ناوچهی سنووردراو به پوونکردنهوهی نهخشهی $f(x)$ ، تهوهیری x و ههردوو دوو راستههی $x=0$ و $x=3$ ههژماریکه.



تیشکۆ و سهرو دهلیل و تهوهری برگه هواتیه که بدۆزهوه، پاشان وینهی برگه هواتیه که له پووتهختی پۆوتانهکان بکیشه.

$x^2 + 6x - 8y + 9 = 0$ 2

$x = -2y^2$ 1

هاوکیشهی برگه هواتیه که بدۆزهوه.

سهر $(-3, 1)$ ، دهلیل $x = -6$ 4

سهر $(0, -1)$ ، تیشکۆ $(0, -2)$ 3

چهق و ههردوو تیشکۆ و تهوهری گهورهو بچووکی برگه ناتهواوه که بدۆزهوه، پاشان وینهی برگه که بکیشه.

$9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$ 6

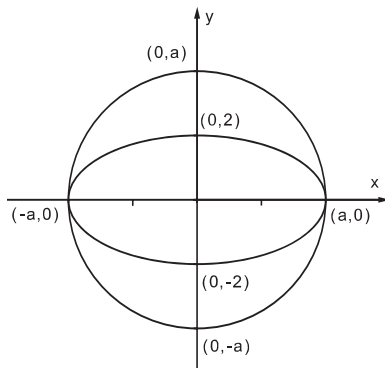
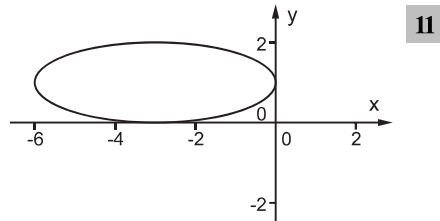
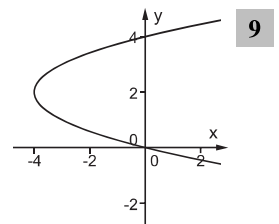
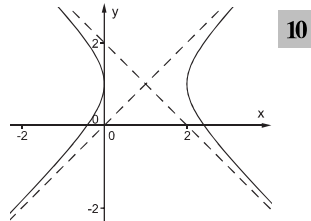
$x^2 + 9y^2 = 1$ 5

چهق و ههردوو تیشکۆ و تهوهری گهورهو بچووکی برگه زیاده که بدۆزهوه، پاشان وینهی برگه که بکیشه.

$y^2 - 4x^2 + 2y - 8x - 7 = 0$ 8

$4x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 7

هاوکیشهی برگه قوچه کیه که بدۆزهوه.



12 هاوکیشهی ئەو برگه ناتهواوه بدۆزهوه که له وینهی بهرامبهر دهردهکهوئیت، ئەگەر زانیت پروبهره کهی نیوهی پروبهری بازنه کهیه له هه مان وینه دا.

13 له پووتهختی پۆوتاندا، پروونکردنه وهی هاوکیشهی $x^2 + 4y|y| - 16 = 0$ بکیشه.

14 هاوکیشهی ئەو برگه زیاده بدۆزهوه که سه رهکانی ده که ونه سه ره $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ و ده ره که نارهکانی بریتین له $y = 3x$ و $y = -3x$.

15 هاوکیشهی ئەو برگه زیاده بدۆزهوه ئەگەر زانیت چه که می $(0, 0)$ و یه کێک له سه رهکانی خالی $(0, 2)$ و یه کێک له تیشکۆیهکانی خالی $(0, 4)$ بیئت.

Classifying Conics پۆلینکردنی برڤه قوچه کیهکان

- 1 جیاوازی چەقی برڤه‌ی ناتەواوی $4x^2 + 3y^2 = 12$ لەگەڵ دوو تیشکۆ و دوو دەلیلەکە‌ی بدۆزەوه.
 - 2 ھاوکیشە‌ی برڤه ناتەواویک بدۆزەوه چەقەکە‌ی $(2, 1)$ و تیشکۆیەکە‌ی $(4, 1)$ و دەلیلەکە‌ی $x = 6$ بێت.
 - 3 ھاوکیشە‌ی برڤه ناتەواویک بدۆزەوه چەقەکە‌ی $(0, 0)$ و تیشکۆیەکە‌ی $(2, 0)$ و سەرەکە‌ی $(3, 0)$ بێت.
 - 4 پۆوتانی سەرەکانی برڤه ناتەواویک بدۆزەوه کە جیاوازی چەقەکە‌ی $\frac{2}{3}$ تیشکۆکانی $(0, \pm 3)$ بێت.
 - 5 جیاوازی چەقی برڤه‌ی زیادی $x^2 - 9y^2 + 1 = 0$ لەگەڵ دوو تیشکۆ و دوو دەلیلەکە‌ی بدۆزەوه.
- لە راهینانی 6 و 7 دا، ھاوکیشە‌ی برڤه زیاد بە زانیی پیکهینتەرەکانی کە دراوه بدۆزەوه.
- 6 جیاوازی چەقی: 2، سەرەکان $(\pm 2, 0)$
 - 7 جیاوازی چەقی: 3، تیشکۆیەکان $(0, 0)$ و $(0, 4)$.
 - 8 جیاوازی چەقی برڤه زیادی $x^2 - y^2 = a^2$ کاتیک $(a \neq 0)$ بدۆزەوه هەردوو تیشکۆ و دەلیل و دەرکەنارەکانی بدۆزەوه.
 - 9 جیاوازی چەقی برڤه زیادیک بدۆزەوه کە سەرەکانی $(\pm 2, 0)$ بێت و بە خالی $(3, \frac{5}{2})$ دا دەپوات.
 - 10 جیاوازی چەقی برڤه‌ی ناتەواویک بدۆزەوه کە کۆمەڵە‌ی هەموو ئەو خالانە پیکهینتەرەکانی له پروتەختیکدا، کە سەرجمی دوو دووریان له دوو خالی $(1, 0)$ و $(4, 0)$ بە‌هایەکی نەگۆرە دەکاتە 6.
 - 11 جیاوازی چەقی خولگە‌ی هەسارە‌ی مەریخ بە نزیک‌ی دەکاتە 0.09، پێژە‌ی درێژی ئەو خولگە بۆ پانییەکە‌ی بدۆزەوه.
 - 12 پرونیبکە‌وه، ھاوکیشە‌ی برڤه‌ی ناتەواو بەم شیوێه دەنووسرێت:

$$e \text{ دەکاتە جیاوازی چەقی برڤه‌ی ناتەواو کە } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$
 - 13 راهینانی پیشوو بە‌کاربەینە بۆ ئەو‌ی پرونیبکە‌یتەوه کە ئامانجی برڤه‌ی ناتەواو بریتییه له بازنه، کاتیک e نزیکە‌بێتەوه له 0.

راهیڤنان

وانه

3-6

Quadratic Equations in 2 Variables هاوکیڤشه دوو جایه کان به دوو گۆراو

تاقیکردنه وهی جیاکه ره وه به کار بهیڤنه بۆ دیاریکردنی جوړی ئه وه چه ماوهی که هاوکیڤشه که دنویڤنیت.

2 $4x^2 + y^2 - 4xy - 4x - 10 = 0$

1 $x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 0$

4 $x^2 - 3xy - 4y^2 = 0$

3 $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4 - 3 = 0$

دوو ته وهی پۆتانه کانی بسورپینه وه بۆ ئه وهی له رادهی یه کتر پین پزگار بیت، پاشان جوړی نواندنی روونکردنه وهی هاوکیڤشه که دیاریبکه.

6 $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4 = 0$

5 $2x^2 + xy + 2y^2 - 15 = 0$

8 $xy + y + 1 = x$

7 $x^2 - 3xy + y^2 = 5$

9 ساین و کۆساینی ئه و گۆشه ییبه ته وهی پۆتانه کان پینی دسورپینه وه بدۆزه وه بۆ ئه وهی له رادهی یه کتر پین هاوکیڤشه $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ پزگار بیت (به بی به کارهینانی سورانه وه).

10 کاریگه ری سورانی ته وهی پۆتانه کان به 90° به دهوری خالی بنه پرت له هاوکیڤشه ی هه ر برپگه یه کی قووچه کی چیبه؟ هاوکیڤشه ی برپگه که له پروته ختی پۆتانه نویبه که بدۆزه وه.

ا $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ برپگه ی ناته واو:

ب $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ برپگه ی زیاده:

ج $y^2 = 4px$ برپگه ی هاوتا:

11 جیاوازی چه قی برپگه ی زیاده $xy = 4$ بدۆزه وه.

12 به فهرامۆشکردنی باره کانی له باربردن، به هاکانی ژماره ی راستی m بدۆزه وه. که وا له هاوکیڤشه ی $x^2 + mxy + my^2 - y - 1 = 0$ دهکات ببیته:

ا $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ برپگه ی ناته واو.

ب $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ برپگه ی زیاده.

ج $y^2 = 4px$ برپگه ی هاوتا.

13 ا $xy - x^2 - x - 1 = 0$ دنویڤنیت چیبه؟ جوړی ئه وه چه ماوه که هاوکیڤشه ی

ب بۆ کیڤشانی روونکردنه وهی هاوکیڤشه که نه خشه ریژه ییبه کان به کار بهیڤنه.

1 ټم ژماره ټاوتتانه ي دین به شپوه ي جبهري بنووسه:

(1-2i)³ $\frac{(2-i)(2+i)}{1+i}$ $1+i+i^2+i^3+\dots+i^{20}$

2 ټم ژماره ټاوتتانه ي دین به شپوه ي سيگوشه ي و جهمسره ي بنووسه:

$z_1 = -1+i\sqrt{3}$ $z_2 = \sqrt{6}-i\sqrt{2}$ $z_3 = \bar{z}_1 \times z_2^3$

3 شپوه ي جهمسره ي ژماره ي ټاوتته ي Z ټمه يه $z = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1 شپوه ي جهمسره ي بوهريه كه له م ژماره ټاوتتانه $z_1 = \frac{1}{\bar{z}^2}$ و $z_2 = z + iz$ بدوزهوه.

2 به هاي هريه كه له $|iz^2|$ و $|\frac{1+2i}{iz}|$ بدوزهوه.

3 به هاي هريه كه له $\arg(-5z)$ و $\arg\left(\frac{-2i}{z^5}\right)$ بدوزهوه.

4 به هاكاني ژماره ي سرووشتي n بدوزهوه كه z^n ژماره يه كي راستي ناسالب نه بيټ.

4 شپوه ي جهمسره ي بوهريه ټاوتته ي $z = \sin(2\theta) - i\cos(2\theta)$ بنووسه.

5 1 به شپوه ي جبهري ژماره ي ټاوتته z^2 بنووسه كاتيک $z = (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})$

2 به هاي پروتي ژماره ي ټاوتته Z و گوشه جهمسره يه كي بدوزهوه.

3 به هاي ريك بوهريه $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$ بدوزهوه.

6 بيسه لمينه كه $\left|\frac{iz+1}{z+i}\right| = 1$ كاتيک $z \neq i$.

7 M و N و P سي خالي جياوازن $z_M = 2e^{i\theta}$, $z_N = \bar{z}_M$, $z_P = 2e^{3i\theta}$ بيسه لمينه كه $MN = MP$.

8 شپوه ي جهمسره ي ټم ژماره ټاوتتانه ي دین بدوزهوه:

(a) $z = \left(\frac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^{12}$ (b) $z = \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{20}$

9 شپوه ي جهمسره ي ټم ژماره يه $z = \left(\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)^{10}$ بنووسه.

10 (a) به شپوه ي جهمسره ي، رهگه كاني 1 له پله 5 بنووسه.

(b) سرجه مي ټه رهگانه چندن؟

11 به شپوه ي جبهري ژماره ټاوتته ي Z كه دوو مهرجي: $|z-1| = \sqrt{5}$ و $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ جيټه جي دهكات بدوزهوه.

12 بيسه لمينه كه $(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n = 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

له راهینانی 1 تا 4، ژمارهی ئاویتته بۆ شیۆهی خالی m به جیگۆرکی دیاریکراو بنووسه.

1 $M(3, 4)$ ، راکیشانی ئاراستهبرهکهی $\vec{u}(-2, 1)$. 2 $M(1, 2 - \sqrt{3})$ وینهدانهوه به دوری تهوهرهی x .

3 $M(\sqrt{2}, -1)$ ، به هاوڕێژهی ئەندازهیی چهقهکهی خالی بنهپهت و رێژهکهی $\sqrt{2}$.

4 $M(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ، سوپانهوه به دوری خالی بنهپهت گوشهکهی $\frac{\pi}{6}$.

5 M خالی ژمارهی ئاویتتهی z ه کاتیك $z \neq \pm i$ و $z \neq \pm 1$ کۆمهلهی خالهکانی M بدۆزهوه بۆ ئهوهی ههر دوو راستههێلی PQ و PR ئهستوون بن، ئهگهر زانیت $z_p = 1$ ، $z_q = z^2$ ، $z_r = z^4$.

6 A, B, P, D چوار خالن له پروتهختی پۆتاندا کاتیك $z_A = 2$ ، $z_B = i$ ، $z_C = 3i$ ، $z_D = \frac{18}{5} + \frac{6}{5}i$.

ا) بیسهلمینه که $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right) = 2k\pi$ له بارهی ههر دوو راستههێلی AB و CD چ درهئهنجامیکت دهبییت؟

ب) $|z_B - z_C|$ و $|z_A - z_D|$ بدۆزهوه.

ج) جۆری چوارلای $ADCB$ چیه؟

7 بسهلمینه سیگۆشهی PQR سیگۆشهیهکی ریکه، کاتیك $z_p = -2$ ، $z_q = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_r = 1 - i\sqrt{3}$.