12

حکومەتی هەرێمی کوردستان- عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەکان

بیرکاری بۆ هەمووان

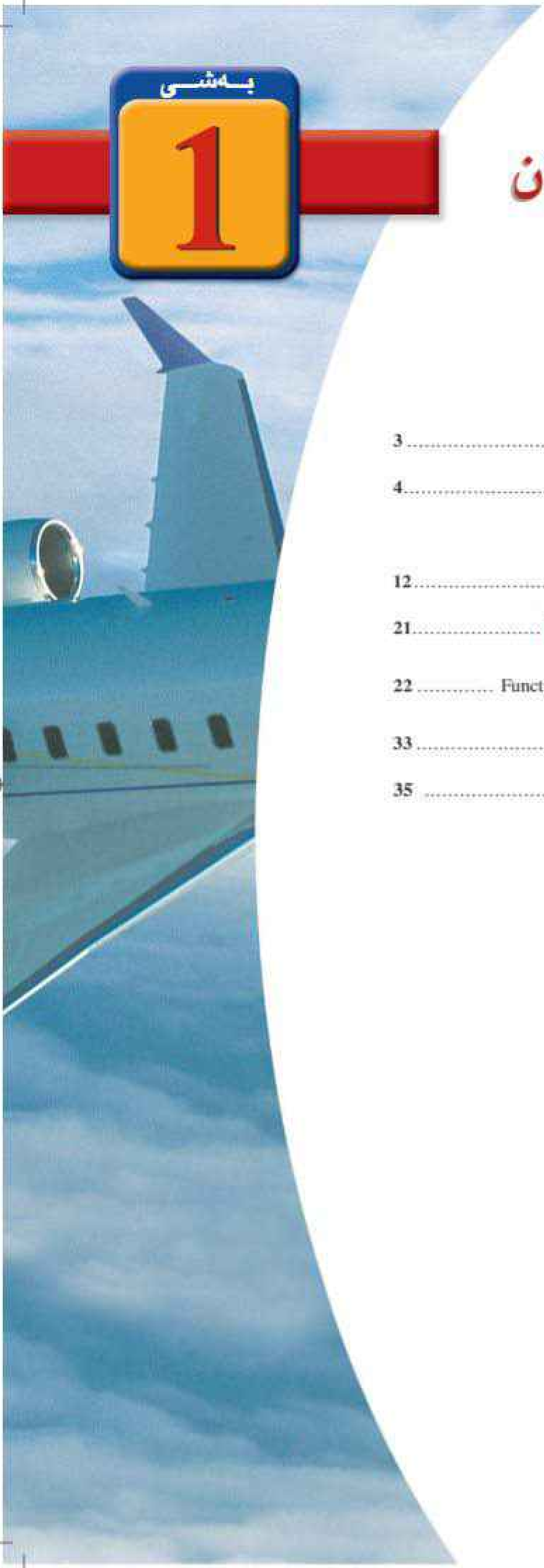
کتێبی خوێندکار
پۆلی دوازدەهەمی زانستی

چاپی نۆیەم
٢٠١٨ ز / ٢٧١٨ کوردی / ١٤٣٩ ک

Content Student G12.qxd 2/25/18 10:24 AM Page 3

سەرپەرشتی زانستی چاپ: عبدالكريم شمعون هرمز
عبدالخالق مصطفى جوكل
صابر مولود أمين
سەرپەرشتی هونەری چاپ: عوسمان پيرداود كواز
ئاری محسن احمد
بژاری هونەری: يوسف احمد اسماعيل

Content Student G12.qxd 2/25/18 10:24 AM Page 2



بەشی 1

وێنە ڕوونکردنەوەییەکان و نموونە هێڵییەکان
Graphs and Linear Models

ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready? 3

1–1 وێنە ڕوونکردنەوەییەکان Graphs 4

2–1 نمونە هێڵییەکان و تێکڕای گۆڕانەکان
Linear Models and Rates of Change 12

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکان 2–1) Partial Test 21

3–1 نەخشەکان و ڕوونکردنەوەکانیان Functions and Their Graphs 22

پێداچوونەوەی بەش Review 33

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە Test Prep 35

Content Student G12.qxd 2/25/18 10:24 AM Page 5

ئامانجەکان
Limits

ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready? 39

1–2 دەروازەیەك بۆ هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری
Introduction to Calculus 40

2–2 دۆزینەوەی ئامانجەکان بە ڕوونکردنەوەیی و ژمارەیی
Finding Limits Graphically and Numercially 46

3–2 هەژمارکردنی ئامانجەکان Finding Limits 56

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکان 3-1) Partial Test 61

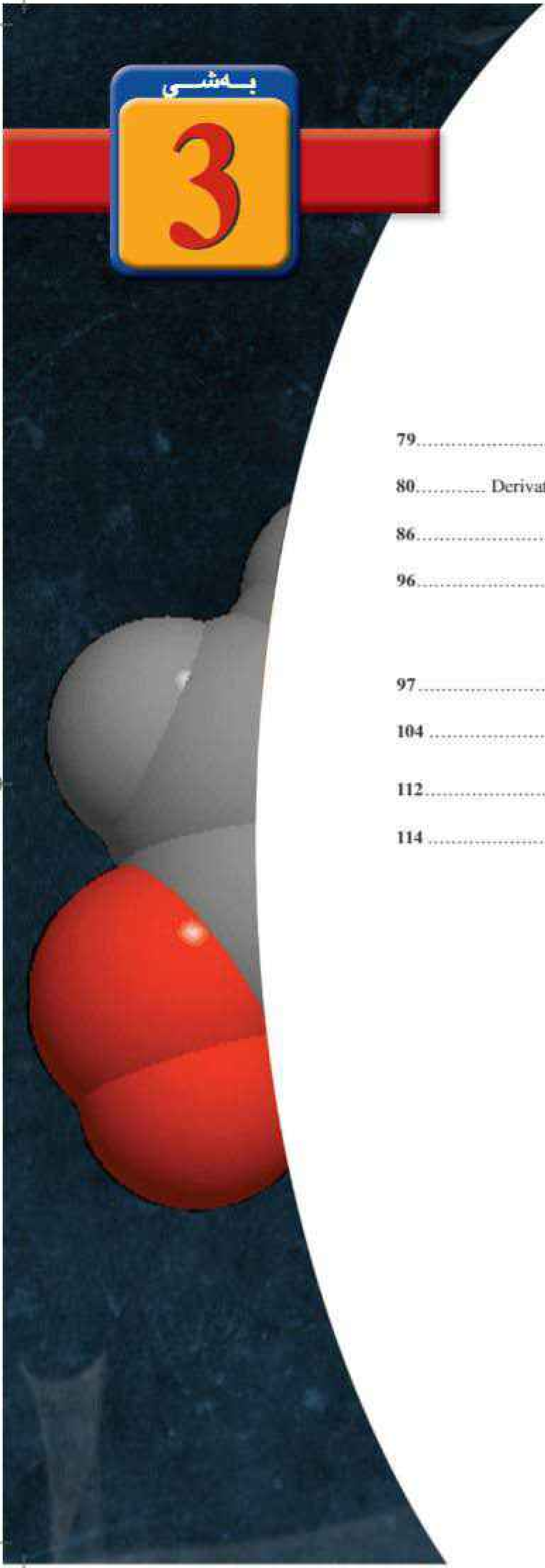
4–2 نەخشە بەردەوامەکان Continuous Functions 62

5–2 ئامانجە بێپایانەکان Infinite limits 68

پێداچوونەوەی بەش Review 74

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە Test Prep 76

Content Student G12.qxd 2/25/18 10:24 AM Page 4



داتاشراو
Derivative

ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready? 79

3–1 داتاشراوە و بابەتی لێکەوت Derivative and the Tangent Problem 80

3–2 رێسای داتاشراو Differentiation Rules 86

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکان 1–2) Partial Test 96

3–3 داتاشراوی خۆبەخۆ و داتاشراوە بەرزەکان
Implicit Differentiation and Higher Derivative 97

3–4 تێکرای گۆڕانەکان Rates of Change 104

پێداچوونەوەی بەش Review 112

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە Test Prep 114

Content Student G12.qxd 2/25/18 10:24 AM Page 7

بەشی 4

جێبەجێکردنی داتاشراو
Applications of Differentiation

ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready? 117

1–4 جێبەجێکردنەکانی داتاشراوەی یەکەم First Derivative Test 118

2–4 جێبەجێکردنەکانی داتاشراوەی دووەم Second Derivative Test 126

3–4 ئامانجەکان لە بێپایان Limits at Infinity 131

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکان 3–1) Partial Test 138

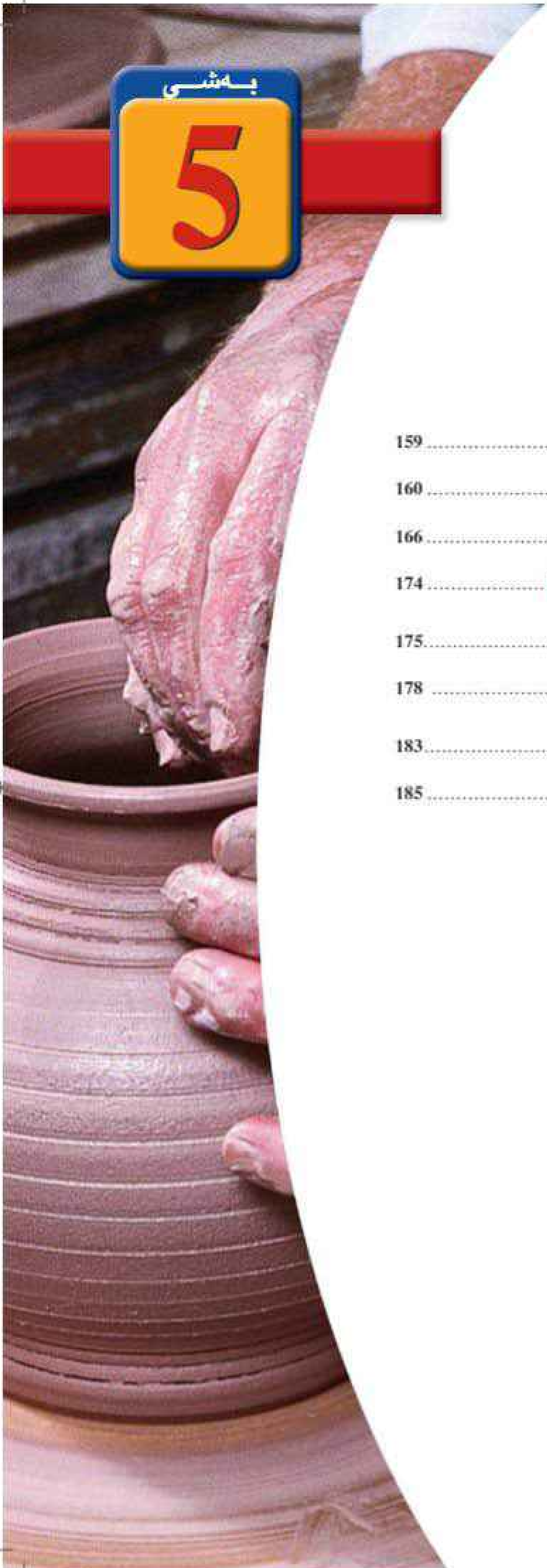
4–4 وێنە ڕوونکردنەوەییەکانی نەخشە Curve Sketching 139

5–4 گەڕان بەدوای بەها کۆتاییەکاندا Optimization 148

پێداچوونەوەی بەش Review 154

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە Test Prep 156

Content Student G12.qxd 2/25/18 10:24 AM Page 6



تەواوکاری
Integration

ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready? 159
5–1 تەواوکاری بێسنوور Indefinite Integral 160
5–2 تەواوکاری سنووردار Definite Integral 166
تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکان 1–2) Partial Test 174
5–3 هەژمارکردنی تەواوکاری Integration Methods 175
5–4 جێبەجێکردنەکانی تەواوکاری Applications of Integral 178
پێداچوونەوەی بەش Review 183
ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە Test Prep 185

Content Student G12.qxd 2/25/18 10:24 AM Page 9

بەشی
6

بڕگە قوچەکییەکان
Conic Sections

ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready? 187

6–1 بڕگە قوچەکییەکان Conic Sections 188

6–2 پۆلێنکردنی بڕگە قوچەکییەکان Classifying Conic Sections 200

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکان 1-2) Partial Test 204

6–3 هاوکێشە دووجایەکان بە دوو گۆڕاو
Quadratic Equations in 2 Variables 205

پێداچوونەوەی بەش Review 210

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە Test Prep 212

Content Student G12.qxd 2/25/18 10:24 AM Page 8

بەشی

7

ژمارە ئاوێتەکان و ئەندازە

Complex Numbers And Geometry

ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready? 215

1–7 شێوە جیاوازەکانی ژمارەی ئاوێتە
Various Forms of a Complex Number 216

2–7 ژمارە ئاوێتەکان و ئەندازە Complex Numbers and Geometry 223

پێداچوونەوەی بەش Review 229

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە Test Prep 230

GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/27/18 9:32 AM Page 3

بـەشــی

1

وێنە ڕوونکردنەوەییەکان و نمونە هێڵییەکان

Graphs and Linear Models

بەشی یەکەم

وانەکان

1-1 وێنە ڕوونکردنەوەییەکان

2-1 نمونە هێڵییەکان و تێکڕای گۆڕانەکان

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

3-1 نەخشەکان و ڕوونکردنەوەکانیان

پێداچوونەوە

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

نمونە هێڵییەکان لەو نمونانە دادەنرێت کە بە فراوانی بڵاوبۆتەوە و بەکاردەهێنرێت لە بواری ئابووری و پیشەسازی و هەروەها لە بوارە زانستییەکانی تر. نموونەش لەسەر ئەمە، ئەو نموونەیە کە پانی هەردوو باڵی فرۆکە w و بە درێژییەکەی l بە باسای $w = 1.2l - 60$ دەبەستێتەوە بۆ هەندێك جۆر لە فرۆکەکان.

GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/19/18 10:09 AM Page 2

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

1 هەر دەستەواژەیەکی ستونی لای ڕاست بە لێکدانەوەکەی لە ستونی لای چەپ ببەستەوە.

1. نەخشە
2. گۆڕاوی ئازاد
3. گۆڕاوی پەیوەست
4. بواری نەخشەی f
5. نەخشەی ڕێسا پەلدار

أ. کۆمەڵەی بەهایەکانی x کە ڕێگا بە هەژمارکردنی بەهای $f(x)$ دەدات.

ب. گۆڕاوێکە بەهایەکەی بەپێی بەهای گۆڕاوی ئازاد لە پەیوەندییە نەخشەییەکە دیاردەکرێت.

ج. نەخشەیەکە ڕێسایەکەی بەشێوەی جیاجیا لەماوەی جیاجیادا پێناسە دەکرێ.

د. پەیوەندییە لەنێوان دوو گۆڕاو کە بەهای هەر یەکێکیان بەتەنها یەك بەها بۆ ئەوی تریان دیاریدەکات.

هـ. کۆمەڵەی بەهایەکانی $f(x)$ کە لەتوانادایە.

و. گۆڕاوێکە بەهایەکانی گۆڕاوی پەیوەست لە پەیوەندیەکی نەخشەییدا دیاریدەکات.

بواری نەخشە

لە ڕاهێنانی 2 تا 7 ، بواری نەخشەکە بدۆزەوە.

2 $f(x)=|x-1|+2$

3 $f(x)=-2+\sqrt{1-x}$

4 $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

5 $f(x)=\sqrt[3]{2-x}$

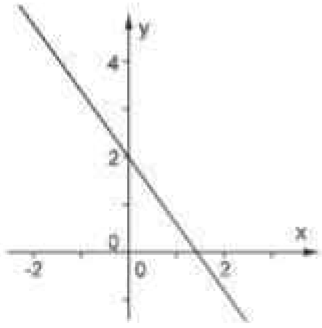
6 $f(x)=\tan\ (x-\pi)$

7 $f(x)=x^{2/5}$

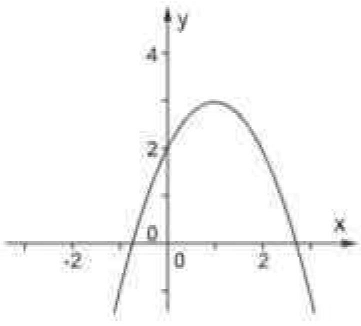
خوێندنەوەی ڕوونکردنەوەکان

لە ڕاهێنانی 8 و 9 ، ڕێسای نەخشە پەلداری ڕوونکردنەوەکە بنووسە.

8



9



1–1 وێنە ڕوونکردنەوەییەکان
Graphs

ڕێنیە دیکارت (1650–1596)
René Descartes

دیکارت بەشدارییەکی کاریگەری کردووە لە پێشخستنی فەلسەفە و زانست و بیرکاری وبیرۆکەی توانتنی خاڵ وەك جووتە ڕێکخراوێك لە ڕووتەخت و توانتنی چەماوەکان بە هاوکێشەی جەبری و بە پێچەوانەوە بۆ ئەو دەگەڕێتەوە. ئەو بیرۆکانەی لە کتێبەکەی خۆیLa Géométrie باسکردووە کە ساڵی 1637 بڵاوکراوەتەوە.

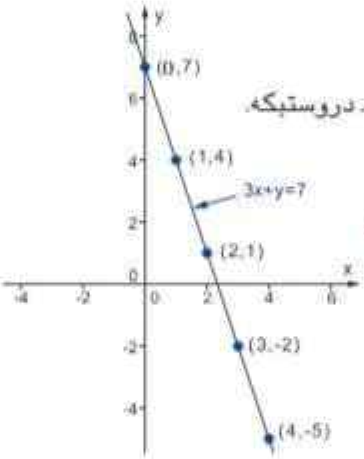
ڕوونکردنەوەی نەخشە

ساڵی 1637 زانای بیرکاری فەرەنسی ڕێنیە دیکارت شۆڕشێکی لە لێکۆڵینەوەی بیرکاری بەرپاکرد، کاتێك هەردوو لقە سەرەکییەکەی بیرکاری (جەبر و ئەندازە)ی بەیەکەوە بەستەوە. ئەمەش وایکرد بە بەکارهێنانی ڕووتەختە پۆوتانەکانی دیکارت بتوانین جەبریانە چەمکە ئەندازەییەکان دەربڕین و چەمکە جەبرییەکان ئەندازەییانە بنوێنین. ئەم لێکنزیکبوونەوە بەهێزە زۆر لە بابەتەکانی هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری لەماوەی سەدەیەك پێشخست.

ئامانجەکان

- ڕوونکردنەوەی پەیوەندی بە پێی هاوکێشەکەی دەکێشێت.
- یەکتربڕینەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشە لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکان دەدۆزێتەوە.
- هاوجێبوونی ڕوونکردنەوەی نەخشە بە دەوری تەوەری y یان خاڵی بنەڕەت لە ڕووتەختی پۆوتانەکان تاقیدەکاتەوە.
- خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەییەکانی دوو نەخشە دەدۆزێتەوە.

لەم کتێبەدا بەدوای ئەو لێکنزیکبوونەوە دادەچین کە هاوشێوەی لێکۆڵینەوەمانە لە جیاکاری و تەواوکاریدا. و بیرۆکەکانی ئەو لقەی بیرکاری بە ڕوونکردنەوەیی و بەجەبری و بە ژمارەیی دەخەینەڕوو، بۆئەوەی لە چەمکە بنچینەییەکانی بگەیت، هاوکێشەی$3x + y = 7$ بەکاربهێنە کە$(2, 1)$ **خاڵی شیکاری** ئەو هاوکێشەیە پێکدەهێنێت، چونکە بە لەجیاتیدانانی x بە 2 و y بە 1 هاوکێشەکە پاسادان دەکات. ئەم هاوکێشەیە چەندین شیکاری تری هەیە وەك $(1, 4)$ ،$(0, 7)$. بۆ ئەوەی هەموو شیکارەکانی بدۆزیتەوە هاوکێشەکە بەپێی y شیکاربکە:



لێکنزیکبوونەوەی جەبری $y = 7 - 3x$

پاشان **خشتەی بەهایەکان** بە لەجیاتی دانانی چەند بەهایەك بۆ x دروستبکە.

لێکنزیکبوونەوەی ژمارەیی

x	0	1	2	3	4
y	7	4	1	−2	−5

بەپێی خشتەکە دەتوانیت بڵێیت کە$(0, 7)$ $(1, 4)$ $(2, 1)$ $(3, -2)$ $(4, -5)$ شیکارن بۆ هاوکێشەی سەرەکی $3x + y = 7$.

بەڵام ئەم هاوکێشەیە وەك زۆربەی هاوکێشەکان ژمارەیەکی ناکۆتا شیکاری هەیە و هەر شیکارێك خاڵێك لە ڕووتەختی پۆوتان دیاریدەکات. کۆمەڵەی ئەو خاڵە شیکاریانە **ڕوونکردنەوەی هاوکێشەکە** پێکدەهێنێت.

لەم کتێبەدا زۆر ڕێگا بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان و هاوکێشەکان فێردەبیت، لەو ڕێگایانە و ئاسانترینیان دیاریکردنی چەند خاڵێکی شیکارەکە بەسە بۆ دیارکردنی شێوەی ڕوونکردنەوەکە، پاشان ئەو خاڵانە بە هێڵی گونجاو پێکبگەیێنە.

زاراوەکان
Vocabulary

- خاڵی شیکار Solution point
- خشتەی بەهایەکان Table of values
- یەکتربڕینی ئاسۆیی x-Intercept
- یەکتربڕینی ستونی y-Intercept
- لاری Slope
- هاوجێبوون Symmetry
- خاڵی یەکتربڕین Point of intersection
- نموونە هێڵییەکان Linear Models

لەبیرت بێت

بۆ وێنەکێشانی ڕاستەهێڵێك پێویست بە زانینی دوو خاڵە کە دەکات کە پێیاندا دەڕوات.

GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/19/18 10:09 AM Page 4

نموونـــــە 1

کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەخاڵەکان

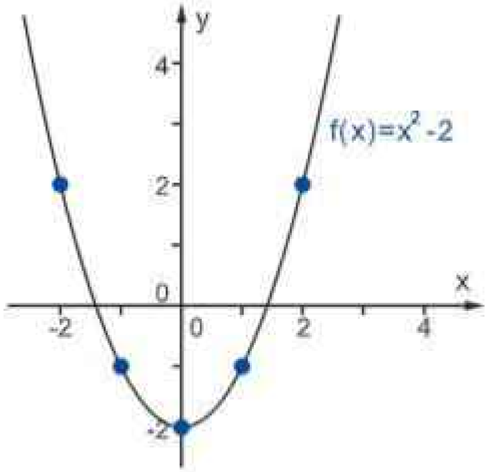
وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2-2$ بکێشە

شیکار

بە دروستکردنی خشتەی بەهاکان دەستپێبکە.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	2	-1	-2	-1	2	7

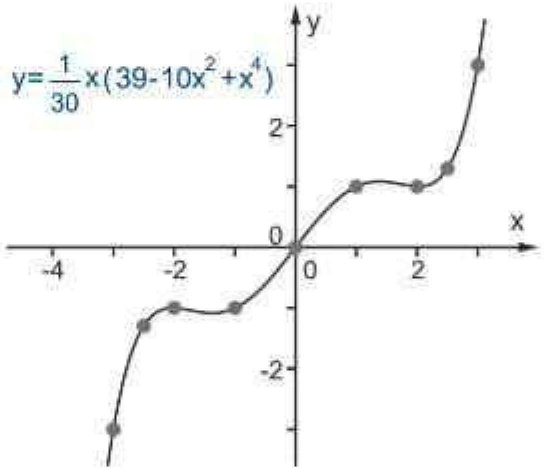
خاڵەکانی خشتەکە بنوێنە، لە پاشاندا بە هێڵێکی چەماوەیی گونجاو بە یەکیان بگەیەنە، وەک لە وێنەی خوارەوە دەردەکەوێت. ئەو ڕوونکردنەوەیە **بڕگەی هاوتایە**، کە بریتییە لە یەکێك لە بڕگە قوچەکییەکان کە لە بەشی شەشەم ئاشنای دەبیت.

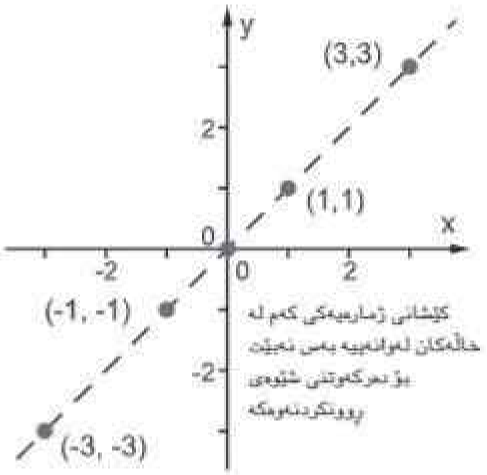


خاڵی چاوێری **1. وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=1-x^2$ بکێشە**

هەروەك بینیت کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەخاڵەکان کارێکی ئاسانە. بەڵام ئەویش لە کەموکوڕی بەدەرنییە. هەندێك جار بۆنەوەی بیرۆکەیەکی تەواوت لەسەر شێوەی ڕوونکردنەوەکە لا دروستبێت پێویستت بە دیاریکردنی خاڵی زۆر دەبێت، وەك چۆن لە نموونەی $f(x)=\frac{1}{30}x(39-10x^2+x^4)$ دەبینیت دیاریکردنی ژمارەیەکی کەم لە خاڵەکان دەرئەنجامێکی هەڵەت لە بارەی وێنەکە بۆ دروست دەبێت. ئەگەر خاڵەکانی $(-3,-3)$ و $(-1,-1)$ و $(0,0)$ و $(1,1)$ و $(3,3)$ دیاریبکەیت وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە وەك هێڵێکی ڕاست دەردەکەوێت هەروەك چۆن لە وێنە ڕوونکردنەوەیی لای ڕاستی لاپەڕەی دێت دیارە، بەڵام بەدیاریکردنی خاڵی زیاتر بۆت دەردەکەوێت وێنەی ڕوونکردنەوەکە لە ڕاستییدا ئاڵۆزترە لەوەی دەرکەوت هەروەك لە وێنەی ڕوونکردنەوەیی لای چەپی لاپەڕەی دێت دیارە.

GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/19/18 10:09 AM Page 7





یەکتربڕین لەگەڵ تەوەرەکان

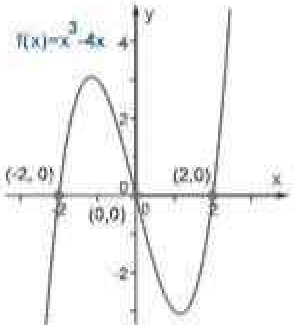
دەتوانی لە خاڵە شیکارییەکان هەندێکیان بە ئاسانی بدۆزییەوە ئەویش ئەو خاڵانەن کە یەکێك لە پۆتانەکانی دەکاتە 0 . بەو خاڵانە دەوترێت **خاڵەکانی یەکتربڕین** لەگەڵ تەوەری پۆتانەکان. بەو خاڵەی پۆتانی یەکەمی x بکاتە 0 ، واتە خاڵی $(0, b)$ دەبێتە خاڵی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەگەڵ تەوەری y . کە دەکاتە **یەکتربڕینی ستونی**. ئەو خاڵانەی پۆتانی دووەمی دەکاتە 0، واتا خاڵی $(a, 0)$ دەبێتە خاڵی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەگەڵ تەوەری x . کە دەکاتە **یەکتربڕینی ئاسۆیی**.

پۆتانی x کە یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f دەنوێنێت بریتییە لە ڕەگەکانی هاوکێشەی $f(x)=0$. لەوانەیە نەخشەکە خاڵەکانی یەکتربڕینی ئاسۆیی نەبێت یان یەك خاڵ یان زیاتری هەبێت. بەڵام یەکتربڕینەکانی ستونی بریتییە لە $f(0)$ ئەگەر 0 لە بواری نەخشەدا بێت. لەمەوە و لە سیفەتەکانی نەخشە دەردەچێت، بۆ نەخشەیەك بە لایەنی زۆرەوە یەك خاڵی یەکتربڕینی ستونی دەبێت.

نمونـــــە 2 دۆزینەوەی یەکتربڕینە ئاسۆییەکان و ستونییەکان

یەکتربڕینە ئاسۆییەکان و ستونییەکان بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^3-4x$ بدۆزەوە.

شیکار



بۆ دۆزینەوەی یەکتربڕینە ئاسۆییەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^3-4x$. ئەم هاوکێشەیە شیکار بکە.

$$f(x)=0$$

$$x^3-4x=0$$

$$x(x-2)(x+2)=0$$

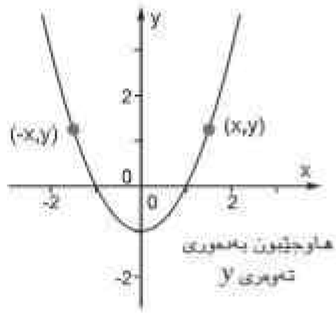
ڕەگەکانی هاوکێشەکە دەکاتە -2 و 0 و 2 ، واتە 3 یەکتربڕینی ئاسۆیی هەیە ئەوانیش $(-2, 0)$ ، $(0, 0)$، $(2, 0)$. لەبەرئەوەی 0 لەبواری نەخشەکە دایە، بۆیە ڕوونکردنەوەکە تەنها یەك یەکتربڕینی ستوونی هەیە ئەویش $(0, f(0))$ ، $(0, 0)$.

خاڵی جلوبڕی **2. یەکتربڕینە ئاسۆییەکان و ستونییەکان بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^4-1$ بدۆزەوە.**

GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/29/18 11:43 AM Page 6

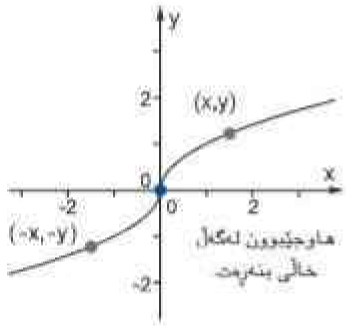
تەکنۆلۆژیا لە نموونەی 2 بۆ دۆزینەوەی یەکتربڕینەکان ڕێگای جەبریت بەکارهێنا. ئەگەر لەتواناتدا نەبوو بە بەکارهێنانی جەبر یەکتربڕینەکان بدۆزیتەوە، ئەوا ڕێگای ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە، بەدیاریکردنی خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەگەڵ دوو تەوەری پۆتانەکان.

هاوجێبوونی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان



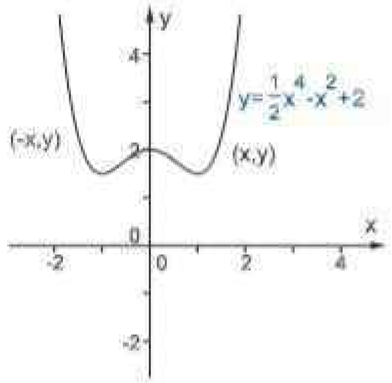
ئەگەر زانیت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەگەڵ ڕاستەهێڵێك یان خاڵێك هاوجێیە، ئەمە وادەکات کێشانی ڕوونکردنەوەکە ئاسانتربێت. ئەوەندە بەسە وێنەی نیوە ڕوونکردنەوەکە بکێشیت لە پاشاندا وێنەکە بە بەکارهێنانی هاوجێبوون تەواو بکەیت.

دەتوانی ئەم دوو جۆر هاوجێبوونەی خوارەوە بەکاربهێنی.



1. **هاوجێبوون لەگەڵ تەوەری y** : ڕوونکردنەوەی نەخشەی f هاوجێدەبێت لەگەڵ تەوەری y ، ئەگەر f ئەم مەرجە $f(-x)=f(x)$ جێبەجێبکات، بۆ هەموو بەهایەکی x کە لەبواری نەخشەکە دابێت، واتا کاتێك نەخشەکە جووت بێت.

2. **هاوجێبوون لەگەڵ خاڵی بنەڕەت**: ڕوونکردنەوەی نەخشەی f هاوجێدەبێت لەگەڵ خاڵی بنەڕەت، ئەگەر f ئەم مەرجە $f(-x)=-f(x)$ جێبەجێبکات، بۆ هەموو بەهایەکی x کە لەبواری نەخشەکە دابێت، واتا کاتێك نەخشەکە تاك بێت.

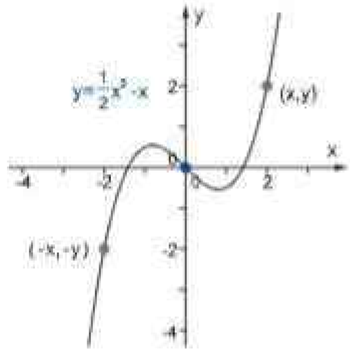


تاقیکردنەوەی هاوجێبوون

1. ڕوونکردنەوەی نەخشەکە هاوجێدەبێت لەگەڵ تەوەری y ئەگەر نەخشەکە جووتبێت.
2. ڕوونکردنەوەی نەخشەکە هاوجێدەبێت لەگەڵ خاڵی بنەڕەت ئەگەر نەخشەکە تاك بێت.

لەبیرت بێت

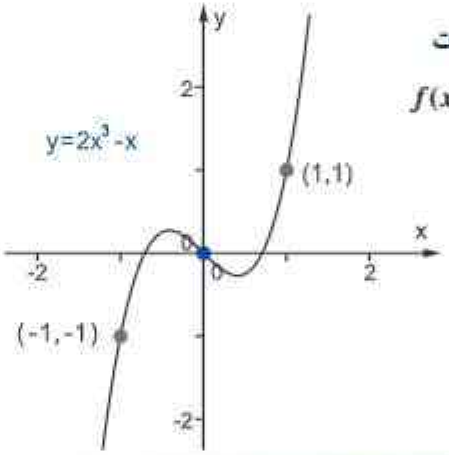
ڕادەی نەگۆڕ لە هاوکێشەی نەخشەی ڕاندار، بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ژمارەیەك لە $(x^0=1)$، 0 ژمارەیەکی جووتە.



ڕوونکردنەوەی نەخشەی ڕاندار هاوجێدەبێت لەگەڵ تەوەری y ، ئەگەر پلەکانی هەموو ڕادەکانی هاوکێشەکە جووت بێت جگەلە ڕادە نەگۆڕەکە. ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+2$ هاوجێدەبێت لەگەڵ تەوەری y . هەروەها ڕوونکردنەوەی نەخشەیەکی ڕاندار هاوجێدەبێت لەگەڵ خاڵی بنەڕەت ئەگەر ڕادە نەگۆڕەکەی هاوکێشەکە بکاتە 0 و پلەکانی هەموو ڕادەکان لەو هاوکێشەدا تاك بێت. بۆنموونە: ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{2}x^3-x$ هاوجێیە لەگەڵ خاڵی بنەڕەت.

نمونــــە 3

تاقیکردنەوەی هاوجێبوون لەگەڵ خاڵی بنەڕەت



ڕوونبیکەوە کە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=2x^3-x$ هاوجێبونە لەگەڵ خاڵی بنەڕەت.

شیکار

تەنها دیاریکردنی تاک بوونی نەخشەکە بەسە.

$$f(-x)=2(-x)^3-(-x)=-2x^3+x$$
$$=-(2x^3-x)=-f(x)$$

ئەمەش بۆهەموو بەهایەکی x .

خاڵی چاوێری

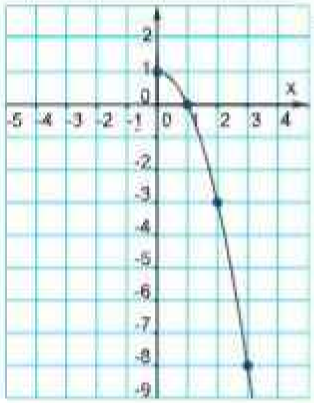
3. ڕوونبیکەوە، ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=2x^4-x^2+2$ هاوجێبونە لەگەڵ تەوەری y .

نمونــــە 4

بەکارهێنانی یەکتربڕینەکان و هاوجێبون بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان.

ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=-x^2+1$ بکێشە.

شیکار



ڕوونکردنەوەکە هاوجێیە لەگەڵ تەوەری y چونکە نەخشەکە جووتە.

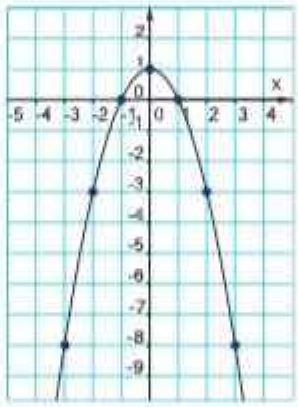
$$f(-x)=-(-x)^2+1=-x^2+1=f(x)$$

ئەوەندە بەسە نیوەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بۆ بەهایە موجەبەکانی بکێشی. لەپاشاندا نیوەکەی تر بە وێنەدانەوە لەگەڵ تەوەری y بکێشیت.

یەکتربڕینەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دیاریبکە.

یەکتر بڕینە ستونیەکان: دەکاتە خاڵی $(0, 1)$

یەکتربڕینە ئاسۆییەکان: پێویستە هاوکێشەی $f(x)=0$ و $-x^2+1=0$ شیکار بکەیت.



ئەم هاوکێشەیە دوو ڕەگی هەیە ئەوانیش $x=-1$ و $x=1$.

کەواتە نەخشەکە، دوو یەکتربڕینی ئاسۆیی هەیە ئەوانیش $(-1, 0)$ و $(1, 0)$.

خاڵەکانی تر لەسەر بەشی لای ڕاستی ڕوونکردنەوەکە دیاریبکە:

$(1, f(1))$ یان $(1, 0)$، $(2, f(2))$ یان $(2, -3)$ ،

$(3, f(3))$ یان $(3, -8)$.

نیوەی لای ڕاست بکێشە:

کێشانی ڕوونکردنەوەییەکە تەواوبکە بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری y .

خاڵی جاوێری

4. وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = x^2 - 1$ بکێشە.

دۆزینەوەی خاڵەکانی یەکتربڕینی دوو نەخشە

هەر خاڵێکی هاوبەش لە نێوان ڕوونکرنەوەی دوو نەخشە لە ڕووتەختی پۆوتان دەکاتە **خاڵی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی** ئەو دوو نەخشەیە. بۆ دۆزینەوەی خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەکانی دوو نەخشە f و g ، هاوکێشەی $f(x)=g(x)$ شیکاربکە. ڕەگەکانی ئەم هاوکێشەیە بریتییە لە پۆتانەکانی x بۆ خاڵەکانی یەکتربڕین.

نموونە 5

دۆزینەوەی خاڵەکانی یەکتربڕینی دوو نەخشە

خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2-3$ و $g(x)=x-1$ بدۆزەوە.

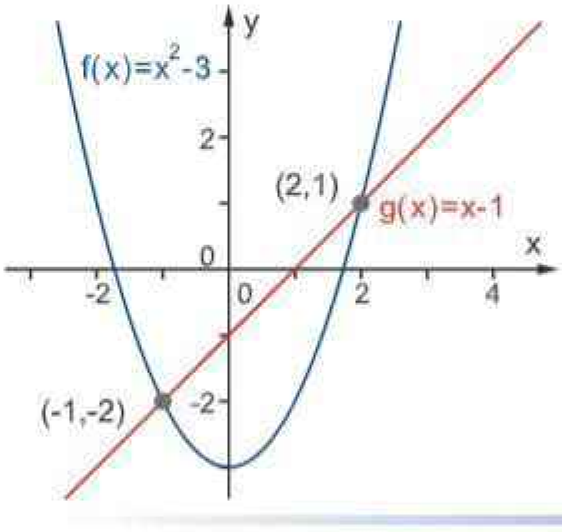
شیکار

دەستبکە بە شیکارکردنی $f(x)=g(x)$ یان $x^2-3=x-1$ کە دەبێتە $x^2-x-2=0$.

ئەم هاوکێشە دووجایە دوو ڕەگی هەیە ئەوانیش $x=-1$ و $x=2$. ڕوونکردنەوەکانی ئەم دوو نەخشەیە یەکتری دەبڕن لە دووخاڵی:

$(-1, f(-1))=(-1, g(-1))=(-1, -2)$

و $(2, f(2))=(2, g(2))=(2, 1)$



ئەوەی دەستتکەوت بەهۆی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکە و دیاریکردنی خاڵەکانی یەکتربڕینیان پاسادان بکە.

خاڵی جاوێری

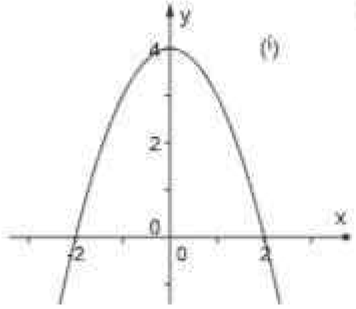
5. خاڵەکانی یەکتربڕینی هەردوو ڕوونکردنەوەی نەخشە $f(x)=x^3-x$ و $g(x)=\frac{1}{4}(x^2-1)$ بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/19/18 10:09 AM Page 11

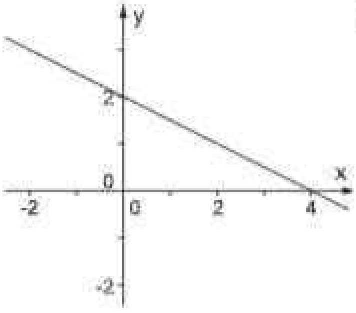
1-1 ڕاهێنان

لە پرسیاری 1 تا 4 ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دیاریکە.

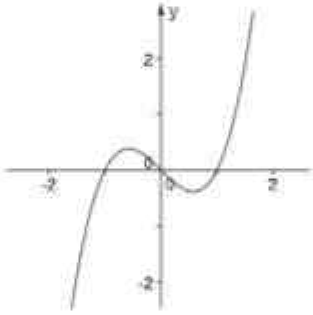
أ



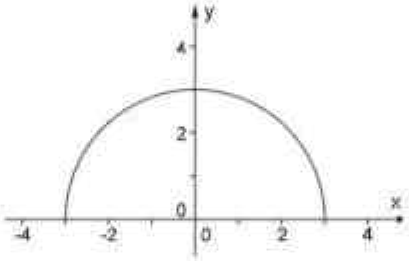
ب



ج



د



1 $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$ **2** $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

3 $f(x)=4-x^2$ **4** $f(x)=x^3-x$

لە پرسیاری 5 تا 10 ، وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بە خاڵەکان بکێشە.

5 $f(x)=6-2x$ **6** $f(x)=(x-3)^2$ **7** $f(x)=|x+2|$

8 $f(x)=\sqrt{x+2}$ **9** $f(x)=\frac{2}{x}$ **10** $f(x)=\frac{1}{x-1}$

لە پرسیاری 11 تا 14 یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەگەڵ دوو تەوەرەی پۆوتانەکان بدۆزەوە.

11 $f(x)=x^2+x-2$ **12** $f(x)=x^2\sqrt{25-x^2}$

13 $f(x)=(x-1)\sqrt{x^2+1}$ **14** $f(x)=\frac{x^2+3x}{(3x+1)^2}$

لە پرسیاری 15 تا 20 دیاریکە، ئایا ڕوونکردنەوەی نەخشەکە هاوجێبونە لەگەڵ تەوەرەی y یان لەگەڵ خاڵی بنەڕەت.

15 $f(x)=x^2-2$ **16** $f(x)=x^2-x$ **17** $f(x)=\frac{4}{x}$

18 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ **19** $f(x)=|x^3+x|$ **20** $f(x)=1-\sqrt{x+3}$

لە پرسیاری 21 تا 24 خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی هەر دوو نەخشەکە بدۆزەوە.

21 $f(x)=2-x$ و $g(x)=2x-1$

22 $f(x)=6-x^2$ و $g(x)=4-x$

23 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ و $g(x)=-x^2+3x-1$

24 $f(x)=-|2x-3|+6$ و $g(x)=6-x$

25 **خاڵی بەسوود** ئابووریناسان دەڵێن قازانجی دەزگایەك گەیشتۆتە **خاڵی بەسوود** كاتێك تێچوونی بەرهەمهێنان و دەستكەوتی فرۆشتن یەكسانبن. خاڵی بەسوود بۆ دەزگایەك بدۆزەوەكە نەخشەی تێچوونی بكاتە $C = 5\sqrt{x}$ و نەخشەی دەستكەوتی بكاتە $R = 3x$.

دەربارەی چەمكەكان

26 هاوكێشەی نەخشەیەك بنووسە، یەكتربڕینە ئاسۆییەكانی $x = -2$، $x = 4$، $x = 6$ بێت.

27 خاڵەكانی هەر خشتەیەك شیكاری هاوكێشەیەكن لەم چوار هاوكێشانە:

أ $y = kx + 5$　　ب $y = x^2 + k$　　ج $y = kx^{\frac{3}{2}}$　　د $xy = k$.

خشتەی هەر هاوكێشەیەك دیاربكە. و بەهای k دیاربكە. ڕێگای كاركردنت ڕوونبكەوە.

★

x	1	4	9
y	3	24	81

★★

x	1	4	9
y	7	13	23

★★★

x	1	4	9
y	36	9	4

★★★★

x	1	4	9
y	−9	6	71

ڕاستە یان هەڵەیە؟ لە پرسیاری 28 تا 31 . دیاریبكە ئەگەر ڕستەكە ڕاستە هۆیەكەی لێكبدەوە و ئەگەر هەڵەیە بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە

28 ئەگەر خاڵی $(1, -2)$ بكەوێتە سەر ڕوونكردنەوەیەك هاوجێبێت لەگەڵ خاڵی بنەڕەت ئەوا خاڵی $(-1, -2)$ دەكەوێتە سەر هەمان ڕوونكردنەوەكە.

29 ئەگەر خاڵی $(1, -2)$ بكەوێتە سەر ڕوونكردنەوەیەك هاوجێبێت لەگەڵ تەوەری y ئەوا خاڵی $(-1, -2)$ دەكەوێتە سەر هەمان ڕوونكردنەوەكە.

30 ئەگەر $b^2 - 4ac > 0$ و $a \neq 0$ ئەوا ڕوونكردنەوەی نەخشەی $f(x) = ax^2 + bx + c$ دوو یەكتربڕینی ئاسۆیی جیاوازی هەیە.

31 ئەگەر $b^2 - 4ac = 0$ و $a \neq 0$ ئەوا ڕوونكردنەوەی نەخشەی $f(x) = ax^2 + bx + c$ یەك یەكتربڕینی ئاسۆیی هەیە.

32 هاوكێشەی ئەو ڕوونكردنەوەیە بدۆزەوە كە پێكدێت لەهەموو ئەو خاڵانەی ڕووتەختی پۆوتانی (x, y) كە دوورییەكەی لە خاڵی بنەڕەت دەكاتە دوو ئەوەندەی دوورییەكەی لە خاڵی $(0, 3)$.

GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/19/18 10:09 AM Page 13

2–1 نمونە هێڵییەکان و تێکڕای گۆڕانەکان
Linear Models and Rates of change

ئامانجەکان

- بە زانینی دوو خاڵ لەسەر ڕاستەهێڵێك لارییەکەی دەدۆزێتەوە.
- هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك دەدۆزێتەوە بە زانینی لاری و خاڵێکی سەر ڕاستەهێڵەکە.
- لاری، وەك ڕێژە یان وەك تێکڕای گۆڕان، لە پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە لێکدەداتەوە.
- وێنەی ڕاستەهێڵێك دەکێشێت هاوکێشەکەی بە شێوەی لاری–یەکتربڕین نووسرابێت.
- هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك دەنووسێت تەریب بێت بە ڕاستەهێڵێکی دیاریکراو یان ئەستون بێت لەسەری.

زاراوەکان
Vocabulary

لاری Slope

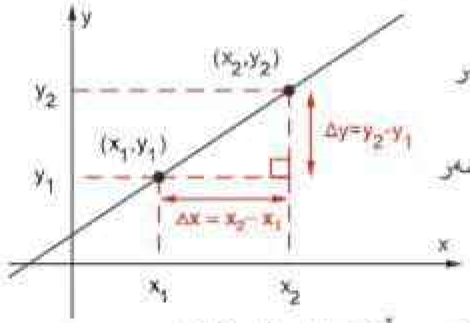
شێوەی لاری – خاڵ
Slope - point form

شێوەی لاری – یەکتربڕین
Slope - Intercept form

شێوەی گشتی General form

تێکڕای ناوەندی گۆڕان
Average rate of change

لاری ڕاستەهێڵ



کاتێك خاڵێك لەسەر ڕاستەهێڵێکی نائەستون دەجووڵێت، بە مەودای ئاسۆیی یەك یەکە لە چەپەوە بۆ ڕاست، خاڵەکە بەسەر دەکەوێت یان دێتە خوارەوە بەپێی باری ڕاستەهێڵەکە. لاری ڕاستەهێڵەکە بریتییە لە ژمارەی ئەو یەکانەی کە خاڵەکە بەسەر دەکەوێت « یان دادەبەزێت» لە ئەنجامی ئەم جووڵانەوەیەدا.

خاڵەکانی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) سەر ڕاستەهێڵەکە بەکاربهێنە.

هەرچەندە خاڵەکە لەسەر ڕاستەهێڵەکە لە چەپەوە بۆلای ڕاست بجووڵێت بەمەودای ئاسۆیی $\Delta x = x_2 - x_1$ یەکە، خاڵەکە بە مەودای ستونی $\Delta y = y_2 - y_1$ یەکە دەجووڵێت. (Δ بە دەلتا Delta بخوێنەوە، کە پیتێکی یۆنانیە. هەردوو نووسینی Δx و Δy لە دوو پیت پێکهاتوون بەڵام هەردووکیان یەك هێمان).

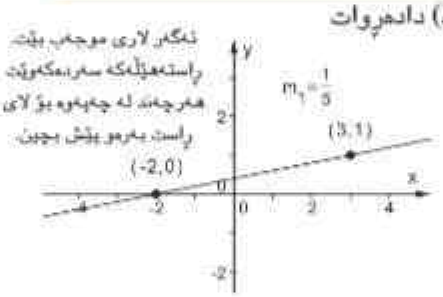
پێناسەی لاری ڕاستەهێڵ

لاری ڕاستەهێڵێکی نائەستوون کە بە دووخاڵی (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) دادەڕوات

بریتییە لە $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ کە $x_2 \neq x_1$

لاری ڕاستەهێڵی ئەستوون پێناسە نەکراوە.

سەرنجبدە ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) دادەڕوات

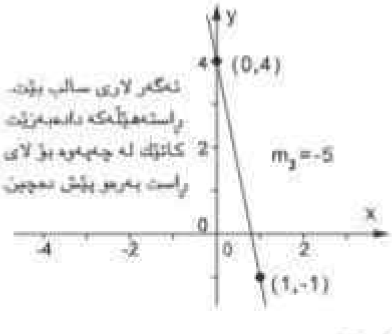


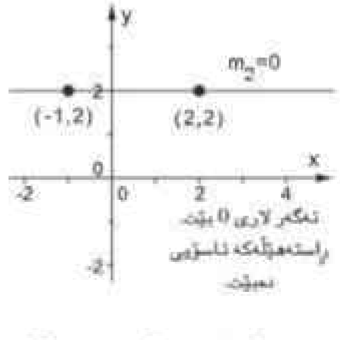
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

هەربۆیە هەڵبژاردنی خاڵی یەکەم و خاڵی دووەم کار لە ئەنجامەکەی ناکات.

لە شێوەکانی خوارەوە 4 ڕاستەهێڵ دەردەکەوێت. یەکەمیان لارییەکەی موجەبە، و دووەمیان لارییەکەی دەکاتە 0 و سێیەمیان لارییەکەی سالبە، و ئەوی تریان لارییەکەی پێناسە نەکراوە.

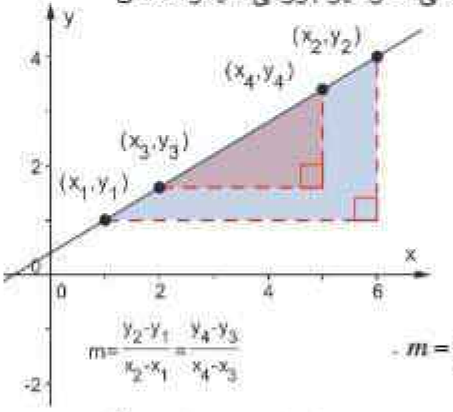
بە شێوەیەکی گشتی، هەرچەندە بەهای ڕووتی لارییەکە زیادبکات بەرزبوونەوەکەی زیاد دەکات. بەرزبوونەوەی ئەو ڕاستەهێڵەی کە لارییەکەی 5− بێت لە شێوەی خوارەوە گەورەترە لە بەرزبوونەوەی ئەو ڕاستەهێڵەی کە لارییەکەی $\frac{1}{5}$ بێت.





هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

دەتوانرێت هەردوو خاڵ لە خاڵەکانی ڕاستەهێڵێکی نائەستون بۆ دۆزینەوەی لاری ڕاستەهێڵەکە بەکاربهێنرێت. دەتوانیت پاسەدانی ئەم کارە بکەیت بە بەکارهێنانی هاوشێوەبوونی سێگۆشەکان هەروەک لە شێوەی بەرامبەر ڕوونکراوەتەوە.



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$$

دەتوانیت هاوکێشەی ڕاستەهێڵێک بنووسیت ئەگەر لاری و پۆتانی خاڵێکی سەر ڕاستەهێڵەکە بزانیت. وا دابنێ لاری ڕاستەهێڵەکە دەکاتە m ، و بە خاڵی (x_1 , y_1) دادەڕوات.
ئەگەر (x, y) خاڵێکی جوولاو بێت لەسەر ڕاستەهێڵەکە، ئەوا $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$.

دەتوانیت ئەو هاوکێشەیە بە شێوەی $y-y_1=m(x-x_1)$ بنووسیت، نووسینی هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکە بەم شێوەیە پێی دەوترێت **شێوەی لاری – خاڵ**.

هاوکێشە بەشێوەی لاری – خاڵ

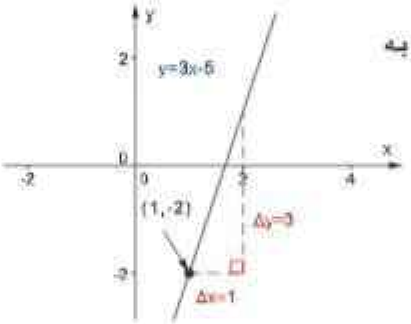
شێوەی هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی کە لارییەکەی m و بەخاڵی (x_1 , y_1) دادەڕوات بریتییەلە:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

نموونە 1

دۆزینەوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوەکە لارییەکەی 3 ـە و بە خاڵی $(1, -2)$ دادەڕوات.



شیکار

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-2)=3(x-1)$$
$$y+2=3(x-1)$$
$$y=3x-5$$

لەبیرت بێت تەنها ڕاستەهێڵە نائەستونەکان لارییان هەیە. لەمەشەوە، ناتوانرێت هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ئەستون بە شێوەی لاری – خاڵ بنووسرێت. هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ئەستون بە شێوەی $x=k$ دەنووسرێت کە k ژمارەیەکی ڕاستییە، بۆ نموونە هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە ئەستونەی کە بە خاڵی $(1, -2)$ دادەڕوات، بریتییە لە $x=1$.

خاڵی چاودێری

1. هاوکێشەی ڕاستەهێڵێک بدۆزەوە لارییەکەی 2– بێت و بەخاڵی $(1, 1)$ دادەڕوات.

ڕێژە و تێکڕای گۆڕانەکان

دەتوانرێت لاری ڕاستەهێڵ وەک ڕێژە یان تێکڕا لێکبدەرێتەوە. ئەگەر x و y بەهەمان یەکەی پێوانە پێورابن، هەر بۆیە لاری یەکەی پێوانەی نابێت. ئەوەشیان دەبێتە ڕێژە، بەڵام ئەگەر x و y بەدوو یەکەی پێوانەی جیاواز پێورا بن ئەوا لاری دەکاتە تێکڕای گۆڕان. لەم پۆلەدا بارەکانی لاری دەبێتە ڕێژە ، باری تر دەبێتە تێکڕای گۆڕان دەخوێنیت.

نموونــــه 2 لێکدانەوەکانی جیاواز بۆ لاری

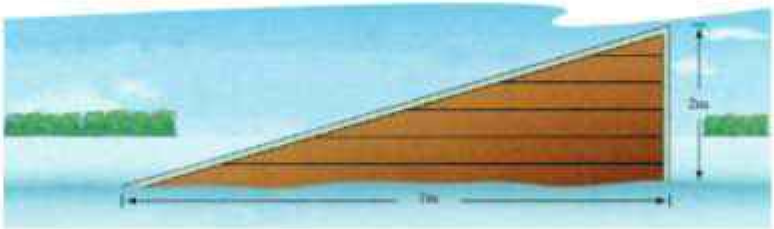
أ ساڵی 1990 ژمارەی دانیشتوانی شارێك 3687000 کەس بوو، و لە ساڵی 2000، 4042000 کەس بوو. تێکڕای ناوەندی گۆڕانی ژمارەی دانیشتوانی چەندبووە.

$$\text{تێکڕای گۆڕان} = \frac{\text{گۆڕان لە ژمارەی دانیشتوان}}{\text{گۆڕان لە ژمارەی ساڵ}}$$

$$= \frac{4042000-3687000}{2000-1990} = 35\ 500$$

کەواتە تێکڕای ناوەندی گۆڕانی ژمارەی دانیشتوانی لە ساڵێکدا 500 35 کەسە. ئەگەر ژمارەی دانیشتوانی ئەو شارە بە هەمان ڕێژە زیاد بکات. ژمارەی دانیشتوانی لە ساڵی 2010 دەبێتە 000 397 4 کەس. سەرنج بدە لاری لێرەدا تێکڕای گۆڕانە.

ب لە گۆڕەپانی هەڵخلیسکانی سەر ئاو، یانەیەك سەکۆی بۆ خۆهەڵدانی یاریزانەکان دانا، کە بەرزییەکەی دوو مەتر و درێژییەکەی 7 مەتر بوو هەروەك لە وێنەی خوارەوە دەردەکەوێت، لاری سەکۆیەکە بدۆزەوە.



لاری سەکۆیەکە بریتییە لە ڕێژەی بەرزییەکەی بۆ درێژییەکەی $m = \frac{2m}{7m} = \frac{2}{7}$.

تێبینی بکە لاری لێرەدا بریتییە لە ڕێژە، یەکەی پێوانەیی نییە.

ئەو تێکڕا گۆڕانەی کە لەبەشی (أ)ی نموونە 2 دۆزیتەوە بریتییە لە تێکڕای ناوەندی گۆڕان. تێکڕای ناوەندی گۆڕان هەردەم بە مەودای ماوەکە هەژماردەکرێت. لە نموونەی 2 ئەو ماوەیە دەکاتە $[1990, 2000]$، لەبەشی سێیەم جۆرێکی تر لە تێکڕای گۆڕانەکان فێردەبیت ئەویش تێکڕای ساتی گۆڕانەکانە.

خاڵی جاوێری

2. پیاوێك سەیری فڕۆکەیەك لە ئاسماندا دەکات، کە $600\ m$ ئاسۆیی لێیەوە دوورە، بە بەرزە گۆشەی $60°$. لاری ڕاستەهێڵی نێوان چاوی پیاوەکە و فڕۆکەکە چەندە؟ ئایا ئەو لارییە ڕێژەیە یان تێکڕای گۆڕانە؟ بەرزی فڕۆکەکە چەندە؟

نواندنی نموونە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی

دەکرێت زۆربەی پرسیارەکانی ئەندازەی شیکردنەوە بۆ دوو جۆر پۆلێن بکرێت: یەکەمیان بۆ دۆزینەوەی هاوکێشەی هێڵی (چەماوە بێت یان نا) ڕوونکردنەوەی دراوەکە. و دووەمیان بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەی هاوکێشە دراوەکە. دەتوانیت شێوەی لاری – خاڵ بۆ هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکە بەکاربهێنیت بۆ شیکاری پرسیارەکانی جۆری یەکەم. بەڵام ئەم شێوەیە بۆ جۆری دووەم ناگونجێت. شێوەیەکی تری هاوکێشەی ڕاستەهێڵ هەیە لەگەڵ شیکاری پرسیارەکانی جۆری دووەم دەگونجێت، کە شێوەی لاری – یەکتربڕینە.

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری – یەکتربڕین

ڕوونکردنەوەی ئەخشەی هێڵی

$$y = mx + b$$

ڕاستەهێڵێکە لارییەکەی m و یەکتربڕینە ستوونییەکەی بریتییە لە $(0, b)$

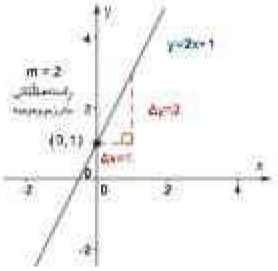
GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/29/18 11:46 AM Page 14

نموونــــە 3 کێشانی ڕاستەهێڵەکان

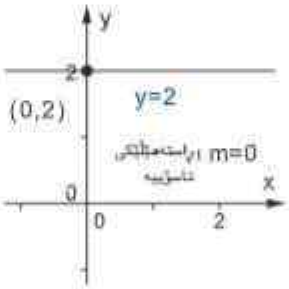
وێنەی ڕوونکردنەوەی هەر هاوکێشەیەك بکێشە

أ $y=2x+1$ ب $y=2$ ج $3y+x-6=0$

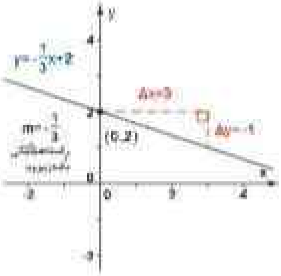
شیکار



أ یەکتربڕینی ستونی دەکاتە $(0, 1)$ چونکە $b=1$. لاری ڕاستەهێڵەکە دەکاتە 2 . ئەوەش مانای ئەوەیە ئەگەر یەك یەکە ئاسۆیی بەرەو پێش بچیت لە چەپەوە بۆ ڕاست بە دەستپێکردن لە خاڵی $(0, 1)$ پێویستە دوو یەکە بەرزببیتەوە، ئەمەش مانای وایە خاڵی $(1, 3)$ دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵەکە. هەردوو خاڵی $(0, 1)$ و $(1, 3)$ دیاریبکە و ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە کە بەو دوو خاڵەدا دەڕوات.



ب یەکتربڕینی ستونی دەکاتە $(0, 2)$ چونکە $b=2$. لاری ڕاستەهێڵەکە بریتییە لە 0. ئەوەش ئەوە دەگەیەنێت کە ڕاستەهێڵەکە ئاسۆییە. تەنها ڕاستەهێڵەکی تەریب بە تەوەری x بکێشە کە بە خاڵی $(0, 2)$ دادەڕوات.



ج هاوکێشەکە بە شێوەی لاری – یەکتربڕین بنووسە.

$$3y+x-6=0$$
$$3y=-x+6$$
$$y=-\frac{1}{3}x+2$$

یەکتربڕینی ستونی بریتییە لە $(0, 2)$ چونکە $b=2$، لاری ڕاستەهێڵەکە بریتییە لە $-\frac{1}{3}$. ئەوەش ئەوە دەگەیەنێت ئەگەر 3 یەکە لە خاڵی $(0, 2)$ لە چەپەوە بۆلای ڕاست بەرەو پێش بچیت، پێویستە یەك یەکە دابەزێت: ئەمەش مانای وایە خاڵی $(3, 1)$ دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵەکە. هەردوو خاڵی $(0, 2)$ و $(3, 1)$ دیاریبکە و ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە کە بەو دوو خاڵەدا دەڕوات.

خاڵی جاودێری

3. وێنەی ڕوونکردنەوەی هەر هاوکێشەیەك بکێشە

أ $y=3x-1$ ب $y=-2$ ج $y+3x-2=0$

لەبەرئەوەی لاری ڕاستەهێڵی ئەستون پێناسە نەکراوە، بۆیە ناتوانرێت هاوکێشەکەی بە شێوەی لاری – خاڵ، و شێوەی لاری – یەکتربڕین بنووسرێت. شێوەی گشتی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ کە بۆ هەموو بارەکان دەگونجێت. بەم شێوەیە:

$$Ax+By+C=0$$

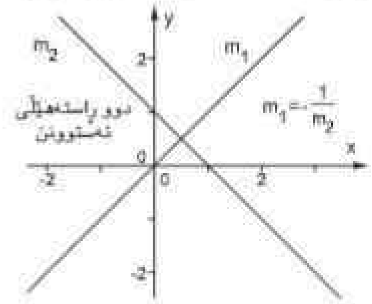
نابێت هەردوو ژمارەی A و B لەهەمان کاتدا بکاتە 0 واتا کە $|A|+|B|\neq 0$. کاتێك $x=k$ هاوکێشەی ڕاستەهێڵێکی ستونییە، دەتوانیت بەشێوەی گشتی $(1)x+(0)y+(-k)=0$ بینووسیت.

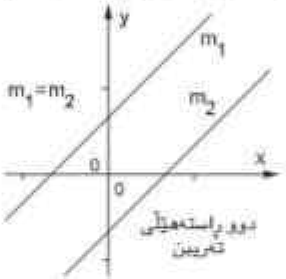
شێوە جیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

1. شێوەی گشتی $Ax+By+C=0$ کاتێک $|A|+|B|\neq 0$.
2. شێوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ستونی $x=k$
3. شێوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ئاسۆیی $y=k$
4. شێوەی لاری – خاڵ $y-y_1=m(x-x_1)$
5. شێوەی لاری – یەکتربڕین $y=mx+b$

تەریببوون و ئەستونبونی ڕاستەهێڵەکان

لاری ڕاستەهێڵ ڕۆڵێکی گرنگی هەیە لە دیاریکردنی تەریببوون یان ئەستونبوونی ڕاستەهێڵەکان بێئەوەی پێویست بە کێشانی وێنەکانیان بێت. ئەگەر لاری دوو ڕاستەهێڵی نائەستون یەکسان بن ئەوا تەریب دەبن و ئەگەر ئەنجامی لێکدانی لارییەکانیان بکاتە -1 ، ئەوا ئەستون دەبن لەسەر یەکتر.





لەبیرت بێت

لەبیرت بێت

ڕاستەهێڵی ئەستونی ئەو ڕاستەهێڵەیە کە تەریب بەتەوەری y دەبێت ڕاستەهێڵی ئاسۆیی ئەوەیە کە بە تەوەری x تەریب دەبێت.

تەریببوون و ئەستونبوونی ڕاستەهێڵەکان

1. دوو ڕاستەهێڵ تەریب دەبن، ئەگەر تەنها ئەگەر لارییەکانیان یەکسان بن.
2. دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون دەبن لەسەریەکتر، ئەگەر و تەنها ئەگەر ئەنجامی لێکدانی لارییەکانیان بکاتە -1

نموونە 4 دۆزینەوەی ڕاستەهێڵە تەریبەکان و ئەستونەکان

أ بەشێوەی گشتی، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە، کە بە خاڵی $(2, -1)$ دادەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵی $2x-3y=5$ بنووسە.

ب بە شێوەی گشتی، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بەخاڵی $(2, -1)$ دادەڕوات و ئەستونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $2x-3y=5$ بنووسە.

شیکار

لاری ڕاستەهێڵی $2x-3y=5$ بدۆزەوە ،هاوکێشەکە بە شێوەی لاری – یەکتربڕین بنووسە

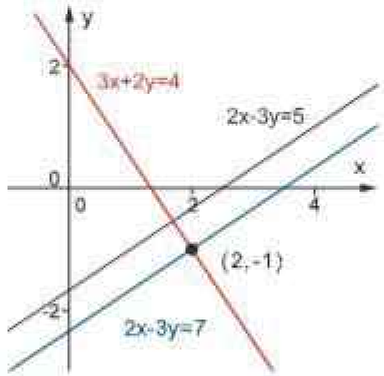
$$y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$$

لاری ڕاستەهێڵەکە بریتییە لە $\frac{2}{3}$.

GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/19/18 10:09 AM Page 16

أ لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵی $(2, -1)$ دادەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵی $2x-3y=5$ بریتییە لە $\frac{2}{3}$.
هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە کە لارییەکەی $\frac{2}{3}$ و بەخاڵی $(2, -1)$ دادەڕوات.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-1)=\frac{2}{3}\left(x-(2)\right)$$
$$3(y+1)=2(x-2)$$
$$2x-3y-7=0$$



ب لاری ئەو ڕاستەهێڵەی کە بە خاڵی $(2, -1)$ دادەڕوات و ئەستونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $2x-3y=5$ بریتییە لە $m=-\frac{3}{2}$
هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە کە لارییەکەی $-\frac{3}{2}$ و بەخاڵی $(2, -1)$ دادەڕوات.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-1)=-\frac{3}{2}\left(x-(2)\right)$$
$$2(y+1)=-3(x-2)$$
$$3x+2y-4=0$$

خاڵی چاوەدێری

4. أ به شێوەی گشتی، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە خاڵی $(1, -3)$ دادەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵی $x+5y=-1$ بدۆزەوە.

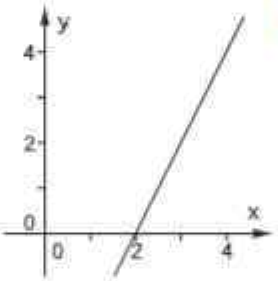
ب به شێوەی گشتی، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە خاڵی $(1, -3)$ دادەڕوات و ئەستونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $x+5y=-1$ بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/19/18 10:09 AM Page 19

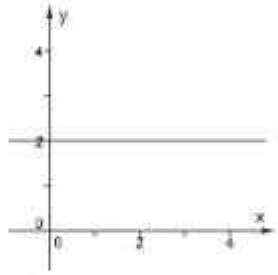
2-1 ڕاهێنان

لە پرسیاری **1** تا **4** . لاری ڕاستەهێڵەکە بخەمڵێنە.

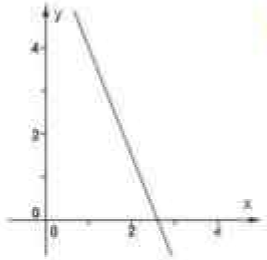
1



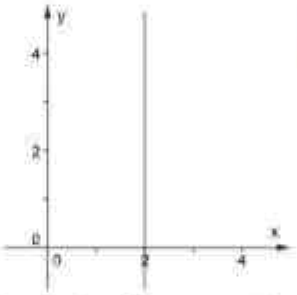
2



3



4



لە پرسیاری **5** تا **10**. وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە کە لارییەکەی دراوە و بە خاڵە دراوەکە دا دەڕوات بکێشە.

5 $(2, 3): 1$

6 $(-4, 1): -3$

7 $(2, 3): -2$

8 $(-4, 1): 0$

9 $(2, 3): -\frac{3}{2}$

10 $(-4, 1)$: پێناسەنەکراوە

لە پرسیاری **11** تا **14** . لاری ڕاستەهێڵەکە بدۆزەوە کە بە دوو خاڵە دیاریکراوەکەدا دەڕوات.

11 $(3, -4)$ و $(5, 2)$

12 $(3, -2)$ و $(4, -2)$

13 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ و $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{6}\right)$

14 $(2, 1)$ و $(2, 5)$

لە پرسیاری **15** تا **18** . سێ خاڵی تر لەسەر ئەو ڕاستەهێڵە دیاریبکە کە لارییەکەی و خاڵێکی سەر ڕاستەهێڵەکە دراوە.

15 $(2, 1) : m=0$

16 $(1, 7) : m=-3$

17 $(-3, 4)$: m پێناسەنەکراوە

18 $(-2, -2) : m=2$

لە پرسیاری **19** تا **22** . لاری ڕاستەهێڵەکە و خاڵی یەکتربڕینە ستونییەکەی بدۆزەوە.

19 $x+5y=20$

20 $6x-5y=15$

21 $x=4$

22 $y=-1$

لە پرسیاری **23** تا **28** هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە لارییەکەی و خاڵێکی سەر ڕاستەهێڵەکە دراوە بدۆزەوە. لە پاشاندا وێنەی ڕوونکرنەوەکەی بکێشە.

23 $(0, 3) : m=\frac{3}{4}$

24 $(3, -2) : m=3$

25 $(0, 4) : m=0$

26 $(-2, 4) : m=-\frac{3}{5}$

27 $(0, 0) : m=\frac{2}{3}$

28 $(-1, 2)$: پێناسەنەکراوە

لە پرسیاری 29 تا 34 ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە هەردوو خاڵەکە دیارکراون بنووسە

29 $(0, 3)$ و $(2, 1)$

30 $(1, 4)$ و $(-3, -4)$

31 $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

32 $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ و $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right)$

33 $(5, 8)$ و $(5, 1)$

34 $(3, -2)$ و $(1, -2)$

35 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە ستوونییە کە یەکتربڕینی ئاسۆیی لە 3 دا هەیە بدۆزەوە.

36 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە ئاسۆییە کە یەکتربڕینی ستونی لە 3 دا هەیە بدۆزەوە.

37 ڕوونیبکەوە کە هاوکێشەی $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ، کاتێك $a\neq 0$ و $b\neq 0$ دەکاتە هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی کە دوو خاڵی یەکتربڕینی $(a, 0)$ و $(0, b)$ هەیە.

لە پرسیاری 38 و 39 دا، ئەنجامی ڕاهێنانی پێشوو بەکاربهێنە تا هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزیتەوە کە دوو یەکتربڕینە دیاریکراوەکەی هەیە.

38 $(0, 3)$ و $(2, 0)$

39 $(0, -2)$ و $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

لە پرسیاری 40 تا 43 ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵە دراوەکە دا دەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵە دراوەکە بنووسە.

40 $4x-2y=3$ ؛ $(2, 1)$

41 $5x-3y=0$ ؛ $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$

42 $3x+4y=7$ ؛ $(-6, 4)$

43 $y=-3$ ؛ $(-1, 0)$

لە پرسیاری 44 تا 47 ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵە دراوەکە دا دەڕوات و ئەستونە لەگەڵ ڕاستەهێڵە دراوەکە بنووسە.

44 $4x-2y=3$ ؛ $(2, 1)$

45 $5x-3y=0$ ؛ $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$

46 $3x+4y=7$ ؛ $(-6, 4)$

47 $y=-3$ ؛ $(-1, 0)$

48 ئایا خاڵەکانی $(1, -2)$ و $(0, -1)$ و $(2, -2)$ دەکەونە سەر یەك ڕاستەهێڵ؟

دەربارەی چەمکەکان

لە ڕاهێنانی 49 تا 51 ، پۆوتانی خاڵە یەکتربڕینە دیاریکراوەکە بدۆزەوە. ڕوونیبکەوە چۆن شیکارەکەت ئەنجامدا.

49 خاڵی یەکتربڕینی تەوەرەکانی لایەکانی سێگۆشەکە.

50 خاڵی یەکتربڕینی ناوەندەکانی سێگۆشەکە.

51 خاڵی یەکتربڕینی بەرزییەکانی سێگۆشەکە.

52 **گۆڕینی پلەکانی گەرما** ئاو لە پلەی گەرمی 100° دەکوڵێت بە پێوەری سەدی (212° بە پێوەری فەرنهایت)، و لە پلەی گەرمی 0° دەبەستێت (32° بە پێوەری فەرنهایت). هاوکێشەیەکی هێڵی بۆ گۆڕینی پێوەری سەدی بۆ پێوەری فەرنهایت بنووسە، و هاوکێشەیەکی تر بۆ گۆڕین بە پێچەوانەی ئەو ئاڕاستەیە. 72° بە پێوەری فەرنهایت بۆ پلەی گەرمی بەپێوەری سەدی بگۆڕە.

53 کۆمپانیایەک ڕۆژانە 15 000 دینار دەداتە شوفێری بارهەڵگرێک لە بری خواردن و پشوودان، و 350 دینار لە بری هەر کیلۆمەترێک کە دەیبڕێت. نەخشەیەک بنووسە نموونەیەک پێک بهێنێت بۆ هەژمارکردنی بڕی ئەو پارەیەی کۆمپانیاکە بە شوفێرەکەی دەدات بەپێی ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی کە دەیبڕێت. شوفێرەکە $137km$ بڕی کۆمپانیاکە چەند پارەی پێ دەدات؟

54 **بەکاربردنی هێڵی** کاتێک ئۆتۆمبیلێک دەکڕیت نرخەکەی ساڵ دوای ساڵ دادەبەزێت. واتە ئۆتۆمبیلەکە ساڵ لە دوای ساڵ بەکاردەبرێت. هەندێک لە شارەزایانی بەڕێوەبردن پشت بە ڕێسایەک دەبەستن بۆ هەژمارکردنی بەکاربراوەکان. بەپێی ئەم ڕێسایە وا دەردەکەوێت کە نرخی بەکاربراو لە ساڵێکەوە بۆ ساڵێکی تر ناگۆڕێ. یەک لە کۆمپانیایەکان ئامێرێکی کڕی. نرخەکەی 875 000 دیناربوو. ئەم ئامێرە پاش 5 ساڵ بۆ بەکارهێنان ناشێت و هیچ نرخێک ناکات.

أ نەخشەیەکی هێڵی بنووسە نموونەیەک پێکبهێنێت بۆ هەژمارکردنی نرخی ئامێرەکە بە پێی کات t $(0 \le t \le 5)$.

ب نرخی ئەم ئامێرە چەندە کاتێک $t = 2$.

ج پاش چەند کات نرخی ئامێرەکە دەبێتە 175 000 دینار؟

دووری خاڵی (x_1, y_1) لە ڕاستەهێڵی $Ax + By + C = 0$ بەپیاسای $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ دەپێورێت. لە پرسیاری 55 تا 58 ، دووری خاڵەکە لە ڕاستەهێڵەکە بدۆزەوە.

55 $4x + 3y = 10 : (0, 0)$

56 $x - y - 2 = 0 : (-2, 1)$

57 $x = -1 : (6, 2)$

58 $4x + 3y = 10 : (2, 3)$

59 بەپێی m ، دووری d لە نێوان خاڵی $(3, 1)$ و ڕاستەهێڵی $y = mx + 4$ بدۆزەوە. کەی ئەم دوورییە دەکاتە 0 ؟ وەڵامەکە بە ئەندازەیی ڕوونبکەوە؟

60 بیسەلمێنە کە شێوەی ئەندازەیی لەئەنجامی بەیەک گەیاندنی ناوەڕاستی یەک لەدوای یەکی لایەکانی چوارلایەک پەیدادەبێت بریتییە لە لاتەریب.

61 بیسەلمێنە تیرەکانی مەعین لەسەر یەکتر ئەستونن.

ڕاستە یان هەڵە لە پرسیاری 62 و 63 دا. دیاریبکە. ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە و ئەگەر هەڵەیە بە دژە نموونەیەک بیسەلمێنە

62 دوو ڕاستەهێڵی $ax + by = c_1$ و $bx - ay = c_2$ ، لەگەڵ یەک ئەستوونن، کاتێک $a \ne 0$ و $b \ne 0$.

63 دەکرێت دوو ڕاستەهێڵ لارییەکانیان موجەب بێت ئەستون بن.

بەشی 1

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1-1 ڕوونکردنەوەی نەخشەکان

1 بە خاڵەکان ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەک بکێشە.

ا $f(x)=2x^2-4x$

ب $f(x)=2\sqrt{x+1}-1$

2 خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی هەرنەخشەیەک لەگەڵ دوو تەوەری پۆتانەکان بدۆزەوە. لە پاشاندا لە هاوجێبوونی لەگەڵ تەوەری y و لەگەڵ خاڵی بنەڕەت بکۆڵەوە.

ا $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$

ب $f(x)=(3x-1)^2+6x$

3 $f(x)=x^3+3x$ و $g(x)=x^2+3$.

ا دیاریبکە نەخشەی f تاکە و نەخشەی g جووتە.

ب خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکە بدۆزەوە.

2-1 هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

4 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە لارییەکەی دەکاتە -2 و بە خاڵی $(2,-1)$ دا دەڕوات بدۆزەوە.

5 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە دوو خاڵی $(0,1)$ و $\left(\frac{1}{5},0\right)$ دا دەڕوات بدۆزەوە.

6 خاڵی یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵی پرسیارەکانی 4 و 5 بدۆزەوە.

7 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە دوو خاڵی $(2,0)$ و $(0,b)$ دا دەڕوات بدۆزەوە. بەهای b چەندە کە وا دەکات ڕاستەهێڵەکە ئەستونبێت لەگەڵ ڕاستەهێڵی $x-2y+1=0$.

8 بەهای a چەندە کە وادەکات خاڵەکانی $(2,0)$ و $(0,-3)$ و $(a,1)$ بکەونە سەریەک ڕاستەهێڵ؟

3-1 نەخشەکان و ڕوونکردنەوەکانیان
Functions and Their Graphs

ئامانجەکان

- نووسینی نەخشەیی بۆ ناوناندنی نەخشە و هەژمارکردنی بەهایەکانی بەکاردەهێنێت.
- بوارو مەودای نەخشە دیاریدەکات.
- ڕوونکردنەوەی نەخشە دەکێشێت.
- جۆرە جیاوازەکانی جێگۆڕکێی نەخشەکان جیادەکاتەوە.
- نەخشەکان پۆلێندەکات و پێکهاتەکەی جیادەکاتەوە.

زاراوەکان Vocabulary

Relation	پەیوەندی
Associate	دەبەستێتەوە
Real function in one real variable	نەخشەی ڕاستی بەیەك گۆڕاوی ڕاستی
Domain	بوار
Range	مەودا
Function notation	نووسینی نەخشەیی
One-to-One function	نەخشەی جیا
Onto function	نەخشەی گشتگر
Polynomial function	نەخشەی ڕاندەری
Degree	پلە
Coefficient	هاوکۆلکە
Leading Coefficient	هاوکۆلکەی سەرەکی
Constant term	ڕادەی نەگۆڕ

نەخشەکان و نووسینی نەخشەیی

دەتوانیت **پەیوەندی** لە کۆمەڵەی A بۆ کۆمەڵەی B بە جووتە ڕێکخراوەکانی(x, y) دەربڕین کاتێك $x \in A$ و $y \in B$ دەتوانین بڵێین پەیوەندییەکە y بە x **دەبەستێتەوە**. ($\in$ دەخوێندرێتەوە دانەیە لە). نەخشە بریتییە لە پەیوەندییەك لە کۆمەڵەی A بۆ کۆمەڵەی B ، سیفەتی بنەڕەتی تایبەتی هەیە کە دوو دانەی y ، z لە B دا یەکسان دەبن ئەگەر بەهۆی نەخشەکە بەهەمان دانەی x لە A بەسترابنەوە. بە واتایەکی تر ئەگەر (x, y) و (x, z) جووتە ڕێکخراوێك بێت لە کۆمەڵەی ئەو جووتە ڕێکخراوانەی نەخشەکە پێکدەهێنن، ئەوا دەبێت $y = z$. لەم پەیوەندییە بە x دەوترێت **گۆڕاوی ئازاد** و بە y دەوترێت **گۆڕاوی پەیوەست**.

دەتوانین زۆر لە بارەکانی ژیانی ڕۆژانە بە نەخشەکان بنوێنین. ڕووبەری بازنەی A نەخشەیە بەپێی نیوەتیرە r لە پەیوەندی $A = \pi r^2$. لەم پەیوەندییەدا r گۆڕاوی ئازادە و A گۆڕاوی پەیوەستە

پێناسەی نەخشەی ڕاستی بە گۆڕاوی ڕاستی

ئەگەر A و B دوو کۆمەڵە بن لە ژمارە ڕاستییەکان، ئەوا هەر نەخشەیەکی f لە A بۆ B بریتییە لە **نەخشەیەکی ڕاستی بە گۆڕاوێکی ڕاستی**.
بواری f دەکاتە کۆمەڵەی A . ئەگەر نەخشەی f دانەی y لە B بە دانەی x لە A ببەستێتەوە، ئەوا دەکاتە بەهای f لە x ، لەوکاتەدا دەنووسرێت $y = f(x)$ و دەڵێین y بریتییە لە وێنەی x بە نەخشەی y، مەودای نەخشەی f بریتییە لە کۆمەڵەی دانەکانی B کە نەخشەکە بە هەموو دانەکانی بوار A دەیبەستێتەوە.

لە پۆلی یازدەیەم فێربوویت کە دەتوانرێت پێناسەی نەخشە بەڕێگای جیاواز بکرێت. بەڵام لە پۆلی دوازدەمدا گرنگی دەدەین بە شێوەی بنەڕەتی نەخشەکان کە بەهۆی هاوکێشەی جەبری پێناسەکراون. بۆ نموونە هاوکێشەی $x^2 + 2y = 1$ دەتوانرێت گۆڕاوی پەیوەستی y وەك نەخشەیەك بەپێی گۆڕاوی ئازادی x پێناسە بکرێت. بۆ ئەمەش، هاوکێشەکەی پێشوو بەپێی y شیکار دەکەین و بەهایەکەی وەك بڕێك دەنووسین جگە لە x هیچ گۆڕاوی تری تێدانەبێت.

$$y = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)$$

لەبەرئەوەی $y = f(x)$ ئەوا دەتوانین بنووسین.

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)$$

بە نووسینی نەخشەکە بە شێوەکەی پێشوو دەوترێت **نووسینی نەخشەیی** نەخشەکە. نووسینی نەخشەیی سوودی زۆری هەیە، ئەویش بەشێوەیەکی ڕوون گۆڕاوی ئازاد x و گۆڕاوی پەیوەست $f(x)$ دیاریدەکات و لەگەڵ ناوی نەخشەی f. هەروەها هەژمارکردنی بەهای نەخشەکە ئاسانتر دەکات کاتێك گۆڕاوی سەربەست بەهایەکی دیاریکراو وەردەگرێت. بۆ نموونە، بۆ هەژمارکردنی بەهای نەخشەی $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ کاتێك $x = -2$ بە لەجیاتیدانانی بەهایەکەی x ، و هەژماری بەهای ژمارەیی بڕەکە بکە کە لە ئەنجامی لەجیاتیدانانەکەدا دەردەچێت.

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 = 2(4) + 8 + 1 = 17$$

لەبیرت بێت کاتێك لەجیاتی x بەهایەکی دیاریکراوی a لە نەخشەی $f(x)$ دادەنێیت ئەوا ئەو بەهایەی $f(a)$ کە بە دەستیدەهێنێت، بریتییە لە وێنەی x بە نەخشەی f.

نموونــــه 1 دۆزینەوەی بەهای نەخشە

بە بەکارهێنانی نەخشەی $f(x)=x^2+7$ بەهای هەر برێك بدۆزەوە.

أ $f(3a)$ ب $f(b-1)$ ج $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ کاتێك $\Delta x\neq 0$

شیکار

أ $f(3a)=(3a)^2+7=9a^2+7$

ب $f(b-1)=(b-1)^2+7=b^2-2b+1+7=b^2-2b+8$

ج $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2+7-(x^2+7)}{\Delta x}$

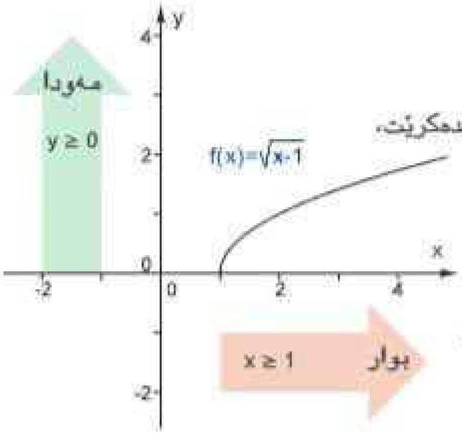
$=\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+7-x^2-7}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$

تێبینی: بە بڕی $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ دەوترێت **نەنجامی دابەشکردنی دوو جیاوازیەکە**، کە ڕۆڵێکی گرنگی هەیە لە هەژمارکردنی جیاکاریدا. هەروەك لە دواتر دەیبینیت.

خالی جاوتێری **1. بە بەکارهێنانی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x}$ بەهای هەر برێك بدۆزەوە.**

أ $f(3a)$ ب $f(\sqrt{3})$ ج $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ کاتێك $\Delta x\neq 0$

بواری نەخشە و مەوداکەی



بوار

بواری نەخشەیەك بە ڕێگای ئاشکراو و ڕێگای ناناشکرا دیاریدەکرێت، بە بەکارهێنانی ئەو هاوکێشەی نەخشەکە پێناسە دەکات. بۆ نموونە:

- بواری نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ کاتێك $4\le x\le 5$ بەشێوەی ئاشکرا پێناسەکراوە کە بریتییە لە $\{x/4\le x\le 5\}$ تێبینی ئەوە بکە زۆرە جیاوازە لە ماوەی $4\le x\le 5$)
- بواری نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ بەشێوەی نا ئاشکرا پێناسەکراوە، کە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان کەوا دەکات x^2-9 یەکسان نەبێت بە 0 ، واتا $x\neq\pm 3$. ئەو بوارە بریتییە لە $\{x/x\neq\pm 3\}$.

مەودا

مەودا بۆ هەر نەخشەیەکی f، بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان کە بەهایەکانی نەخشەکە دەیگرێتەوە، واتا کۆمەڵەی $f(a)$ کە a لەبواری نەخشەی f دایە.

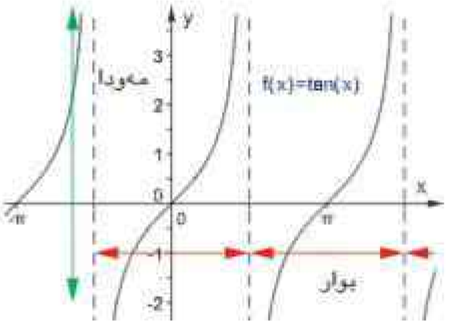
دەتوانیت مەودای نەخشەی f بەسەیرکردنی ڕوونکردنەوەکەی یان بە سەیرکردنی ئەو هاوکێشەی پێناسەی دەکات دیاریبکەیت . بۆ نموونە:

- مەودای نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x}$ بریتییە لە $\{y/y\neq 0\}$ چونکە $\frac{1}{x}$ نابێت بکاتە 0 . دەکرێت یەکسان بێت بە هەر بەهایەك جیاواز بێت لە 0 .
- مەودای نەخشەی $f(x)=\sin x$ بریتییە لە $\{y/-1\le y\le 1\}$ چونکە $\sin x$ ناکرێت ئەو بەهایانە وەربگرێت کە لە دەرەوەی ماوەی $[-1,1]$ دایە.

نموونە 2 دۆزینەوەی بواری نەخشە و مەوداکەی

بوار و مەودای هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $f(x)=\sqrt{x-1}$ ب $f(x)=\tan x$



شیکار

أ بواری نەخشەکە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی کە پاسەدانی $x-1\geq 0$ دەکات، کە بریتییە لە ماوەی $[1,+\infty[$ مەودای نەخشەکە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی سالب نین واتا $[0,+\infty[$ چونکە $\sqrt{x-1}$ ناکرێت سالب بێت.

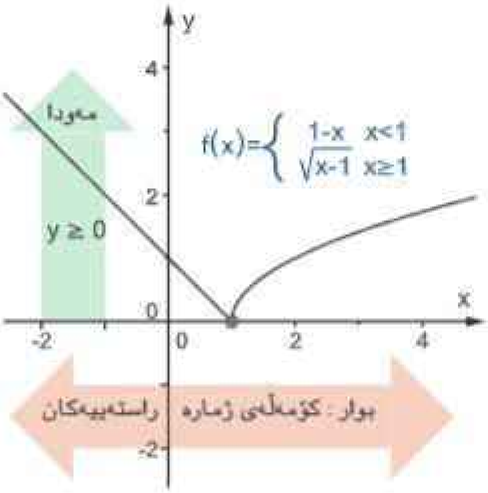
ب بواری نەخشەکە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی کە پاسەدانی $x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ کاتێك $n\in I$ (Integer) بەکەن. بەڵام مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان.

خاڵی جاوبێری 2. بوار و مەودای هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ب $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

نموونە 3 دۆزینەوەی بوار و مەودای نەخشەی ڕێسا پەلدار

بوار و مەودای نەخشەی $f(x)=\begin{cases}1-x & x<1\\ \sqrt{x-1} & x\geq 1\end{cases}$ بدۆزەوە.



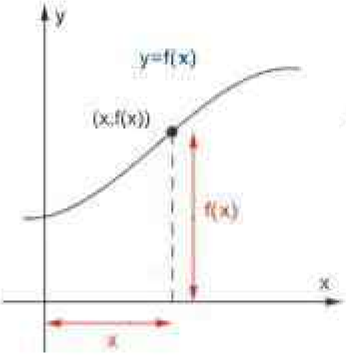
شیکار

لەبەرئەوەی نەخشەکە پێناسەکراوە کاتێك $x<1$ بەنەخشەی $f(x)=1-x$ و کاتێك $x\geq 1$ بە نەخشەی $f(x)=\sqrt{x-1}$، کەواتە مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی بەهاکانی $f(x)$ کاتێك $x\geq 1$ واتە $\{y : y\geq 0\}$ لەگەڵ کۆمەڵەی بەهاکانی $f(x)$ کاتێك $x<1$ واتە $\{y : y\geq 0\}$. کەواتە مەودای ئەم نەخشەیە بریتییە لە $[0,+\infty[$.

خاڵی جاوبێری 3. بوار و مەودای نەخشەی $f(x)=\begin{cases}3-x & x<3\\ \sqrt{x-3} & x\geq 3\end{cases}$ بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/19/18 10:09 AM Page 24

بە نەخشەی f دەوترێت نەخشەی **جیا**، ئەگەر هەر دانەیەکی y لە مەوداکەی بەتەنها دانەیەکی x لە بوارەکەی بەسترابێت، بە واتایەکی تر: دوو دانەی x_1 و x_2 لە دانەکانی بوار یەکسان دەبن ئەگەر بەهایەکانی $f(x_2)$ و $f(x_1)$ یەکسان بن، نەخشەی یەکەم لە نموونەی 2 نەخشەیەکی جیایە بەڵام نەخشەی نموونەی 1 نەخشەیەکی جیا نییە. و بە نەخشەی f لە کۆمەڵەی A بۆ کۆمەڵەی B دەوترێت نەخشەیەکی **گشتگر**. ئەگەر مەوداکەی دانەکانی B بە تەواوی بگرێتەوە. نەخشەی دووەم لە نموونەی 2 نەخشەیەکی گشتگرە.

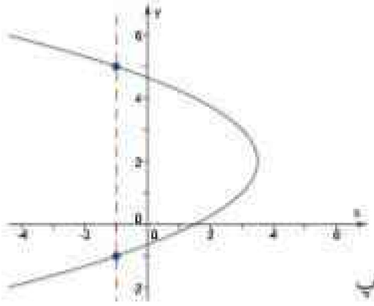


ڕوونکردنەوەی نەخشە

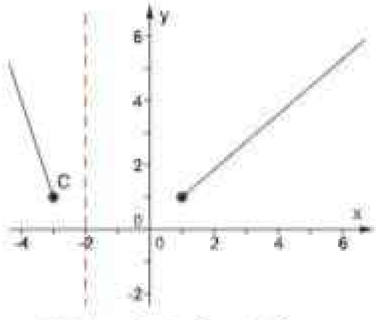
ڕوونکردنەوەی نەخشە لەهەموو خاڵەکانی $(x, f(x))$ پێکدێت کاتێك x هەموو بەهایەکانی بواری نەخشەکە وەردەگرێت. سەیری وێنەی بەرامبەر بکە، و تێبینی ئەمانەی خوارەوەبکە:

- x بریتییە لە دووری جەبری (موجەب بێت یان سالب) نێوان خاڵەکە وتەوەری y.
- $f(x)$ بریتییە لە دووری جەبری نێوان خاڵەکە و تەوەری x.

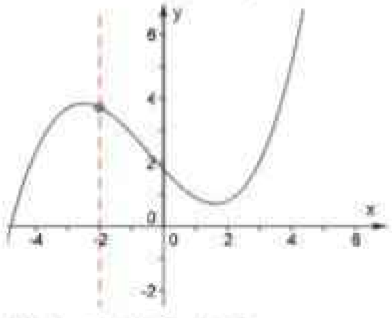
ئەگەر ڕاستەهێڵێکی ئەستون بکێشیت ئەوا بەلایەنی زۆر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە یەکجار دەبڕێت. لەم تێبینیەوە بە تاقیکردنەوەی هزری دەتوانیت بڕیار بدەی ئەگەر وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ نەخشەی بنەڕەت دەگەڕێتەوە یان نا. بەم تاقیکردنەوەیە دەوترێت **تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ئەستونی** ئەگەر ڕاستەهێڵی ئەستونی وێنە ڕوونکردنەوەکە لە خاڵێك زیاتر ببڕێت، ئەو وێنەیە نەخشە نانوێنێت وێنە ڕوونکردنەوەکەی لای چەپ نەخشە نانوێنێت. چونکە ڕاستەهێڵی ئەستونی $x=-1$ لە دوو خاڵی جیاواز دەیبڕێت بەڵام دوو وێنەکەی تر نەخشە دەنوێنن.



ڕوونکردنەوەکە نەخشە نانوێنێت

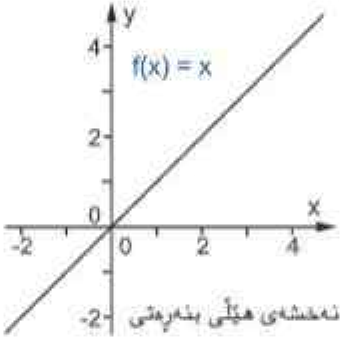


ڕوونکردنەوەکە نەخشە دەنوێنێت

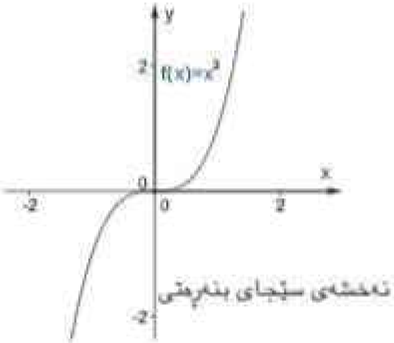


ڕوونکردنەوەکە نەخشە دەنوێنێت

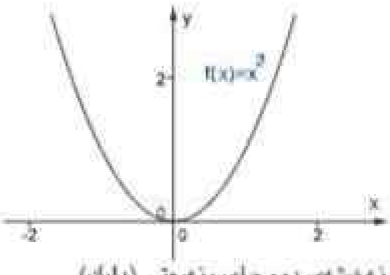
شێوەکانی خوارەوە ڕوونکردنەوەکانی 11 لە نەخشە بنەڕەتییەکان پیشاندەدات. هەوڵدە جیایانبکەیتەوە و ئەو نەخشە دیاریبکە کەهەر یەکێکیان دەنوێنێت.



نەخشەی هێڵی بنەڕەتی

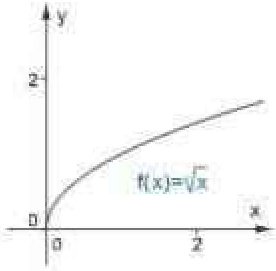


نەخشەی سێجای بنەڕەتی

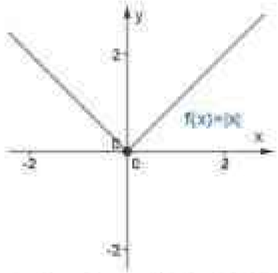


نەخشەی دووجای بنەڕەتی (دایک)

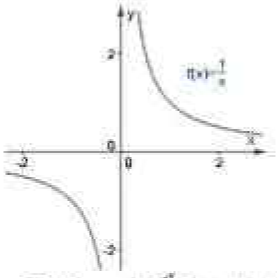
GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/19/18 10:09 AM Page 27



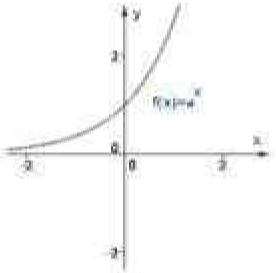
نەخشەی ڕەگی دووجای بنەڕەتی



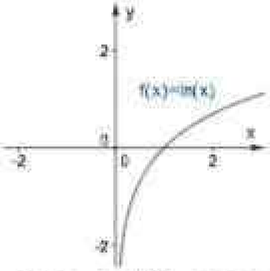
نەخشەی بەهای ڕووتی بنەڕەتی



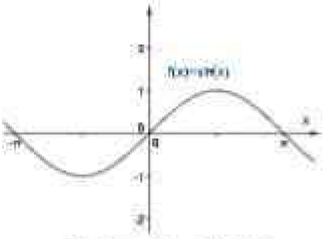
نەخشەی هەڵگەڕاوەی بنەڕەتی



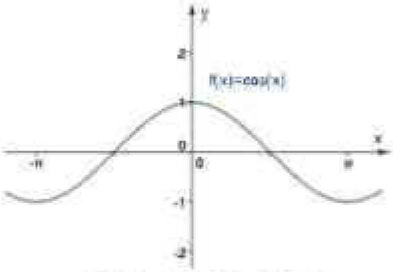
نەخشەی توانی بنەڕەتی



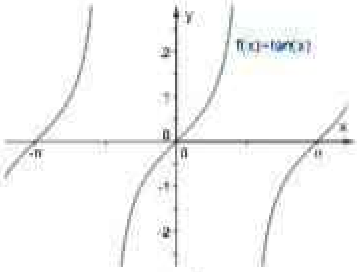
نەخشەی لۆگاریتمی بنەڕەتی



نەخشەی سایني بنەڕەتی



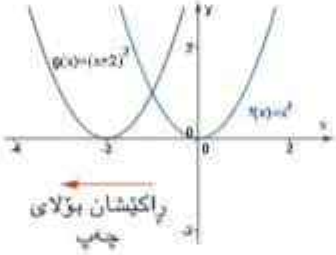
نەخشەی کۆساینی بنەڕەتی

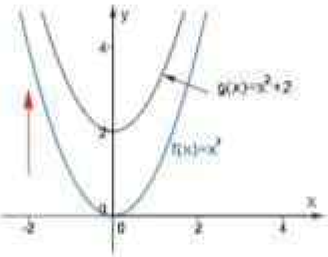


نەخشەی تانجێتی بنەڕەتی

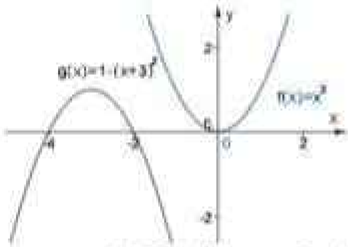
جێگۆڕکێی نەخشەکان

دەتوانرێت نەخشەکان لە کۆمەڵەکان یان خێزانەکان پۆلێنبکرێت. ڕوونکردنەوەی نەخشەکانی هەر خێزانێك بەوە جیادەکرێنەوە کە هەمان شێوەی گشتیان هەیە. ئەگەر خێزانی نەخشە دووجاییەکان وەربگریت، دەبینێت کە ڕوونکردنەوەکانیان هەمان شێوەی بنەڕەتیان هەیە، هەروەك لەم وێنانەی خوارەوە دیاردەکەون.

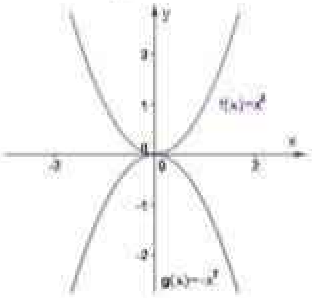




ڕاکێشان بۆلای سەرەوە



ڕاکێشان بۆ چەپ پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری X لە پاشان ڕاکێشان بۆ سەرەوە.



وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x

هەر ڕوونکردنەوەیەك لە ڕوونکردنەوەكانی پێشوو بریتییە لە جێگۆڕكێی نەخشە بنەڕەتییەكان. چوار شێوەكەی پێشوو سێ لەو جێگۆڕكێیە بنەڕەتییانە پیشان دەدات. ڕاكێشان بۆ سەرەوە و ڕاكێشانی بۆ چەپ و وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x. دەتوانیت جێگۆڕكێیەكان دیاریبكەیت كە ڕوونكردنەوەی نەخشە بنەڕەتییەكە دەكاتە ڕوونكردنەوەی نەخشەی یەكێك لە لقەكانی بەبێ كێشانی دوو ڕوونكردنەوەكە.

ئەگەر نەخشەی بنەڕەتی بكاتە نەخشەی $f(x)=x^2$ ئەوا ڕوونكردنەوەی ئەو چوار نەخشەیە بریتین لە:

$y=f(x)+2$	ڕاكێشانی بۆ سەرەوە بە بڕی دوو یەكە
$y=f(x+2)$	ڕاكێشانی بۆ چەپ بە بڕی دوو یەكە
$y=-f(x)$	وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x
$y=-f(x+3)+1$	ڕاكێشان بۆ چەپ پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x پاشان ڕاكێشان بۆ سەرەوە

جێگۆڕكێیە بنەڕەتییەكان (c > 0)

$y=f(x)$	ڕوونكردنەوەی بنەڕەتی
$y=f(x-c)$	ڕاكێشانی ئاسۆیی بۆ ڕاست بە بڕی c یەكە
$y=f(x+c)$	ڕاكێشانی ئاسۆیی بۆ چەپ بەبڕی c یەكە
$y=f(x)+c$	ڕاكێشانی ستوونی بۆ سەرەوە بەبڕی c یەكە
$y=f(x)-c$	ڕاكێشانی ستوونی بۆ خوارەوە بەبڕی c یەكە
$y=-f(x)$	وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x
$y=f(-x)$	وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری y
$y=-f(-x)$	وێنەدانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت

پۆلێنكردنی نەخشەكان

پێناسەی چەمكی نوێی نەخشە بۆ هەوڵی زاناكانی بیركاری لەهەردوو سەدەی حەڤدەهەم و هەژدەهەم دەگەڕێتەوە وە نووسینی نەخشەیی $y=f(x)$ بۆ زانا لیۆنارد أولر Leonhard Euler دەگەڕێتەوە لە كۆتایی سەدەی هەژدەهەم زاناكان بەمە گەیشتن:
دەتوانرێت نموونە بیركارییەكان بدۆزرێتەوە بۆ لێكۆڵینەوەی زۆر لە پرسیارەكانی ژیانی ڕۆژانە بە بەكارهێنانی كۆمەڵە نەخشەیەك كە بە **نەخشە سادەكان** ناویان دەبرد بەكاربهێنرێت.

نەخشە سادەكان پۆلێن دەكرێن بۆ سێ جەشن پێشتر لە پۆلەكانی نۆیەم و یازدەهەم خوێندوتە:

- **نەخشە جەبرییەكان** (ڕادەدارەكان، ڕێژەییەكان، ڕەگییەكان).
- **نەخشە سێگۆشەییەكان** (نەخشەكانی ساین و كۆساین و تانجێنت).
- **نەخشە توانییەكان و لۆگاریتمییەكان**.

لە نەخشە زۆر باوەكان **نەخشە ڕادەدارەكانە**. شێوەی گشتی نەخشەی ڕادەدار بریتییە لە:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\ ;\ \ a_n\neq 0$$

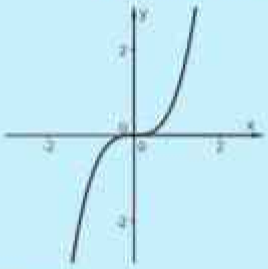
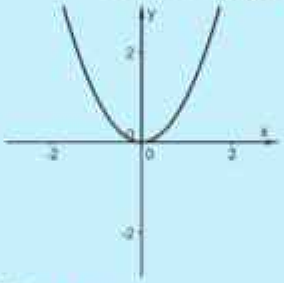
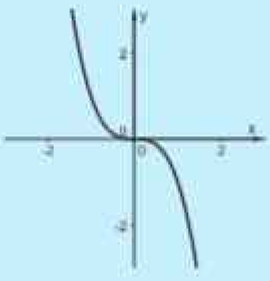
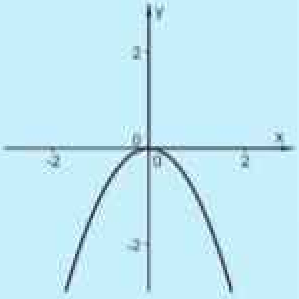
لیۆنارد أولر 1707 – 1783

سەرەڕای بەشداریكردنی لەهەموو لقەكانی بیركاری، أولر لە زانا پێشەنگەكان بوو كە هەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری لەسەر پرسیارەكانی ژیانی ڕۆژانە لە فیزیادا جێبەجێكرد. لەزۆربەی بەرهەمەكانی بابەتەكانی وەك دروستكردنی كەشتییەكان و زانستی دەنگەكان و زانستی ڕووناكی، و فەلەك و میكانیك و كایە موگناتیسییەكانی باسكردووە

کاتێک ژمارەی تەواوی موجەب n بریتییە لە پلەی نەخشەکە و ژمارە ڕاستییەکانی $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ **هاوکۆلکەکانیەتی**، و هاوکۆلکەی a_n **هاوکۆلکەی سەرەکی** و هاوکۆلکەی a_0 ڕادەی **نەگۆڕە** یان **هاوکۆلکەی نەگۆڕە**. وا باوە پیتە نیشانکراوەکانی a_i بۆ نووسینی هاوکۆلکەکانی نەخشە ڕادەدارەکە بەکاربهێنرێت. کاتێک هاوکۆلکەی ئەو نەخشانەی لە پلەی نزمدان بە پیتە جیاوازەکان دەنووسرێن وەک لەم خشتەی خوارەوە دەردەکەوێت.

پلە	شێوەکەی	ناوەکەی
نەخشەیەکی ڕادەداری پلە 0	$f(x)=a$	نەخشەی نەگۆڕ
نەخشەیەکی ڕادەداری پلە 1	$f(x)=ax+b$	نەخشەی هێڵی
نەخشەیەکی ڕادەداری پلە 2	$f(x)=ax^2+bx+c$	نەخشەی دووجا
نەخشەیەکی ڕادەداری پلە 3	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	نەخشەی سێجا

دەکرێت لە ڕوونکردنەوەی نەخشەی ڕادەداری کە نەگۆڕ نەبێت چەندین خاڵی جێگۆڕکێ هەبێت. کە بێسنوور سەردەکەوێت یان دادەبەزێت کاتێک x بەرەو $+\infty$ یان $-\infty$ دەجووڵێت. بە پشت بەستن بە پلەی جووتی یان تاکی نەخشەکە و نیشانەی هاوکۆلکە سەرەکی دەتوانرێت سیفەتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دیاریبکرێت کاتێک x بەرەو $-\infty$ یان $+\infty$ دەجووڵێت. ئەم خشتەیە پوختەی ئەم سیفەتەیە.

بۆ نەخشەکە	پلەی تاک بێت	پلەی جووت بێت
هاوکۆلکەی سەرەکی موجەب بێت	$f(x)\to+\infty$ کاتێک $x\to+\infty$  $f(x)\to-\infty$ کاتێک $x\to-\infty$	$f(x)\to+\infty$ کاتێک $x\to+\infty$  $f(x)\to+\infty$ کاتێک $x\to-\infty$
هاوکۆلکەی سەرەکی سالب بێت	$f(x)\to-\infty$ کاتێک $x\to+\infty$  $f(x)\to+\infty$ کاتێک $x\to-\infty$	$f(x)\to-\infty$ کاتێک $x\to+\infty$  $f(x)\to-\infty$ کاتێک $x\to-\infty$

ئاوێتەکردنی نەخشەکان

لەپۆلی یازدەهەم فێربوویت چۆن دەتوانرێت نەخشە نوێیەکان بە بەکارهێنانی دوو نەخشەی f و g پێناسەبکرێت. ئەگەر $f(x)=2x-3$ و $g(x)=x^2+1$ ئەوا دەتوانیت ئەم نەخشانەی خوارەوە پێناسەبکەیت:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x-3)+(x^2+1)=x^2+2x-2$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x-3)-(x^2+1)=-x^2+2x-4$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=(2x-3)(x^2+1)=2x^3-3x^2+2x-3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x-3}{x^2+1}$$

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=2\big(g(x)\big)-3=2(x^2+1)-3=2x^2-1$$

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\big(f(x)\big)^2+1=\big(2x-3\big)^2+1=4x^2-12x+10$$

سەرنج بدە $f\circ g\neq g\circ f$

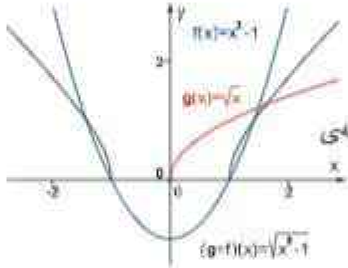
نموونە 4 دۆزینەوەی بواری نەخشەی ئاوێتە

أ بواری نەخشەی $g\circ f$ بدۆزەوە کاتێک $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$.

ب بواری نەخشەی $f\circ g\circ h$ بدۆزەرەوە کاتێک $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=3x$ و $h(x)=x-2$

شیکار

أ $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-1}$



بواری نەخشەی $g\circ f$ بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی x کە پاسەدانی $x^2-1\geq 0$ دەکەن.

بۆ شیکارکردنی لاسەنگەی $x^2-1\geq 0$، ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2-1$ بکێشە. کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی x کە پاسادانی $x^2-1\geq 0$ دەکات بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی پاسادانی $x\leq -1$ یان $x\geq 1$ دەکەن.

کەواتە بواری نەخشەی gof بریتییە لە $\{x\leq -1$ یان $x\geq 1\}$.

واتە بواری نەخشەی gof بریتییە لە $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

ب $(f\circ g\circ h)(x) = f\big(g(h(x)\big)=f\big(g(x-2)\big)=f\big(3(x-2)\big)$

$=\sqrt{3(x-2)}$

بواری نەخشەی fogoh بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان.

کەواتە، دەکاتە $3(x-2)\geq 0$ کەوا $\{x : x\geq 2\}$. واتە $[2,+\infty[$

خاڵی جاوێری **4.** بواری نەخشەی $g\circ f$ بدۆزەوە کە $f(x)=x^2-1$، $g(x)=\frac{1}{x}$.

1-3 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 و 2 ڕوونکردنەوەی f و g بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکانی خوارەوە بەکاربهێنە:

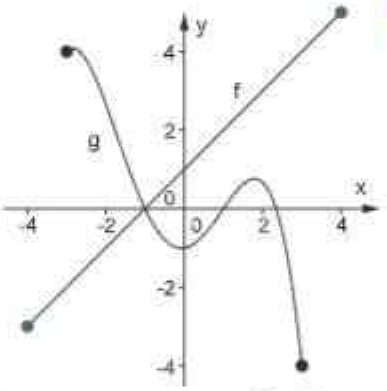
GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/19/18 10:09 AM Page 31

أ بوار و مەودای هەر نەخشەیەك دیاریبكە.　　ب $f(-2)$ و $g(3)$ بدۆزەوە.

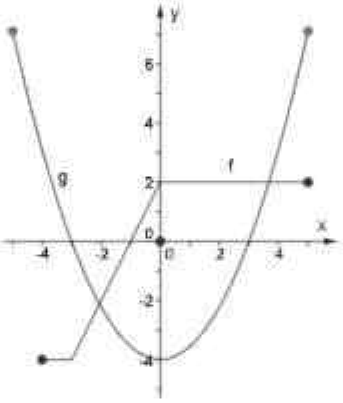
ج بەهاكانی x بدۆزەوە كە پاسەدانی $f(x)=g(x)$ دەكەن.　　د شیكارێك بۆ هاوكێشەی $f(x)=2$ بخەملێنە.

هـ شیكارێك بۆ هاوكێشەی $g(x)=0$ بخەملێنە.

1



2



لەپرسیاری 3 تا 8 بەهایە داواكراوەكان ئەگەر لەتواناشدا بۆ نەخشەكە هەژماربكە. ئەنجامەكان سادەبكە.

3 $f(x)=\sqrt{x+3}$: $f(-2)$ ، $f(6)$ ، $f(-5)$ ، $f(x+\Delta x)$

4 $f(x)=3-x^2$: $f(0)$ ، $f(\sqrt{3})$ ، $f(-2)$ ، $f(t-1)$

5 $f(x)=\cos 2x$: $f(0)$ ، $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ، $f(-2)$ ، $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

6 $f(x)=x^3-x$: $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ، $x\neq 1$

7 $f(x)=x^3$: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ، $\Delta x\neq 0$

8 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$: $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ ، $x\neq 2$

لە پرسیاری 9 تا 11 بوار و مەودای هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

9 $f(x)=-\sqrt{x+3}$　　**10** $f(t)=\ln(1-t)$　　**11** $f(x)=\frac{2}{x-1}$

لە پرسیاری 12 تا 14 بواری هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

12 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$　　**13** $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$　　**14** $f(x)=\frac{1}{|x+3|}$

لە پرسیاری 15 و 16 بەهایە داواكراوەكانی نەخشەكە بدۆزەوە.

15 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<0\\ 2x+2 & x\geq 0\end{cases}$: $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f(t^2+1)$

16 $f(x)=\begin{cases}|x|+1 & x<1\\ -x+1 & x\geq 1\end{cases}$: $f(o)$ ، $f(-3)$ ، $f(1)$ ، $f(3)$ ، $f(b^2+1)$

لە پرسیاری 17 و 18 بە ڕوونكردنەوەی بوار و مەودای هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

17 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$　　**18** $f(x)=2\sin\pi x$

دەربارەی چەمكەكان

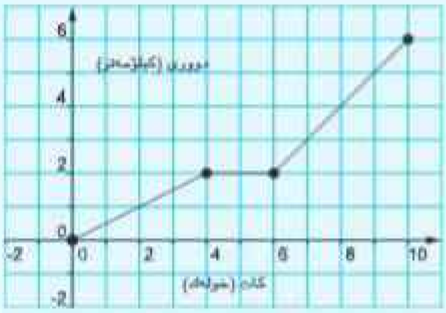
19 ڕوونكردنەوەی بەرامبەر ئەو دوورییە دەردەخات كە خوێندكارێك بە ئۆتۆمبیلەكەی بڕیویەتی (بەپێی كات) لە كاتی دەرچوونی لە ماڵەوە بۆ زانكۆ.

خێراییەكەی لە نێوان $t=0$ ، $t=4$ چەندبوو؟

خێراییەكەی لە نێوان $t=4$ ، $t=6$ چەندبوو؟

خێراییەكەی لە نێوان $t=6$ ، $t=10$ چەندبوو؟

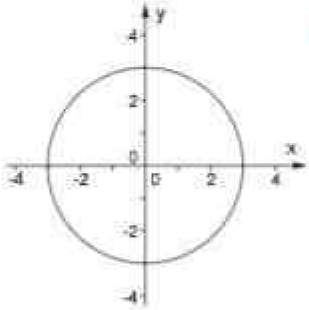
باسی لێخوڕینی خوێندكارەكە بە ئۆتۆمبیلەكەی بكە.



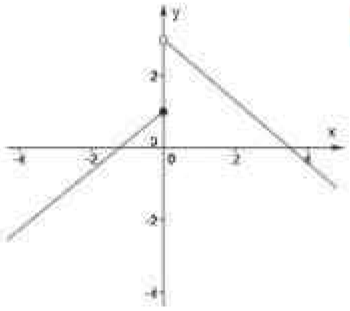
GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/29/18 11:49 AM Page 30

لە پرسیاری **20** و **21** دا، تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ئەستونی بەکاربهێنە تا بڕیاربدەی ئەگەر وێنە ڕوونکردنەوەییەکە نەخشەیە یان نا.

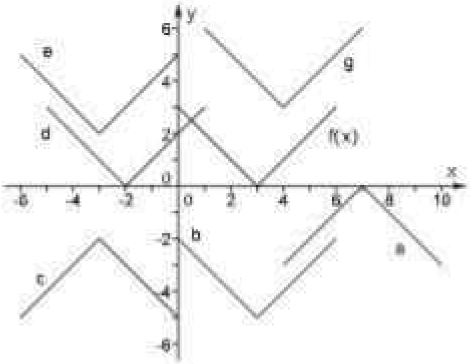
20



21



لە ڕاهێنانی **22** تا **27** ڕوونکردنەوەی $y=f(x)$ بۆ دیاریکردنی ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەک بەکاربهێنە.



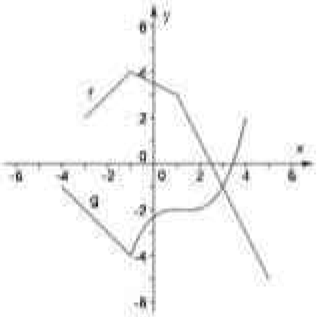
22 $y=f(x+5)$ **23** $y=f(x)-5$ **24** $y=-f(-x)-2$

25 $y=-f(x-4)$ **26** $y=f(x+6)+2$ **27** $y=f(x-1)+3$

28 $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ بدۆزەوە کاتێک $f(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{x}$. ئایا $f \circ g = g \circ f$ ؟

29 $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ بدۆزەوە کاتێک $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x+2}$. ئایا $f \circ g = g \circ f$ ؟

30 وێنەی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر بۆ دۆزینەوەی بەهایە داواکراوەکان بەکاربهێنە.



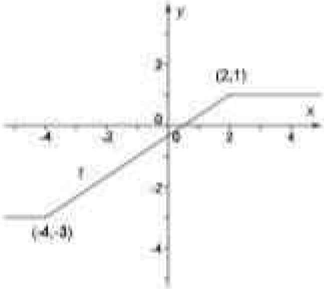
أ $(f \circ g)(3)$ ب $g(f(2))$ ج $g(f(5))$

د $(f \circ g)(-3)$ هـ $(g \circ f)(-1)$ و $f(g(-1))$

31 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\sqrt{x}$ بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەی هەریەکە لەم نەخشانەی خوارەوە بەکاربهێنە.

أ $g(x)=\sqrt{x}+2$ ب $h(x)=-\sqrt{x}$ ج $p(x)=\sqrt{x-2}$

32 ڕوونکردنەوەی نەخشەی f بەرامبەر بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەی هەریەکە لەم نەخشانەی خوارەوە بەکاربهێنە.



أ $f(x-4)$ ب $f(x+2)$ ج $f(x)+4$

د $f(x)-1$ هـ $2f(x)$ و $\frac{1}{2}f(x)$

33 **بازنەکان** شیرین بەردێکی بۆ ناو گۆمەئاوێکی وەستاو هەڵدا، چەند بازنەیەکی هاوچەقی یەك لەدوای یەك دروستبوو، نیوەتیرەی بازنە فراوانەکەیان بەپێی نموونەی $r=0.6t$ زیاد دەکات، کە t هێمای کاتی تێپەڕبوو بەسەرهەڵدانی بەردەکەیە بە چرکە و r نیوەتیرەی بازنەکەیە بەپێ.
ڕووبەری بازنەکە بەپێی یاسای $A=\pi r^2$ هەژمار دەکرێت. نەخشەی $(A\circ r)(t)$ بدۆزەوە. ڕووبەری بازنە فراوانەکە چەندە پاش 6 چرکە لە هەڵدانی بەردەکە؟

34 سێ نەخشەی f ، g ، h بدۆزەوە، بۆئەوەی $k=f\circ g\circ h$ کاتێك $k(x)=\sqrt{2x-2}$.

لە پرسیاری 35 تا 38 دیاریبکە ئەگەر نەخشەکە تاکە یان جووتە

35 $f(x)=x^2\left(4-x^2\right)$

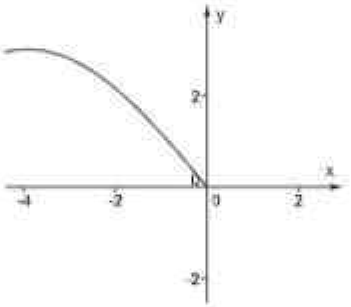
36 $f(x)=\sqrt[3]{x}$

37 $f(x)=x\cos x$

38 $f(x)=\sin^2 x$

39 بواری نەخشەی لە وێنەی بەرامبەر بریتییە لە $-5\le x\le 5$
وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەهەرباریکدا تەواوبکە:

أ نەخشەکە جووت بێت.   ب نەخشەکە تاك بێت.



کارامایە بیرکارییەکان **لەوەی دێت 4 نەخشە و 4 خشتەی پێدراوەکان دەبینیت. ئەو نەخشەیە بدۆزەوە کە هەر خشتەیەك دەنوێنێت و بەهای c دیاریدەکات.**

$f(x)=cx$ $g(x)=cx^2$ $h(x)=c\sqrt{|x|}$ $k(x)=\frac{c}{x}$

40

x	-4	-1	0	1	4
y	-32	-2	0	-2	-32

41

x	-4	-1	0	1	4
y	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

42

x	-4	-1	0	1	4
y	-8	-32	پێناسە نەکراوە	32	8

43

x	-4	-1	0	1	4
y	6	3	0	3	6

ڕاست یان هەڵە لە پرسیاری 44 تا 47 دیاریبکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە و ئەگەر هەڵەیە بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە

44 ئەگەر f نەخشەیەك بێت و $f(a)=f(b)$ ئەوا $a=b$.

45 دەکرێت ڕاستەهێڵێکی ئەستوون بەلایەنی زۆرەوە یەکجار ڕوونکردنەوەی نەخشە ببڕێت.

46 ئەگەر $f(-x)=f(x)$ ، x هەرژمارەیەکی بواری f بێت، ئەوا ڕوونکردنەوەی نەخشەکە هاوجێبوونە لەگەڵ تەوەری y .

47 ئەگەر f نەخشەیەك بێت، ئەوا $f(ax)=af(x)$.

48 **بیربکەوە** نەخشەی $f(x)=|x|+|x-2|$ بنووسە بەبێ بەکارهێنانی بەهای ڕووت.

GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/19/18 10:09 AM Page 32

بــەشــی **1**

پێداچوونەوەی بەش

لە پرسیاری 1 تا 4 یەکتربڕینەکانی هەر نەخشەیەك دیاریبکە ئەگەر هەبوو.

1 $y=2x-3$ **2** $y=(x-1)(x-3)$ **3** $y=\frac{x-1}{x-2}$ **4** $y=\frac{4}{x}$

لە پرسیاری 5 و 6 دا ساغبکەوە ئەگەر ڕوونکردنەوەکە لەگەڵ چی دا هاوجێبوونی هەبێت.

5 $x^2y-x^2+4y=0$ **6** $y=x\,(x^4-x^2+3)$

لە پرسیاری 7 تا 10 وێنەی ڕوونکردنەوەی هاوکێشەکە بکێشە

7 $-\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}y=1$ **8** $f(x)=7-6x-x^2$

9 $f(x)=\sqrt{5-x}$ **10** $f(x)=|x-4|-4$

لە پرسیاری 11 و 12 خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکە بدۆزەوە ئەگەر هەبوو.

11 $3x-4y=8 \quad x+y=5$ **12** $y-x^2=7 \quad x-y+1=0$

13 **بیربکەوە** هاوکێشەی نەخشەیەك بنووسە کە ڕوونکردنەوەکەی هاوجێبونە لەگەڵ خاڵی بنەڕەت وە دووخاڵی یەکتربڕینی ئاسۆیی$x=-2$ ، $x=2$ هەیە.

14 **بیربکەوە** بەهای k چەندە کە وادەکات ڕوونکردنەوەی نەخشەی$f(x)=kx$ بەخاڵە دیاریکراوەکە دابڕوات؟

أ $(1, 4)$ ب $(-2, 1)$ ج $(0, 0)$ د $(-1, -1)$

لە پرسیاری 15 و 16 لاری بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهای t بۆئەوەی خاڵەکان بکەونە سەر یەك ڕاستەهێڵ

15 $(1, 1)$، $(0, t)$، $(-2, 5)$ **16** $(8, 6)$، $(t, -1)$، $(-3, 3)$

لە پرسیاری 17 تا 20 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە خاڵە دیاریکراوەکە دا دەڕوات و لارییەکەشی دیاریکراوە بدۆزەوە.

17 $m=\frac{3}{2}$ ؛ $(0, -5)$ **18** $m=0$ ؛ $(-2, 6)$

19 $m=-\frac{2}{3}$ ؛ $(-3, 0)$ **20** $(5, 4)$ لارییەکە پێناسە نەکراوە

21 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی کەبەخاڵی$(-2, 4)$ دادەڕوات و ئەو سیفەتەشی هەیە کە دیاریکراوە بدۆزەوە.

أ لارییەکەی$\frac{7}{16}$ ب تەریبە بە ڕاستەهێڵی $5x-3y=3$

ج بە خاڵی بنەڕەت دادەڕوات د تەریبە بە تەوەری y

22 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە خاڵی $(1, 3)$ دادەڕوات و ئەو سیفەتەشی هەیە کە دیاریکراوە بدۆزەوە.

أ لارییەکەی$-\frac{2}{3}$ ب ئەستونە لەسەر ڕاستەهێڵی $x+y=0$

ج بەخاڵی $(2, 4)$ دادەڕوات د تەریبە بە تەوەری x .

23 **تێکڕای گۆڕان** نرخی ئامێرێکی نوێ 000 500 12 دینارە، ساڵانە نرخەکەی 000 850 دینار بەپێی بەکاربردنی کەمدەکات. نەخشەیەکی هێڵی کە نرخی ئەو ئامێرە پاش t ساڵ لە کڕینی بنوێنێت بنووسە. نرخەکەی دوای 3 ساڵ لەکڕینی دەبێتە چەند؟

24 $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x<0 \\ |x-2| & x\geq 0 \end{cases}$ بدۆزەوە.

أ $f(-4)$

ب $f(0)$

ج $f(1)$

25 بوار و مەودای هەر نەخشەیەک دیاربیکە.

أ $f(x)=\sqrt{36-x^2}$

ب $f(x)=\frac{7}{2x-10}$

ج $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 2-x & x\geq 0 \end{cases}$

26 $f(x)=1-x^2$ و $g(x)=2x+1$ بدۆزەوە.

أ $f(x)-g(x)$

ب $f(x)g(x)$

ج $g(f(x))$

27 **ڕووبەر** شریتێک درێژییەکەی 24 m لاکێشەیەکی لێ دروستکرا کە لا بچووکەکەی x بێت.

أ ڕووبەری لاکێشەکە(A) بەپێی x بنووسە.

ب بواری نەخشەی A دیاربیکە لە پاشاندا وێنەی ڕوونکردنەوەکەی بەپێی ئەو بوارەی دیاریتکرد بکێشە.

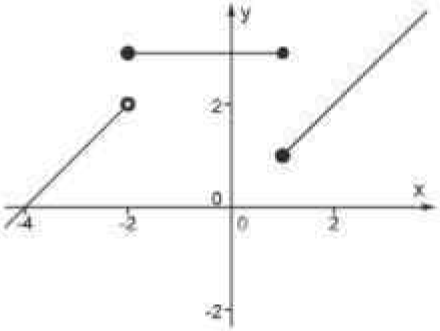
ج ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بۆ خەمڵاندنی گەورەترین ڕووبەر کە لاکێشەکە پێکدەهێنێت بەکاربهێنە. ڕستەیەک لەسەر پێوانەکانی لاکێشەکە بنووسە کە گەورەترین ڕووبەر دەدات.

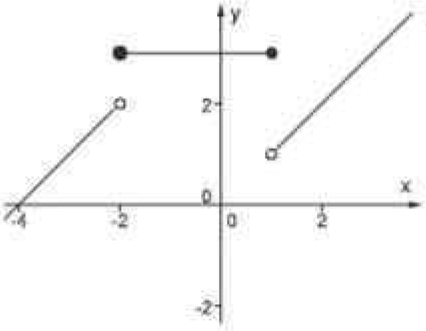
GRADE12-2011-CHAPTER 1 3/19/18 10:09 AM Page 34

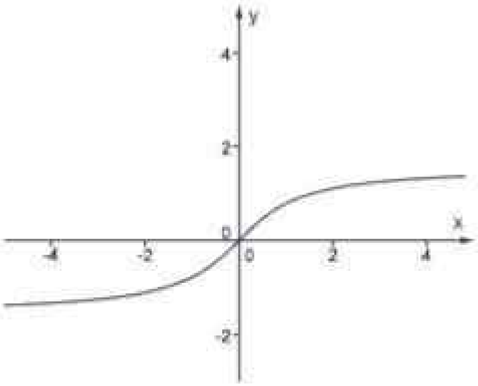
بەشی 1

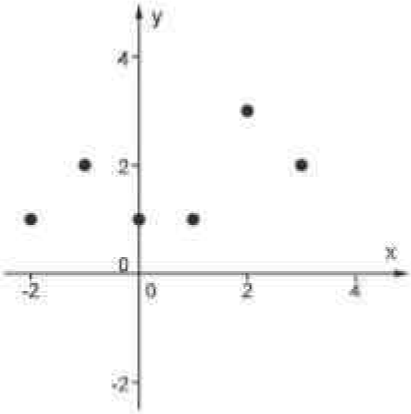
ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

1 کام لەم ڕوونکردنەوانە نەخشە نانوێنێت؟

أ


ب


ج


د


هـ هەموویان نەخشەن.

2 پۆتانی خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەی $f(x)=3x+1$ و $g(x)=x^2-3$ کامەیە؟

أ $x=0$ ب $x=1$ و $x=4$ ج $x=-1$ و $x=-4$ د $x=-1$ و $x=4$

هـ جگە لەمانە

3 کام لەم نەخشانەی دێت تاکە؟

أ $f(x)=\cos x$ ب $f(x)=x^2-x+1$ ج $f(x)=x^3-x$ د $f(x)=x^2+x$

هـ هەموویان جووتن

4 کام لەم نەخشانەی دێت تاک نییە؟

أ $f(x)=\sin x+\frac{1}{x}$ ب $f(x)=x^2-x+1$ ج $f(x)=x^3-x$ د $f(x)=x^3+x$

هـ هەموویان تاکن

GRADE12-2011-CHAPTER 1 4/4/18 11:03 AM Page 37

5 ڕاستەهێڵی $7x-3y=5$ بە کام لەم خاڵانەدا ناڕوات؟

أ $(2,3)$ ب $\left(1,\frac{2}{3}\right)$ ج $(4,11)$ د $\left(-\frac{1}{7},-2\right)$ ھ بەهەموو خاڵەکان دادەڕوات

6 لاری ئەو ڕاستەهێڵە کامەیە کە بەدوو خاڵی$(6,10)$ و$(-1,4)$ دادەڕوات؟

أ $\frac{7}{6}$ ب $-\frac{7}{6}$ ج $\frac{6}{7}$ د $-\frac{6}{7}$ ھ جگە لەمانە

7 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کامەیە کە بە خاڵی $(3,10)$ دادەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵی $x-3y=1$ ؟

أ $y=\frac{1}{3}x+9$ ب $y=3x+1$ ج $y=-3x+19$ د $y=-\frac{1}{3}x+11$ ھ جگە لەمانە

8 لاری ئەو ڕاستەهێڵە کامەیە کە ئەستونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی$2x+3y+9=0$ ؟

أ $\frac{2}{3}$ ب $-\frac{2}{3}$ ج $\frac{3}{2}$ د $-\frac{3}{2}$ ھ جگە لەمانە

9 $f(x)=\begin{cases}3x+4 & x\le 2\\ x^2+1 & x>2\end{cases}$. کام لەمانە یەکسانە بە $f(3)$ ؟

أ 13 ب 10 ج 5 د 3 ھ جگە لەمانە

10 $f(x)=x^2-3x+4$ کام لەمانە یەکسانە بە $f(x+2)-f(2)$ ؟

أ x^2-3x-4 ب x^2+x ج x^2+x-8 د x^2-3x+4 ھ جگە لەمانە

11 $f(x)=2-x^2$ کام لەمانە یەکسانە بە $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ؟

أ $\frac{x^2-h-h^2}{h}$ ب $\frac{-2x^2-h^2}{h}$ ج $-2x-h$ د $\frac{1}{2}$ ھ جگە لەمانە

12 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ کامەیە؟

أ $\{x/x\neq 1\}$ ب $\{x/x\neq -1\}$ ج $\{x/x\neq 0\}$ د R ھ جگە لەمانە

13 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ کامەیە؟

أ $]-\infty,-2[\cup]-2,1[\cup]1,+\infty[$ ب $]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$

ج R د $]-\infty,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},+\infty[$ ھ جگە لەمانە

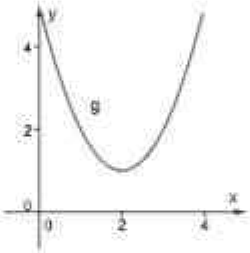
14 ئەو جێگۆڕکێیە کامەیە کە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2$ بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $g(x)=(x+9)^2$ دەگۆڕێت؟

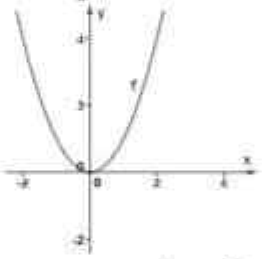
أ ڕاکێشان بۆ سەرەوە بەبڕی 9 یەکە. ب ڕاکێشان بۆ خوارەوە بەبڕی 9 یەکە.

ج ڕاکێشان بۆ ڕاست بەبڕی 9 یەکە. د ڕاکێشان بۆ چەپ بەبڕی 9 یەکە.

ھ جگە لەمانە

15 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی هاوکێشەی نەخشەی g کە ڕوونکردنەوەی دووەمی هەیە.





أ $g(x)=(x-2)^2+1$ ب $g(x)=(x-1)^2+2$ ج $g(x)=(x+2)^2+1$

د $g(x)=(x+1)^2-2$ هـ جگە لەمانە

16 $(f+g)(x)$ بدۆزەوە کاتێک $f(x)=2x-4$ و $g(x)=1+3x$.

أ $5x-3$ ب $x-3$ ج $-(x+3)$ د 0 هـ جگە لەمانە

17 $(fg)(3)$ بدۆزەوە کاتێک $f(x)=x$ و $g(x)=x^2-7$.

أ -13 ب 29 ج 5 د 6 هـ جگە لەمانە

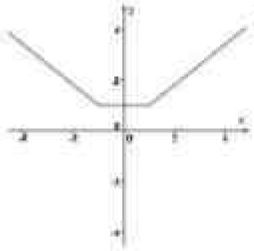
18 $(f\circ g)(x)$ بدۆزەوە کاتێک $f(x)=4-2x^2$ و $g(x)=2-x$.

أ $4x^2-16x+20$ ب $2x^2-4$ ج $2x^2-2$ د $-2x^3-4x^2-4x+8$

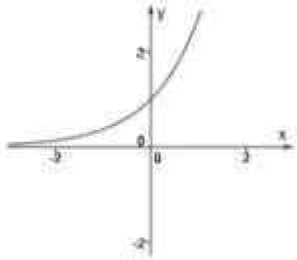
هـ جگە لەمانە

19 کام لەم ڕوونکردنەوانەی خوارەوە نەخشەی جیا نانوێنێ؟

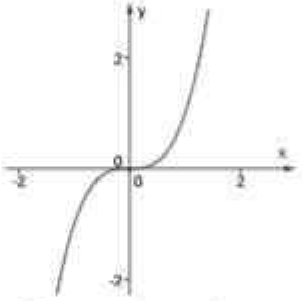
أ



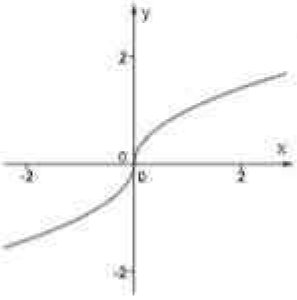
ب



ج



د



هـ هەموویان نەخشەی جیا نانوێنن.

20 سیفەتی نەخشەی $f(x)=3x^3-7x^2+2$ کامەیە کاتێک x دەچێت بۆ $-\infty$، و کاتێک دەچێت بۆ $+\infty$؟

أ نەخشەکە دەچێت بۆ $-\infty$ کاتێک x دەچێت بۆ $-\infty$: نەخشەکە دەچێت بۆ $+\infty$ کاتێک x دەچێت بۆ $+\infty$

ب نەخشەکە دەچێت بۆ $-\infty$ کاتێک x دەچێت بۆ $-\infty$: نەخشەکە دەچێت بۆ $-\infty$ کاتێک x دەچێت بۆ $+\infty$

ج نەخشەکە دەچێت بۆ $+\infty$ کاتێک x دەچێت بۆ $-\infty$: نەخشەکە دەچێت بۆ $-\infty$ کاتێک x دەچێت بۆ $+\infty$

د نەخشەکە دەچێت بۆ $+\infty$ کاتێک x دەچێت بۆ $-\infty$: نەخشەکە دەچێت بۆ $+\infty$ کاتێک x دەچێت بۆ $+\infty$

هـ جگە لەمانە

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 3

بەشی

2

ئامانجەکان Limits

بەشی دووەم

وانەکان

1–2 دەروازەیەك بۆ هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری

2–2 دۆزینەوەی ئامانجەکان بە ڕوونکردنەوەیی و ژمارەیی

3–2 هەژمارکردنی ئامانجەکان

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

4–2 نەخشە بەردەوامەکان

5–2 ئامانجە بێپایەنەکان

پێداچوونەوە

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

هەندێك لە جوتیاران چەند جۆرێك لە زیندەوەری مشەخۆر بەکاردەهێنن بۆ پاراستنی چێنراوەکانیان لەدەردو بەڵایەکان. نەخشەی $D(t)=\frac{t^2}{90}+\frac{t}{3}$ نمونەیەکە بۆ زیادبوونی ئەو زیندەوەرانە لەسەر ڕووەکێکدا. تێکڕای گۆڕانی ئەو زیندەوەرانە چەندە؟ کاتێك 20 زیندەوەر لەسەر ڕووەکێك بێت.

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:21 AM Page 2

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

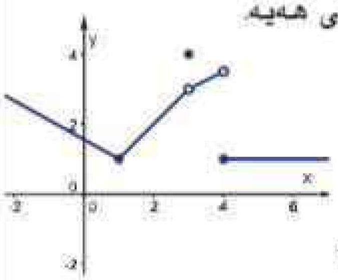
1 هەر دەستەواژەیەکی ستونی لای ڕاست بە لێکدانەوەکەی لە ستونی لای چەپ ببەستەوە.

1. نەخشەی ڕێژەیی — أ. بەهای x گەورەدەبێت و بێسنوور زیاد دەکات.
2. x نزیکدەبێتەوە لە $+\infty$ — ب. کۆمەڵەی ئەو بەهایانەی نەخشەکە وەریدەگرێت کاتێك x هەموو بەهایەکانی بوار وەردەگرێت.
3. نووسینی بڕێکی ڕێژەیی بە سادەترین شێوە — ج. نەخشەیەکە ڕێسایەکەی بڕێکی ڕێژەییە.
4. مەودای نەخشە — د. نەخشەیەکە بڕەکەی ڕێژەیەك لەخۆدەگرێت.

ه. نووسینی بڕێکە بە شێوەی ڕێژەی دووبڕی دوو ڕادەیی کە کۆڵکەی هاوبەش لە نێوانیاندا نییە.

خوێندنەوەی ڕوونکردنەوەکان

لە ڕاهێنانی 2 و 3دا نەخشەی f بەکاربهێنە کە ڕوونکردنەوەی بەرامبەری هەیە.



2 بەهای هەریەکە لە $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$ ، $f(4)$ ، $f(5)$ بدۆزەوە.

3 ڕێسای نەخشەی f بنووسە.

کردارەکان لەسەر نەخشەکان

4 ڕێسای نەخشەی $g\circ f$ و نەخشەی $f\circ g$ بنووسە کە $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$.

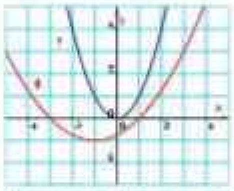
5 ئایا پەیوەندی پێچەوانە بۆ نەخشەی $y = 4x + 3$ لەنێوان گۆڕاوەکانی x و y نەخشەیە؟ ئەگەر وەڵامەکەت «بەڵێیە» پەیوەندییە پێچەوانەکە بە شێوەی نەخشە بنووسە ئەگەر وەڵامەکەت «نەخێرە» بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

6 ئایا پەیوەندی پێچەوانەی نەخشەی $y = x^2$ لەنێوان دوو گۆڕاوی x و y نەخشەیە؟ ئەگەر وەڵامەکەت «بەڵێیە» پەیوەندییە پێچەوانەکە بە شێوەی نەخشە بنووسە ئەگەر وەڵامەکەت «نەخێرە» بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

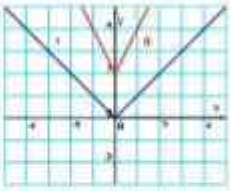
جێگۆڕکێی نەخشەکان

لە ڕاهێنانی 7 تا 10 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و g دەردەکەوێت. ئەو جێگۆڕکێیە ئەندازەییە دیاریکە کە وێنەی ڕوونکردنەوەی f بۆ وێنەی ڕوونکردنەوەی g دەبات و ڕێسای g بنووسە.

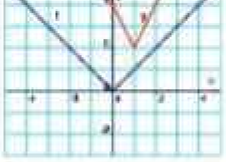
7



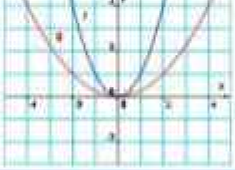
8



9



10



GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 5

1–2 دەروازەیەك بۆ هەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری
Introduction to Calculus

ئامانجەكان

- لەجیاكاری و تەواوكاری و جیاوازییەكی لە جەبر تێبگات.
- تێبگات كە بابەتی لێكەوت بابەتێكی بنەڕتی جیاكاری و تەواوكارییە.
- تێبگات كە بابەتەكانی رووبەر بابەتێكی بنەڕەتییە لە جیاكاری و تەواوكاری.

سوود

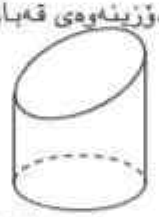
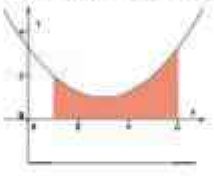
هەمیشە لەبیرت بێت جیاكاری و تەواوكاری وەك وانەیەكی بنەڕەتی لەو پۆلەدا دەخوێنێت. ئامانجی یەكەمت فێربوونی چۆنیەتی بەكارهێنانی ئەو بابەتەیە بۆ دروستكردنی نموونەكانی ژیانی رۆژانە بە ئامانجی شیكاركردنیان. ئەمەش بەبیرهێنانەوەی هەنگاوەكانی شیكاركردنی پرسیارەكانە:

1. لە تێگەیشتنی پرسیارەكە دڵنیابە پێدراوەكان چین؟ داواكراو چییە؟
2. پلان دابنێ: چەند ڕێگایەكی جیاواز هەیە دەتوانیت بەكاریبهێنیت. بەدوای شێوازێك بگەڕێ پرسیارێكی ئاسانتر شیكاربكە، بە هەنگاوەكانت دابچۆوە، وێنەیەكی روونكردنەوەی دروستبكە.
3. پلانەكەت جێبەجێبكە. دڵنیابە كە وەڵامی پرسیارەكەت داوەتەوە وەڵامەكە دابڕێژە، بۆ نموونە لەجیاتی نووسینی وەڵامەكە $x = 4.6$ بنووسە، « رووبەری شێوەكە $4.6\ cm^2$ ».
4. بە هەنگاوەكاندا دابچۆوە ئایا وەڵامەكەت شیاوە؟ ئایا ڕێگایەك بۆ دڵنیابوون لەشیاویەكەی هەیە؟

جیاكاری و تەواوكاری چییە؟

هەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری بریتییە لە بیركاریی گۆڕان (خێرایی و تاودان) هەروەها بریتییە لە بیركاریی ڕاستەهێڵی لێكەوت و لاری و ڕووبەرو قەبارەو درێژی و چەقی قورسایی و چەمانەوە و زۆر لەچەمكەكانی تر. ئەو بیركارییە یارمەتی زانایەكان و ئەندازیارەكان و ئابووریناسەكانیدا بۆ دروستكردنی نمونە كارایەكان بۆ لێكۆڵینەوەی بارەكانی ژیانی ڕۆژانە. هەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری بە بیركاریی جووڵە (Dynamic) دەناسرێت بە پێچەوانەی ئەو بیركارییەی تاكو ئێستا فێربوویت كە بەبیركاریی وەستاو Static وەسفدەكرێت ئەمەش چەند نمونەیەكە:

- دەتوانیت لێكۆڵینەوە بۆ جولانی تەنێك بەخێراییەكی نەگۆڕ بكەیت بەبەكارهێنانی ئەو بیركارییەی تاكو ئێستا فێربوویت لەكاتێكدا پێویستیت بە هەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری دەبێت بۆ لێكۆڵینەوەی جوڵەی تەنێك خێراییەكەی بەپێی كات دەگۆڕێت.
- دەتوانیت لاری ڕاستەهێڵێك دیاریبكەیت بە بەكارهێنانی ئەو بیركارییەی تاكو ئێستا فێربوویت بەڵام بۆ دۆزینەوەی لاری چەماوەیەك لەخاڵێكدا پێویستیت بە هەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری دەبێت.
- بۆ هەژماركردنی ڕووبەر یان قەبارەی زۆر لەشێوە تەنە ئەندازەییەكان دەتوانیت ئەو بیركارییەی تاكو ئێستا فێربوویت بەكاربهێنێت، بەڵام، بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری شێوە ناڕێكەكان پێویستیت بەهەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری دەبێت، یان بۆ دۆزینەوەی قەبارەی ئەو تەنانەی باونین.

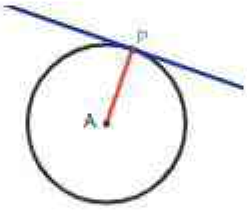
بارەكانی پێشوو هەمان كار لەخۆ دەگرن: دووبارە داڕشتنەوەی ئەوەی لەڕابردوودا فێربوویت بەبەكارهێنانی چەمكەكانی ئامانج و هەروەها، یەكێك لە وەڵامەكانی پرسیاری: هەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری چییە؟ دەتوانین بڵێین هۆكارێكی ژمێرارییە دەتوانرێت بنەما تیۆرییەكانی هەژمار بكرێت لە مامەڵەكردن لەگەڵ ئامانجەكان و جێبەجێكردنە كردارییەكان لەسەر ڕێسا و یاسا وردەكان بەكاربهێنێت. بە دەستەواژەیەكی وردتر هەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری سێ ئاست لەخۆدەگرێت ئاستی یەكەم: ئەو بیركارییەی تاكو ئێستا فێربوویت و ئاستی دووەم: ئاستی ئامانجەكانە و ئاستی سێیەم: ئاستی داتاشراو و تەواوكارییە.

ئەو بیركارییە تاكو ئێستا فێربوویت ← ئامانجەكان ← داتاشراو و تەواوكاری

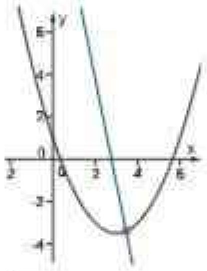
چەمكی ئامانج بەردی بناغەی لێكۆڵینەوەی جیاكاری و تەواوكاری پێكدەهێنێت. بۆ ئەوەی چەند بیرۆكەیەكت لە ڕۆڵی ئامانج لە هەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری لا دروستبێت. ئەمە كورتە باسێكە بۆ دوو بابەتی مێژوویی لەم بابەتەدا: بابەتی لێكەوت و بابەتی ڕووبەر.

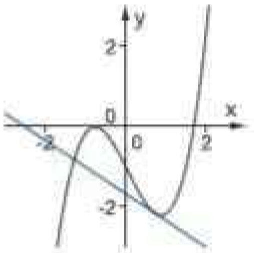
GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 4

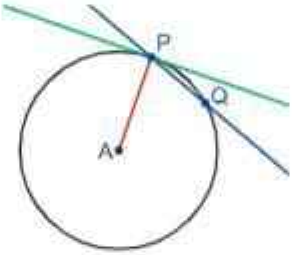
بابەتی لێکەوت



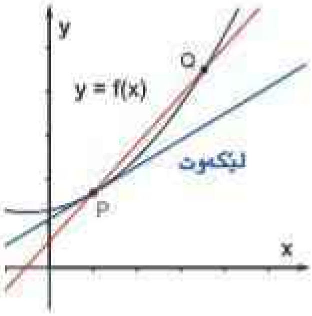
لە پۆلەکانی پێشوودا فێربوویت کە لێکەوتی بازنەیەك چەقەکەی A بێت، لەخاڵی P دا، بریتییە لەو ڕاستەهێڵەی بازنەکە تەنها لەخاڵی P دا دەبڕێت. بەشێوەیەکی گشتی ئەم پێناسە ڕاست نابێت کاتێك کارەکە پەیوەندی بە وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکانەوە هەبێت، هەروەك لەم دوو وێنەی خوارەوە دەردەکەوێت.



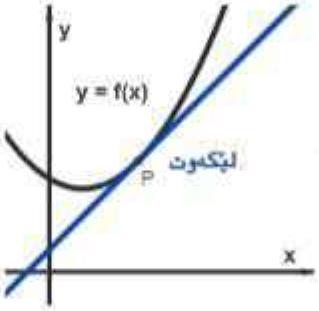




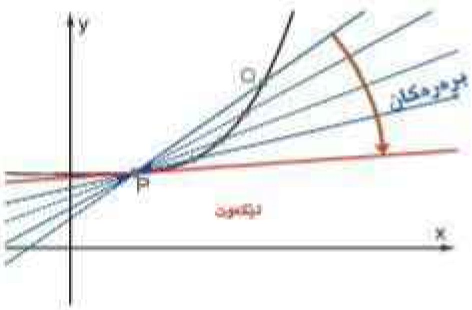
بەڵام لێکەوتی بازنە لەخاڵی Pدا لە ڕاستیدا، ئەوەیە بڕەری $\overleftrightarrow{PQ}$نزیکدەبێتەوە کاتێك خاڵی Q لەخاڵی P نزیکدەبێتەوە. لەژێر ڕۆشنایی ئەم تێبینییەوە ئەگەر تەماشای لێکەوتی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی$f(x)$ لەخاڵی P بکەین، وەك ئەوەی لە بڕەری $\overleftrightarrow{PQ}$ نزیکدەبێتەوە کاتێك خاڵیQ لە P نزیکدەبێتەوە.

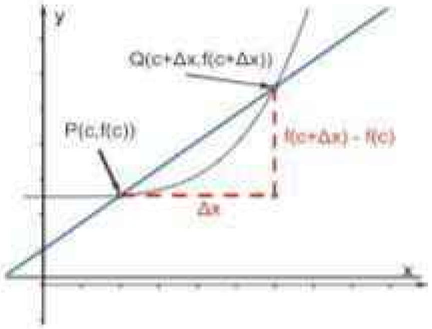


لە پرسیاری لێکەوت نەخشەی f و خاڵی P لەسەر ڕوونکردنەوەکەی دەدرێت، داوات لێدەکات لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەو خاڵەدا بدۆزیتەوە هەروەك لەوێنەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.



جگە لەو بارانەی لێکەوتی ئەستون دەگرێتە خۆ، پرسیاری دۆزینەوەی هاوکێشەی لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f لە خاڵی P دا بۆ دۆزینەوەی لاری ئەو لێکەوتە دەگەڕێتەوە، دەتوانیت هەژماری بەهای نزیکەیی ئەو لارییە بکەیت بەبەکارهێنانی ڕاستەهێڵێك کە بەخاڵی لێکەوت P و خاڵێکی تر لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکەدا دەڕوات، هەروەك لەوێنەی بەرامبەر دەردەکەوێت. ئەو ڕاستەهێڵە پێیدەوترێت بڕەری ڕوونکردنەوەی نەخشەکە. ئەگەر$P(c, f(c))$ خاڵی لێکەوت بێت و $Q(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$ خاڵێکی تر بێت لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە ئەوا لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بەو دوو خاڵەدا دەڕوات بریتییە لە $m = \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{(c+\Delta x)-c} = \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$





هەر چەند خاڵی Q لەخاڵی P نزیکدەبێتەوە، لاری بڕەرەکە لەلاری لێکەوت نزیکدەبێتەوە، هەروەك لەوێنەی لای چەپی سەرەوە دەردەکەوێت. ئەگەر بۆ بڕەرەکە شوێنێکی کۆتایی هەبێت، ئەوا بەلاری لێکەوتەکە دەوترێت ئامانجی لاری بڕەرەکە. (دوایی دەگەڕێینەوە بۆ ئەو بابەتە).

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 7

دۆزینەوە

ئەو خالانەی دێن دەکەونە سەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2$.

$Q_3(1.01, f(1.01))$ ، $Q_2(1.1, f(1.1))$ ، $Q_1(1.5, f(1.5))$.

$Q_5(1.0001, f(1.0001))$ ، $Q_4(1.001, f(1.001))$.

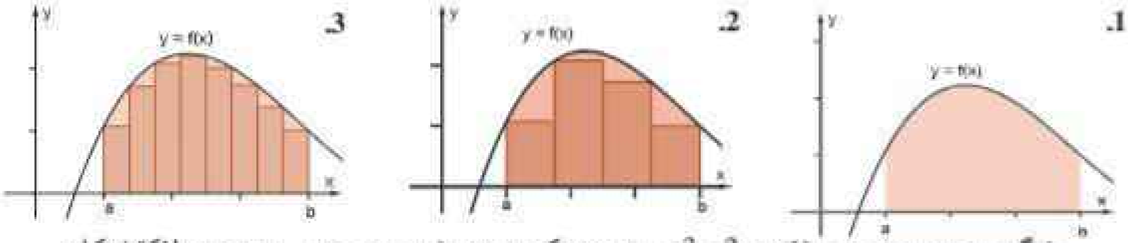
ئەو خالانە یەك لەدوای یەك لە خاڵی $P(1,1)$ نزیکدەبنەوە. لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بەخاڵی P و Q_1 و ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵی P و Q_2 ... دا دەڕوات هەژماربکە. لەهەمان ڕووتەختی پۆوتانەکان وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکەو ڕاستەهێڵەکانی کە لارییەکانیان هەژمارکراوە بکێشە. ئەو ئەنجامانەی دەستکەوتووە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای نزیکەیی لاری لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە. لەخاڵی P دا.

بابەتی ڕووبەر

لە بابەتی لێکەوت بینیت چۆن چەمکی ئامانج لەسەر لاری لێکەوت بەمەبەستی دۆزینەوەی لاری نەخشە جێبەجێکرا، دووەم بابەتی مێژوویی جیاکاری و تەواوکاری بریتییە لە بابەتی هەژمارکردنی ڕووبەری ئەو ناوچەیەی بە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە سنووردراوە. دەتوانرێت ئەم پرسیارانە بە بەکارهێنانی چەمکی ئامانج شیکاربکرێت. ئەو چەمکە بە بەکارهێنانی ڕووبەری لاکێشە جێبەجێدەکرێت بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری ئەو ناوچانەی باونین.

بۆ نموونە: لەو ناوچەیە ڕابمینێ کە بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y=f(x)$ وتەوەری x و هەردوو ڕاستەهێڵی ستوونی $x=a$ و $x=b$ سنووردراوە وەك لەو وێنەیەدا دەردەکەوێت.

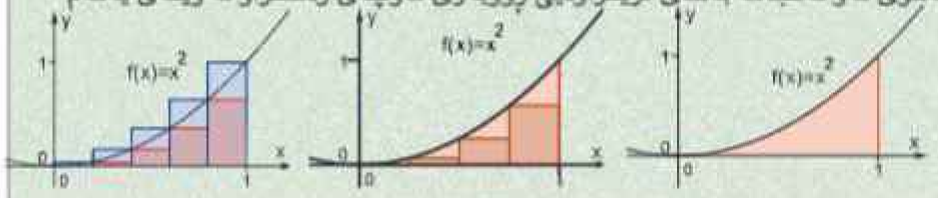
.1 .2 .3



ئەگەر سەیری هەردوو شێوەی 2 و 3ی سەرەوە بکەیت، دەبینیت سەرجەمی ڕووبەری لاکێشەکان دەکاتە بەهای نزیکەیی ڕووبەری ناوچەکە، هەرچەند ژمارەی لاکێشەکان زیادبکات سەرجەمی ڕووبەرەکانیان لەڕووبەری ناوچەکە زیاتر نزیکدەبێتەوە، چونکە ڕووبەری ئەو ناوچەیەی کەوتۆتە نێوان ڕوونکردنەوەی نەخشەکەو لاکێشەکان تادێت بچووك دەبێتەوە. بۆ دەستکەوتنی ڕووبەری ناوچەکە پێویستە ئامانجی سەرجەمی ڕووبەری لاکێشەکان بدۆزێتەوە «ئەگەر هەبوو»، کاتێك ژمارەی لاکێشەکان بەبەردەوامی زیاددەکات.

دۆزینەوە

سەیری ناوچەی سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2$ و هەردوو ڕاستەهێڵی $y=0$ و $x=1$ بکە. دەتوانیت ڕووبەری ناوچەکە نزیکبکەیتەوە بە بەکارهێنانی دوو کۆمەڵە لاکێشە. یەکەمیان بە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دەورەدراوە و دووەمیان بەدەوری ڕوونکردنەوەکەی. وەك لە وێنەکانی دووەم و سێیەمی خوارەوە دەردەکەوێت، ڕووبەری هەریەکە لە دوو کۆمەڵە لاکێشەکە بدۆزەوە. بەهۆی ئەو ئەنجامە بەهای نزیکراوەیی ڕووبەری ناوچەی ڕەنگکراو لە وێنەی یەکەم بدۆزەوە.



GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 6

1-2 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تاکو 9 دیاریبکە، ئایا دەتوانیت پرسیارەکە بەبێ بەکارهێنانی چەمکی ئامانج شیکاربکەیت.

1 تەنێك لەسەر هێڵێکی ڕاست بەپێی یاسای $d=3t^2$ دەجوڵێت، کە t کاتە بە چرکە و d دوورییە بە مەتر، بەپێی h ناوەندە خێرایی لەنێوان ساتەکانی $t=10$ و $t=10+h$ بدۆزەوە، پاشان خێرایی تەنەکە لەوساتەی $t=10$ بدۆزەوە.

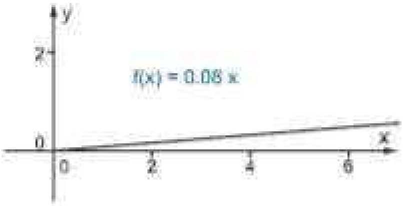
2 لاری لێکەوتی ئەخشەی $y=x^2$ لەخاڵی $(3,9)$دا بدۆزەوە.

3 ڕوونکردنەوەی ئەخشەی $y=\frac{1}{x}$ لە ماوەی $[0,2]$ بکێشە ماوەکە بۆ 8 بەشی یەکسان دابەشبکە، لاکێشەکان بەکاربهێنە بۆ دەورەدانی ڕووبەری ناوچەی دیارکراو بە چەماوەی ڕوونکردنەوەییەکە و تەوەری x و هەردوو ڕاستەهێڵی $x=1$ و $x=2$.

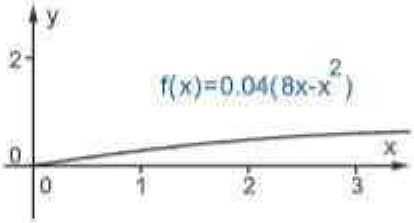
4 ئەو دوورییە بدۆزەوە کە تەنێکی جوڵاو لەماوەی 15 چرکەدا دەیبڕێت، ئەگەر خێراییەکەی 7 مەتربێت لە چرکەیەکدا.

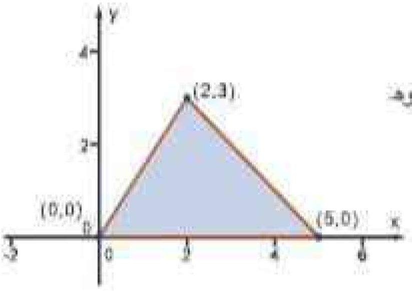
5 تەنێك بەخێراییەکی گۆڕاو بەپێی کات دەگۆڕێ بە ڕێسای $v(t)=5+7\cos t$، t کاتە بەچرکە و $v(t)$ خێرایی تەنەکەیە بەمەتر لە چرکەدا، ئەو دوورییەی تەنەکە دەیبڕێت لەماوەی 15 چرکەدا بدۆزەوە.

6 خاڵێك لەسەر ڕوونکردنەوەی ئەخشەی $f(x)=0.08x$ دەجوڵێت کە x بەرەو پێشچوونی ئاسۆیی خاڵەکەیە،$f(x)$ بەرزییەکەی بەرامبەری دەنوێنێت. تێکڕای گۆڕانی بەرزی خاڵەکە لە $x=2$ بدۆزەوە.

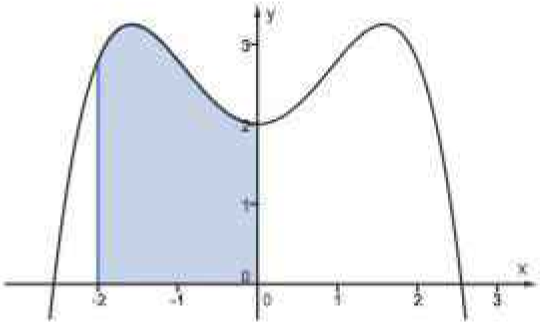


7 خاڵێك لەسەر ڕوونکردنەوەیی ئەخشەی $f(x)=0.04\left(8x-x^2\right)$ دەجوڵێت کە x بەرەو پێشچوونی ئاسۆیی خاڵەکە دەنوێنێت، $f(x)$ بەرزییەکەی بەرامبەری دەنوێنێت تێکڕایی گۆڕانی بەرزی خاڵەکە لە $x=2$ بدۆزەوە.





8 بەهای نزیکراوەیی ڕووبەری ناوچەی سێبەرکراوەکە بدۆزەوە.



9 بەهای نزیکراوەیی ڕووبەری ناوچە سێبەرکراوەکە بدۆزەوە.

10 نەخشەی $f(x)=4x-x^2$ وخاڵی $P(1,3)$ کە دەکەوێتە سەر ڕوونکردنەوەکەی بەکاربهێنە.

أ وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و بڕەرەکانی بکێشە کە بەخاڵی P و خاڵی $Q(x,f(x))$ دا دەڕوات. کاتێک x بەهایەکانی $0.5,1.5,2$ یەک لەدوای یەک وەردەگرێت.

ب لاری هەریەک لە سێ بڕەرەکە بدۆزەوە.

ج ئەنجامەکانی پرسیاری ب بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی لاری لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەخاڵی Pدا. باسبکە چۆن دەتوانیت بەهای لاری لێکەوتەکە لەبەها ڕاستییەکەی نزیک و نزیکتربکەیتەوە.

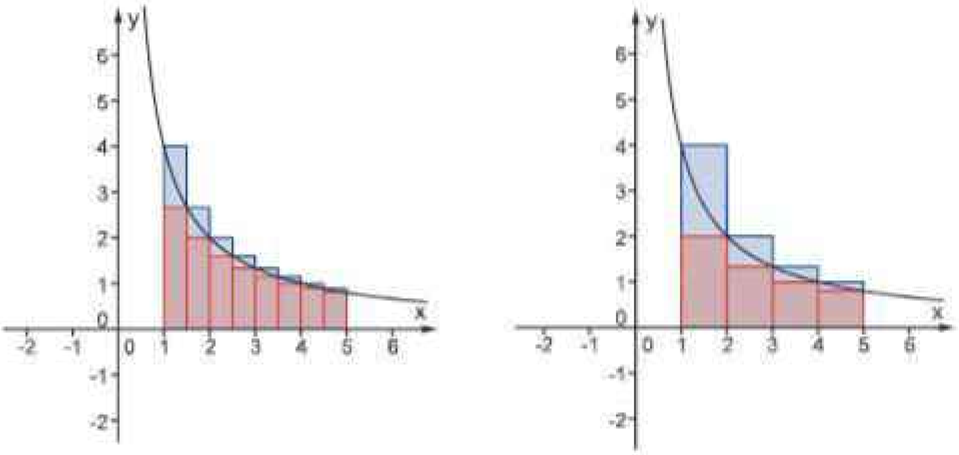
11 نەخشەی $f(x)=\sqrt{x}$ وخاڵی $p(4,2)$ کە دەکەوێتە سەر ڕوونکردنەوەکەی بەکاربهێنە.

أ وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و بڕەرەکانی بکێشە کە بەخاڵی P وخاڵی $Q(x,f(x))$ دا دەڕوات کە x بەهایەکانی 1 ، 3 ، 5 یەک لەدوای یەک وەردەگرێت.

ب لاری هەریەک لە بڕەرەکانی بدۆزەوە.

ج ئەنجامەکانی پرسیاری ب بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی لاری لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەخاڵی Pدا. باسبکە چۆن دەتوانیت بەهای لاری لێکەوتەکە لەبەها ڕاستییەکەی نزیک و نزیکتربکەیتەوە.

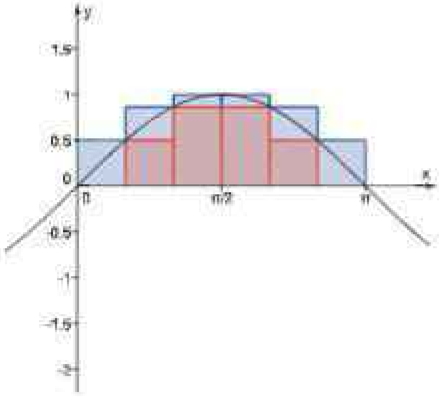
12 أ لاکێشەکان لەهەر وێنەیەک بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای نزیکراوەیی ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{4}{x}$ و ڕاستەهێڵەکانی $y=0$ و $x=1$ و $x=5$.

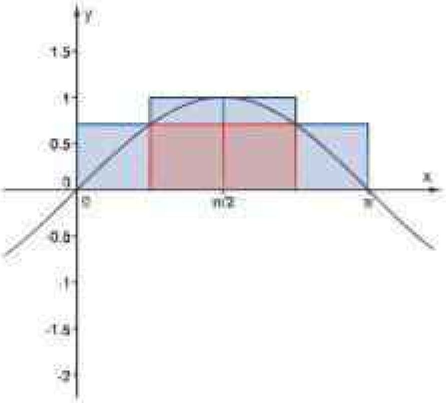


ب ڕوونیبکەوە چۆن دەتوانیت لەو کردارە بەردەوام بیت بۆ دەستکەوتنی بەهای ڕووبەری ناوچەکە کە لە بەها ڕاستەقینەکەی زیاتر و زیاتر نزیکدەبێتەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 8

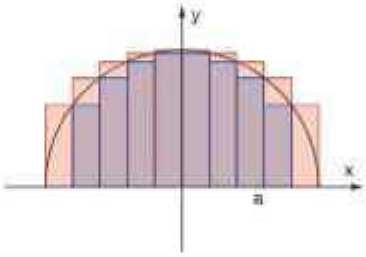
13 أ لاکێشەکان لەهەر وێنەیەك بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای نزیککراوەیی ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\sin x$ و ڕاستەهێڵەکانی $y=0$ و $x=0$ و $x=\pi$.





ب ڕوونیبکەوە چۆن دەتوانیت لەو کردارە بەردەوام بیت بۆ دەستکەوتنی بەهای ڕووبەری ناوچەکە کە لەبەهای ڕاستییەکەی زیاتر و زیاتر نزیکدەبێتەوە.

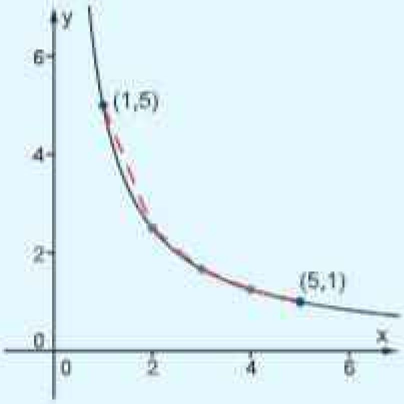
14 لاکێشەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای نزیکراوەیی ڕووبەری نیوە بازنەیەك تیرەکەی 2a بێت. چی دەکەیت بۆ دەستکەوتنی بەهای نزیك ونزیکتر لە ڕووبەری نیوە بازنەکە؟

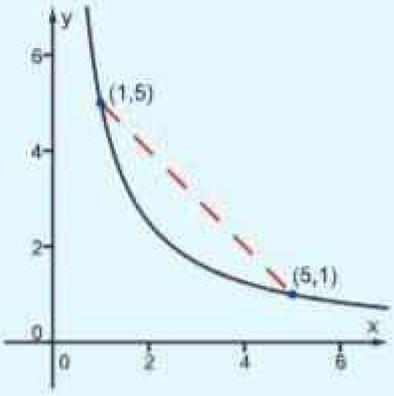


دەربارەی چەمکەکان

15 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{5}{x}$ لەنێوان دوو خاڵی $(1,5)$ و $(5,1)$ بەکاربهێنە.

أ بەهای نزیکراوەیی درێژی «کەوانەی» چەماوەی ڕوونکردنەوەی نێوان دوو خاڵەکە بدۆزەوە، بەهەژمارکردن دووری نێوان دوولای کەوانەکە، هەروەك لەوێنەی یەکەم دەردەکەوێت؟





ب بەهای نزیکراوەیی نوێ بۆ درێژی کەوانەی ڕوونکردنەوەکە بدۆزەوە، بە دۆزینەوەی سەرجەمی درێژی چوار پارچە ڕاستەهێڵەکە، وەك لەوێنەی دووەم دەردەکەوێت.

ج ڕوونیبکەوە، چۆن دەتوانیت لەسەر ئەو کردارە بەردەوام بیت بۆ دەستکەوتنی بەها نزیککراوەکانی درێژی کەوانەی ڕوونکردنەوەکە کە زۆر نزیك بێت لە درێژییە ڕاستەقینەکەی.

2–2 دۆزینەوەی ئامانجەکان بە ڕوونکردنەوەیی و ژمارەیی
Finding Limits Graphically and Numercially

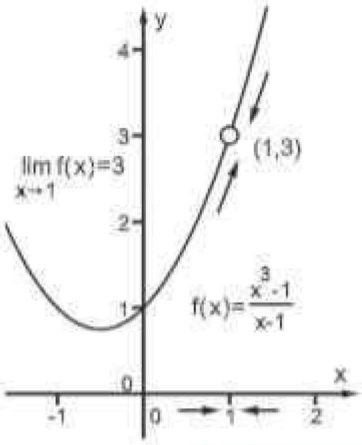
دەروازەیەك بۆ ئامانجەکان

سەیری وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ بکە کاتێك $x \neq 1$ ، سەرنج بدە هەرچەندە بەهای x لە 1 نزیکبێتەوە لە لای ڕاست و لە لای چەپ ئەوا $f(x)$ لە 3 نزیکدەبێتەوە. دەتوانین بەم دەربڕینە بنوسرێت.

$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ ، بخوێنەوە: ئامانجی $f(x)$ کاتێك x لە 1 نزیکدەبێتەوە یەکسانە بە 3

سەرنج بدە هەر چەندە نەخشەکە لە $x=1$ پێناسە نەکراوە نابێتە هۆی ئەوەی نەخشەکە ئامانجی نەبێت کاتێك x لە 1 نزیك دەبێتەوە.

دەتوانین ببینین کە $f(x)$ لە 3 نزیکدەبێتەوە کاتێك x لە 1 نزیکدەبێتەوە لەلای ڕاست و لەلای چەپ بە بەکارهێنانی دوو کۆمەڵە بەها بۆ x ، یەکێکیان ئەو بەهایانەی x کە لە 1 زیاترو زیاتر نزیکدەبێتەوە لەلای چەپ وە کۆمەڵەی دووەم کە لە 1 زیاترو زیاتر نزیکدەبێتەوە لەلای ڕاست.



بەهایەکانی x لەلای چەپ لە 1 نزیکدەبنەوە → ← بەهایەکانی x لەلای ڕاست لە 1 نزیکدەبنەوە

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

بەهایەکانی $f(x)$ لە لای چەپ لە 3 نزیکدەبنەوە → ← بەهایەکانی $f(x)$ لە لای ڕاست لە 3 نزیکدەبنەوە

تێبینە ئەوە بکە هەرچەندە x بەهای $x=1$ وەرناگرێت، بەڵام دەتوانرێت بەهایەکە لە 1 زیاترو زیاتر نزیکبکرێتەوە لەمەوە دەردەچێت بەهایەکانی $f(x)$ زیاترو زیاتر لە 3 نزیکدەبێتەوە ئەمە بە نووسین بەم شێوەیە دەردەبڕین.

$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ ، بخوێنەوە: ئامانجی $f(x)$ کاتێك x لە 1 نزیکدەبێتەوە یەکسانە بە 3

ئامانجەکان

- بەهای ئامانج دەخەمڵێنێت بە بەکارهێنانی ڕێگای وێنەی ڕوونکردنەوەیی یان ژمارەیی.
- ئەو بارە جیاوازانە فێر دەبێت، کە ئامانجی نییە

زاراوەکان
Vocabulary

ئامانج Limit

دۆزینەوە

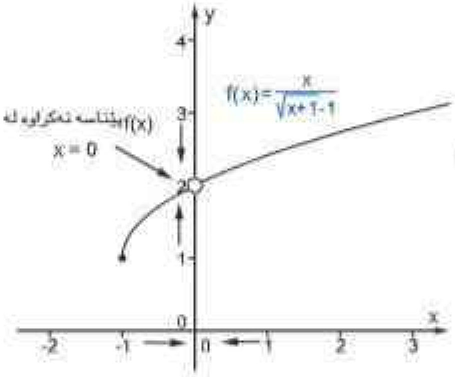
لە نمونەکانی پێشوو ڕووندەبێتەوە چۆن ئامانجێکی دیاریکراو دەخەملێنیت، بە ژمارەیی بە دروستکردنی خشتەی بەهایەکان، و بەڕوونکردنەوەیی بەکێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە. خشتەی بەهایەکان بۆ خەملاندنی ئەو ئامانجە بەکاربهێنە

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

x	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
$f(x)$	؟	؟	؟	؟	؟	؟	؟	؟	؟

نمونـــــە 1

خەملاندنی ئامانج بە ژمارەیی



بەهایەکانی نەخشەی $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ هەژماربکە کاتێك x چەند بەهایەکی نزیك لە $x=0$ وەردەگرێت ئەوەی دەستتدەکەوێت بەکاریبهێنە بۆ پێدانی بەهای نزیکراوەی ئامانجی $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$.

شیکار

لەم خشتەی خوارەوە بەهایەکانی $f(x)$ دەردەکەوێت کاتێك x چەند بەهایەکی نزیك لە $x=0$ وەردەگرێت.

بەهایەکانی x لەلای چەپ لە 0 نزیکدەبنەوە ← → بەهایەکانی x لەلای ڕاست لە 0 نزیکدەبنەوە

x	−0.01	−0.001	−0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	؟	2.00005	2.00050	2.00499

بەهایەکانی $f(x)$ لە لای چەپ لە 2 نزیکدەبنەوە ← → بەهایەکانی $f(x)$ لە لای ڕاست لە 2 نزیکدەبنەوە

لە ئەنجامەکانی خشتەکە دەردەکەوێت دەتوانرێت 2 بەبەهای نزیکراوەیی ئامانجی نەخشەی f دابنرێت کاتێك x لە 0 نزیکدەبێتەوە. وێنە ڕوونکردنەوەکەش ئەو دەرئەنجامە دووپاتدەکاتەوە لە نموونەی 1 تێبینی بکە کە نەخشەکە پێناسەنەکراوە لە $x=0$، سەرەڕای ئەوەش دەردەکەوێت. نەخشەکە لەئامانج نزیکدەبێتەوە کاتێك x لە 0 نزیکدەبێتەوە. زۆرجار ئەمە ڕوودەدات، بۆیە گرنگە ئاگاداربین کە نەخشەکە پێناسەکرابێت یان نا لە $x=c$ کارناکاتە سەر هەبوونی ئامانجی $f(x)$ کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە.

خاڵی چاودێری

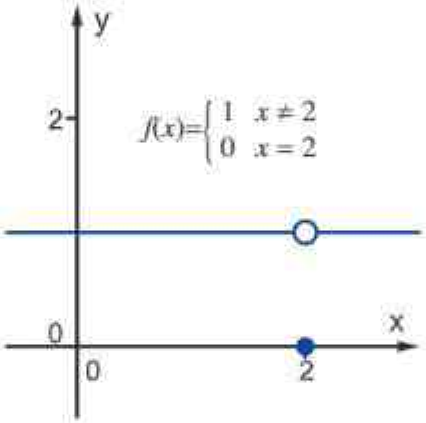
1. بەهایەکانی نەخشەی $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ هەژماربکە کاتێك x چەند بەهایەکی نزیك لە $x=0$ وەردەگرێت. ئەوەی دەستتدەکەوێت بەکاریبهێنە بۆ پێدانی بەهای نزیکراوەیی ئامانجی $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$.

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 13

نموونــــە 2 ئامانجی نەخشەی ڕێسایەلدار

ئامانجی نەخشەی $f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$

کاتێك x نزیکدەبێتەوە لە 2 **بدۆزەوە.**



شیکار

لەبەرئەوەی $f(x)=1$ کاتێك x بەهای جیاواز لە 2 وەردەگرێت. لەمەوە دەردەچێت ئامانجەکە دەکاتە 1 وەك لەوێنەکەی بەرامبەر دەردەکەوێت. دەتوانیت بنووسیت $\lim_{x\to 2} f(x)=1$

ئەگەر $f(x)$ لە $x=2$ پێناسەکرابێت وئەگەر $f(2)=0$ کارناکاتە سەر هەبوونی ئامانجەکەو بەهایەکەی، ئەگەر بێتو نەخشەکە بەم شێوەی دێت پێناسەکرابوایە.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 2\\ 2 & x=2\end{cases}$$

هیچ لە ئامانجەکە نەدەگۆڕا.

خاڵی چاودێری

2. $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -x-1 & x>0\end{cases}$

ئامانجی نەخشەکە کاتێك x لە 0 نزیکدەبێتەوە بدۆزەوە.

تا ئێستا ئامانجەکانت بە ژمارەیی و ڕوونکردنەوەیی دەخەملاند، لەوانەی داهاتوودا ڕێگای جەبری فێردەبیت بۆ دۆزینەوەی ئامانجەکان، هەوڵبدە لەماوەی خوێندنی جیاکاری و تەواوکاری پەرە بەو سێ ڕێگایە بدەیت بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ئامانج.

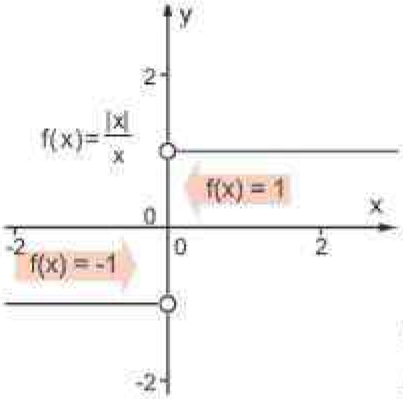
- ڕێگا ژمارەییەکان دروستکردنی خشتەی بەهایەکان بۆ نەخشەکە
- ڕێگا ڕوونکردنەوەییەکان کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە
- ڕێگا جەبرییەکان بەکارهێنانی جەبر یان هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری.

نەبوونی ئامانجەکان

لەم سێ نموونەی دێت ئەو بارانە دەردەکەوێت کە ئامانج هەموو جارێك بوونی نییە.

نموونــــە 3 کاتێك سیفەتی لای چەپ و ڕاستی جیاواز دەبێت

دیاریبکە ئامانجی $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ بوونی نییە.



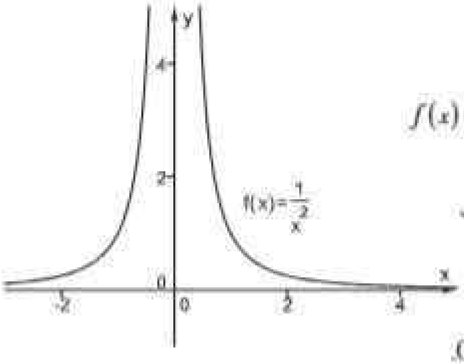
وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{|x|}{x}$ بکێشە. ئەگەر سەیری ڕوونکردنەوەی شێوەی بەرامبەر بکەیت، دەبینیت کە $\frac{|x|}{x}=1$ کاتێك $x>0$ و $\frac{|x|}{x}=-1$ کاتێك $x<0$ ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە بەهایەکانی $f(x)$ موجەب دەبن بەهای x لەلای ڕاستی 0 هەرچەندبێت، وسالب دەبن بەهای x لەلای چەپی 0 هەرچەندبێت. بەمەش نزیکبوونەوەی بەهایەکانی $f(x)$ لەهەمان بەها ئەستەم دەبێت، کاتێك x لە لای ڕاست یان لەلای چەپ لە 0 نزیکدەبێتەوە. لەوەش دەردەچێت کە نەخشەکە ئامانجی نییە کاتێك x لە 0 نزیکدەبێتەوە.

خاڵی جاوێری 3. ڕوونیبکەوە کە ئامانجی $\lim_{x\to 0}f(x)$ کاتێك $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ بوونی نییە.

نموونــــە 4 سیفەتی بێسنوور

دیاریبکە ئایا $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ بوونی هەیە یان نا.

شیکار



شێوەی بەرامبەر وێنە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ڕووندەکاتەوە، دەبینین بەهای $f(x)$ بێسنوور زیاددەکات هەرچەند x لەلای چەپ یان لەلای ڕاست لە 0 نزیکدەبێتەوە، ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت، دەتوانرێت بەهای $f(x)$ گەورە بکرێت بەپێی ئەوەی دەتەوێت بەهەڵبژاردنی بەهایەك بۆ x نزیك بێت لە 0.

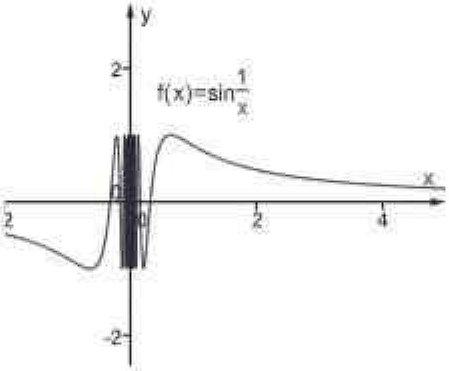
بۆ نموونە: دەتوانیت بەهای $f(x)$ گەورەتر بکەین لە 100 ئەگەر بەهایەك بۆ x کەمێك دوورتر لە $\frac{1}{10}$ لە 0 هەڵبژێرین، بێگومان ئەگەر $0<|x|<\frac{1}{10}$ ئەوا $f(x)=\frac{1}{x^2}>100$ هەروەها دەتوانیت بەهای $f(x)$ گەورەتربکەین لە 1000 000 ئەگەر بەهایەك بۆ x کەمێك دوورتر لە $\frac{1}{1000}$ لە 0 هەڵبژێرین چونکە لە پەیوەندی $0<|x|<\frac{1}{1000}$ دەردەچێت $f(x)=\frac{1}{x^2}>1000\,000$ لەبەرئەوەی $f(x)$ لە هیچ ژمارەیەکی دیاریکراوی L نزیك نابێتەوە، کاتێك x نزیکدەبێتەوە لە 0 لەبەرئەوە ئامانجی نەخشەکە بوونی نییە.

خاڵی جاوێری 4. دیاریکە ئایا $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ بوونی هەیە یان نا.

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 15

نموونــــە 5 سیفەتی لەرەلەردار

لەبوونی ئامانجی $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ بکۆڵەوە.



شیکار

لەشێوەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ دەردەکەوێت دەبینیت بەهای $f(x)$ لەنێوان 1 و -1 لەرەلەر دەکات هەرچەند x لەلای ڕاست یان لەلای چەپ لە 0 نزیکدەبێتەوە، بێگومان هەمیشە دەتوانیت دوو بەهای x_1 و x_2 نزیک لە 0 بۆ گۆڕاوی x هەڵبژێریت بەپێی ئەوەی دەتەوێت و پاسادانی $f(x_1)=\sin\frac{1}{x_1}=1$ و $f(x_2)=\sin\frac{1}{x_2}=-1$ بکات وەك لەم خشتەیەی خوارەوە دەردەکەوێت.

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{11\pi}$	$x\to 0$
$f(x)$	1	-1	1	-1	1	-1	ئامانج بوونی نییە

خاڵی جاودێری **5.** لەبوونی ئامانجی $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ بکۆڵەوە.

جۆرەکانی سیفەتی ناوەڵ بۆ نەبوونی ئامانج

1. کاتێك x لەلای ڕاست لە c نزیکدەبێتەوە، بەهایەکانی $f(x)$ لە ژمارەیەك نزیکبێتەوە جیاوازە لەو ژمارەیەی کاتێك x لەلای چەپ لە c نزیکدەبێتەوە.

2. بەهایەکانی $f(x)$ بێسنوور زیاددەکەن یان کەمدەکەن کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە.

3. بەهایەکانی $f(x)$ لەنێوان دوو ژمارەی نەگۆڕی جیاواز لەرەلەر بکات کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە.

پێتر دیریکلیە 1805–1859
دیریکلیە یەکەم کەس بوو پێناسەی نوێی بۆ نەخشە کرد، بەهێشت بەستن بەو نەخشەیەی بەناوی ئەو نووسراوە

زۆر نەخشەی تر هەن سیفەتی نائاساییان هەیە کاتێك x لە بەهای دیاریکراوی c نزیکدەبێتەوە، لەو نەخشانەش نەخشەی دیریکلیە Dirichlet function کە بەم شێوەیە پێناسەکراوە.
(Q کۆمەڵەی ژمارە ڕێژەییەکان)

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in Q\\ 1 & x\notin Q\end{cases}$$

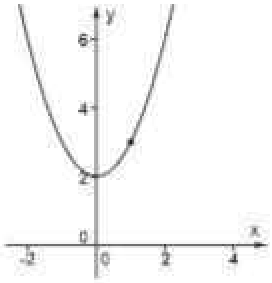
ئەم نەخشەیە ئامانجی نییە کاتێك x لەهەر بەهایەکی ڕاستی c نزیکدەبێتەوە بۆیەش لە هیچ ژمارەیەکی ڕاستی بەردەوام نییە، لەوانەی داهاتوو بەردەوامی نەخشەکان دەخوێنین.

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 14

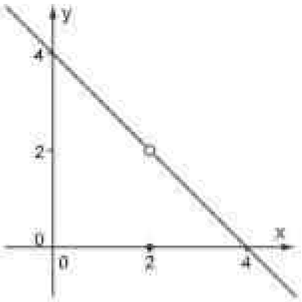
2-2 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی **1** تا **6** ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئامانجەکە ئەگەر هەبوو، ئەگەر ئامانجەکە نەبوو هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

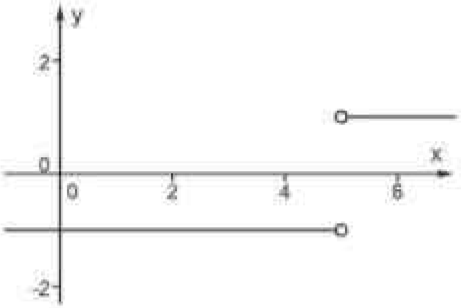
1 $\lim_{x\to 1}\left(x^2+2\right)$



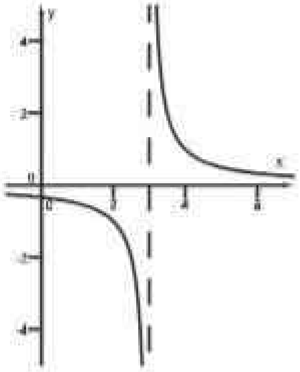
2 $\lim_{x\to 2} f(x)$ کاتێک $f(x)=\begin{cases}4-x & x\neq 2\\ 0 & x=2\end{cases}$



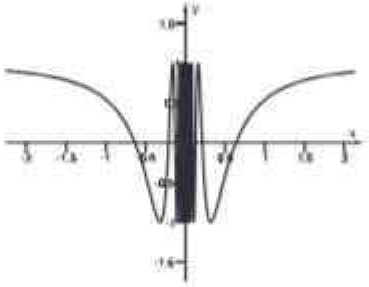
3 $\lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}$



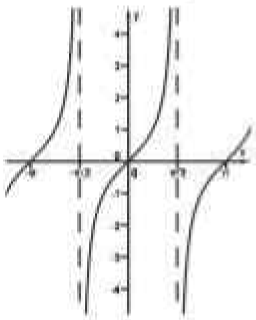
4 $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$



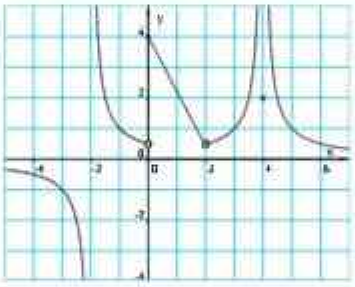
5 $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$



6 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$



7 وێنەی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ وەڵامدانەوە ئەگەر ئامانجی هەبێت، بەهایەکی نزیکراوەیی دەستنیشانبکە و ئەگەر نەیبوو هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

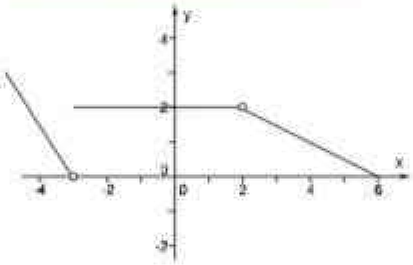


أ $f(-2)$ ب $\lim_{x\to -2} f(x)$

ج $f(0)$ د $\lim_{x\to 0} f(x)$

هـ $f(2)$ و $\lim_{x\to 2} f(x)$

ز $f(4)$ ح $\lim_{x\to 4} f(x)$



8 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهایەکانی c کە وادەکات $\lim_{x\to c} f(x)$ هەبێت.

9 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 2 \\ 8-2x & 2<x<4 \\ 4 & x\ge 4 \end{cases}$ بکێشە وبەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهای c کاتێک $\lim_{x\to c} f(x)$ هەبێت.

ڕاست یان هەڵە لە ڕاهێنانەکانی 10 تاکو 31 دیاریبکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە و ئەگەر هەڵەیە بە دژە نمونەیەک بیسەلمێنە.

10 ئەگەر نەخشەی f پێناسەنەکرابێت لە $x=c$ ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)$ بوونی نییە.

11 ئەگەر $f(c)=L$ ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)=L$.

12 ئەگەر $\lim_{x\to c} f(x)=L$ ئەوا $f(c)=L$.

13 نەخشەی $f(x)=\sqrt{x}$ بەکاربهێنە.

أ ئایا ڕاستە؟ $\lim_{x\to 0.25} \sqrt{x}=0.5$، وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

ب ئایا ڕاستە؟ $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}=0$، وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

دەربارەی چەمکەکان

14 باسێکی بەپێز بنووسە کە $\lim_{x \to 8} f(x) = 25$ چی دەگەیەنێت.

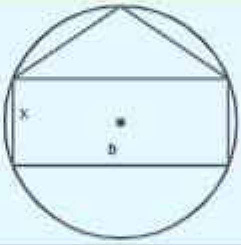
15 ئەگەر $f(2) = 4$ ئایا هیچ دەرئەنجامێکت لەبارەی ئامانجی $f(x)$ دەستدەکەوێت کاتێك x لە 2 نزیکدەبێتەوە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

16 ئەگەر ئامانجی $f(x)$ بکاتە 4 کاتێك x لە 2 نزیکدەبێتەوە، ئایا هیچ دەرئەنجامێکت لەبارەی $f(2)$ دەستدەکەوێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

17 3 جۆر لە سیفەتەکانی ئەخشە دیاربکە کەدەبنە هۆی نەبوونی ئامانج. وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەخشەیەك بۆ هەر سیفەتێك بکێشە.

بەرەنگاری

18 لەوێنەکە لاکێشەیەك و سێگۆشەیەکی دوولایەکسان دەردەکەوێت کە بە بازنەیەك نیوەتیرەکەی 1 بێت دەورەدراوە. بەهای x چەندە؟ کەواتەکات ڕووبەری لاکێشەکەو سێگۆشەکە یەکسان بن.



GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 19

3-2 هەژمارکردنی ئامانجەکان
Finding Limits

ئامانجەکان

- بە بەکارهێنانی ڕێسایەکان ئامانجی نەخشە هەژماردەکات.
- ڕێگایەک بۆ هەژمارکردنی ئامانج دەدۆزێتەوە و بەکاریدەهێنێت.
- ئامانجی بڕێک بە نووسینی بە سادەترین شێوە هەژماردەکات.
- بە بەکارهێنانی سەلمێنراوی دوولەت (مەرج) ئامانج هەژماردەکات.

هەژمارکردنی ئامانجەکان

لەوانەکەی پێشوو فێربوویت چۆن بە ڕوونکردنەوەیی وژمارەیی بەهای نزیکەیی ئامانجی نەخشەیەک بدۆزییەوە (لەباری هەبوونیدا) لەم وانەیەدا فێردەبیت چۆن ئامانجی نەخشەیەک بە بەکارهێنانی چەند ڕێسایەک وهەندێک لە ئامانجە ناسراوەکان بدۆزیتەوە، هەروەها سەلمێنراوی دوولەت (مەرج) فێردەبیت، وچۆن لە هەژمارکردنی ئامانجەکان بەکاریدەهێنیت.

هەندێک لە ڕێساکانی هەژمارکردنی ئامانجەکان

ڕێسای نەخشەی نەگۆڕ: ئەگەر $f(x)=a$ کە a ژمارەیەکی ڕاستی نەگۆڕە ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)=a$.

ڕێسای نەخشەی هێڵی بنەڕەتی: ئەگەر $f(x)=x$ ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)=c$.

ڕێسای نەخشەی هێز: ئەگەر $f(x)=x^n$ ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)=c^n$.

ڕێسای نەخشەی ڕەگی دووجا: ئەگەر $f(x)=\sqrt{x}$ ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)=\sqrt{c}$ کاتێک $c>0$.

ڕێسای لێکدان لە ژمارەیەکی نەگۆڕ: ئەگەر $\lim_{x\to c} f(x)$ هەبێت ئەوا $\lim_{x\to c}[af(x)]=a\lim_{x\to c} f(x)$.
کاتێک a ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

ڕێسای سەرجەم: ئەگەر f و g دوو نەخشەبن، و کاتێک a ژمارەیەکی ڕاستی بێت ئەگەر ئامانجی $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ هەبێت، ئەوا

$$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)$$

ڕێسای جیاوازی: ئەگەر f و g دوو نەخشەبن، و ئەگەر ئامانجی $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ هەبێت، ئەوا

$$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to c} f(x)-\lim_{x\to c} g(x)$$

ڕێسای لێکدان: ئەگەر f و g دوو نەخشەبن، و ئەگەر ئامانجی $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ هەبێت، ئەوا

$$\lim_{x\to c}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to c} f(x)\lim_{x\to c} g(x)$$

نموونە 1 ئامانجی نەخشە ڕادەدارەکان

$\lim_{x\to 2} f(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=-2x^5+3x^2-7x+5$

شیکار

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(-2x^5+3x^2-7x+5\right)$$

ڕێسای سەرجەم بەکاربهێنە $\quad = \lim_{x\to 2}\left(-2x^5\right)+\lim_{x\to 2}\left(3x^2\right)+\lim_{x\to 2}(-7x)+\lim_{x\to 2}(5)$

ڕێسای لێکدان لە ژمارە بەکاربهێنە $\quad =-2\lim_{x\to 2}\left(x^5\right)+3\lim_{x\to 2}\left(x^2\right)+(-7)\lim_{x\to 2}(x)+\lim_{x\to 2}(5)$

ڕێسای نەخشەی هێز بەکاربهێنە $\quad =-2\times 2^5+3\times 2^2-7\times 2+5=-61$

خاڵی جاوێری 1. $\lim_{x\to 2} f(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=3x^5-2x^3-4x^2-3$

لە ڕێساکانی هەژمارکردنی ئامانجەکان

ڕێسای ئامانجی نەخشەی ڕادەدار: ئەگەر $f(x)$ نەخشەیەکی ڕادەداربێت ئەوا $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

ڕێسای دابەش: ئەگەر f و g دوو نەخشەبن، ئەگەر ئامانجی $\lim_{x\to c} f(x)$ و $\lim_{x\to c} g(x)$ هەبێت، ئەوا کاتێك $\lim_{x\to c} g(x)\neq 0$

ئەوا: $$\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

نموونە 2 ئامانجی نەخشەی ڕێژەیی

$\lim_{x\to 2} f(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=\frac{x^2-1}{x-3}$ نەخشەیەکی ڕێژەییە.

شیکار

بە بەکارهێنانی ڕێسای دابەش دەتوانیت بنووسیت.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{\lim_{x\to 2}\left(x^2-1\right)}{\lim_{x\to 2}(x-3)}=\frac{2^2-1}{2-3}=-3$$

خاڵی جاوێری 2. $\lim_{x\to 2} f(x)$ **بدۆزەوە کاتێك** $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ **نەخشەیەکی ڕێژەییە**

لەکاتی دۆزینەوەی ئامانجێکی دیاریکراو خۆت بەرامبەر بارێکی نادیاری $\frac{0}{0}$ دەبینیەوە زۆرجار ئەمە لە دۆزینەوەی نەخشە ڕێژەییەکان ڕوودەدات. لە نموونەی دێت دەبینیت چۆن نادیاری بە ڕێگای جەبری لادەبەیت وئامانج دەدۆزیتەوە. لەبەشەکانی داهاتوو بۆ ئەم پرسیارە دەگەڕێینەوە تارێگایەکی کارا بۆ شیکارکردنی ئەم جۆرە پرسیارانە فێربیت.

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 21

نموونە 3

باری نادیار

$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$ بدۆزەوە.

شیکار

جێبەجێکردنی ڕێسای ئەخشەی ڕێژەیی دەبێتە بارێك لەبارەکانی نادیار.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{\lim_{x\to1}x^2-1}{\lim_{x\to1}x-1}=\frac{0}{0}$$

بۆ لادانی نادیارەکە $(x+1)$ $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=$ بەکاربهێنە کاتێك $x\neq1$ لەمەش دەردەچێت.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

3. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ بدۆزەوە.

نموونە 4

باری نادیار

$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ بدۆزەوە.

شیکار

جێبەجێکردنی ڕێسای ئەخشەی ڕێژەیی دەبێتە بارێك لەبارەکانی نادیار.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\frac{\lim_{x\to3}\sqrt{x+6}-3}{\lim_{x\to3}x-3}=\frac{0}{0}$$

بۆ لادانی نادیار سەرەو ژێرە لە ناوەڵی$(\sqrt{x+6}-3)$کە دەکاتە$(\sqrt{x+6}+3)$بدە، ئەمەت دەستدەکەوێت.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{(\sqrt{x+6}+3)}=\frac{1}{6}$$

4. $\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ بدۆزەوە.

لە ڕێساکانی هەژمارکردنی ئامانجەکان

ڕێسای ئامانجی ئەخشەی ناوێتە: ئەگەر f و g دوو ئەخشەبن، ئەگەر ئامانجی $\lim_{x\to c}g(x)=L$ و $\lim_{x\to L}f(x)$ هەبێت، ئەوا

$$\lim_{x\to c}[f(g(x))]=f\left(\lim_{x\to c}g(x)\right)=f(L)$$

نموونە 5 ئامانجی نەخشەی ناوێتە

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ بدۆزەوە کاتێک $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

شیکار

$f(x)$ نەخشەیەکی ناوێتەیە لە دوو نەخشەی $u(x) = \sqrt{x}$ و $v(x) = x^2 + 4$ پێکهاتووە،

واتە $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{v(x)} = u(v(x))$.

لەمەش دەردەچێت $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} u(v(x))$ بەڵام $\lim\limits_{x \to 2} v(x) = v(2) = 8$

لەمەش دەردەچێت $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 8} \sqrt{x} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

خالی چاودێری 5. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ بدۆزەوە کاتێک $f(x) = \sqrt{x^3 - 4}$.

لە ڕێساکانی هەژمارکردنی ئامانجەکان

ڕێسای نەخشە سێگۆشەییەکان

$\lim\limits_{x \to c} \sin x = \sin c$ $\lim\limits_{x \to c} \cos x = \cos c$ $\lim\limits_{x \to c} \tan x = \tan c$ $c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

نموونە 6 ئامانجی نەخشەیەک کەنەخشەی سێگۆشەی لەخۆدەگرێت

$\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$ بدۆزەوە کە $f(x) = x\cos x$

شیکار

$$\lim_{x \to \pi} f(x) = \lim_{x \to \pi}(x\cos x) = \lim_{x \to \pi}(x)\lim_{x \to \pi}(\cos x) = \pi\cos\pi = -\pi$$

خالی چاودێری 6. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$ بدۆزەوە کاتێک $f(x) = x\sin x$

لە ڕێساکانی هەژمارکردنی ئامانجەکان

ڕێسای نەخشەی توانی سروشتی $\lim\limits_{x \to c} e^x = e^c$

ڕێسای نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی: $\lim\limits_{x \to c} \ln x = \ln c$ $c > 0$

نموونە 7 ئامانجی نەخشەی توانی

$\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$ بدۆزەوە کاتێک $f(x) = 3e^{\sin x}$

شیکار

$$\lim_{x \to \pi} f(x) = \lim_{x \to \pi}\left(3e^{\sin x}\right) = \lim_{x \to \pi}(3)\lim_{x \to \pi}\left(e^{\sin x}\right) = 3e^{\lim\limits_{x \to \pi}\sin x} = 3e^{\sin\pi} = 3e^0 = 3$$

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 23

خاڵی چاوێری 7. $\lim_{x\to 0} f(x)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=3ln(x+1)$.

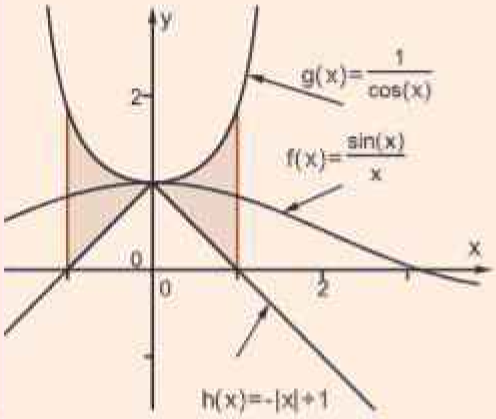
لەوانەیە لە هەندێك باردا ئاسان نەبێت، ئامانجی نەخشەیەك ڕاستەوخۆ بدۆزیتەوە، سەلمێنراوی دوو مەرج لەم بارانە یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوەی ئامانجی داواکراو.

سەلمێنراوی 2-1 سەلمێنراوی هەردوولەت (دوومەرج) (الشطرين السندويج)

ئەگەر $h(x)\le f(x)\le g(x)$ بەهای x لە هاوسێیەکانی $x=c$ هەرچەندبێت جگە لە $x=c$ وئەگەر

$$\lim_{x\to c} h(x)=L=\lim_{x\to c} g(x)$$

ئەوا ئامانجی $\lim_{x\to c} f(x)$ بوونی هەیە وە $\lim_{x\to c} f(x)=L$.



سەلمێنراوی هەردوولەت (دوومەرج) بۆ دۆزینەوەی هەندێك ئامانجی گرنگ یارمەتیت دەدات وەك ئەو دوو ئامانجەی خوارەوە

هەندێك ئامانجی سێگۆشەیی

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

نمونە 8 بەکارهێنانی سەلمێنراوی هەردوولەت (دوومەرج)

$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$ بدۆزەوە.

شیکار

بەپشت بەستن بە لاسەنگەی دوانی $-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$ دەتوانیت ئەمە بنووسیت $-x\le x\cos\frac{1}{x}\le x$ ئەگەر $x\ge 0$ وە ئەمە بنووسیت $-x\ge x\cos\frac{1}{x}\ge x$ ئەگەر $x<0$.

دەتوانیت سەلمێنراوی دوو مەرج ولاسەنگەی $-x\le x\cos\frac{1}{x}\le x$ بەکاربهێنێت بۆ ئەوەی بگەیتە ئەوەی کە $x\cos\frac{1}{x}$ لە 0 نزیکدەبێتەوە کاتێك x لەلای ڕاست لە 0 نزیکدەبێتەوە هەروەها دەتوانیت سەلمێنراوی دوو مەرج ولاسەنگەی $-x\ge x\cos\frac{1}{x}\ge x$ بەکاربهێنێت بۆ ئەوەی بگەیتە ئەوەی کە $x\cos\frac{1}{x}$ لە 0 نزیکدەبێتەوە کاتێك x لەلای چەپ لە 0 نزیکدەبێتەوە، ئەمەش ئەوە دەسەلمێنێت کە $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$.

خاڵی چاوێری 8. $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 22

3-2 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 3 ئامانجی داواکراو بدۆزەوە.

1 $\lim_{x\to 1}\left(3x^3-2x^2+4\right)$

2 $\lim_{x\to 3}\frac{2}{x+2}$

3 $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}}{x-4}$

لە ڕاهێنانی 4 و 5 دا ئەمانە بدۆزەوە.

4 ئەگەر $f(x)=5-x$ ؛ $g(x)=x^3$ ئەوا أ $\lim_{x\to 1}f(x)$ ب $\lim_{x\to 4}g(x)$ ج $\lim_{x\to 1}g(f(x))$ بدۆزەوە

5 ئەگەر $f(x)=2x^2-3x+1$ ؛ $g(x)=\sqrt[3]{x+6}$ ئەوا أ $\lim_{x\to 4}f(x)$ ب $\lim_{x\to 21}g(x)$ ج $\lim_{x\to 4}g(f(x))$ بدۆزەوە

لە ڕاهێنانی 6 تا 9 ئامانجی داواکراو بدۆزەوە.

6 $\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}$

7 $\lim_{x\to \pi}\cos 3x$

8 $\lim_{x\to 3}\tan\frac{\pi x}{4}$

9 $\lim_{x\to 6}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{6}}$

لە ڕاهێنانی 10 و 11 دا زانیارییە دراوەکان بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ئامانجە داواکراوەکە

10 $\lim_{x\to c}f(x)=2$ ؛ $\lim_{x\to c}g(x)=3$

أ $\lim_{x\to c}[5g(x)]$ ب $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ ج $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)]$ د $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$

11 $\lim_{x\to c}f(x)=27$

أ $\lim_{x\to c}\sqrt[3]{f(x)}$ ب $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{18}$ ج $\lim_{x\to c}[f(x)]^2$ د $\lim_{x\to c}[f(x)]^{\frac{2}{3}}$

لە ڕاهێنانی 12 تا 20 ئامانجی داواکراو بدۆزەوە.

12 $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$

13 $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$

14 $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

15 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+4}-\frac{1}{4}}{x}$

16 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$

17 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

18 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$

19 $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

20 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3}}{x}$

لە ڕاهێنانی 21 تا 26 ئامانجی داواکراو بدۆزەوە.

21 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{5x}$

22 $\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{x}$

23 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x}{x}$

24 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$

25 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x}$

26 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (یارمەتی: بنووسە $\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{3\sin 3x}$)

لە دوو ڕاهێنانی 27 و 28 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ بدۆزەوە.

27 $f(x)=\sqrt{x}$

28 $f(x)=\frac{4}{x}$

لە دوو ڕاهێنانی 29 و 30 سەلمێنراوی هەردوولەت (دوو مەرج) بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

29 $4-x^2\le f(x)\le 4+x^2$ ، $c=0$

30 $b-|x-a|\le f(x)\le b+|x-a|$ ، $c=a$

دەربارەی چەمکەکان

31 ڕوونبکەوە دەستەواژەی «دوو نەخشە هاووێنەن جگە لە خاڵێکدا» چی دەگەیەنێت.

32 نموونەیەک لەسەر (دوو نەخشەی هاووێنە جگە لە خاڵێکدا) بهێنەوە.

33 سەلمێنراوی دوو مەرج بەشێوازی خۆت ڕوونبکەوە.

لە دوو ڕاهێنانی 34 و 35 نەخشەی لادانی $s(t)=-4.9t^2+150$ بەکاربهێنە کە شوێنی کەوتنی بەردێک لەبەرزی 150 m پاش t چرکە دیاریدەکات، ئەو ئامانجە $\lim\limits_{t\to a}\frac{s(a)-s(t)}{a-t}$ خێرایی تەنە کەوتووەکە دەردەبڕێت لە $t=a$.

34 خێرایی بەردەکە لە $t=5$ بدۆزەوە.

35 خێرایی بەردەکە لەکاتی بەرکەوتنی بەزەوی چەندە؟

36 دوو نەخشەی f و g کە ئەمانە جێبەجێدەکەن بدۆزەوە: ئامانجی $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ بوونی نییە لە کاتێکدا ئامانجی $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]$ بوونی هەیە.

37 f و g ئەمانە جێبەجێدەکەن: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ و $|g(x)|\le M$ بەهای x هەرچەند بێت جگە لە $x=c$ کاتێک M ژمارەیەکی موجەبی نەگۆڕبێت، بسەلمێنە $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)=0$

ڕاست یان هەڵە لە ڕاهێنانی 38 تاکو 41 دیاریبکە کە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە ئەگەر هەڵەیە ئەوا بەدژە نموونەیەک بیسەلمێنە

38 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=1$

39 $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x}=1$

40 ئەگەر $f(x)=g(x)$ بەهای x هەرچەندبێت جگە لە $x=0$ و ئەگەر $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L$ ئەوا $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=L$

41 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ کاتێک $f(x)=\begin{cases}3 & x\le 2\\ 0 & x>2\end{cases}$

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 24

بەشی 2

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

لاری لێکەوت

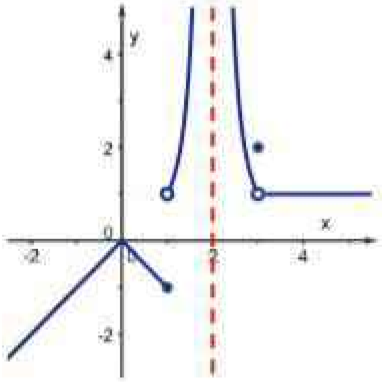
1 نەخشەی $f(x)=1-\frac{4}{x}$ وخاڵی $A(1,-3)$ کە دەکەوێتە سەر وێنە ڕوونکردنەوەکەی بەکاربهێنە.

[أ] وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە و بڕەرەکانی d_1 و d_2 و d_3 بکێشە، کە بەخاڵی A و خاڵەکانی $Q(x, f(x))$ دا دەڕوات کاتێك x بەهاکانی 3 ، 2، 1.5 یەك لەدوای یەك وەردەگرێت.

[ب] لاری هەریەکە لە بڕەرەکان بدۆزەوە.

[ج] ڕوونیبکەوە ئەو کردارەی لە لقی ب ئەنجامتدا چۆن یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوەی بەهای لاری لێکەوتی ڕوونکردنەوەکە لەخاڵی A

2 لەوێنەی بەرامبەر وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ دەردەکەوێت، وێنەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای هەریەکە لە $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to 1} f(x)$ و $\lim_{x\to 2} f(x)$ و $\lim_{x\to 3} f(x)$.



هەژمارکردنی ئامانجەکان

لە ڕاهێنانی 3 تاکو 8 ئامانجی داواکراو بدۆزەوە.

3 $\lim_{x\to 1} 2x^3-5x+2$

4 $\lim_{x\to -1} 5x^2+e^{2x}$

5 $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{|x-1|}$

6 $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-8}{2-x}$

7 $\lim_{x\to -1} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}}{x+1}$

8 $\lim_{x\to 0} \frac{3x-\sin 2x}{2x-\sin 3x}$

سەلمێنراوی دوولەت (دوو مەرج)

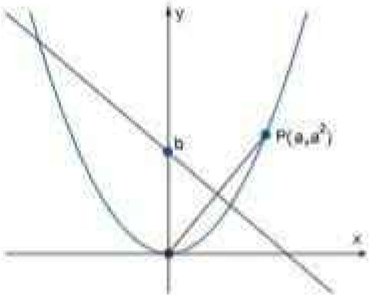
9 سەلمێنراوی دوو مەرج بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی $\lim_{x\to 0} |x| \sin\frac{1}{x^2}$.

کەوتنی سەربەست

10 نەخشەی $d(t)=-4.9t^2+60$ نموونەیەکە بۆ دیاریکردنی شوێنی کەوتنی بەردێك لە بەرزی 60 مەتر پاش t چرکە لەکەوتنی. ئەم ئامانجە $\lim_{t\to a}\frac{d(t)-d(a)}{t-a}$ خێرایی بەردەکە لە $t=a$ دەردەبڕێت.

[أ] خێرایی بەردەکە پاش یەك چرکە لەکەوتنی بدۆزەوە.

[ب] خێرایی بەردەکە لەکاتی بەرکەوتنی بەزەویدا بدۆزەوە.



11 $P(a, a^2)$ ، $a>0$ خاڵێکە لەسەر وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی برگە هاوتای $f(x)=x^2$ ئەگەر b یەکتربڕینی ئەستوونی بێت بۆ تەوەری ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی خاڵی P بەخاڵی بنەڕەت دەگەیەنێت، ئەوا ئامانجی b کاتێك P لەخاڵی بنەڕەت نزیکدەبێتەوە بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 27

4-2 نەخشە بەردەوامەکان
Continuous Functions

دۆزینەوە

ئەگەر توانیت ڕوونکردنەوەی نەخشەیەك بکێشیت بێ ئەوەی قەڵەمەکەت لەسەر کاغەز هەڵبگرێت، هەست بە بەردەوامی نەخشەکە دەکەیت. ڕوونکردنەوەی ئەو نەخشانەی دێن بکێشە دیاریبکە ئایا هەریەکەیان بەردەوامە یان نا.

1. $f(x)=x+1$ 2. $f(x)=\frac{1}{x-2}$ 3. $f(x)=\begin{cases}2x-4 & x\le 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$

ئامانجەکان

- بەردەوامی نەخشە لە خاڵێك دەناسێت.
- بەوێنەی ڕوونکردنەوەیی بەردەوامی نەخشە دیاردەکات.
- لە سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان تێدەگات و بەکاردێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

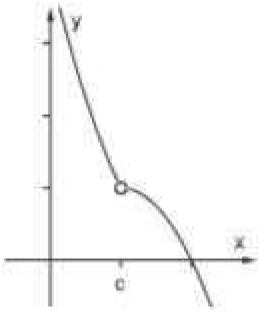
نەخشەی بەردەوام
Continuous Function

نەخشەی پچڕاو
Discontinuous Function

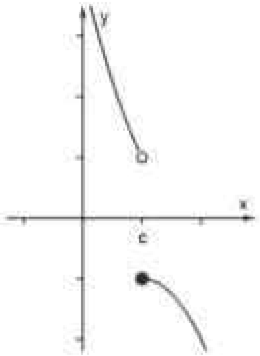
پچڕانێك لابردنی لەتوانادایە
Removable Discontinuity

بەردەوامی نەخشە لە خاڵێکدا

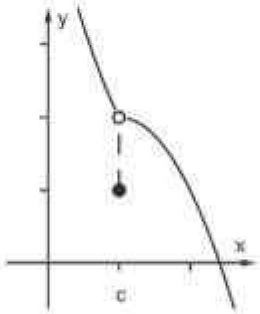
واتای وشەی بەردەوامی لەبیرکاری لەگەڵ واتاکەی لەژیانی ڕۆژانەدا دەگونجێت، بە نەخشەی f دەوترێت بەردەوامە لە خاڵی $x=c$ ئەگەر ڕوونکردنەوەکەی بێ پچڕان بێت بەهۆی کەلێنێك یان دوورکەوتنەوەیەك، لەم سێ وێنەی خوارەوە سێ بار ڕوونکراوەتەوە نەخشەکان تێیدا لەخاڵی c بەردەوام نین لەکاتێکدا لەهەموو خاڵەکانی تر بەردەوامە.



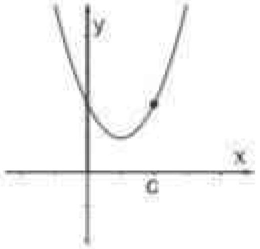
نەخشەکە پێناسەنەکراوە لە $x=c$



نەخشەکە ئامانجی نییە کاتێك x نزیکدەبێتەوە لە c



$\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$



سێ مەرج وادەکات نەخشەکە لە $x=c$ بەردەوام نەبێت

لە وێنەکانی سەرەوە دەردەکەوێت کە یەکێك لەم مەرجانەی خوارەوە وادەکات نەخشەکە لە $x=c$ بەردەوام نەبێت.

1. ئەگەر نەخشەکە لە $x=c$ پێناسەنەکرابێت.

2. ئەگەر نەخشەکە ئامانجی نەبێت کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە.

3. ئەگەر نەخشەکە ئامانجی هەبێت کاتێك x نزیکدەبێتەوە لە c، بەڵام ئامانجەکە یەکسان نەبێت بە $f(c)$.

لەژێر ڕۆشنایی ئەم مەرجانە دەتوانین پێناسەی بەردەوامی نەخشە لەخاڵی $x=c$ دا بکەین.

پێناسەی بەردەوامی

نەخشەی f لەخاڵی $x=c$ بەردەوام دەبێت ئەگەر ئەم سێ مەرجەی خوارەوە هاتەدی.

1. نەخشەکە لە $x=c$ پێناسەکرابێت.
2. ئامانجی $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ هەبێت.
3. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

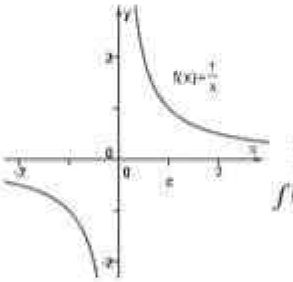
بە نەخشەیەک دەوترێت پچڕاو لەخاڵی $x=c$ ئەگەر لەم خاڵەدا بەردەوام نەبێت. لە هەندێک باردا دەتوانیت نەخشەی پچڕاو لەخاڵی $x=c$ پێناسە بکەیتەوە و پچڕانەکەی لەو خاڵەدا نەهێڵیت. لەم بارەدا بەو پچڕانە دەوترێت لابردنی لە توانادایە، لەکاتێکدا لەبارەکانی تر لابردنی لەتوانادا نابێت.

نموونـــــه 1 بەردەوامی نەخشە

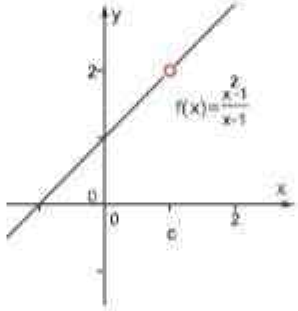
بەردەوامی هەر نەخشەیەک تاوتوێبکە وخاڵەکانی پچڕانیان دیاریکە ئەگەر هەبوو.

أ $f(x)=\frac{1}{x}$ ب $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ج $h(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 0 \\ x^2+1 & x>0 \end{cases}$ د $k(x)=\sin x$

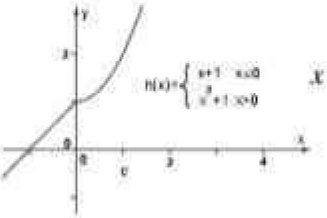
شیکار



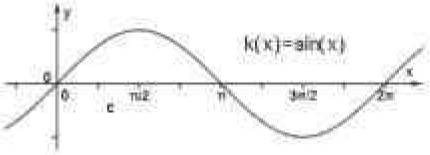
أ بواری نەخشەکە لەهەموو ژمارەکان جگە لە 0 پێکدێت، لەمەش دەردەچێت نەخشەکە لە خاڵی $x=0$ پێناسەنەکراوە، ئەمەش وا دەکات لەو خاڵە بەردەوام نەبێت، لەلایەکی تر پچڕانی نەخشەکە لەو خاڵەدا لابردنی لەتوانادا نییە، چونکە ناتوانیت پێناسەی $f(0)$ بکەیت بۆ ئەوەی نەخشەکە لە $x=0$ بەردەوام بێت.



ب بواری نەخشەکە لەهەموو ژمارەکان جگە لە 1 پێکدێت، لەمەش دەردەچێت کە نەخشەکە لە خاڵی $x=1$ پێناسەنەکراوە، ئەمەش وادەکات بەردەوام نەبێت. لەلایەکی تر پچڕانی نەخشەکە لەو خاڵەدا لابردنی لەتوانادایە، چونکە نەخشەکە بۆ نەخشەی g دەگۆڕێت کە لە $x=1$ بەردەوامە، ئەگەر پێناسەی g بکەیت وەک ئەوەی دێت $g(1)=2$ و $g(x)=f(x)$ کە $x\neq 1$.



ج بواری نەخشەکە لە هەموو ژمارە ڕاستییەکان پێکدێت، دیارە نەخشەکە لەهەر خاڵێکی $x=c$ بەردەوامە کە $c\neq 0$، لەبارەی خاڵی $x=0$ نەخشەکە تێیدا بەردەوامە، چونکە نەخشەکە لە $x=0$ پێناسەکراوە لەلایەک و لەبەرئەوەی ئامانجەکەی دەکاتە 1 کاتێک x لە c نزیکدەبێتەوە لەلای ڕاست یان لای چەپ.
لەلایەکی تر و لەبەرئەوەی $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=1=h(0)$ لەلای سێیەم.



د بواری نەخشەکە لەهەموو ژمارە ڕاستییەکان پێکدێت، دیارە کە نەخشەکە لەهەر خاڵێکی $x=c$ لە خاڵەکانی بوارەکەیدا بەردەوامە ئەمەش وادەکات نەخشەکە بەردەوام بێت.

خاڵی جاودێری

1. بەردەوامی هەر نەخشەیەك تاوتوێبکە.

أ $f(x)=\frac{1}{x-1}$

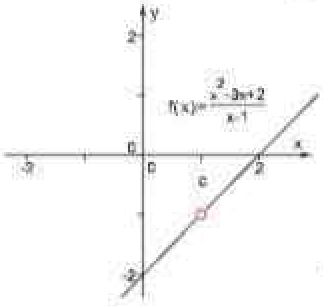
ب $g(x)=\frac{x^3+1}{x+1}$

ج $h(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\le 0 \\ -x+1 & x>0 \end{cases}$

د $k(x)=\cos x$

نموونە 2 لابردنی پچڕانی نەخشە لە خاڵێك

ئایا نەخشەی $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ لە خاڵی $x=1$ بەردەوامە؟ ڕوونکردنەوەکەی بکێشە و وەڵامەکەت ڕوونبکەوە، ئەگەر نەخشەکە پچڕاو بوو لەو خاڵەدا، دیاریبکە، ئەگەر پچڕانەکەی لابردنی لەتوانادایە، لەو بارەدا ڕوونیبکەوە چۆن بە پێناسەکردنەوەی نەخشەکە پچڕانەکەی لادەبەیت.



شیکار

نەخشەکە لە خاڵی $x=1$ پچڕاوە چونکە لەو خاڵەدا پێناسەنەکراوە، ڕوونکردنەوەکەش ئەوە دەردەخات بەڵام ئەو پچڕانە لابردنی لەتوانادایە، چونکە $f(x)$ لە -1 نزیکدەبێتەوە کاتێك x لەلای ڕاست و لەلای چەپ لە 1 نزیکدەبێتەوە، بۆیە دەتوانرێت بنووسرێت.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=-1$$

بۆ لابردنی پچڕانی نەخشەی f لە خاڵی $x=1$ دووبارە پێناسەی بکەوە بەم شێوەی خوارەوە.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & x\ne 1 \\ -1 & x=1 \end{cases}$$

خاڵی جاودێری

2. ئایا نەخشەی $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x+2}$ لە خاڵی $x=-2$ بەردەوامە؟ ڕوونکردنەوەکەی بکێشە و وەڵامەکەت ڕوونبکەوە ئەگەر نەخشەکە لەو خاڵەدا پچڕاوبوو، دیاریبکە کە ئەگەر پچڕانەکەی لابردنی لەتوانادایە لەو بارەدا ڕوونیبکەوە چۆن بە پێناسەکردنەوەی نەخشەکە پچڕانەکەی لادەبەیت.

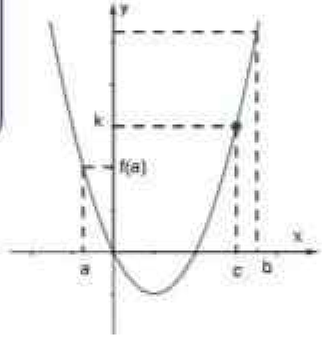
سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان Intermediate Value Theorem

ئەگەر لە گۆڕانی درێژی مرۆڤ بەگوێرەی تەمەنی وردببیەوە، ئەوا دەبینین کە درێژی مرۆڤ لە ڕاستیدا نەخشەیە بەپێی تەمەنەکەی. هەروەها تێبینی ئەوەش دەکەیت ئەگەر درێژی کەسێك 150 cm بێت لە تەمەنی دوازدە ساڵیدا، 169 cm بێت لە تەمەنی بیست ساڵیدا، ئەوا درێژییەکەی هەموو ئەو بەهایانەی کە دەکەوێتە نێوان 150 و 169 بەدرێژی ڕۆژەکان وەرگرتووە. هەروەها تێبینی دەکەیت درێژی ئەو کەسە لە 150 cm بۆ 169 cm بەشێوەیەکی بەردەوام زیادیکردووە و درێژییەکەی هیچ بازدانێکی نەکردووە.

لەم تێبینیانەوە دەتوانین بڵێین کە درێژی ئەو کەسە نەخشەیەکی بەردەوامە کاتێک تەمەنەکە بەهایەکانی نێوان 12 و 20 وەردەگرێت و ئەو نەخشەیە هەموو بەهایەکانی نێوان 150 بۆ 169 وەردەگرێت. نەخشە بەردەوامەکانیش هەمان سیفەتیان هەیە، سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان ئەوە دوویاتدەکاتەوە.

سەلمێنراوی 2-2 نێوانە بەهایەکان

ئەگەر نەخشەی f لەنێوان خاڵەکانی $x=a$ و $x=b$ بەردەوام بێت، ئەوا هەموو بەهایەکانی نێوان $f(a)$ و $f(b)$ وەردەگرێت. بە دەستەواژەیەکی وردتر ئەگەر k ژمارەیەکی ڕاستی بێت و بکەوێتە نێوان $f(a)$ و $f(b)$ دەتوانین ژمارەی c لە نێوان a و b بدۆزینەوە کە $f(c)=k$ پاسادان دەکات.



ڕەگەکانی هاوکێشەی $f(x)=0$

لە گرنگترین جێبەجێکردنەکانی سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان سەلماندنی ئەوەی کە هاوکێشەی $f(x)=0$ ڕەگێکی هەیە دەکەوێتە نێوان دوو ژمارە، ئەگەر نەخشەی f بەردەوام بێت لەنێوان $x=a$ و $x=b$ و ئەگەر $f(a)$ و $f(b)$ نیشانەیان جیاواز بێت، ئەوا هاوکێشەی $f(x)=0$ بەلایەنی کەم ڕەگێکی هەیە دەکەوێتە نێوان a و b.

لەبەرئەوەی $f(a)$ و $f(b)$ نیشانەیان جیاوازە ئەوا 0 دەبێتە نێوانە بەهای نێوان $f(a)$ و $f(b)$، بەپشت بەستن بە سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان ژمارەیەکی ڕاستی c هەیە دەکەوێتە نێوان a و b کە $f(c)=0$ پاسادان دەکات.

نموونە 3 جێبەجێکردن لەسەر سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان

سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بسەلمێنیت کە هاوکێشەی $f(x)=0$ کاتێک $f(x)=x^3+2x-1$ ڕەگێکی لەنێوان 0 و 1 دا هەیە.

شیکار

نەخشەی f نەخشەیەکی ڕاددارە، هەروەها بەردەوامە لەنێوان $x=0$ و $x=1$.

لەلایەکی تر:

$$f(0)=0^3+2(0)-1=-1$$

$$f(1)=1^3+2(1)-1=2$$

لەبەرئەوەی $f(0)<0$ و $f(1)>0$ بەدوو نیشانەی جیاوازن ئەوا هاوکێشەی $f(x)=0$ ڕەگێکی لەنێوان 0 و 1 دا هەیە.

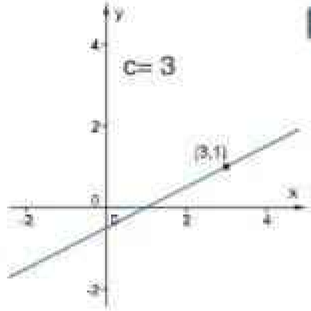
خاڵی چاودێری

3. سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بسەلمێنیت کە هاوکێشەی $f(x)=0$ کاتێک $f(x)=x^4+2x^2-1$ ڕەگێکی لە نێوان 0 و 1 دا هەیە.

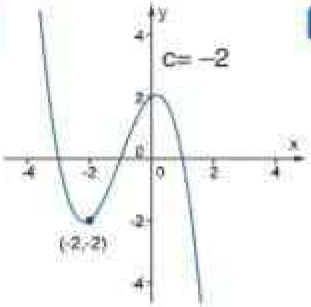
4–2 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 6 وێنە ڕوونکردنەوەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئامانجی نەخشەکە کاتێک x لەلای ڕاست و لەلای چەپ لە c نزیکدەبێتەوە، $\lim_{x\to c} f(x)$بدۆزەوە (ئەگەر هەبوو) پاشان بەردەوامی نەخشەکە لە $x = c$ تاوتوێبکە.

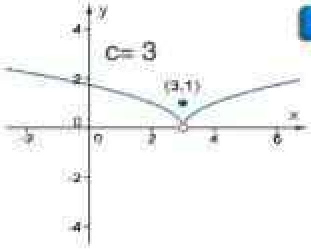
1



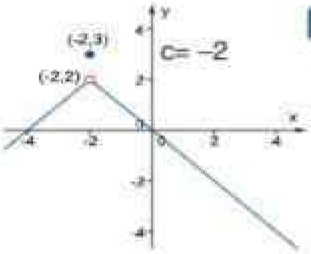
2



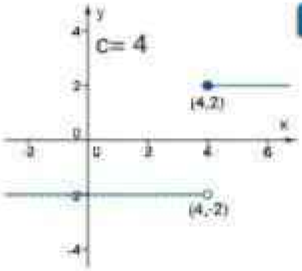
3



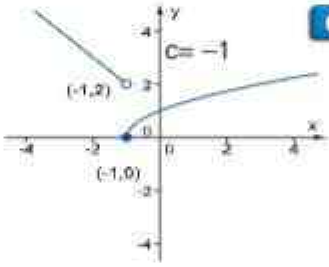
4



5

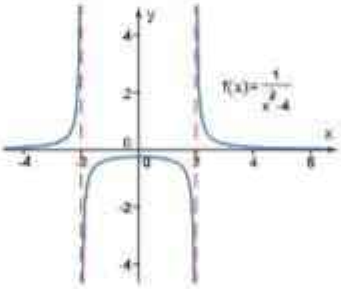


6

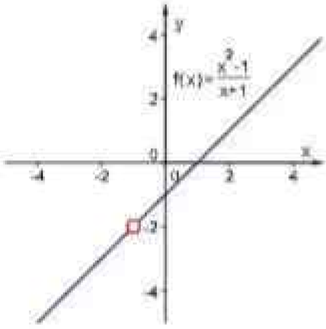


لە ڕاهێنانی 7 تاکو 9 بەردەوامی نەخشەکە تاوتوێبکە.

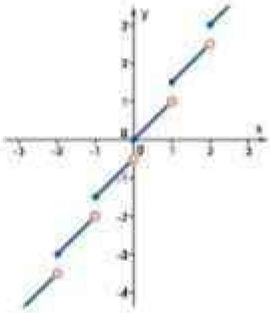
7 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$



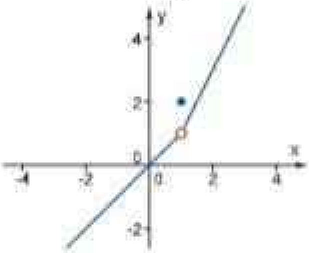
8 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$



9 $f(x) = \frac{1}{2}[x] + x$ کە $[x]$ گەورەترین ژمارەی تەواو بچوکترین یان یەکسان بە x دەنوێنێت.



10 $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2x - 1 & x > 1 \end{cases}$



لە ڕاهێنانی **11** تا **16** بەهایەکانی x کە نەخشەکە تێیدا پچڕاوە ئەگەر هەبوو بدۆزەوە، ودیاریبکە ئەگەر پچڕانەکە لابردنی لەتوانادا هەیە

11 $f(x)=x^2-2x+1$

12 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

13 $f(x)=\frac{x}{x^2-x}$

14 $f(x)=\frac{x}{x-1}$

15 $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$

16 $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & x<1\\ x & x\geq 1\end{cases}$

لە ڕاهێنانی **17** تا **18** بەهای a یان بەهای a و b دیاریبکە تا نەخشەکە خاڵی پچڕانی نەبێت.

17 $f(x)=\begin{cases}x^3 & x\leq 2\\ ax^2 & x>2\end{cases}$

18 $f(x)=\begin{cases}2 & x\leq -1\\ ax+b & -1<x<3\\ -2 & x\geq 3\end{cases}$

دەربارەی چەمکەکان

19 جیاوازی نێوان پچڕانێك لابردنی لەتوانادا بێت یەکێکی تر لابردنی لەتوانادا نەبێت ڕوونبکەوە لەکاتی باسکردنی جیاوازییەکە نموونە بهێنەوە بۆ.

أ نەخشەیەکی پچڕاو لە $x=2$ وپچڕانەکەی لابردنی لەتوانادا نەبێت.

ب نەخشەیەکی پچڕاو لە $x=-2$ وپچڕانەکەی لابردنی لەتوانادا هەبێت.

ج نەخشەیەك هەردوو مەرجەکەی پێشووی پێکەوە تێدابێت.

ڕاست یان هەڵە لە ڕاهێنانی **20** تا **23** دیاریبکە کە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوەو ئەگەر هەڵەیە ئەوا بەدژە نموونەیەك بیسەلمێنە

20 ئەگەر $\lim_{x\to c} f(x)=L$ و $f(c)=L$ ئەوا نەخشەی f لە $x=c$ بەردەوامە.

21 ئەگەر $f(x)=g(x)$ کاتێك $x\neq c$ و $f(c)\neq g(c)$ ئەوا یەکێك لە دوو نەخشەکە لە $x=c$ پچڕاوە.

22 دەکرێ لە نەخشەیەکی ڕێژەیی ژمارەیەکی ناکۆتا خاڵی پچڕانی هەبێت.

23 نەخشەی $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ بەردەوامە و خاڵی پچڕانی نییە.

24 نەخشەی هێما (الأشارة) بریتییە لە نەخشەی

$$s(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

ڕوونکردنەوەی نەخشەی s بکێشەو ئەو ئامانجانەی دێن بدۆزەوە.

أ $\lim_{x\to 0^-} s(x)$ ب $\lim_{x\to 0^+} s(x)$ ج $\lim_{x\to 0} s(x)$

5-2 ئامانجە بێپایانەكان
Infinite limits

ئامانجەكان

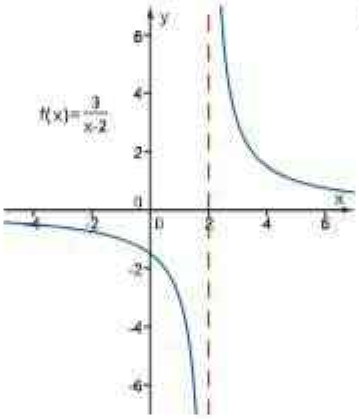
- ئامانجە بێپایانەكان لە لای ڕاست ولەلای چەپ دەدۆزێتەوە.
- دەركەنارە ستوونییەكان بۆ نەخشەكان دەدۆزێتەوە و وێنەكانیان دەكێشێت.

زاراوەكان
Vocabulary

ئامانجی بێپایان
Infinite Limit

دەركەناری ستونی
Vertical Asymtote

ئامانجە بێپایانەكان



لەوێنەی بەرامبەر وێنەی ڕوونكردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{3}{x-2}$ دەردەكەوێت. دەتوانیت ئەو وێنە ڕوونكردنەوەیە و خشتەكەی خوارەوە بەكاربهێنیت بۆ ئەوەی ببینیت كە بەهایەكانی $f(x)$ بێسنوور كەمدەكات كاتێك x زیاتر وزیاتر لەلای چەپ لە 2 نزیكدەبێتەوە، ئەمە بەم شێوەیە دەردەبڕین $f(x)$ لە $-\infty$ نزیكدەبێتەوە كاتێك x لەلای چەپ لە 2 نزیكدەبێتەوە وبەم شێوەیە دەنووسرێت. $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$
هەروەها بەهایەكانی $f(x)$ بێسنوور زیاد دەكات كاتێك x زیاتر و زیاتر لەلای ڕاست لە 2 نزیكدەبێتەوە ئەمەش بەم شێوەیە دەردەبڕین، $f(x)$ لە $+\infty$ نزیكدەبێتەوە كاتێك x لەلای ڕاست لە 2 نزیكدەبێتەوە. وبەم شێوەیە دەنووسرێت.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$$

x لەلای چەپ لە 2 نزیكدەبێتەوە ← → x لەلای ڕاست لە 2 نزیكدەبێتەوە

x	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5
$f(x)$	−6	−30	−300	−3000	?	3000	300	30	6

بەهای $f(x)$ بێسنوور كەمدەكات ← → بەهای $f(x)$ بێسنوور زیاددەكات

بە نەخشەی f دەوترێت لە ئامانجی بێپایان نزیكدەبێتەوە كاتێك x لەبەهای c نزیكدەبێتەوە ئەگەر بەها $f(x)$ بێسنوور زیادبكات یان كەمبكات.

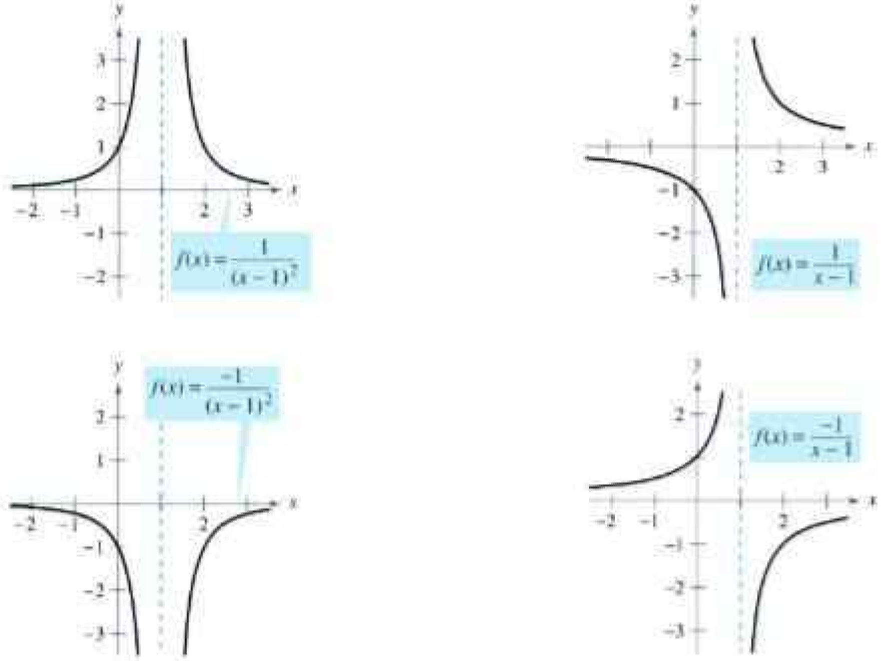
دۆزینەوە

بۆ هەر نەخشەیەك ژمارەیەكی ڕاستی c لەبوارەكەی نەبێ دیاریكە. ئامانجی $f(x)$ بدۆزەوە كاتێك x لەلای ڕاست و لەلای چەپ لە c نزیكدەبێتەوە.

1. $f(x)=\frac{3}{x-4}$
2. $f(x)=\frac{1}{2-x}$
3. $f(x)=\frac{2}{(x-3)^2}$

نموونـــە 1 دۆزینەوەی ئامانجە بێپایانەکان بە ڕوونکردنەوەیی

ئەم ڕوونکردنەوانەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئامانجی هەر نەخشەیەك کاتێك x لەلای ڕاست و لەلای چەپ لە 1 نزیکدەبێتەوە



شیکار

1. $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ ئامانجەکە لە هەردوولا دەکاتە $+\infty$

3. $\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x-1}=+\infty \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x-1}=-\infty$

4. $\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$ ئامانجەکە لە هەردوولا دەکاتە $-\infty$

خاڵی جاوبڕی

1. ئامانجی هەر نەخشەیەك بدۆزەوە کاتێك x لەلای ڕاست و لەلای چەپ لە $1-$ نزیکدەبێتەوە.

أ $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ب $f(x)=\frac{1}{|x+1|}$

دەرکەنارە ستونییەکان

ئەگەر لە تواناداببوو ڕوونکردنەوەی نەخشەی پێشوو $f(x)=\frac{1}{x-1}$ بەرەو سەرەوە لە لای ڕاستی ڕاستەهێڵە خاڵدارە شینەکە وبەرەو لای خوارەوە لەلای چەپ دربێژبکەیتەوە، دەبینیت ڕوونکردنەوەکە زیاترو زیاتر لەو ڕاستەهێڵە نزیکدەبێتەوە بێ ئەوەی پێبگات، دەتوانین بڵێین ئەو ڕاستەهێڵە بریتییە لە دەرکەناری ئەستوونی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە. (لەوانەکانی داهاتوو جۆرێکی تر لە دەرکەنارەکان دەخوێنیت).

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/29/18 12:19 PM Page 35

پێناسەی دەرکەنارە ستونییەکان

ئەگەر نەخشەی $f(x)$ لە $+\infty$ یان $-\infty$ نزیکبێتەوە کاتێك x لە c نزیکەبێتەوە، ئەوا ڕاستەهێڵی ستونی $x=c$ دەرکەناری ستونی ڕوونکردنەوەی نەخشەکەیە.

ئەگەر بۆ نموونەی 1 بگەڕێتەوە دەبینیت هەر چوار نەخشەکە بریتیین لە نەخشەی ڕێژەیی، بۆ هەریەکێکیان دەرکەنارێکی ستونی هەیە دەکاتە ڕاستەهێڵی $x=1$ تێبینیبکە ژمارەی 1 ژێرەکە بەلەجیاتی دانان دەکاتە 0 بەڵام سەرەکە ناکاتە 0 دەتوانین ئەم تێبینییە گشتگیر بکەیت لەڕێی ئەم سەلمێنراوە.

سەلمێنراوی 2–3 دەرکەناری ستونی

ئەگەر f و g دوو نەخشەی بەردەوام بن وئەگەر $f(c)\neq 0$ و $g(c)=0$ لەکاتێکدا کە $g(x)\neq 0$ لە هاوسێیەکانی $x=c$. ئەوا ڕاستە هێڵی $x=c$ دەبێتە دەرکەناری ستونی نەخشەی

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

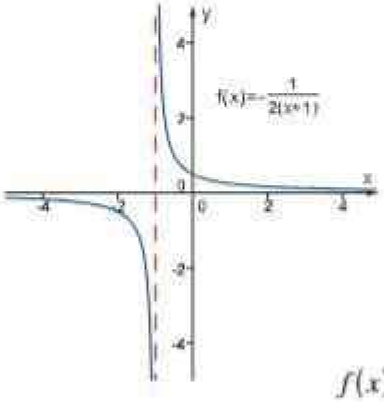
واتە $x=c$ وا دەکات تەنها ژێرە بکات سفر.

نموونـــــە 2 دۆزینەوەی دەرکەنارە ستونییەکان

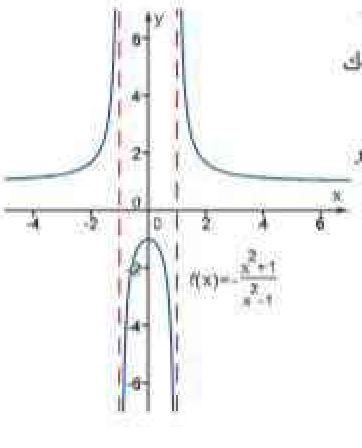
دەرکەنارە ستونییەکانی هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

1. $f(x)=\frac{1}{2(x+1)}$ 2. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ 3. $f(x)=\frac{1}{\tan x}$

شیکار

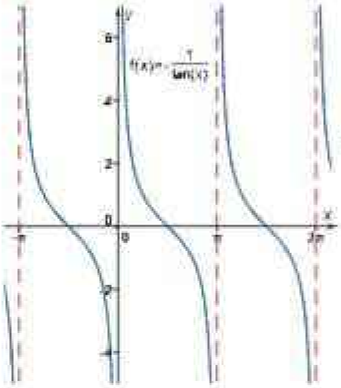


1. ژێرەی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{2(x+1)}$ بەهای 0 وەردەگرێت کاتێك $x=-1$ لە کاتێکدا سەرەکەی یەکسان نابێت بە 0 لەو خاڵەدا. بەپشت بەستن بەسەلمێنراوی دەرکەنارە ستونییەکان، ڕاستەهێڵی $x=-1$ دەبێتە دەرکەناری ستونی نەخشەکە.



2. دەتوانیت نەخشەکە بەبەکارهێنانی شیتەڵکردن بەم شێوەی خوارەوە دووبارە بنووسیتەوە $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$ نووسینی نەخشە بەم شێوەیە ڕوونیدەکاتەوە کە 1 و 1- ژێرە دەکەنە سفر بەلەجیاتی دانان. لەلایەکی تر هیچیەك لەو دوو ژمارانە سەرە ناکەنە 0، بەپێی سەلمێنراوی دەرکەنارە ستونییەکان ڕاستەهێڵەکانی $x=1$ و $x=-1$ دەبنە دەرکەناری ستونی نەخشەکە وەك لەوێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر دەردەکەوێت.

GRADE12-2011-CHAPTER 2 4/4/18 11:07 AM Page 34



3. دەتوانیت نەخشەکە بە شێوەی $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ دووبارە بنووسیەوە. ژێرە دەبێتە 0 کاتێك x ئەو بەهایانە وەردەگرێت کە $\sin x$ دەکەنە 0 کە بریتین لە چەندجارەکانی π لەلایەکی تر ئەو بەهایانە سەرە ناکەنە 0 بە پێی سەلمێنراوی دەرکەنارە ستونییەکان ڕاستەهێڵەکانی $x=n\pi$ کە $n\in I$ هەموویان دەرکەناری ستونین بۆ ئەو نەخشەیە وەك لەوێنەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.

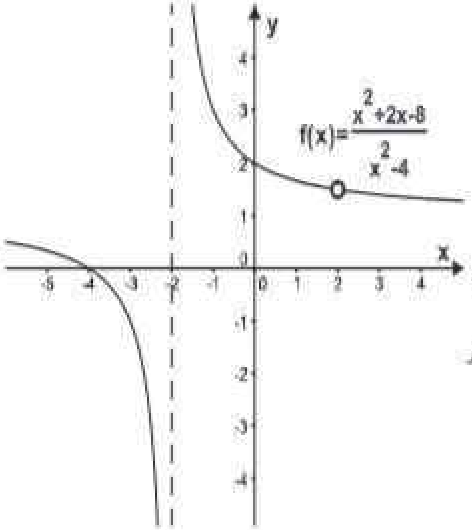
ئەو مەرجەی کە دەبێت $f(c)\neq 0$ لە سەلمێنراوی دەرکەناری ستونی مەرجێکی بنەڕەتییە بۆ ئەوەی ڕاستەهێڵی $x=c$ ببێتە دەرکەناری ستونی نەخشەکە (سەیری نمونە 3 بکە).

خاڵی چاودێری 2. هەموو دەرکەنارە ستونیەکان بۆ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $f(x)=\frac{2}{3x-2}$ ب $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$ ج $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

نمونە 3 نەخشەیەکی ڕێژەیی سەرەو ژێرەکەی کۆڵکەی هاوبەشی هەبێت.

هەموو دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەی $f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$ بدۆزەوە.



شیکار

دەستبکە بە نووسینی نەخشەکە بەسادەترین شێوە

$$f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}=\frac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x+4}{x+2},\quad x\neq -2$$

دوو ژمارەی 2 و 2- ژێرەکە دەکەنە سفر بە لەجیاتیدانان. ئاشکرایە کە $x=-2$ دەرکەناری ستونییە بۆ نەخشەکە چونکە ژێرەکە دەکاتە 0 بە لەجیاتیدانان و سەرەکەش ناکاتە 0

بەڵام $x=2$ سەرەو ژێرە دەکاتە 0 بەلەجیاتیدانان. ڕوونکردنەوەی نەخشەی f لەگەڵ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $g(x)=\frac{x+4}{x+2}$ جووت دەبن کاتێك $x\neq 2$ لەم تێبینییە دەردەچێت کە بەهای $f(x)$ نە لە $+\infty$ و نە لە $-\infty$ نزیك نابنەوە کاتێك x لە 2 نزیکدەبێتەوە، بەمەش ڕاستەهێڵی $x=2$ نابێتە دەرکەناری ستونی نەخشەکە.

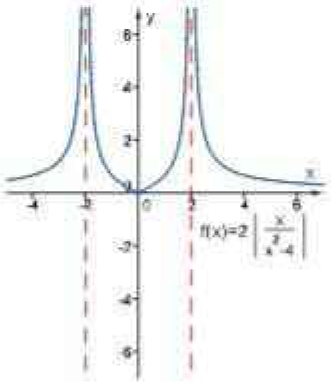
خاڵی چاودێری 3. هەموو دەرکەنارە ستونییەکانی نەخشەی $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$ بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 2 4/4/18 12:01 PM Page 37

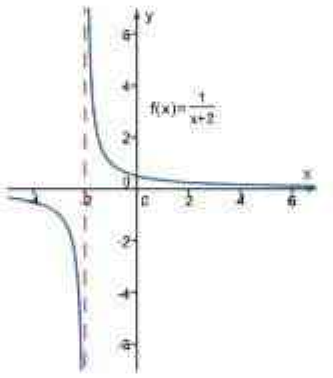
5-2 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 4 نامانجی $f(x)$ بدۆزەوە کاتێک x لەلای ڕاست و لەلای چەپ لە $2-$ نزیکدەبێتەوە.

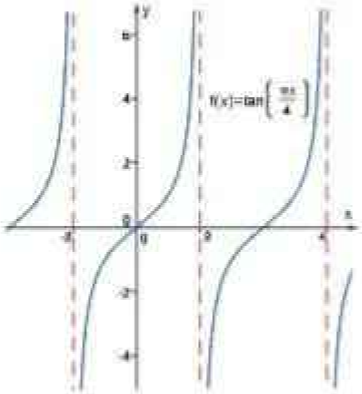
1 $f(x)=2\left|\frac{x}{x^2-4}\right|$



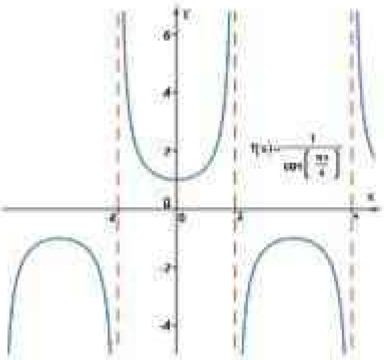
2 $f(x)=\frac{1}{x+2}$



3 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$



4 $f(x)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$



لە ڕاهێنانی 5 تا 13 دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەکە بدۆزەوە ئەگەر هەبوو.

5 $f(x)=\frac{1}{x^2}$

6 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$

7 $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2-x-2}$

8 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$

9 $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$

10 $f(x)=\frac{1}{\cos(\pi x)}$

11 $f(x)=1-\frac{1}{x^2}$

12 $f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}$

13 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$

دەربارەی چەمکەکان

14 بەشێوازی خۆت مانای ئامانجی بێپایان باسبکە ئایا $+\infty$ ژمارەیەکی ڕاستییە.

15 بەشێوازی خۆت باسی دەرکەناری ستونی بکە.

16 نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە دەرکەناری ستونی لە $x=6$ ویەکێکی تر لە $x=-2$ دا و سفری لە $x=3$دا هەبێت.

17 ئایا هەموو نەخشەیەکی ڕێژەیی دەرکەناری ستوونی هەیە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

18 **ناوەندە خێرایی** دووری نێوان دوو شار d km دەبێت. شۆفێرێك دووریيەکەی بەچوون وهاتن بڕی خێراییەکەی لە چوون و هاتنیدا 50 km/h وخێراییەکەی لە چوون x km/h و لەهاتن y km/h بوو.

أ بیسەلمێنە کە پەیوەندی لەنێوان x و y بەم شێوەیە دەنوسرێت $y=\frac{25x}{x-25}$ ،بواری ئەو نەخشەی بە $f(x)=y$ پێناسەکراوە چەندە؟

ب خشتەکە تەواوبکە.

x	30	40	50	60
y				

ئایا بەهایەکانی y جیاوازە لەو بەهایانەی کە پێشبینیت دەکرد؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

ج ئامانجی y بدۆزەوە کاتێك x لەلای ڕاست لە 25 نزیکدەبێتەوە و ئەنجامەکە لێکبدەوە.

ڕاست یان هەڵە لە ڕاهێنانی 19 تا 22 دیاریکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە و ئەگەر هەڵەیە ئەوا بەدژە نمونەیەك بیسەلمێنە

19 ئەگەر $p(x)$ نەخشەیەکی ڕادەداری بێت ئەوا نەخشەی $f(x)=\frac{p(x)}{x-1}$ دەرکەناری ستونی لە $x=1$ هەیە

20 ئەگەر f نەخشەیەکی ڕێژەیی بێت ئەوا بەلایەنی کەم دەرکەنارێکی ستونی هەیە.

21 نەخشەی ڕادەدار دەرکەناری ستونی نییە.

22 ئەگەر نەخشەی f دەرکەناری ستونی لە $x=0$ دا هەبێت ئەوا لەو حاڵەدا پێناسەنەکراوە.

23 نەخشەی f و g بدۆزەوە کە $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to c} g(x)=+\infty$ لەکاتێکدا $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]\neq 0$

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 39

بەشی 2

پێداچوونەوەی بەش

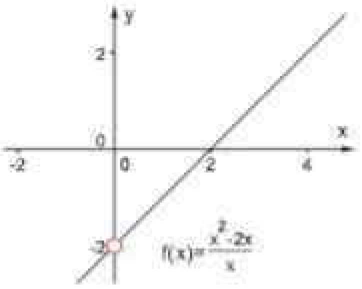
لە دوو ڕاهێنانی 1 و 2 دا دیاریکە کە ئەگەر شیکارکردنی پرسیارەکە پێویست بەبەکارهێنانی هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری دەبێت یان دەتوانرێت تەنها بەبەکارهێنانی جەبر شیکاری بکەیت ئەگەر بەجەبر شیکاردەکرێت، شیکارەکەی بدۆزەوە ئەگەر نەتوانرا هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

1 درێژی پارچە هێڵی نێوان خاڵەکانی $(1,1)$ و $(3,9)$ لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=4x-3$ بدۆزەوە.

2 درێژی ئەو کەوانەی بە خاڵەکانی $(1,1)$ و $(3,9)$ دیاریکراوە لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^2$ بدۆزەوە.

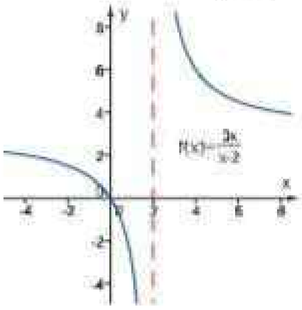
لە دوو ڕاهێنانی 3 و 4 دا وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نامانجی داواکراو.

3 $f(x)=\frac{x^2-2x}{x}$



أ $\lim_{x\to 0} f(x)$ ب $\lim_{x\to 1} f(x)$

4 $f(x)=\frac{3x}{x-2}$



أ $\lim_{x\to 2} f(x)$ ب $\lim_{x\to 0} f(x)$

لە ڕاهێنانی 5 تا 15 دا ئەگەر کرا ئەمانەی دێت بدۆزەوە.

5 $\lim_{x\to 4}\sqrt{x+2}$

6 $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$

7 $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

8 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

9 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{x}$

10 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+8}$

11 $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{4x}{\tan x}$

12 $\lim_{x\to -5}\frac{x^3+125}{x+5}$

13 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

14 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\Delta x\right)-\frac{1}{2}}{\Delta x}$ لەبیرت بێت $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

15 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(\pi+\Delta x)+1}{\Delta x}$ لەبیرت بێت $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

لە دوو ڕاهێنانی 16 و 17 دا نامانجی داواکراو بدۆزەوە ئەگەر زانیت $\lim_{x\to c} f(x)=-\frac{3}{4}$ **و** $\lim_{x\to c} g(x)=\frac{2}{3}$.

16 $\lim_{x\to c}\left(f(x)g(x)\right)$

17 $\lim_{x\to c}\left(f(x)+2g(x)\right)$

GRADE12-2011-CHAPTER 2 3/25/18 10:22 AM Page 38

لە ڕاهێنانی 18 تا 23 نامانجی داواکراو بدۆزەوە (ئەگەر هەبوو) یان ئەگەر نەبوو هۆیەکەی دیاریکە

18 نامانجی نەخشەی $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$ بدۆزەوە کاتێك x لەلای ڕاست لە 3 نزیکدەبێتەوە.

19 $\lim_{x\to 4}[x-1]$ کاتێك $[x-1]$ گەورەترین ژمارەی تەواو بچووکتر یا یەکسان بێت بە $x-1$.

20 $\lim_{x\to 2} f(x)$ کاتێك $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2 & x\le 2\\ 2-x & x>2\end{cases}$

21 نامانجی نەخشەی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x\le 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ کاتێك x لەلای ڕاست لە 1 نزیکدەبێتەوە.

22 $\lim_{x\to 1} f(x)$ کاتێك $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & x<1\\ \frac{1}{2}(x+1) & x\ge 1\end{cases}$

23 $\lim_{x\to -2} f(x)$ کاتێك $f(x)=\begin{cases}-x^2-4x-2 & x\le -2\\ x^2+4x+6 & x>-2\end{cases}$

لە ڕاهێنانی 24 تا 32 دیاریکە ئایا ئەخشەکە خاڵی پچڕانی هەیە، ئەگەر هەیبوو بیدۆزەوە.

24 $f(x)=[x+3]$

25 $f(x)=\frac{3x^2-x-2}{x-1}$

26 $f(x)=\begin{cases}5-x & x\le 2\\ 2x-1 & x>2\end{cases}$

27 $f(x)=\begin{cases}\frac{3x^2-x-2}{x-1} & x\ne 1\\ 0 & x=1\end{cases}$

28 $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$

29 $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

30 $f(x)=\frac{3}{x+1}$

31 $f(x)=\frac{x+1}{2x+2}$

32 $f(x)=\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}$

33 بەهای c بدۆزەوە کەوا لە نەخشەی $f(x)=\begin{cases}x+3 & x\le 2\\ cx+6 & x>2\end{cases}$ دمکات خاڵی پچڕانی نەبێت.

34 بەهای c و بەهای b بدۆزەوە کەوا لە نەخشەی $f(x)=\begin{cases}x+1 & 1<x<3\\ x^2+bx+c & |x-2|\ge 1\end{cases}$ دمکات خاڵی پچڕانی نەبێت.

35 سەلمێنراوی نێوانە بەهایەکان بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بسەلمێنیت نەخشەی $f(x)=2x^3-2x-1$ ڕەگێکی لە نێوان 1 و 2 دا هەیە.

لە ڕاهێنانی 36 تا 39 دەرکەنارە ستونییەکان دیاریکە ئەگەر هەبوو.

36 $f(x)=1+\frac{2}{x}$

37 $f(x)=\frac{4x}{4-x^2}$

38 $f(x)=\frac{8}{(x-10)^2}$

39 $f(x)=\frac{1}{\sin\pi x}$

40 نەخشەی $f(x)=\frac{\tan 2x}{x}$ بەکاربهێنە کە $x\ne 0$.

ا $\lim_{x\to 0} f(x)$ بدۆزەوە ئەگەر هەبوو.

ب ئایا دەتوانیت دووبارە پێناسەی نەخشەکەلە $x=0$ بکەیتەوە بەشێوەیەك بەردەوام بێت لەو خاڵە؟ وەلامەکەت ڕوونبکەوە.

بەشی 2

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

نەخشەی $f(x)=\begin{cases}2-x & x\le 1\\ \frac{x}{2}+1 & x>1\end{cases}$ بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 1 تاکو 4.

1 بەهای $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ چەندە؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ بوونی نییە.

2 بەهای $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ چەندە؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ بوونی نییە.

3 بەهای $\lim_{x\to 1} f(x)$ چەندە؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ بوونی نییە.

4 بەهای $f(1)$ چەندە؟

أ $\frac{5}{2}$ ب $\frac{3}{2}$ ج 1 د 0 هـ جگە لە مانە

5 بەهای $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2}$ چەندە؟

أ $-\infty$ ب $+\infty$ ج 1 د $-\frac{1}{2}$ هـ -1

6 بەهای $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{x}$ چەندە؟

أ $\frac{1}{2}$ ب 1 ج 2 د $\cos 2$ هـ بوونی نییە.

7 بەهای $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ چەندە؟

أ $\frac{1}{3}$ ب 1 ج 3 د $\sin 3$ هـ بوونی نییە.

8 لە چ ماوەیەک نەخشەی $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ خاڵ یان خاڵەکانی پچرانی دەبێت؟

أ $]0,+\infty[$ ب $]-\infty,0]$ ج $]1,2[$ د $]0,2[$ هـ $[1,+\infty[$

9 کام لەم خاڵانەی خوارەوە خاڵی پچران نییە بۆ نەخشەی $f(x)=\sqrt{x-1}$؟

أ $x=-1$ ب $x=-\frac{1}{2}$ ج $x=0$ د $x=\frac{1}{2}$ هـ $x=1$

10 کام لەمانەی خوارەوە بۆ نەخشەی $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 1 & x=1\\ -x+3 & 1<x<2\end{cases}$ ڕاست نییە.

أ $f(1)$ پێناسەنەکراوە
ب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ هەیە
ج $\lim_{x\to 2} f(x)$ هەیە
د $\lim_{x\to 1} f(x)$ هەیە
هـ $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

11 کام لەم خاڵانەی خوارەوە خاڵی بچڕانە بۆ نەخشەی
$f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)^2(x+1)^2(x-3)^2}{x(x-1)(x-2)(x+1)^2(x-3)^3}$ ولابردنی لەتوانادا نییە؟

أ $x=-1$
ب $x=0$
ج $x=1$
د $x=2$
هـ $x=3$

12 کام لەمانەی خوارەوە بۆ نەخشەی $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x & 0\le x<4\\ 2 & x=4\\ -x+7 & 4<x\le 6\\ 1 & 6<x<8\end{cases}$ ڕاست نییە.

أ $\lim_{x\to 4} f(x)$ هەیە
ب $f(4)$ هەیە
ج $\lim_{x\to 6} f(x)$ هەیە
د $\lim_{x\to 8} f(x)$ هەیە
هـ $f(x)$ بەردەوامە $x=4$

13 کام لەمانە دەبێتە هاوکێشەی لێکەوتی نەخشەی $f(x)=9-x^2$ لە $x=2$ ؟

أ $y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$
ب $y=-4x+13$
ج $y=-4x-3$
د $y=4x-3$
هـ $y=4x+13$

14 ئەم نەخشانەی خوارەوە بەهای x هەرچەند بێت جگە لە $x=0$ پێناسەکراوە، کام لەم نەخشانە دەتوانیت لە $x=0$ پێناسەبکەیت بۆ ئەوەی لە $x=0$ بەردەوام بێت.

أ $f(x)=\sin\frac{1}{x}$
ب $f(x)=\cos\frac{1}{x}$
ج $f(x)=\frac{4}{x^2}$
د $f(x)=\frac{\tan x}{x}$
هـ $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

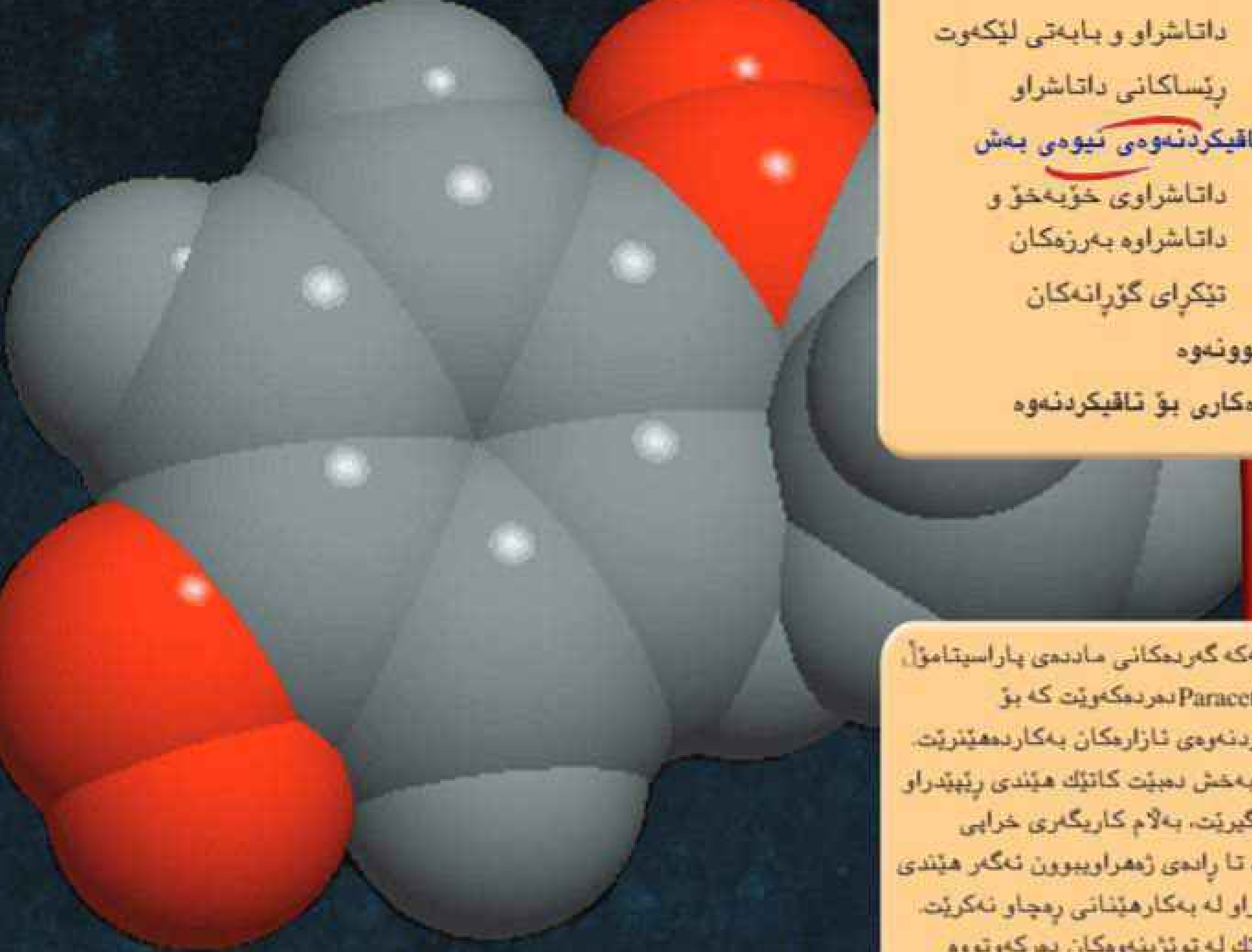
15 $f(x)=\begin{cases}x^2+a & x<-1\\ x^3-8 & x\ge -1\end{cases}$
کام لەم بەهایانەی a نەخشەی f لەماوەی $]-\infty,+\infty[$ دەکاتە نەخشەیەکی بەردەوام؟

أ $a=-1$
ب $a=-8$
ج $a=9$
د $a=-10$
هـ هیچ بەهایەکی a جێبەجێی ناکات.

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 3

بەشی 3

داتاشراو Derivative



بەشی سێیەم

وانەکان

1-3 داتاشراو و بابەتی لێکەوت

2-3 ڕێساکانی داتاشراو

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

3-3 داتاشراوی خۆیەخۆ و داتاشراوە بەرزەکان

4-3 تێکڕای گۆڕانەکان

پێداچوونەوە

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

لەوێنەکە گەردەکانی ماددەی پاراسیتامۆڵ Paracetamol دەردەکەوێت کە بۆ کەمکردنەوەی ئازارەکان بەکاردەهێنرێت. سوودبەخش دەبێت کاتێك هێندی ڕێپێدراو وەردەگیرێت، بەڵام کاریگەری خراپی دەبێت تا ڕادەی ژەهراوییبوون ئەگەر هێندی ڕێپێدراو لە بەکارهێنانی ڕەچاو نەکرێت. لەیەکێك لە توێژینەوەکان دەرکەوتووە تەنها ڕێژەی 30% خەڵکان ڕەچاوی هێندی دیاریکراو دەکەن لە بەکارهێنانیدا. نەخشەی $D(t) = \frac{750t}{t+12}$ نموونەیەکە بۆ هەژمارکردنی بڕی ڕێپێدراو بۆ منداڵان لە تەمەنی 1 ساڵی تا 12 ساڵی کاتێك t هێمایە بۆ تەمەنی منداڵ بەساڵ.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

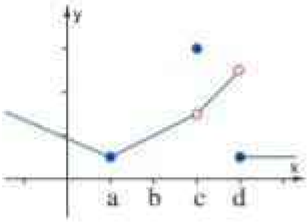
هەر دەستەواژەیەکی لای ڕاست ببەستەوە بە لێکدانەوەکەی لەلای چەپ.

1
1. لاری ڕاستەهێڵ
2. نەخشەی بەردەوام
3. پچڕانێك توانای لابردنی هەیە.
4. نەرکەناری ستونی
5. $\lim_{x \to c} f(x) = L$

أ. ڕاستەهێڵێکی ئەستونە، خاڵی $(x, f(x))$ ی سەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی f لێی نزیکدەبێتەوە، کاتێك بەهای x لە c نزیکدەبێتەوە.
ب. ڕێژەی بەرەوپێشچوونی ستونی بۆ بەرەو پێشچوونی ئاسۆیی ڕاستەهێڵەکەیە.
ج. نەخشەی $f(x)$ لە ژمارەی L نزیکدەبێتەوە کاتێك x لە c نزیکدەبێتەوە.
د. نەخشەیەکە دەتوانرێت ڕوونکردنەوەکەی بەقەڵەم لەسەر کاغەزێك بکێشرێت بێ ئەوەی دەستی لێ هەڵبگرین.
هـ. نەخشەیەکە ڕوونکردنەوەکەی پچڕانی تێدایە.
و. خاڵێکی پچڕانە بۆ نەخشەکە دەتوانرێت بەدووبارە پێناسەکردنەوە لاببردرێت.

هەبوونی نامانجەکان

لە ڕاهێنانی 2 تا 7 نەخشەی f کە لە وێنەی بەرامبەردا ڕوونکراوەتەوە بەکاربهێنە دیاریکە ئایا نامانج بوونی هەیە یان نا.



2 $\lim_{x \to d} f(x)$ **3** $\lim_{x \to c^+} f(x)$ **4** $\lim_{x \to c^-} f(x)$

5 $\lim_{x \to c} f(x)$ **6** $\lim_{x \to b} f(x)$ **7** $\lim_{x \to a} f(x)$

نەخشە بەردەوامەکان

لە ڕاهێنانی 8 تا 11، نەخشەی f کە وێنەکەی لەسەرەوەدا ڕوونکراوەتەوە بەکاربهێنە. ئایا نەخشەکە بەردەوامە لە خاڵەکە یان نا، دیاریبکە

8 $x = a$ **9** $x = b$ **9** $x = c$ **11** $x = d$

هەژمارکردنی نامانجەکان

لە ڕاهێنانی 12 تا 14، نامانج بدۆزەوە.

12 $\lim_{x \to -4} \sqrt{1-2x}$ **13** $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+1}{3x^2-2x+5}$ **14** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{4x}$

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

لە دوو ڕاهێنانی 15 و 16 دا لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بەو دوو خاڵەدا دەڕوات بدۆزەوە.

15 $(-2, 3); (2, -1)$ **16** $(1, -3); (-2, -1)$

لە دوو ڕاهێنانی 17 و 18 دا هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە لارییەکەی دیاریکراوە و بە خاڵە دیاریکراوەکەدا دەڕوات بدۆزەوە.

17 $(1, 2); -\frac{2}{3}$ **18** $(-2, -5); \frac{5}{4}$

1–3

داتاشراو و بابەتی لێکەوت
Derivative and the Tangent Problem

ئیسحاق نیوتن 1642-1727
لەگەڵ کارکردنی لە پێشخستنی هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاکاری (ئیسحاق نیوتن، بەشدارییەکی گەورەی لەفیزیادا کردووە لەوانەش یاسای تاودانی زەوی و سێ یاسایەکەی جوڵان)

ئامانجەکان

- لاری لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەیەك لە خاڵێك لە خاڵەکانیدا دەدۆزیتەوە
- پێناسەی ئامانج بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشە بەکاردەهێنیت.
- لەپەیوەندی نێوان بەردەوامی نەخشە و توانای داتاشراوەکەی تێدەگات.

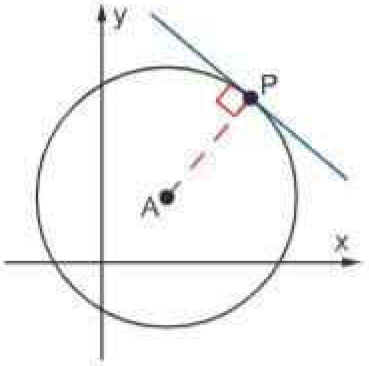
زاراوەکان Vocabulary

Difference quotient	ڕێژەی دوو جیاوازی
Secant	بڕەر
Tangent	لێکەوت
Slope	لاری
Differentiable	داتاشراوی یان توانای داتاشراوی هەیە
Derivative	داتاشراو

بابەتی لاری

جیاکاری و تەواوکاری پێشکەوت، بەهۆی لێکۆڵینەوە لە چوار بابەتی سەرەکی، کە زانا بیرکارییە ئەوروپییەکان لەسەدەی حەڤدەمدا گرنگیان پێدا.

1. بابەتی لێکەوت.
2. بابەتی خێرایی و تاودان.
3. بابەتی بەهایەکانی گەورەترین و بەهایەکانی بچوکترین.
4. بابەتی ڕووبەر.

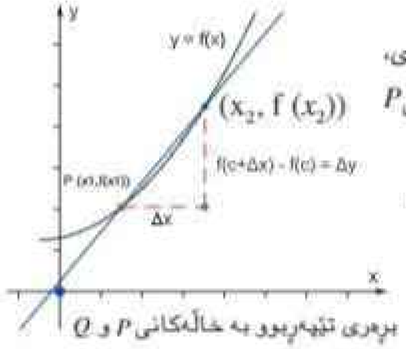


هەر بابەتێك لەو بابەتانە چەمکی ئامانج دەگرێتە خۆی. لەهەر یەکێکیانەوە دەتوانین بچینە ناو هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری.

دۆزینەوە

جیاکردنەوەی لاری: وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=2x^3-4x^2+3x-5$ بکێشە لەهەمان ڕووتەختی پۆوتانەکان ڕاستەهێڵەکانی $y=x-5$ و $y=2x-5$ و $y=3x-5$ بکێشە، کام لەم ڕاستەهێڵانە وەك لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەخاڵی $(0, -5)$ دەردەکەوێت، تێڕوانیت ڕوونبکەوە

لەوانەکانی پێشوو باسی لێکەوتمان کردو گەیشتینە ئەوەی کە ئەو بابەتە بۆ دۆزینەوەی لاری لێکەوت دەگەڕێتەوە، بۆ دۆزینەوەی لاری نەخشەی f لەخاڵی P دا لەسەر ڕوونکردنەوەکەی، دەتوانیت هەژماری بەهای نزیکەیی لاری ئەو لێکەوتە لە خاڵی P بکەیت، بە بەکارهێنانی ڕاستەهێڵێك کە بەخاڵی لێکەوتن P و خاڵێکی تری سەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکەدا دەڕوات، هەروەك لەوێنەی بەرامبەردا ڕوونکراوەتەوە، بەو ڕاستەهێڵە دەوترێت بڕەری ڕوونکردنەوەی نەخشەکە. ئەگەر $P(x_1, f(x_1))$ خاڵێکی لێکەوت و $Q(x_2, f(x_2))$ خاڵێکی تری سەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بێت، ئەوا لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بەو دوو خاڵەدا دەڕوات دەکاتە:



بڕەری تێپەڕیوو بە خاڵەکانی P و Q

$$m_{sec}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ کاتێک } \Delta y = f(x_2)-f(x_1) \text{ و } \Delta x = x_2 - x_1$$

بەرێژەی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ دەوترێت **رێژەی دوو جیاوازی**. Δx بریتییە لە گۆڕان لەبەهایەکانی x و Δy بریتییە لە گۆڕان لە بەهایەکانی y کە لەگۆڕانی بەهای x دەردەچێت، دەتوانیت ئەو رێژەیە بۆ دەستکەوتنی بەهای نزیکەیی لاری لێکەوت بەکاربهێنێت، وردی ئەو بەهایە زیاددەکات هەرچەندە Q لەخاڵی P نزیکببێتەوە.

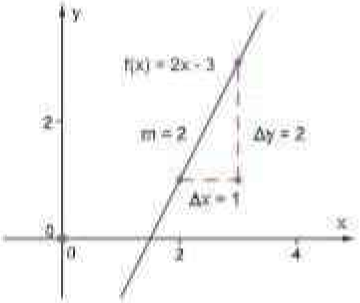
پێناسەی لاری نەخشە لە $x=c$

ئەگەر f نەخشەیەك بێت و ئەم ئامانجە هەبێت

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=m$$

ئەوا لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لە $P(c,f(c))$ بریتییە لەو ڕاستەهێڵەی لارییەکەی m و بەخاڵی Pدا دەڕوات، بەلاری لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەخاڵی $P(c,f(c))$ پێیدەوترێت لاری نەخشەکە لە $x=c$.

نموونە 1 — لاری نەخشەی هێڵی



لاری نەخشەی هێڵی $f(x)=2x-3$ لە $x=2$ بدۆزەوە.

بۆ دۆزینەوەی لاری نەخشەکە لە $x=2$ دەتوانیت پێناسەی لاری نەخشەکە بەکاربهێنیت.

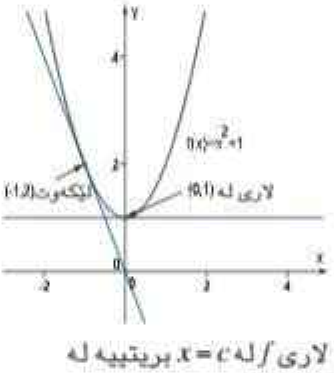
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2(2+\Delta x)-3]-[2(2)-3]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+2\Delta x-3-4+3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}$$
$$=2$$

کەواتە لاری نەخشەی $f(x)=2x-3$ لە $x=2$ دەکاتە $m=2$.

خاڵی چاودێری 1. لاری نەخشەی هێڵی $f(x)=-3x-5$ لە $x=-3$ بدۆزەوە.

لەبەرئەوەی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی هێڵی ڕاستەهێڵە، ئەوا لاری نەخشەی هێڵی لەهەر خاڵێك لە خاڵەکانی وێنە ڕوونکردنەوەکە هەمان بەهایە، بەڵام کارەکە جیاوازە کاتێك نەخشەکە هێڵی نەبێت.

نموونە 2 — لاری نەخشەیەك هێڵی نەبێت



لاری f لە $x=c$ بریتییە لە $m=2c$

لاری نەخشەی دووجای $f(x)=x^2+1$ لە $x=c$ پاشان لە $x=0$ و $x=-1$ دا بدۆزەوە.

ئەگەر $(c,f(c))$ خاڵێك بێت لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی f ئەوا لاری لێکەوت لەو خاڵەدا دەکاتە:

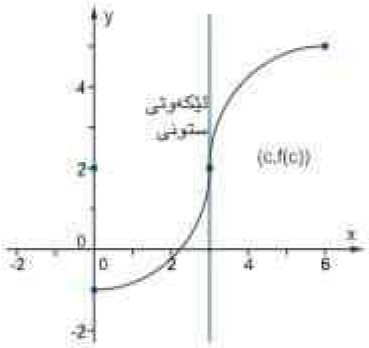
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(c+\Delta x)^2+1\right]-\left[c^2+1\right]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c^2+2c\Delta x+(\Delta x)^2+1-c^2-1}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2c\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2c+\Delta x)$$
$$=2c$$

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 7

هەروەها لاری نەخشەی f لە $x=c$ دەکاتە $m=2c$ خاڵی $(c, f(c))$ ی سەر وێنەی ڕوونکردنەوەکەی هەر چەند بێت، لەمەش دەردەچێت لاری نەخشەکە لە $x=0$ دەکاتە $m=2(0)=0$ و لە $x=-1$ دەکاتە $m=2(-1)=-2$

خاڵی چاودێری

2. لاری نەخشە دووجای $f(x)=-2x^2-3$ لە $x=1$ و $x=-1$ بدۆزەوە.



پێناسەی پێشوو بۆ لاری نەخشەیەک لەخاڵێکی ڕوونکردنەوەکەی ئەستونبونی لێکەوت لەو خاڵەدا ناگرێتەوە، لەم بارەدا دەتوانیت ئەم پێناسەیە بەکاربهێنیت: ئەگەر نەخشەکە بەردەوام بێت لە $x=c$ وە

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=+\infty$$

یان

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=-\infty$$

ئەوا ڕاستەهێڵی ئەستوونی $x=c$ **لێکەوتی ئەستونی** نەخشەکەیە لە خاڵی $(c, f(c))$ وە لاری نەخشەکە لەو خاڵەدا پێناسەنەکراوە.

لەوێنەی بەرامبەردا نەخشەیەک دەردەکەوێت لێکەوتێکی ئەستونی لە $x=3$ هەیە.

پێناسەی داتاشراو

بەنەخشەی f دەوترێت **توانای داتاشرانی** هەیە لە $x=c$ ئەگەر لارییەکەی لەو خاڵەدا پێناسەکرابێت.

ئێستا دەتوانین پێناسەی داتاشراوی نەخشە بکەین.

ئەگەر f نەخشەیەک بێت توانای داتاشرانی لە هەموو خاڵەکانی بوارەکەیدا هەبێت، ئەوا دەتوانیت هەر بەهایەکی c لەبواری نەخشەکە بە لارییەکەی f' لە $x=c$ ببەستێتەوە، ئەو نەخشەیە بەشێوەی f' دەنووسرێت و پێی دەوترێت داتاشراوی نەخشەی f.

ئەوانەی لەبواری بیرکاری کاردەکەن چەندین هێما بەکاردەهێنن بۆ دەربڕینی بەهای داتاشراو f'. نووسینەکان ئەمانەن $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ و $f'(x)$، $\frac{df}{dx}$، $\frac{dy}{dx}$، $\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$، $D_x(y)$

نموونە 3 دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشە بەبەکارهێنانی پێناسە

داتاشراوی نەخشەی $f(x)=\frac{2}{x}$ بدۆزەوە.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2}{x+\Delta x}-\frac{2}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2x-2(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x}{\Delta x(x)(x+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{x(x+\Delta x)}=\frac{-2}{x^2}$$

خاڵی چاودێری

3. داتاشراوی نەخشەی $f(x)=x^3$ بدۆزەوە.

بەردەوامی و توانای داتاشراو

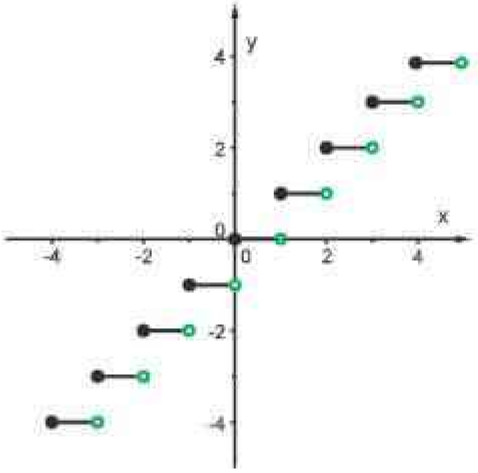
بینیمان لاری نەخشە لە $x=c$ بریتییە لە ئامانجی لاری ئەو برگەی بەخاڵی $P(c,f(c))$ و خاڵێکی نزیک لێی $Q(x,f(x))$دا دەڕوات کاتێک Q لە P نزیکدەبێتەوە، ئەمە ڕێگامان پێدەدات بنووسین $f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ بەمەرجێک ئەو ئامانجە هەبێت.

ئەگەر نەخشەی f لە خاڵی $(c, f(c))$ بەردەوام نەبێت ئەوا توانای داتاشرانی لەو خاڵەدا نابێت. لەوێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=[x]$ دەردەکەوێت کە هەر ژمارەیەکی ڕاستی x بە ژمارەیەکی تەواوی گەورەتر کە لەو زیاتر نەبێت دەبەستێتەوە، دیارە کە ئەو نەخشەیە لە $x=0$ بەردەوام نییە وتوانای داتاشراوی لەو خاڵەدا نییە، چونکە

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0$$

و
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-1-0}{x-0}=-1$$

کەواتە $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ بوونی نییە.

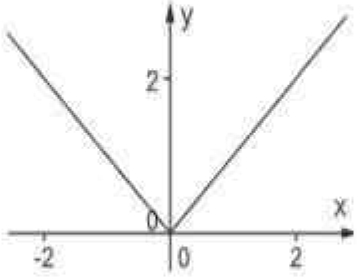


نەخشەی $f(x)=[x]$ توانای داتاشراوی نییە لە خاڵی، $(0,f(0))$ چونکە لەو خاڵەدا بەردەوام نییە

سەلمێنراوی 1-3 **توانای داتاشراو بەردەوامی دەسەپێنێت**

ئەگەر نەخشەی f لە خاڵی $(c, f(c))$ توانای داتاشرانی هەبێت، ئەوا بەردەوام دەبێت لەو خاڵەدا.

ئایا پێچەوانەی سەلمێنراوەکەی سەرەوە ڕاستە؟ واتە ئایا بەردەوامی نەخشەیەک لەخاڵێکی سەر ڕوونکردنەوەکەی توانای داتاشرانی نەخشەکە دەسەپێنێت؟ وەڵامەکەی نەخێرە، وەک لە نەخشەی ڕووتی: $f(x)=|x|$ دەردەکەوێت.



$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x-0}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x-0}=1$$

ئەمەش ئەوە دەسەلمێنێت $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ بوونی نییە بەمەش نەخشەکە لاری نییە لە $x=0$.

1-3 ڕاهێنان

لە پرسیاری 1 تا 3 لاری نەخشەکە لە خاڵی دیاریکراوەکەدا بدۆزەوە.

1 $f(x)=3-2x$ ، $(-1,5)$ **2** $f(x)=x^2-4$ ، $(1,-3)$ **3** $f(t)=3t-t^2$ ، $(0,0)$

لە پرسیاری 4 تا 11 داتاشراوی هەر نەخشەیەک بە بەکارهێنانی ئامانجەکان بدۆزەوە.

4 $f(x)=3$ **5** $f(x)=3x+2$ **6** $f(x)=2x^2+x-1$ **7** $f(x)=x^3+x^2$

8 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ **9** $f(x)=\sqrt{x+1}$ **10** $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}$ **11** $f(x)=9-\frac{1}{2}x$

لە پرسیاری 12 تا 15 هاوکێشەی لێکەوتی نەخشەکە لە خاڵە دیاریکراوەکە بدۆزەوە.

12 $f(x)=x^2+1$: $(2,5)$ **13** $f(x)=x^3$: $(2,8)$

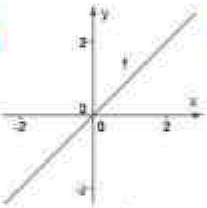
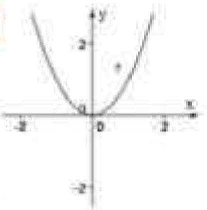
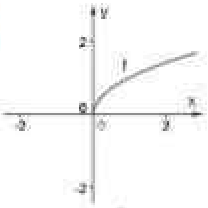
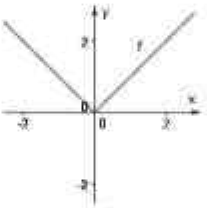
14 $f(x)=\sqrt{x-1}$: $(5,2)$ **15** $f(x)=x+\frac{4}{x}$: $(4,5)$

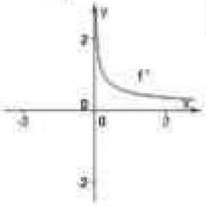
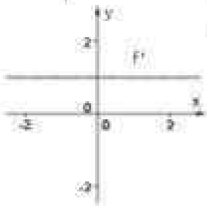
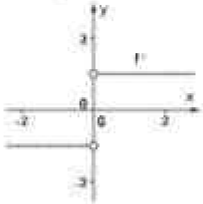
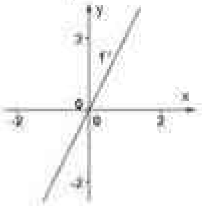
GRADE12-2011-CHAPTER 3 4/4/18 12:08 PM Page 9

لە ڕاهێنانی 16 و 17 دا هاوکێشەی لێکەوتی نەخشەی تەریب بەو ڕاستەهێڵەی کە هاوکێشەکەی دیاریکراوە بدۆزەوە.

16 $f(x)=x^3+2$ ؛ $3x-y+1=0$ **17** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ؛ $x+2y-6=0$

لە ڕاهێنانی 18 تا 21 وێنەی ڕوونکردنەوەی 4 نەخشەو وێنە ڕوونکردنەوەیی داتاشراوەکانیان کێشراوە، وێنەی ڕوونکردنەوەیی داتاشراوی هەر نەخشەیەک کە بۆ نەخشەکە دەگەڕێتەوە دیاریکە.

18

19

20

21


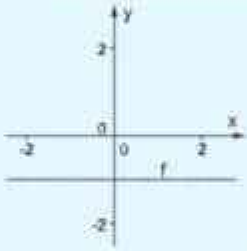
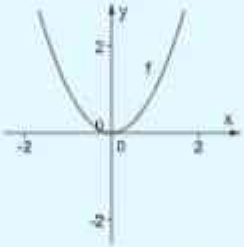
أ

ب

ج

د


22 لێکەوتی نەخشەی g لە خاڵی $(5,2)$ بەخاڵی $(9,0)$ دا دەڕوات، $g(5)$ و $g'(5)$ بدۆزەوە.

23 لێکەوتی نەخشەی h لە خاڵی $(-1,4)$ بەخاڵی $(3,6)$ دا دەڕوات، $h(-1)$ و $h'(-1)$ بدۆزەوە.

لە بارەی چەمکەکان

لە دوو ڕاهێنانی 24 و 25 دا وێنەی ڕوونکردنەوەیی داتاشراوی نەخشەکە بکێشە. چۆن وێنەکەت کێشا؟ باسیبکە.

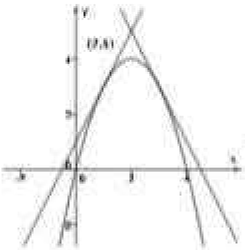
24

25


26 نەخشەیەک بکێشە هەموو بەهایەکانی داتاشراوەکەی سالب بێت.

لە ڕاهێنانی 27 تا 28 نامانجە نووسراوەکە $f'(c)$ دەنوێنێت. $f(x)$ و c بدۆزەوە.

27 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[5-3(1+\Delta x)]-2}{\Delta x}$ **28** $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(6+\Delta x)^2+36}{\Delta x}$

لە دوو پرسیاری 29 و 30 دا نەخشەی f کە مەرجە دیاریکراوەکان جێبەجێ دەکات بدۆزەوە، پاشان وێنە ڕوونکردنەوەکەی بکێشە.



29 $f(0)=2$ ؛ $f'(x)=-3$ کاتێک $-\infty<x<\infty$.

30 $f(0)=4$ ؛ $f'(0)=0$ ؛ $f'(x)<0$ کاتێک $x<0$ ؛ $f'(x)>0$. کاتێک $x>0$

31 هاوکێشەی دوو لێکەوتەکەی نەخشەی $f(x)=-x(x-4)$ لە وێنەی بەرامبەر بدۆزەوە.

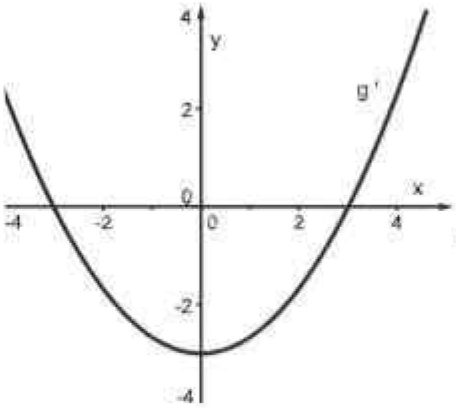
GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 8

32 وادابنێ $f'(c)=3$ ئەوا $f'(-c)$ کە بدۆزەوە

أ ئەگەر f نەخشەیەکی تاك بێت.

ب ئەگەر f نەخشەیەکی جووت بێت.

33 لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی داتاشراوی g' بۆ نەخشەی g دەردەکەوێت.



أ $g'(0)$ بدۆزەوە.

ب $g'(3)$ بدۆزەوە.

ج چ دەرئەنجامێکت لەبارەی نەخشەی g دەستدەکەوێت ئەگەر زانیت $g'(1)=-\frac{8}{3}$ ؟

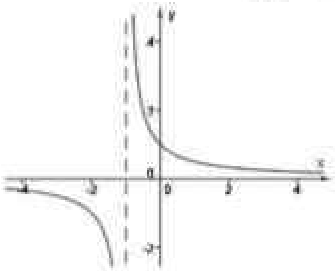
د چ دەرئەنجامێکت لە بارەی نەخشەی دەستدەکەوێت ئەگەر زانیت کە $g'(-4)=\frac{7}{3}$.

هـ ئایا $g(6)-g(4)$ موجەبە یان سالب؟ ڕوونیبکەوە.

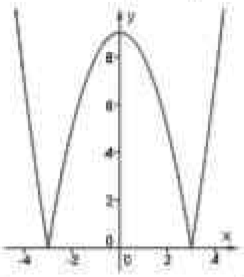
و ئایا دەتوانیت $g(2)$ بدۆزیتەوە؟ ڕوونیبکەوە.

لە پرسیاری 34 تا 36 بەهایەکانی x بدۆزەوە، کاتێك نەخشەکە توانای داتاشرانی هەبێت.

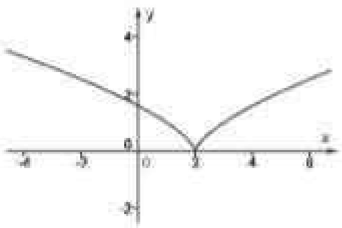
34 $f(x)=\frac{1}{x+1}$



35 $f(x)=\left|x^2-9\right|$



36 $f(x)=(x-2)^{\frac{2}{3}}$



لە پرسیاری 37 تا 39، دیاریبکە کە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە، و ئەگەر هەڵەیە ئەوا بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە

37 لاری لێکەوتی نەخشەی f کە لە خاڵی $(2,f(2))$ توانای داتاشرانی هەیە دەکاتە $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

38 ئەگەر نەخشەیەك لەخاڵێك بەردەوام بێت، ئەوا توانای داتاشرانی هەیە لەو خاڵەدا.

39 ئەگەر نەخشەیەك لەخاڵێك توانای داتاشرانی هەبێت، ئەوا بەردەوامە لەو خاڵەدا.

40 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ڕوونیبکەوە f بەردەوامە و توانای داتاشرانی

نییە لە $x=0$، لەکاتێکدا g توانای داتاشراوی هەیە لەو خاڵە. $g'(0)$ بدۆزەوە.

2–3 ڕێساکانی داتاشراو
Differentiation Rules

ئامانجەکان
- داتاشراوی نەخشە بنەڕەتییەکان دەناسێت و بەکاریاندەهێنێت.
- ڕێساکانی داتاشراو دیاریدەکات و بەکاریاندەهێنێت.

داتاشراوی نەخشە بنەڕەتییەکان

لە وانەکانی پێشوو مانای داتاشراوت زانی وئامانجت بەکارهێنا بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی هەندێک نەخشەی سادە، بەڵام ئەو ڕێگایە ئاسان نییە بۆ زۆربەی نەخشەکان، لەبەرئەوە بیرکاریناسان پەنایان بردە بەر دۆزینەوەی ڕێساکانی داتاشراو. ئەم ڕێگایەش پشت بەو دەرئەنجامە دەبەستێت کە زۆربەی نەخشەکان لە نەخشە بنەڕەتییەکان بە کۆکردنەوە و لێدەرکردن و لێکدان و دابەشکردن و ئاوێتەکردن دروست دەکرێن، بەمەش زانینی داتاشراوی نەخشە بنەڕەتییەکان و ئەو ڕێسایانەی کە لە داتاشراو کاری پێدەکرێت، یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی زۆربەی نەخشەکان.

ئەم خشتەیەی خوارەوە پوختەی ڕێساکانی داتاشراوی نەخشە بنەڕەتییەکانە

خشتەی داتاشراوە بنەڕەتییەکان	
داتاشراوەکەی	**نەخشە**
$f'(x)=0$	$f(x)=c$ کاتێک c ژمارەیەکی ڕاستییە
$f'(x)=1$	$f(x)=x$
$f'(x)=nx^{n-1}$	$f(x)=x^n$ کاتێک $n\in\mathbb{R}$
$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\frac{1}{x}\ ;x\neq 0$
$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\sqrt{x}$
$f'(x)=-\sin x$	$f(x)=\cos x$
$f'(x)=\cos x$	$f(x)=\sin x$
$f'(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$f(x)=\tan x$
$f'(x)=e^x$	$f(x)=e^x$
$f'(x)=\frac{1}{x}$	$f(x)=\ln x$

نموونە 1 بەکارهێنانی داتاشراوە بنەڕەتییەکان

ئەم خشتەیە تەواوبکە

داتاشراوەکەی	نەخشە
	$f(x)=x^5$
	$f(x)=\sqrt[3]{x}$
	$f(x)=\frac{1}{x^3}$

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 10

شیكار

نەخشە	داتاشراوەكەی
$f(x)=x^5$	$f'(x)=5x^4$
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$f(x)=\frac{1}{x^3}$	$f'(x)=\left(x^{-3}\right)'=-3x^{-4}=\frac{-3}{x^4}$

خاڵی جاودێری

1 ئەم خشتەیە تەواوبكە.

نەخشە	داتاشراوەكەی
$f(x)=x^{16}$	
$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$	
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	

ڕێساكانی داتاشراو

سەلمێنراوی 3-2 ڕێسای لێكدان لە ئەگۆڕ

ئەگەر نەخشەی f توانای داتاشرانی هەبێت و c ژمارەیەكی ڕاستی بێت ئەوا نەخشەی cf توانای داتاشرانی هەیە.

$$[cf(x)]'=cf'(x)$$

سەلمێنراوی 3-3 ڕێسای سەرجەم و جیاوازی

سەرجەم یان جیاوازی دوو نەخشە توانای داتاشرانیان هەبێت، بەكاتە نەخشەیەك توانای داتاشرانی هەیە.

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x) \qquad [f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$$

ئێستا بەتوانین شێوەی گشتی داتاشراوی نەخشەی ڕادەدار بدۆزینەوە، سەلماندنی ئەو سەلمێنراوەی دێت نموونەیەكە بۆ چۆنیەتی بەكارهێنانی داتاشراوە بنەڕەتییەكان وڕێساكانی داتاشراو بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشەیەك.

سەلمێنراوی 3-4 داتاشراوی نەخشەی ڕادەدار

ئەگەر

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$$

ئەوا

$$f'(x)=na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+2a_2 x+a_1$$

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 13

سەلماندن

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$$

$$f'(x)=\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0\right)'$$

ڕێسای سەرجەم $=\left(a_n x^n\right)' + \left(a_{n-1}x^{n-1}\right)' + ... + \left(a_1 x\right)' + \left(a_0\right)'$

ڕێسای لێکدان لە نەگۆڕ $=a_n\left(x^n\right)' + a_{n-1}\left(x^{n-1}\right)' + ... + a_1\left(x\right)' + \left(a_0\right)'$

داتاشراوە بنەڕەتییەکان $=a_n(nx^{n-1}) + a_{n-1}\left((n-1)x^{n-2}\right) + ... + a_1(1) + 0$

سادەکردن $=na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1$

نموونـــــە 2 بەکارهێنانی کەوانەکان لە داتاشراو

ئەم خشتەیە تەواوبکە

نەخشە	ڕێکخستنی نەخشە	داتاشراو	داتاشراوی سادەکراو
$f(x)=\frac{5}{2x^3}$			
$f(x)=\frac{5}{(2x)^3}$			
$f(x)=\frac{7}{3x^{-2}}$			
$f(x)=\frac{7}{(3x)^{-2}}$			
$f(x)=\frac{4}{x\sqrt{x}}$			

شیکار

نەخشە	ڕێکخستنی نەخشە	داتاشراو	داتاشراوی سادەکراو
$f(x)=\frac{5}{2x^3}$	$f(x)=\frac{5}{2}\left(x^{-3}\right)$	$f'(x)=\frac{5}{2}\left(-3x^{-4}\right)$	$f'(x)=\frac{-15}{2x^4}$
$f(x)=\frac{5}{(2x)^3}$	$f(x)=\frac{5}{8}\left(x^{-3}\right)$	$f'(x)=\frac{5}{8}\left(-3x^{-4}\right)$	$f'(x)=\frac{-15}{8x^4}$
$f(x)=\frac{7}{3x^{-2}}$	$f(x)=\frac{7}{3}\left(x^2\right)$	$f'(x)=\frac{7}{3}(2x)$	$f'(x)=\frac{14}{3}x$
$f(x)=\frac{7}{(3x)^{-2}}$	$f(x)=63\left(x^2\right)$	$f'(x)=63(2x)$	$f'(x)=126x$
$f(x)=\frac{4}{x\sqrt{x}}$	$f(x)=4\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$	$f'(x)=4\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^{-\frac{3}{2}-1}\right)$	$f'(x)=-6\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{-6}{x^2\sqrt{x}}$

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 12

خاڵی جاوێری **2.** خشتەکە تەواوبکە.

نەخشە	ڕێکخستنی نەخشە	داتاشراو	داتاشراوی سادەکراو
$f(x)=\frac{-2}{3x^3}$			
$f(x)=\frac{-3}{(3x)^2}$			
$f(x)=\frac{9}{3x^{-3}}$			
$f(x)=\frac{7}{(2x)^{-3}}$			

نموونە 3 بەکارهێنانی ڕێسایەکانی داتاشراو و داتاشراوە بنەڕەتییەکان

ئەم خشتەیە تەواوبکە.

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=x^3-4x+5$	
$f(x)=-\frac{x^4}{2}+3x^3-2x$	
$f(x)=\frac{\sin x}{2}$	
$f(x)=x+\cos x$	

شیکار

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=x^3-4x+5$	$f'(x)=\left(x^3-4x+5\right)'=\left(x^3\right)'-(4x)'+(5)'=3x^2-4$
$f(x)=-\frac{x^4}{2}+3x^3-2x$	$f'(x)=\left(-\frac{x^4}{2}+3x^3-2x\right)'=\left(-\frac{x^4}{2}\right)'+\left(3x^3\right)'-(2x)'$ $=-2x^3+9x^2-2$
$f(x)=\frac{\sin x}{2}$	$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{2}\right)'=\left(\frac{1}{2}\sin x\right)'=\frac{1}{2}\cos x$
$f(x)=x+\cos x$	$f(x))'=(x+\cos x)'=(x)'+(\cos x)'=1-\sin x$

خاڵی جاوێری **3.** ئەم خشتەیە تەواوبکە.

نەخشە	داتاشراو
$f(x)=-2x^3+3x^3+5x^2$	
$f(x)=-\frac{x^5}{5}-7x^3+8$	
$f(x)=\frac{\tan x}{2}-\frac{1}{2}\sin x$	
$f(x)=\frac{1}{4}x-\cos x$	

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 15

ڕێساکانی داتاشراو

سەلمێنراوی 3-5 ڕێسای ئەنجامی لێکدان

ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشە توانای داتاشرانیان هەبێت دەکاتە نەخشەیەك توانای داتاشرانی هەیە.

$$\left[f(x)g(x)\right]' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

سەلمێنراوی 3-6 ڕێسای ئەنجامی دابەشبوون

ئەگەر f و g دوو نەخشەبن توانای داتاشرانیان هەبێت، ئەوا نەخشەی $\frac{f}{g}$ توانای داتاشرانی هەیە کاتێك $g(x) \neq 0$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

نموونە 4 بەکارهێنانی ڕێساکانی داتاشراو و داتاشراوە بنەڕەتییەکان

داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

1 $f(x) = 3x^2 \sin x$ 2 $f(x) = \frac{5x-2}{x^2+1}$

شیکار

1 $f'(x) = \left[3x^2 \sin x\right]' = 3x^2\left[\sin x\right]' + \sin x\left[3x^2\right]'$

$= 3x^2 \cos x + (\sin x)(6x) = 3x^2 \cos x + 6x \sin x$

2 $f'(x) = \left(\frac{5x-2}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)(5x-2)' - (5x-2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{(x^2+1)(5) - (5x-2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-5x^2+4x+5}{(x^2+1)^2}$

خاڵی چاودێری 4. داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

1 $f(x) = -2x^3 \cos x$ 2 $f(x) = \frac{3x-7}{x^2-1}$

نموونە 5 بەکارهێنانی ڕێساکانی داتاشراو و داتاشراوە بنەڕەتییەکان

ڕێسای داتاشراوی نەخشەی $f(x) = \tan x$ بسەلمێنە

شیکار

$f'(x) = \left[\tan x\right]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\cos x)\left[\sin x\right]' - (\sin x)\left[\cos x\right]'}{(\cos x)^2}$

$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

خاڵی چاودێری 5. داتاشراوی نەخشەی $f(x) = \frac{1}{\tan x}$ بدۆزەوە.

سەلمێنراوی 3-7 ڕێسای نەخشەی ئاوێتە

ئەگەر f نەخشەیەك بێت بەپێی u توانای داتاشرانی هەبێت و $u=g(x)$ نەخشەیەك بێت بەپێی x توانای داتاشرانی هەبێت، ئەوا نەخشەی $y=f(g(x))$ توانای داتاشرانی هەیە.

$$\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))g'(x)$$

سەلماندن

$$\left(f(g(x))\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{x_2-x_1}$$

کاتێك $x_1=x$ و $x_2=x_1+h$

$$=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{g(x_2)-g(x_1)}\,\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{g(x_2)-g(x_1)}\lim_{x_2\to x_1}\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

لەبەرئەوەی نەخشەی g بەردەوامە ئەوا $g(x_2)$ لە $g(x_1)$ نزیکدەبێتەوە کاتێك x_2 لە x_1 نزیکدەبێتەوە

$$=\lim_{g(x_2)\to g(x_1)}\frac{f(g(x_2))-f(g(x_1))}{g(x_2)-g(x_1)}\lim_{x_2\to x_1}\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$=f'(g(x))g'(x)$$

لەوانەیە لە دیاریکردنی ئەو نەخشانەی کە نەخشە ئاوێتەکە پێکدەهێنن تووشی ئاستەنگ ببیتەوە ئەو نمونەیەی خوارەوە هەندێك نمونە ڕووندەکاتەوە.

نمونە 6

ئەم خشتەیە تەواوبکە.

$y=f(u)$	$u=g(x)$	$y=f(g(x))$
		$y=\frac{1}{x+1}$
		$y=\sin 2x$
		$y=\sqrt{3x^2-x+1}$
		$y=\tan^2 x$

شیکار

$y=f(u)$	$u=g(x)$	$y=f(g(x))$
$y=\frac{1}{u}$	$u=x+1$	$y=\frac{1}{x+1}$
$y=\sin u$	$u=2x$	$y=\sin 2x$
$y=\sqrt{u}$	$u=3x^2-x+1$	$y=\sqrt{3x^2-x+1}$
$y=u^2$	$u=\tan x$	$y=\tan^2 x$

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 17

خاڵی چاودێری 6. ئەم خشتەیە تەواوبکە.

$y=f(u)$	$u=g(x)$	$y=f(g(x))$
		$y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$
		$y=\cos \pi x$
		$y=\sqrt{4x^5-5x^4}$
		$y=(1+\tan x)^2$

نموونە 7 داتاشراوی نەخشەی ئاوێتە

داتاشراوی نەخشەی $y=\left(x^2+1\right)^3$ بدۆزەوە.

شیکار

دەتوانیت ئەو دوو نەخشەیە دیاریکەین کە ئەو نەخشە ئاوێتەیە پێکدەهێنن $u=x^2+1$ و $y=u^3$ لەوەش دەردەچێت.

$$y'(x)=y'(u)u'(x)=(3u^2)(2x)=3(x^2+1)^2(2x)=6x(x^2+1)^2$$

خاڵی چاودێری 7. داتاشراوی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ بدۆزەوە.

2-3 ڕاهێنان

لە پرسیاری 1 تا 11 داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

1. $y=8$
2. $f(x)=x^6$
3. $f(x)=\frac{1}{x^7}$
4. $f(x)=\sqrt[5]{x}$
5. $f(x)=3x-1$
6. $f(x)=-2x^2+3x-6$
7. $f(x)=2x^3-x^2+3x$
8. $f(\theta)=\frac{\pi}{2}\sin\theta-\cos\theta$
9. $f(x)=x^2-\frac{1}{2}\cos x$
10. $f(x)=\frac{1}{x}-3\sin x$
11. $f(x)=\frac{5}{(2x)^3}+2\cos x$

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 16

لە ڕاهێنانی 12 تا 15 خشتەکە تەواوبکە.

	نەخشە بنەڕەتییەکە	ڕێکخستنی نەخشە	داتاشراو	داتاشراوی سادەکراو
12	$f(x)=\frac{5}{2x^2}$			
13	$f(x)=\frac{\pi}{(3x)^2}$			
14	$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$			
15	$f(x)=\frac{4}{x^{-3}}$			

لە ڕاهێنانی 16 تا 25 داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

16 $f(x)=x^2-5-3x^{-2}$

17 $f(t)=t^2-\frac{4}{t^3}$

18 $f(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$

19 $f(x)=x(x^2+1)$

20 $f(x)=\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}$

21 $f(t)=t^{\frac{4}{5}}-t^{\frac{2}{3}}$

22 $f(x)=(x^2+4)\sqrt{x}$

23 $f(x)=x^3\cos x$

24 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$

25 $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$

لە ڕاهێنانی 26 تا 29 خشتەکە تەواوبکە.

	$y=f(g(x))$	$u=g(x)$	$y=f(u)$
26	$y=(6x-5)^4$		
27	$y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$		
28	$y=3\tan(\pi x^2)$		
29	$y=\cos\frac{3x}{2}$		

لە ڕاهێنانی 30 تا 50 داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

30 $f(x)=3(4-9x)^4$

31 $f(t)=\sqrt{1-t}$

32 $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

33 $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$

34 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

35 $f(t)=\sqrt{\frac{1}{t^2-2}}$

36 $f(x)=\left(\frac{x+5}{x^2+2}\right)^2$

37 $f(x)=\left(\frac{3x^2-2}{2x+3}\right)$

38 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/29/18 1:10 PM Page 19

39 $f(x)=\ln x^2$

40 $f(x)=x\ln x$

41 $f(x)=\ln\left(x\sqrt{x^2-1}\right)$

42 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

43 $f(x)=\ln\frac{1}{x^2}$

44 $f(x)=\ln\sqrt{2+\cos^2 x}$

45 $f(x)=e^{-x^2}$

46 $f(x)=x^2e^{-x}$

47 $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

48 $f(x)=\ln e^x$

49 $f(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$

50 $f(x)=e^x\left(\sin x+\cos x\right)$

لە دوو ڕاهێنانی 51 و 52 دا هاوکێشەی لێکەوتی نەخشەکە لەخاڵە دیاریکراوەکەدا بدۆزەوە.

51 $f(x)=x^4-3x^2+2$: $(1,0)$

52 $f(x)=\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$: $(1, 2)$

لە ڕاهێنانی 53 تا 55 ئەو خاڵانە دیاریکە (ئەگەر هەبێت) کاتێک لێکەوتی نەخشەکە تێیدا ئاسۆیی بێت.

53 $f(x)=x^4-8x^2+2$

54 $f(x)=\frac{1}{x^2}$

55 $f(x)=x+\sin x$ کاتێک $0\le x\le 2\pi$

لە ڕاهێنانی 56 تا 57 بەهای k کاتێک ڕاستەهێڵەکە دەبێتە لێکەوتی نەخشەکە بدۆزەوە.

56 $f(x)=x^2-kx$: $y=4x-9$

57 $f(x)=\frac{k}{x}$: $y=-\frac{3}{4}x+3$

دەربارەی چەمکەکان

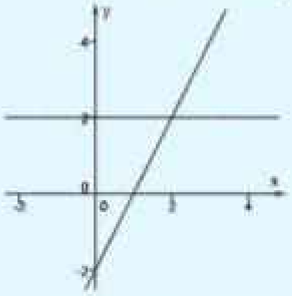
لە دوو ڕاهێنانی 58 و 59 دا ئەو پەیوەندییە بدۆزەوە کە داتاشراوی f و داتاشراوی g بەیەک دەبەستێت.

58 $g(x)=f(x)+6$

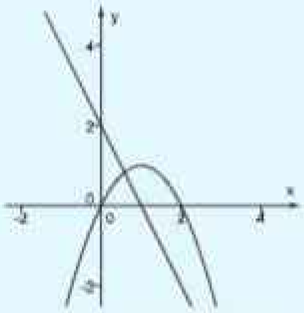
59 $g(x)=-5f(x)$

لە دوو ڕاهێنانی 60 و 61 دا وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و وێنەی ڕوونکردنەوەی داتاشراوەکەی لەهەمان ڕووتەختی پۆوتانەکان دەردەکەوێت، وێنەی ڕوونکردنەوەی f و f' جیابکەوە و لەبەرامبەر هەر وێنەیەک ناوەکەی بنووسە. باسیبکە چۆن گەیشتیتە دیاریکردنی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە و داتاشراوەکەی.

60



61



لە دوو ڕاهێنانی 62 و 63 دا پێدراوەکان بۆ دۆزینەوەی بەهای $f'(2)$ بەکاربهێنە.

$g(2)=3$ $\quad g'(2)=-2$ $\quad h(2)=-1$ $\quad h'(2)=4$

62 $f(x)=2g(x)+h(x)$

63 $f(x)=g(x)h(x)$

ڕاست یان هەڵە:

لە ڕاهێنانی 64 تا 69 دیاریبکە. ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە و ئەگەر هەڵەیە ئەوا بەدژە نموونەیەک بیسەلمێنە.

64 ئەگەر $f'(x)=g'(x)$ ئەوا $f(x)=g(x)$.

65 ئەگەر $f(x)=g(x)+c$ ئەوا $f'(x)=g'(x)$.

66 ئەگەر $y=\pi^2$ ئەوا $\frac{dy}{dx}=2\pi$.

67 ئەگەر $y=\frac{x}{\pi}$ ئەوا $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\pi}$.

68 ئەگەر $g(x)=3f(x)$ ئەوا $g'(x)=3f'(x)$.

69 ئەگەر $f(x)=\frac{1}{x^n}$ ئەوا $f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$.

70 ئەگەر ئەخشەی ڕاندراوی $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ هەبێت ئەومەرجانە دیاریکە کە پێویستە لە a ، b ، c ، d بێتەدی بۆ ئەوەی .

أ ئەخشەکە لێکەوتی ئاسۆیی نەبێت.

ب ئەخشەکە تەنها یەک لێکەوتی ئاسۆیی هەبێت.

ج ئەخشەکە تەنها دوو لێکەوتی ئاسۆیی هەبێت.

بۆ هەر بارێك نموونەیەك بۆ ئەخشەکە بهێنەوە.

بەشی 3

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

3-1 هەژمارکردنی داتاشراو بە بەکارهێنانی پێناسە

1 ئامانج بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی هەر نەخشەیەك بەکاربهێنە.

أ $f(x)=2\sqrt{x}-1$

ب $f(x)=-x^2+x$

3-2 ڕێساکانی داتاشراو

2 داتاشراوی هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $f(x)=2x^2-\frac{1}{2x^3}+\frac{2\sqrt{x}}{3}-1$

ب $f(x)=\frac{\cos 2x}{x^2}$

ج $f(x)=ln(1+e^x)$

د $f(\theta)=\sin\left(\pi^2\theta\right)+\cos\left(\pi\theta^2\right)$

3 $f(x)=x^3-3x$

أ هاوکێشەی لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەخاڵی بنەڕەتدا بدۆزەوە.

ب خاڵەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بدۆزەوە کە لێکەوت تێیدا ئاسۆییە.

ج ئەگەر نەخشەی $g(x)$ پاسادانی $g(1)=0$ و $g'(1)=-1$ بکات ئەوا بەهای $h'(1)$ کە $h=f\circ g$ بدۆزەوە.

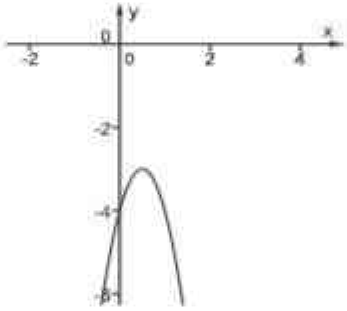
3-2 بەردەوامی

4 دیاریکە نەخشەی $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 1\\ 3x-1 & x<1\end{cases}$ بەردەوامەو توانای داتاشرانی لە $x=1$ نییە.

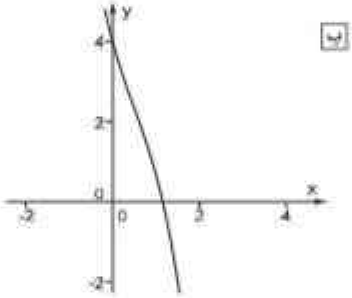
3-2 نەخشەو داتاشراوەکانی

5 دوو وێنەکەی خوارەوە وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و داتاشراوەکەی f' دەنوێنێت.

أ



ب



أ کامیان وێنەی ڕوونکردنەوەی f و کامیان وێنەی ڕوونکردنەوەی f' دەنوێنێت؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

ب هاوکێشەی لێکەوتی ڕوونکردنەوەی f لە $x=0$ بدۆزەوە.

3-3 داتاشراوی خۆبەخۆ و داتاشراوە بەرزەکان
Implicit Differentiation and Higher Derivative

لەپۆلی دەیەم شارەزای نەخشە بوویت، بینیت کە پێناسەکردنی نەخشە بەزۆری **بەشێوەی ئاشکرا** دەکرێت ئەویش بە نووسینی گۆڕاوی پەیوەستی y بەپێی گۆڕاوی **ئازادی** x وەک $y = 3x^2 - 5$ ، بەڵام هەندێک نەخشە **بەشێوەی خۆبەخۆ** دیاریدەکرێت بە پەیوەندییەک دوو گۆڕاوەکەی پاسادان دەکەن، وەک $xy = 1$ ئەگەر لەم نمونەیە داوات لێکرا داتاشراوی y وەک نەخشەیەک بەپێی x بدۆزیتەوە سەرەتا y بەپێی x دەنووسیت پاشان ڕێساکانی داتاشراو بەکاردەهێنیت.

$$xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

بەڵام نووسینی y بەپێی x هەموو کات کارێکی ئاسان نییە، بۆ نموونە پەیوەندی $x + y^3 = \sqrt{x+y}$ لەم بارانەدا بۆ دۆزینەوەی y' پەنادەبەینە بەر **داتاشراوی خۆبەخۆ**.

بۆ ئەوەی داتاشراوی خۆبەخۆ تێبگەیت لەبیرت بێت داتاشراو بەپێی گۆڕاوی x وەردەگرین بۆ دۆزینەوەی y' ، پاشان ئەم هەنگاوانە پەیرەوبکە.

- داتاشراوی هەرلایەک بەپێی گۆڕاوی x وەربگرە.
- دانانی ئەو ڕادانەی y' لەخۆدەگرێت لەلایەک و ڕادەکانی دیکە لەلایەکەی تر.
- ئەو لایەی y' لەخۆدەگرێت شیتەڵبکە.
- y' هەژماربکە بەپێی x و y.

ئامانجەکان

- جیاوازی لەنێوان نووسینی شێوەی خۆبەخۆ و نووسینی شێوەی ئاشکرا دەکات.
- داتاشراوی خۆبەخۆ بۆ دۆزینەوەی داتاشراوی نەخشە بەکاردەهێنێت.
- بارەکانی هەژمارکردنی ئامانجی نادیار جیادەکاتەوە.
- سەلمێنراوی لۆپیتال بۆ دۆزینەوەی باری ئامانجی نادیار بەکاردەهێنێت.

نمونە 1 داتاشراوی خۆبەخۆ

y' بدۆزەوە کە $y^2 = x$.

شیکار

بە بەکارهێنانی ڕێسایەکانی داتاشراو، داتاشراوی هەرلایەکی هاوکێشەکە بەپێی گۆڕاوی x هەژماربکە، پاشان بەهای y' بدۆزەوە

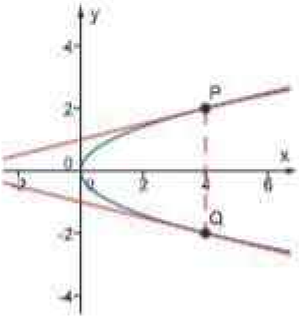
$$(y^2)' = (x)' \Rightarrow 2yy' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y}$$

زاراوەکان
Vocabulary

شێوەی خۆبەخۆ
Implicit Form
شێوەی ئاشکرا
Explict form
داتاشراوی خۆبەخۆ
Implicit differentiation
داتاشراوی دووەم
Second derivative
داتاشراوە بەرزەکان
High -Order derivative
باری نادیار
Indeterminate Form

خاڵی چاوێنیی

1. y' بدۆزەوە کاتێک $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$.

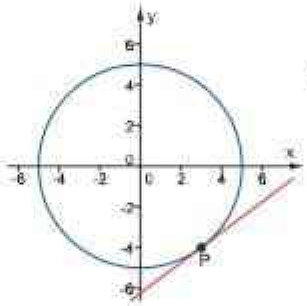


لە نمونەی 1دا ئەو برەی دەکاتە y' گۆڕاوەکانی y و x لەخۆدەگرێت ئەمە نەک هەرشیاوە بەڵکو بەسوودیشە، بۆ نموونە بۆمان دەردەخات کە ئەو وێنە ڕوونکردنەوەی پەیوەندی $x = y^2$ دەنوێنێت بریتییە لە بڕگەیەکی هاوتا و دوو لێکەوتی جیاوازی لە $x = 4$دا هەیە، یەکەمیان لەخاڵی $(4,-2)$ و لارییەکەی $y' = \frac{1}{2(-2)} = -\frac{1}{4}$ و دووەمیان لە خاڵی $(4,2)$ و لارییەکەی $y' = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$ زۆر جار لە داتاشراوی خۆبەخۆ بەهای y' دەستدەکەوێت وەک بڕێک کە x و y لەخۆدەگرێت.

نموونە 2

دۆزینەوەی لاری لێکەوتی بازنە

لاری لێکەوتی بازنەی $x^2 + y^2 = 25$ لەخاڵی $(3,-4)$ دا بدۆزەوە.



شیکار

بە بەکارهێنانی داتاشراوی خۆیەخۆ y' بدۆزەوە.

$$\left(x^2+y^2\right)' = (25)' \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

پاشان بەهای y' لە $x=3$ و $y=-4$ هەژماربکە.

$$y' = -\frac{3}{(-4)} = \frac{3}{4}$$

لاری لێکەوتی بازنەی $x^2+y^2=25$ لەخاڵی $(3, -4)$ دەکاتە $\frac{3}{4}$.

خاڵی جاوێری **2. لاری لێکەوتی بازنەی $x^2+y^2=16$ لەخاڵی $(0,4)$ بدۆزەوە.**

تێبینیبکە داتاشراوی خۆیەخۆ سەرەڕای ئاسانی دۆزینەوەی، دەبێتە هۆی نووسینی y' بەشێوەی بڕێک کە هەژمارکردنی بەها ژمارەییەکەی لەهەر خاڵێك لە خاڵەکانی ڕوونکردنەوەکەی ئاسان بێت.

نموونە 3

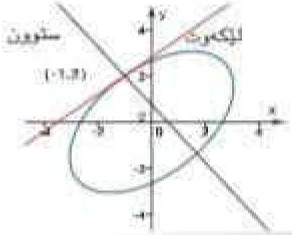
لێکەوتی بڕگەی ناتەواو و ئەستون لەسەری

لاری لێکەوتی بڕگەی ناتەواوی $x^2 - xy + y^2 = 7$ ولاری ئەستون لەسەری لەخاڵی $(-1, 2)$ بدۆزەوە.

شیکار

بە بەکارهێنانی داتاشراوی خۆیەخۆ y' بدۆزەوە.

$$\left(x^2-xy+y^2\right)' = (7)' \Rightarrow 2x - y - xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow (2y-x)y' = y-2x \Rightarrow y' = \frac{y-2x}{2y-x}$$



پاشان بەهای y' بدۆزەوە کاتێك $x=-1$ و $y=2$

$$y' = \frac{(2)-2(-1)}{2(2)-(-1)} = \frac{4}{5}$$

لاری لێکەوت دەکاتە $\frac{4}{5}$ ولاری ئەستون لەسەری دەکاتە $-\frac{5}{4}$.

خاڵی جاوێری **3. لاری لێکەوتی بڕگەی ناتەواوی $4x^2 - 8xy + 9y^2 = 16$ ولاری ئەستون لەسەری لەخاڵی $(-2, 0)$ بدۆزەوە.**

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/29/18 1:13 PM Page 22

داتاشراوە بەرزەکان

ئەگەر f نەخشەیەك بێت توانای داتاشرانی هەبێت، ئەوا داتاشراوەکەش نەخشەیە و لەوانەیە توانای داتاشرانی هەبێت، ئەگەر داتاشراوەکە f' نەخشەیەك بێت توانای داتاشرانی هەبێت ئەوا بە داتاشراوەکەی دەوترێت **داتاشراوی دووەمی نەخشەی** f و بەهێمای f'' هێمادەکرێت لەم بارەدا بە f' دەوترێت **داتاشراوی یەکەم**.

داتاشراوی دووەم بە نموونەیەك لە **داتاشراوە بەرزەکان** دادەنرێت دەتوانیت هەژماری داتاشراوی نەخشە لەهەر پلەیەك بکەیت (ئەگەر هەبێت) لەبەرئەوە داتاشراوی سێیەم بریتییە لە داتاشراوی داتاشراوی دووەم، داتاشراوە بەرزەکانی نەخشەی $y=f(x)$ دەکاتە:

داتاشراوی یەکەم	y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}[f(x)]$
داتاشراوی دووەم	y''	$f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$
داتاشراوی سێیەم	y'''	$f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$
داتاشراوی چوارەم	$y^{(4)}$	$f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
داتاشراوی پلەی n	$y^{(n)}$	$f^{(n)}(x)$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$

نموونە 4 دۆزینەوەی داتاشراوە پلە بەرزەکان

داتاشراوی سێیەمی نەخشەی $f(x)=x\sin x$ بدۆزەوە.

شیکار

داتاشراوی یەکەم $f'(x)=(x\sin x)'=\sin x+x\cos x$

داتاشراوی دووەم $f''(x)=(\sin x+x\cos x)'=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$

داتاشراوی سێیەم $f'''(x)=(2\cos x-x\sin x)'=-2\sin x-\sin x-x\cos x=-3\sin x-x\cos x$

خاڵی چاودێری

4. داتاشراوی سێیەمی نەخشەی $f(x)=x\cos x$ بدۆزەوە.

نادیاری لە نامانجی نەخشە

لەهەژمارکردنی نامانجەکان لەو بارانەی کە نامانج بەشێوەی $\frac{0}{0}$ یان $\frac{\infty}{\infty}$ دەردەکەوێت تۆ لەبەرامبەر بارێك لەبارەکانی **نامانجی نادیاری**، لەپێشتر هەوڵتدا نادیاری نامانج بەجەبری لاببەیت بە دووبارە نووسینەوەی نەخشەکە بەشێوەیەك نادیارەکەی نەمێنێت.

نموونە 5 لابردنی نادیاری لە هەژمارکردنی نامانج

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-\sqrt{x}}$ بدۆزەوە.

شیکار

ئاشکرایە جێبەجێکردنی ڕێسای دابەشکردن بۆ هەژمارکردنی ئەو نامانجە دەبێتە بارێکی نادیاری وەك $\frac{0}{0}$ ، دەتوانین دووبارە نەخشەکە بنووسینەوە و نامانجەکەی بەم شێوەیەی خوارەوە هەژماربکەین.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x+\sqrt{x}\right)}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}=0$$

خاڵی جاوبێری

5. $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-2}{x+1}$ بدۆزەوە.

بەکارهێنانی جەبر بۆ لابردنی باری نادیار لەزۆر باردا کارێکی ئاسان نییە بۆ، نموونە $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ لەم بارەدا پەنا بۆ بەکارهێنانی سەلمێنراوی لۆبیتاڵ دەبەین.

سەلمێنراوی 3-8 سەلمێنراوی لۆبیتاڵ

f و g دوو نەخشەن توانای داتاشرانیان لە هاوسێیەکانی $x=c$ هەیە $g'(x)\neq 0$ ئەگەر $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ لەباری نادیاری $\frac{0}{0}$ یان $\frac{\infty}{\infty}$ ئەوا.

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

نموونە 6 بەکارهێنانی سەلمێنراوی لۆبیتاڵ

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ بدۆزەوە.

شیکار

ئاشکرایە جێبەجێکردنی ڕێسای دابەشکردن دەبێتە باری نادیار $\frac{0}{0}$.

سەلمێنراوی لۆبیتاڵ بەکاربێنە

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

خاڵی جاوبێری

6. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ بدۆزەوە.

ئەمەش بارێکی ترە لە بارەکانی نادیار لەشێوەی $\frac{\infty}{\infty}$ لەم بارەشدا سەلمێنراوی لۆبیتاڵ جێبەجێدەکەین.

نموونە 7 باری $\frac{\infty}{\infty}$.

$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$ بدۆزەوە.

شیکار

ئاشکرایە جێبەجێکردنی ڕێسای دابەشکردن دەبێتە باری نادیاری $\frac{\infty}{\infty}$ چونکە $\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$$

خاڵی جاوبێری

7. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x}$ بدۆزەوە.

لەوانەیە سەلمێنراوی لۆبیتاڵ زیاتر لە جارێك بەکاربهێنێت.

نموونە 8 جێبەجێ کردنی لۆبیتاڵ زیاتر لە جارێك

$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}$ بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 24

شیکار

ئاشکرایە جێبەجێکردنی ڕێسای ئەنجامی دابەشکردن نەبێتە باری نادیاری $\frac{\infty}{\infty}$ چونکە $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}\right)=+\infty$ سەلمێنراوی لۆبیتاڵ بەکاربهێنە.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}\to\frac{\infty}{\infty}$$

سەلمێنراوی لۆبیتاڵ جارێکی تر بەکاربهێنە.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$

خاڵی جاودێری

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$ بدۆزەوە.

3-3 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 4 y'، بدۆزەوە بەپێی y ، x .

1. $x^2y+xy^2=6$
2. $y^2=\frac{x-1}{x+1}$
3. $x=\tan y$
4. $x+\tan(xy)=0$

لە دوو ڕاهێنانی 5 و 6 دا، y'ولاری چەماوەکە لەخاڵی دیاریکراو بدۆزەوە.

5. $x^2+y^2=13$ ؛ $(-2,3)$
6. $(x+2)^2+(y+3)^2=25$ ؛ $(1,-7)$

لە دوو ڕاهێنانی 7 و 8 دا دیاریکە کەی لاری چەماوەکە پێناسەکراو دەبێت.

7. $x^2y-xy^2=4$
8. $x^3-y^3=xy$

لە ڕاهێنانی 9 تا 12 لاری لێکەوت و ئەستون لەسەری لەخاڵی دیاریکراو بدۆزەوە.

9. $x^2+xy-y^2=1$ $(2,3)$
10. $x^2y^2=9$ $(-1,3)$
11. $6x^2+3xy+2y^2+17y-6=0$ $(-1,0)$
12. $y=2\sin(\pi x-y)$ $(1,0)$

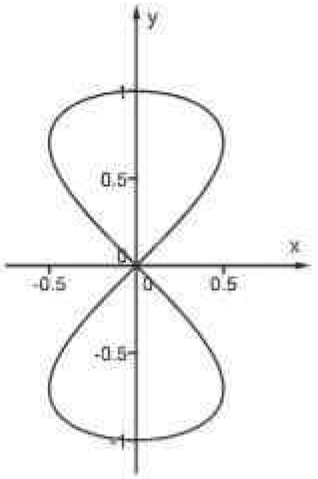
لە ڕاهێنانی 13 تا 18 داتاشراوی دووەمی نەخشەکە بدۆزەوە.

13. $f(x)=4x^{\frac{3}{2}}$
14. $f(x)=x+32x^{-1}$
15. $f(x)=\frac{x}{x-1}$
16. $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}$
17. $f(x)=3\sin x$
18. $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

لە ڕاهێنانی 19 تا 22 داتاشراوی داواکراو بۆ نەخشەکە بدۆزەوە کە یەکێك لە داتاشراوەکەی دراوە.

19. $f'(x)=x^2$: $f''(x)$ بدۆزەوە.
20. $f''(x)=2-\frac{2}{x}$: $f'''(x)$ بدۆزەوە.
21. $f'''(x)=2\sqrt{x}$: $f^{(4)}(x)$ بدۆزەوە.
22. $f^{(4)}(x)=2x+1$: $f^{(6)}(x)$ بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 27



23 **ڕوونکردنەوەی هەشتی**

چەماوەی بەرامبەر هاوکێشەی $y^4 = y^2 - x^2$ دەنوێنێت، دوو لاری ئەو چەماوەییە لە خاڵەکانی $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ بدۆزەوە.

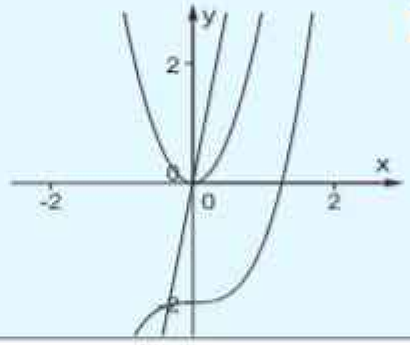
دەربارەی چەمکەکان

24 جیاوازی نێوان شێوەی خۆبەخۆ و شێوەی ئاشکرا لە پێناسەی پەیوەندی نێوان x و y ڕوونبکەوە، نمونە بۆ هەر یەکێکیان بهێنەوە.

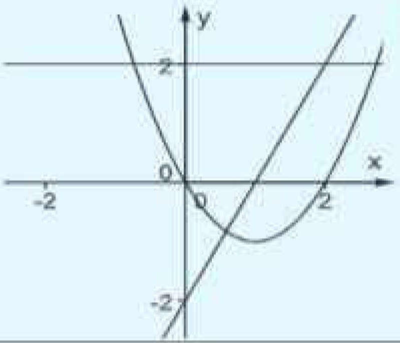
25 بەشێوازی خۆت لەسەر هەنگاوەکانی داتاشراوی خۆبەخۆ باسێك بنووسە.

لە دوو ڕاهێنانی 26 و 27 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و ڕوونکردنەوەی داتاشراوی یەکەم f' و داتاشراوی دووەم f'' دەردەکەوێت. دیاریکە کام لەم سێ ڕوونکردنەوانە ڕوونکردنەوەی نەخشەکەیە وکامیان وێنەی ڕوونکردنەوەیی داتاشراوی یەکەمە و کامیان ڕوونکردنەوەیی داتاشراوی دووەمە. دیاریکە چۆن ڕوونکردنەوەکانت دۆزییەوە.

26



27



ڕاست یان هەڵە **لە ڕاهێنانی 28 تا 30 دیاریبکە. ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە و ئەگەر هەڵەیە بە دژە نمونەیەك بیسەلمێنە.**

28 ئەگەر $y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ ئەوا $\frac{d^5y}{dx^5}=0$.

29 ئەگەر f نەخشەیەکی ڕادەدار بێت لەپلەی n ئەوا $f^{(n+1)}(x)=0$.

30 داتاشراوی دووەمی نەخشە، تێکڕای گۆڕانی داتاشراوی یەکەم دەنوێنێت.

31 داتاشراوی یەکەمی نەخشەی $f(x)=x|x|$ بدۆزەوە، ئایا $f''(0)$ پێناسەکراوە؟

32 **بیربکەوە** f و g دوو نەخشەن توانای داتاشرانیان هەیە لەهەر بەهایەك لە بەهایەکانی x . کام لەمانەی دێن ڕاستە؟

ا $fg'' - f''g = (fg' - f'g)'$

ب $fg'' + f''g = (fg)''$

لە ڕاهێنانی 33 تا 35 یەکەمجار بە دووبارە نووسینەوەی نەخشەکەو پاشان بە بەکارهێنانی سەلمێنراوی لۆبیتاڵ نامانج بدۆزەوە.

33 $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2(x-3)}{x^2-9}$

34 $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x^2-x-3}{x+1}$

35 $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

لە ڕاهێنانی 36 تا 44 نامانج بدۆزەوە.

36 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$

37 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}$

38 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-(1-x)}{x}$

39 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x^2}{x^2-1}$

40 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$

41 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2-2x+1}{2x^2+3}$

42 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

43 $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$

44 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x^4}{x^3}$

دەربارەی چەمکەکان

45 ئەگەر L لێکەوتی چەماوەی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$ بێت. بسەلمێنە سەرجەمی یەکتربڕینی ئەو ڕاستەهێڵە لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکان دەکاتە c.

46 داتاشراوی خۆیەخۆ بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بیسەلمێنێت داتاشراوی $f(x)=x^{\frac{p}{q}}$ کە $\frac{p}{q}$ ژمارەیەکی ڕێژەییە دەکاتە $f'(x)=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$

47 نەخشەی خێرایی m/s تەنێکی جوڵاو دەکاتە $v(t)=36-t^2$ مەتر لە چرکەیەکدا کە $0 \le t \le 6$. خێرایی و تاودانی تەنەکە لە $t=3$ بدۆزەوە، کاتێك خێرایی وتاودان لە نیشانەدا دژ بن خێرایی تەنەکە چ دەگەیێنێت؟

48 تۆ دەزانیت کە ڕاستەهێڵی ئەستون لەسەر لێکەوتی بازنە لەخاڵی لێکەوت بەچەقی بازنەکەدا دەڕوات، ئەمە بە بەکارهێنانی بازنەی $x^2+y^2=r^2$ و خاڵێکی سەری $P(a,b)$ بسەلمێنە.

أ هاوکێشەی لێکەوتی بازنەکە لەخاڵی P دا بدۆزەوە.

ب هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ئەستون لەسەر لێکەوتەکە لەخاڵی P دا بدۆزەوە، وبسەلمێنە بەچەقی بازنەکەدا دەڕوات.

4–3 تێکڕای گۆڕانەکان
Rates of Change

ئامانجەکان

- داتاشراو بۆ دۆزینەوەی تێکڕای گۆڕانەکان بەکاردەهێنێت.
- تێکڕای گۆڕانەکان بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە بەکاردەهێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

نەخشەی لادان
Position function

خێرایی ئاڕاستەکراو
Velocity

بڕی خێرایی
Speed

ناوەندە خێرایی
Average velocity

خێرایی ساتی
Instantaneous velocity

تێکڕای گۆڕان
Rate of change

تێکڕای گۆڕانەکان

فێربوویت چۆن داتاشراو بۆ دۆزینەوەی لاری لە خاڵێك لە خاڵەکانی ڕوونکردنەوەکەی بەکاربهێنێت، لەم وانەیەدا فێردەبیت چۆن داتاشراو بۆ دۆزینەوەی تێکڕای گۆڕان بۆ گۆڕاوێکی دیاریکراو بەپێی گۆڕاوێکی تر بەکاردەهێنیت.

تێکڕای گۆڕانەکان لەزۆر بوار بەکاردێت وەك لێکۆڵینەوەی زیادبوونی ژمارەی دانیشتوان و تێکڕای بەرهەمهێنان و تێکڕای دەرچوونی ئاو و خێرایی و تاودان.

لێکۆڵینەوەی جوڵانی تەنێك لەسەر ڕاستەهێڵێکی (ئاسۆیی یان ستونی)، دیارترین بەکارهێنانەکانی تێکڕای گۆڕانە. تەوەری ئاسۆیی و خاڵی بنەڕەتی سەر تەوەرەکە زۆربەی جار بەکاردەهێنرێت وەك نمونەی ڕاستەهێڵێك کە تەنێك بە ئاسۆیی لەسەری دەجوڵێت. لەم بارەدا جوڵانەکە بە ئاڕاستەی موجەب دادەنرێت ئەگەر لە چەپەوە بۆ ڕاست بێت و ئاڕاستەکەی بە سالب دادەنرێت ئەگەر لە ڕاستەوە بۆ چەپ بجوڵێت.

نەخشەی لادان بریتییە لە نەخشەی s کە شوێنی تەنێك لەخاڵی بنەڕەت بەپێی کات t دیاریدەکات ئەگەر تەنەکە لەماوەی Δt دووری $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$ ببڕێت ئەوا بەڕێژەی:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{گۆڕان لە لادان}}{\text{گۆڕان لە کات}}$$

دەوترێت **ناوەندە خێرایی Average velocity** تەنێکی جوڵاو یان ناوەندە خێرایی لەماوەی $[t, t+\Delta t]$

جوڵەی ئاسۆیی

داتاشراو ڕۆڵێکی گرنگ لە لێکۆڵینەوەی جوڵانی تەنەکان دەبینێت، کاتێك تەنێك دەجوڵێت ئەوا شوێنەکەی بە گۆڕانی کات دەگۆڕێت، ئەگەر بە ئۆتۆمبێلەکەت لەهەولێر بۆ دهۆك دەربچیت ئەوا شوێنەکەت لەهەر ساتێك بەپێی نەخشەی لادانی $s(t)$ دیاریدەکرێت.

وادابنێ تەنێك لەسەر ڕاستەهێڵێکی ئاڕاستەکراو دەجوڵێت کە دەتوانرێت بە تەوەری x دابنرێت تەنەکە لەماوەی t بۆ $t_1 = t + \Delta t$ لە شوێنی $s(t)$ بۆ شوێنی $s(t_1) = s(t+\Delta t)$ دەجوڵێت.

تێکڕای خێرایی بۆ ئەو تەنە لەماوەی $[t, t_1]$ دەبێتە:

$$v_{av} = \frac{\text{گۆڕان لە شوێن}}{\text{گۆڕان لە کات}} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

کاتێك $\Delta(s) = s(t+\Delta t) - s(t)$.

ئەگەر بتەوێت خێرایی تەنەکە لە ساتی t بدۆزیتەوە ئەوا بەدوای $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ بگەڕێ، واتە بەهای داتاشراوی نەخشەی لادان لە ساتی t بدۆزەوە.

خێرایی ساتی Instantaneous Velocity

خێرایی ساتی تەنێکی جوڵاو دەکاتە داتاشراوی نەخشەی لادانی جوڵانی ئەو تەنە لەساتی tدا

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

نموونە 1 هەژمارکردنی خێرایی ساتی تەنێک لەسەر تەوەرەیەک دەجوڵێت

خاڵێك لەسەر تەوەری x دەجوڵێت. نەخشەی $s(t) = t^2 - 5t + 4$ لادانی تەنەکە دەنوێنێت کات t بە چرکەو لادان s بە مەتر دەپێورێت، ناوەندە خێرایی خاڵەکە لەماوەی دوو چرکەی یەکەمدا بدۆزەوە پاشان خێرایی ساتی لە $t = 2$ بدۆزەوە.

شیکار

بۆ دۆزینەوەی ناوەندە خێرایی خاڵەکە لەماوەی دوو چرکەی یەکەمدا ئەو دوورییەی خاڵەکە لەو ماوەیەدا بڕیویەتی بدۆزەوە ئەو دووریە دەکاتە.

$$s(2) - s(0) = (2)^2 - 5(2) + 4 - \left[(0)^2 - 5(0) + 4\right] = 4 - 10 = -6$$

خاڵەکە لەماوەی دوو چرکەدا، 6 مەتری بە ئاڕاستەی سالب لەسەر تەوەرەکە بڕیوە، بۆیە ناوەندە خێرایی دەبێتە 3 مەتر لە چرکەیەکدا بە ئاڕاستەی سالب -3m/s، بۆ دۆزینەوەی خێرایی ساتی خاڵەکە لە $t = 2$ بەهای داتاشراوەکە $s'(t)$ لە $t = 2$ بدۆزەوە.

$$s'(t) = 2t - 5 \quad \text{و} \quad s'(2) = 2(2) - 5 = -1.$$

تێبینی بکە ئەو خێراییەی دۆزیتەوە تەنها ئەو خێراییە ناگەیەنێت کە خاڵەکە پێی دەجوڵێت، بەڵکو ئاڕاستەکەشی دیاریدەکات، بۆیە پێی دەوترێت **خێرایی ئاڕاستەکراو.** بەڵام بڕی خێراییەکە بەهای ڕووتی خێراییە ئاڕاستەکراوەکەیە بۆیە خێرایی ئاڕاستەکراوی خاڵەکە لە $t = 2$ دەکاتە -1m/s یان یەك مەتر لەچرکەیەکدا بە ئاڕاستەی سالبی تەوەرەکە، وبڕی خێراییەکە دەکاتە یەك مەتر لە چرکەیەکدا.

خاڵی چاودێری

1. ناوەندە خێرایی ئاڕاستەکراوی خاڵێك لەماوەی $t_1 = 3$ بۆ $t_2 = 7$ چەندە؟ خێرایی ساتی ئاڕاستەکراو لە $t = 5$ چەند بووە؟ $s(t) = t^2 - 5t + 4$

خێرایی خۆی نەخشەیەکە بەپێی کات و بە تێپەڕبوونی کات دەگۆڕێت، داتاشراوی خێرایی چۆنیەتی گۆڕان دەگەیەنێت، وەك چۆن خێرایی گۆڕانی شوێن دەگەیەنێت، داتاشراوی خێرایش چۆنیەتی گۆڕانی خێرایی دەگەیەنێت، تاودان بریتییە لە داتاشراوی خێرایی، بۆ دۆزینەوەی تاودان دووجار داتاشراوی نەخشەی لادان وەربگرە، واتە داتاشراوی دووەمی نەخشەی لادان بدۆزەوە.

نەخشەی لادان	$s(t)$
نەخشەی خێرایی	$v(t) = s'(t)$
نەخشەی تاودان	$a(t) = v'(t) = s''(t)$

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 31

نموونە 2 هەژمارکردنی تاودانی تەنێک لەسەر تەوەرەیەک دەجوڵێت

بە گەڕانەوە بۆ پێدراوەکانی نموونە 1 ، تاودانی خاڵەکە لە $t=5$ بدۆزەوە.

شیکار

بۆ دۆزینەوەی تاودانی خاڵەکە داتاشراوی دووەمی نەخشەی لادان بدۆزەوە.

$$v(t)=s'(t)=2t-5$$
$$a(t)=s''(t)=2$$

تاودانی تەنەکە جێگیرە و ناگۆڕێت و دەکاتە $2m/s^2$.

خاڵی چاوێری 2. تاودانی خاڵەکە لە $t=6$ چەندە؟ $s(t)=t^2-5t+4$

جوڵەی ستونی

نەخشەی لادان لە جوڵەی ستونی بەرزی تەنێك لە ڕووی زەوی دەنوێنێت، بە وادانان کە تەنەکە لەسەر ڕاستەهێڵێکی ستونی بۆ سەرەوە نارِاستەکراوە دەجوڵێت، دەتوانرێت بە تەوەری دابنرێت.لە ئەنجامی توێژینەوە تاقیکردنەوەییەکان و تیۆرییەکان دەرکەوتووە کە نەخشەی.

$$s(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0$$

نەخشەیەك دەنوێنێت بۆ توێژینەوەی بەرزی تەنێك لەڕووی زەوییەوە بە تێپەڕبوونی کات t لەساتی دەرچوونیدا پاش فڕێدانی لەبەرزی سەرەتایی s_0 بەخێرایی سەرەتایی v_0 ، g لەو نەخشەیە تاودانی زەوی دەنوێنێت، بەهایەکەی جیاواز دەبێت بە جیاوازی یەکەی بەکارهاتوو بۆ پێوانی دوورییەکە.

نەخشەی جوڵەی ستونی

یەکەی پێوانی دووری	یەکەی پێوانی خێرایی	بەهایg	نەخشەکە
مەتر m	m/s	$g=9.8m/s^2$	$s(t)=-4.9t^2+v_0t+x_0$
پێ ft	ft/s	$g=32ft/s^2$	$s(t)=-16t^2+v_0t+x_0$

نموونە 3 بەکارهێنانی داتاشراو بۆ دۆزینەوەی خێرایی

لە ئاهەنگێکی یاری ئاگریندا تیرێك لەسەر پایەیەك کە 4 پێی لەسەر ڕووی زەوی بەرزە بەرەو سەرەوە هەڵدرا بەخێرایی سەرەتایی بڕەکەی 160 پێ لە چرکەیەکدا.

- أ نەخشەی لادانی جوڵەی تیرەکە بنووسە.
- ب ئەوپەڕی بەرزی کە تیرەکە دەیگاتێ چەندە؟
- ج خێرایی ئاڕاستەکراوی تیرەکە کاتێك دەگاتە بەرزی 260 پێ لەبەرزبوونەوە و هاتنە خوارەوەیدا چەندە؟
- د تاودانی تیرەکە لەهەر ساتێکدا چەندە؟
- هـ کەی تیرەکە دەکەوێتەوە سەر زەوی؟

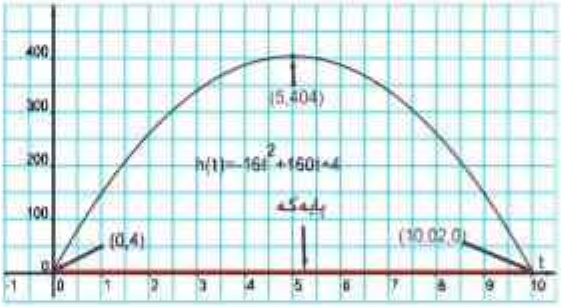
شیكار

أ بەپێی زانیارییەكانی پێشوو، نەخشەی لادانی جوڵەی تیرەكە دەبێتە $s(t) = -16t^2 + 160t + 4$

ب كاتێك خێرایی تیرەكە دەبێتە سفر تیرەكە دەگاتە ئەوپەڕی بەرزی، خێرایی ناڕاستەكراوی تیرەكە بەپێی كات دەكاتە $v(t) = s'(t) = -32t + 160$. ئەو خێراییە دەبێتە سفر كاتێك بەهای t دەبێتە ڕەگی هاوكێشەی $-32t + 160 = 0$ واتە $t = 5$ ، لەمەوە دەردەچێت ئەوپەڕی بەرزی تیرەكە دەیگاتێ دەكاتە $s(5) = -16(5)^2 + 160(5) + 4 = 404\text{ft}$.

ج بۆ دۆزینەوەی خێرایی ناڕاستەكراوی تیرەكە كاتێك بەرزییەكەی دەبێتە 260 پێ، پێویستە بەهای v لەو بەرزییەدا بدۆزێتەوە

هاوكێشەی $-16t^2 + 160t + 4 = 260$ شیكاربكە.



$$-16t^2 + 160t + 4 = 260$$
$$16t^2 - 160t + 256 = 0$$
$$16(t-2)(t-8) = 0$$

ئەم هاوكێشەیە دوو ڕەگی هەیە $t = 2$ و $t = 8$، بەرزی تیرەكە دەگاتە 260 پێ لە كاتی بەرزبوونەوەیدا لە $t = 2$ كە تێیدا خێراییە ناڕاستەكراوەكەی دەبێتە بەهای داتاشراوی نەخشەكە، واتە $v(2) = -32(2) + 160 = 96\text{ft/s}$ هەروەها تیرەكە دەگاتە ئەو بەرزییە لەهاتنە خوارەوەیدا كاتێك $t = 8$ تێیدا خێرایی ناڕاستەكراو دەكاتە $v(8) = -32(8) + 160 = -96\text{ft/s}$ ، ئەگەر تێبینی هەردوو خێرایی تیرەكە لەبەرزبوونەوە و هاتنە خوارەوەیدا لەبەرزی 260 پێ بكەین لە بڕدا یەكسانن و خێراییەكە لە بەرزبوونەوەدا موجەب و لەهاتنە خوارەوەیدا سالبە.

د بۆ دۆزینەوەی تاودانی تیرەكە داتاشراوی دووەمی نەخشەی لادان بدۆزەوە $a(t) = s''(t) = -32$ تێبینیبكە تاودانی تیرەكە لەهەر ساتێك ناگۆڕێت و سالبە.

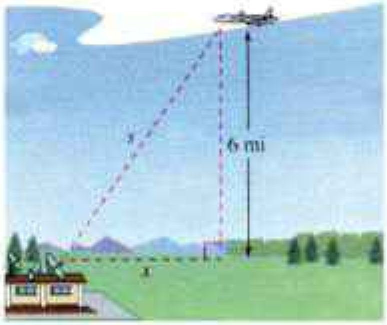
هـ تیرەكە دەگاتەوە زەوی كاتێك بەرزییەكەی دەبێتە 0 واتە كاتێك هاوكێشەی $-16t^2 + 160t + 4 = 0$ دوو ڕەگی هەیە، یەكێكیان سالبە ئەمەش نابێت و ئەویتریان موجەبە و دەكاتە 10 بەنزیكەیی. تیرەكە دەگاتەوە زەوی پاش نزیكەی 10 چركە لە هەڵدانی.

خاڵی چاودێری

3. وەڵامی پرسیارەكانی نمونەی 3 بدەوە ئەگەر وادانرا تیرەكە لەبەرزی 2.4m هەڵدرا بەخێرایی سەرەتایی 49m/s و لەپرسیاری لقی ج خێرایی ناڕاستەكراوی تیرەكە كاتێك لەبەرزی 120 m بێت بدۆزەوە؟

لە جێبەجێکردنە گرنگەکانی داتاشراوی خۆبەخۆ دۆزینەوەی تێکڕایی گۆڕانی گۆڕاوێکە بەپێی گۆڕاوێکی تر کاتێك هەردووکیان نەخشە بن بەپێی کات.

نموونــــە 4 دۆزینەوەی خێرایی فڕۆکە بەهۆی ڕادار «بۆ تێڕوانین»



فڕۆکەیەك بە هێڵێکی ئاسۆیی بەسەر وێستگەی ڕادارێك تێپەڕدەبێت، وەك لەوێنەی بەرامبەرروونکراوەتەوە خێرایی ئاڕاستەکراوی فڕۆکەکە چەندە کاتێك لە دووری $s=10\text{km}$ لەوێستگەی ڕادارەکە دوورە، ئەگەر زانیت دوورییەکەی s بە تێکڕایی 400 km/h کەمبکات؟

شیکار

خێرایی ئاڕاستەکراوی فڕۆکەکە بەتێکڕای گۆڕانی دووری ئاسۆیی نێوان فڕۆکەکە و شوێنی ڕادارەکە دەپێورێت، نەخشەی $x(t)$ دەبێتە نەخشەی لادانی فڕۆکەکە بۆیە داتاشراوی $x(t)$ بدۆزەوە.

لەلایەکی تر گۆڕاوەکانی x و t بە پەیوەندی $x^2+6^2=s^2$ بەیەك دەبەسترێنەوە داتاشراوی خۆبەخۆ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی $x'(t)$.

$$x^2+6^2=s^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(x^2+6^2)=\frac{d}{dt}(s^2) \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt}=2s\frac{ds}{dt} \Rightarrow x\frac{dx}{dt}=s\frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{s}{x}\frac{ds}{dt}$$

کاتێك فڕۆکەکە لە دووری $s=10\text{km}$ ، ئەوا $x=\sqrt{10^2-6^2}=8$ و $\frac{ds}{dt}=-400$

لەوە دەردەچێت $\frac{dx}{dt}=\frac{s}{x}\frac{ds}{dt}=\frac{10}{8}(-400)=-500$

خێرایی ئاراستەکراوی فڕۆکەکە، کاتێك 10 km لەوێستگەی ڕادارەکە دوورە دەکاتە -500km/h کەواتە بڕی خێراییەکەی لەو ساتەدا دەبێتە 500 km/h.

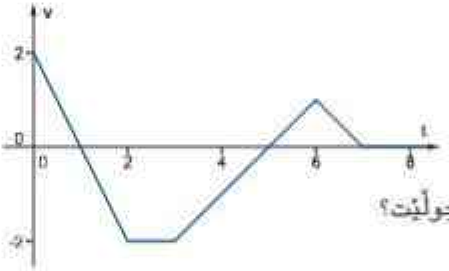
خاڵی چاودێری

4. فڕۆکەیەك لەسەر هێڵێکی فڕین کەبەسەر وێستگەی ڕادارێك تێپەڕدەبێت دەفڕێت وەك لە وێنەکەی نموونە 4 تێکڕای کەمکردنی دووری s چەندە؟ ئەگەر زانیت خێرایی ئاڕاستەکراوی فڕۆکەکە لە دووری $s=9\text{km}$ بێت لە وێستگەی ڕادارەکە بکاتە -450km/h .

4-3 ڕاهێنان

1 **ڕووبەر** لاکێشەیەک درێژییەکەی $2t+1$ و پانییەکەی $\sqrt{t}$ بێت، تێکڕای گۆڕانی ڕووبەری لاکێشەکە بە گۆڕانی t بدۆزەوە.

2 **قەبارە** لولەکێکی وەستاو نیوەتیرەی بنکەکەی $\sqrt{t+2}$ و بەرزییەکەی $\frac{1}{2}\sqrt{t}$ بێت، تێکڕای گۆڕانی قەبارەی لولەکەکە بە گۆڕانی t بدۆزەوە.



3 **جوڵەی ئاسۆیی** لەوێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $v=f(t)$ دەردەکەوێت کە خێرایی ناڕاستەکراوی خاڵێك لەسەر تەوەری x دەنوێنێت.

أ) کەی خاڵەکە بۆ دواوە دەجوڵێت؟ کەی بۆ پێشەوە دەجوڵێت؟ کەی خێراییەکەی زیاددەکات و کەی کەمدەکات؟

ب) کەی تاودانی خاڵەکە موجەب، سالب، سفر دەبێت؟

ج) کەی خاڵەکە بەئەوپەڕی خێرایی دەجووڵێت؟

د) کەی خاڵەکە بۆ ساتێك زیاتر لە جوڵەوە دەوەستێت؟

وا دابنێ کە x و y دوو نەخشەن بەپێی t و توانای داتاشرانیان هەیە، بە بەکارهێنانی پێدراوەکە داواکراوەکەی بدۆزەوە.

	پەیوەندی نێوان x و y	داواکراوەکە	پێدراوەکە
4	$y=\sqrt{x}$	$\frac{dy}{dt}$ لە $x=4$.	$\frac{dx}{dt}=3$
5	$x^2+y^2=25$	$\frac{dy}{dt}$ لە $x=3$ و $y=4$. $\frac{dx}{dt}$ لە $x=4$ و $y=3$.	$\frac{dx}{dt}=8$ $\frac{dy}{dt}=-2$

لە دوو ڕاهێنانی 6 و 7 دا خاڵێك لەسەر چەماوەی نەخشەی y کە دراوە دەجوڵێت. $\frac{dy}{dt}$ بۆ هەر بەهایەکی دیاریکراو بۆ x بدۆزەوە، ئەگەر زانیت لە $\frac{dx}{dt}=2\text{cm/s}$.

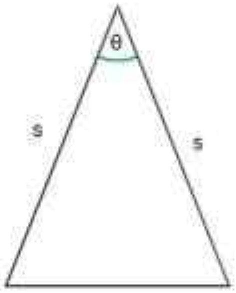
6 $y=x^2+1$ ، $x=-1$ ، $x=0$ ، $x=1$

7 $y=\sin x$ ، $x=\frac{\pi}{6}$ ، $x=\frac{\pi}{4}$ ، $x=\frac{\pi}{3}$

8 تێکڕای گۆڕانی دووری نێوان خاڵێك لەسەر چەماوەی برگەی هاوتای $y=x^2+1$ دەجوڵێت وخاڵی بنەڕەت بدۆزەوە، ئەگەر زانیت کە $\frac{dx}{dt}=2\text{cm/s}$.

9 تێکڕای گۆڕانی دووری نێوان خاڵێك لەسەر چەماوەی نەخشەی $y=\sin x$ دەجوڵێت وخاڵی بنەڕەت بدۆزەوە ئەگەر زانیت کە $\frac{dx}{dt}=2\text{cm/s}$.

10 سێگۆشەیەکی دوولایەکسان درێژی لایەك لە دوولایەکسانەکەی s و گۆشەی نێوانیان θ بێت.



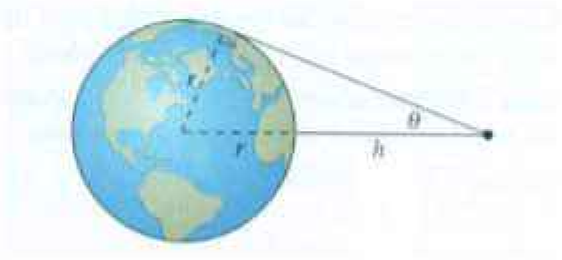
أ بیسەلمێنە ڕووبەری سێگۆشەکە دەکاتە $A=\frac{1}{2}s^2\sin\theta$.

ب ئەگەر θ بەتێکرایی $\frac{1}{2}$ ڕادیان لە خولەکێکدا زیادبکات، تێکرایی گۆڕانی ڕووبەری سێگۆشەکە لە $\theta=\frac{\pi}{6}$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$ بدۆزەوە.

ج ڕوونبکەوە بۆچی تێکرایی گۆڕانی ڕووبەری سێگۆشەکە جێگیر نییە، لەکاتێکدا تێکرایی گۆڕانی θ بە جێگیری دەمێنێتەوە.

11 **تێکرای گۆڕان** تێکرای گۆڕانی بەهایەك بۆ x. ئەگەر هەبوو لەماوەی $[0,2\pi]$ بدۆزەوە، کەتیایدا تێکرای گۆڕانی هەریەك لە نەخشەکانی $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ و $g(x)=\frac{1}{\sin x}$ یەکسان بن.

12 کاتێك مانگێکی دەستکرد چاودێری گۆی زەوی دەکات، چاودێری بەشێکی دەکات، هەندێك لەو مانگە دەستکردانە لە توانایدایە گۆشەی θ کە لەوێنەی خوارەوە ڕوونکراوەتەوە بپێوێت کە h دووری نێوان مانگە دەستکردەکەو زەوی دەنوێنێت و r نیوەتیرەی گۆی زەوی دەنوێنێت.



أ بیسەلمێنە کە $h=r\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)$

ب تێکرای گۆڕانی h بەپێی θ لە $\theta=30^\circ$ $r=6373\text{km}$ بدۆزەوە.

دەربارەی چەمکەکان

13 گۆڕاوی x و y بە پەیوەندی $y=ax+b$ بەیەکەوەبەسترینەوە کە a و b دوو ژمارەی ڕاستین وادابنێ هەریەك لە گۆڕاوەکان نەخشەیەکە بەپێی t وتێکرای گۆڕانی x نەگۆڕە، ئایا تێکرای گۆڕانی y ئەویش نەگۆڕە؟ ئەگەر وابوو، ئایا تێکرای گۆڕانەکەی بەتێکرای گۆڕانی x یەکسان دەبێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

14 نەخشەی لادانی تەنێکی جوڵاو بریتی یە لە $s(t)= t^3 - 6t^2 + 9t$
تاودانی تەنەکە لەهەر کاتێکدا بدۆزەوە، کاتێك خێراییەکەی دەبێتە سفر.

15 **بەرزە گۆشە** باڵۆنێك بەخێرایی $3\ m/s$ بەرزدەبێتەوە بە دەرچوونێك لە خاڵێکی سەر زەوی کە $30\ m$ لە چاودێرێك دوورە. تێکرای گۆڕانی بەرزە گۆشەکە بدۆزەوە کاتێك باڵۆنەکە $30\ m$ لەسەر ڕووی زەوی بەرزبێت.

16 پەیژەیەك درێژییەکەی 25 پێیە لای سەرەوەی لەسەر دیوارێکە، ولای خوارەوەی عارەبانەیەك بەخێرایی دوو پێ لە چرکەیەکدا ڕایدەکێشێت.

m/s

[أ] خێرایی دابەزینی لای سەرەوەی پەیژەکە لەسەردیوارەکە چەندە کاتێك لای خوارەوەی 7 پێ، لە دیوارەکە دووربێت؟

[ب] تێکرای گۆڕانی ڕووبەری ئەو سێگۆشەی کە پەیژەکە لەگەڵ دیوارەکە و زەوییەکە دروستی دەکات بدۆزەوە، کاتێك لای خوارەوەی پەیژەکە 7 پێ لە دیوارەکەوە دووربێت.

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 37

بـەشی 3

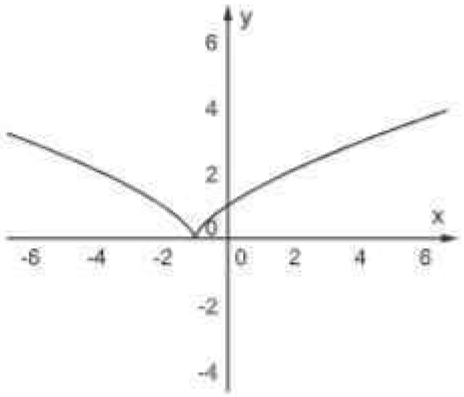
پێداچوونەوەی بەش

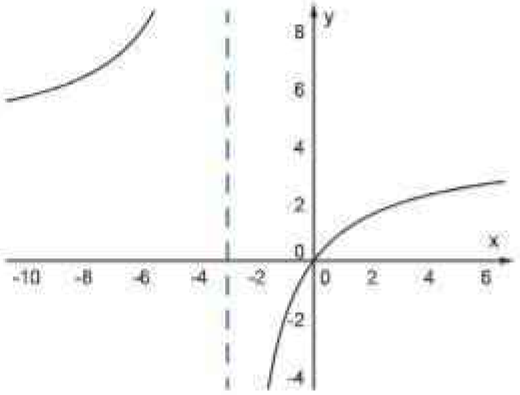
لە ڕاهێنانی 1 تا 4 داتاشراوی هەر نەخشەیەک بە بەکارهێنانی پێناسەی داتاشراو بدۆزەوە.

1 $f(x)=x^2-2x+3$ **2** $f(x)=\sqrt{x}+1$ **3** $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ **4** $f(x)=\frac{2}{x}$

لە ڕاهێنانی 5 و 6 بەهایەکانی x وادەکات نەخشەکە توانای داتاشرانی هەبێت دیاربکە.

5 $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}$ **6** $f(x)=\frac{4x}{x+3}$





7 ڕوونکردنەوەی نەخشە $f(x)=4-|x-2|$ بکێشە.

أ نایا نەخشەکە لە $x=2$ بەردەوامە.

ب نایا نەخشەکە توانای داتاشرانی لە $x=2$دا هەیە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

8 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+2 & x<-2 \\ 1-4x-x^2 & x\geq -2 \end{cases}$ بکێشە.

أ نایا نەخشەکە لە $x=-2$ بەردەوامە.

ب نایا نەخشەکە توانای داتاشرانی لە $x=-2$دا هەیە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

لە دوو ڕاهێنانی 9 و 10 دا لاری نەخشەکە لە خاڵە دیاریکراوەکە بدۆزەوە.

9 $g(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{x}{6}$ ؛ $\left(-1,\frac{5}{6}\right)$ **10** $h(x)=\frac{2}{8}x-2x^2$ ؛ $\left(-2,-\frac{34}{4}\right)$

لە ڕاهێنانی 11 و 12 دا:

أ هاوکێشەی لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەخاڵە دیاریکراوەکە بدۆزەوە.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە و لێکەوت لە خاڵەکەدا بدۆزەوە.

11 $f(x)=x^3-1$ ؛ $(-1,-2)$ **12** $f(x)=\frac{2}{x+1}$ ؛ $(0,2)$

لە ڕاهێنانی 13 تا 33 داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

13 $f(x)=-12$

14 $f(x)=x^{12}$

15 $f(x)=-8x^5$

16 $f(x)=x^3-3x^2$

17 $f(x)=6\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}$

18 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$

19 $f(x)=\frac{2}{(3x)^2}$

20 $f(x)=4\cos x+6$

21 $f(x)=3\cos x-\frac{\sin x}{4}$

22 $f(x)=(3x^2+7)(x^2-2x+3)$

23 $f(x)=\sqrt{x}\sin x$

24 $f(x)=x^3\cos x$

25 $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2-1}$

26 $f(x)=\frac{9}{3x^2-2x}$

27 $f(x)=\frac{x^2}{\cos x}$

28 $f(x)=2x-x^2\tan x$

29 $f(x)=x\cos x-\sin x$

30 $f(x)=\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)^2$

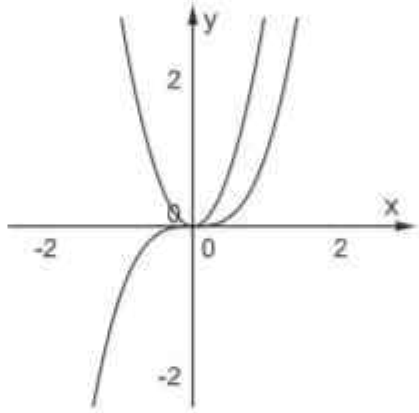
31 $f(x)=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x-\frac{2}{7}\sin^{\frac{7}{2}}x$

32 $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

33 $f(x)=\frac{\cos(x-1)}{x-1}$

نووسین لە ڕاهێنانی 34 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە وداتاشراوی یەکەمی نەخشەکە دەردەکەوێت. وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە و داتاشراوەکەی جیابکەوە. ڕوونبیکەوە بۆ ئەو کارە پشتت بەچی بەستووە.

34



لە ڕاهێنانی 35 تا 40 داتاشراوی دووەمی نەخشەکە بدۆزەوە.

35 $f(x)=2x^2+\sin 2x$

36 $f(x)=\frac{1}{x}+\tan x$

37 $f(x)=\frac{1}{\tan x}$

38 $f(x)=\sin^2 x$

39 $f(x)=\frac{6x-5}{x^2+1}$

40 $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

لە ڕاهێنانی 41 تا 43 سەلمێتراوی لۆبیتاڵ بۆ دۆزینەوەی ئامانجی داواکراو بەکاربهێنە.

41 $\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{x-1}$

42 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x}$

43 $\lim_{x\to +\infty} xe^{-x^2}$

GRADE12-2011-CHAPTER 3 3/25/18 10:26 AM Page 39

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

1 $f(x)=4-3x$ کام لەمانە دەکاتە $f'(-1)$؟

أ -7 ب 7 ج -3 د 3 هـ جگە لە مانە

2 $f(x)=1-3x^2$ کام لەمانە دەکاتە $f'(1)$؟

أ -6 ب -5 ج 5 د 6 هـ جگە لە مانە

3 کام لەمانەی خوارەوە بۆ نەخشەی $f(x)=x^{\frac{4}{3}}$ لە $x=0$ ڕاستە؟

أ ڕوونکردنەوەکەی گۆشەی لەو خاڵەدا هەیە.

ب لێکەوتی ستونی لەو خاڵەدا هەیە.

ج نەخشەکە لەو خاڵەدا پچڕاوە.

د $f(0)$ پێناسەنەکراوە.

هـ توانای داتاشرانی لەو خاڵەدا هەیە.

4 $f(x)=u(x)v(x)$ و $f'(1)$ بدۆزەوە ئەگەر زانیت کە $u(1)=2$، $u'(1)=3$، $v(1)=-1$، $v'(1)=1$.

أ -4 ب -1 ج 1 د 4 هـ 7

5 داتاشراوی دووەمی نەخشەی $f(x)=x-\frac{1}{x}$ دەکاتە.

أ $1+\frac{1}{x^2}$ ب $1-\frac{1}{x^2}$ ج $\frac{2}{x^3}$ د $-\frac{2}{x^3}$ هـ جگە لە مانە

6 کام لەمانەی خوارەوە دەکاتە $\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

أ $\frac{2}{(x-1)^2}$ ب 0 ج $\frac{x^2+1}{x^2}$ د $2x-\frac{1}{x^2}-1$ هـ $-\frac{2}{(x-1)^2}$

7 کام لەمانەی خوارەوە ژمارەی لێکەوتە ئاسۆییەکانی نەخشەی $f(x)=(x^2-1)(x^2+1)$.

أ 0 ب 1 ج 2 د 3 هـ 4

8 تێکڕای گۆڕانی ساتی نەخشەی $f(x)=\frac{x^2+2}{x+4}$ لە $x=-1$ دەکاتە.

أ -1 ب -4 ج 0 د 4 هـ 7

9 تێکڕای گۆڕانی ساتی قەبارە شەشپاڵوییەک درێژی لایەکی x بێت بدۆزەوە.

أ x ب $3x$ ج $6x$ د $3x^2$ هـ x^3

لە دوو ڕاهێنانی 10 و 11 دا خاڵێک لەسەرتەوەری x دەجولێت و نەخشەی لادانەکەی دەکاتە $s(t)=2+7t-t^2$ کە $t\geq 0$.

10 لەکام لەم کاتانە خاڵەکە بۆ لای چەپ دەجولێت؟

أ $t=0$ ب $t=1$ ج $t=2$ د $t=\frac{7}{2}$ هـ $t=4$

11 لەکام لەم کاتانە خاڵەکە دەوەستێت؟

أ $t=1$ ب $t=2$ ج $t=\frac{7}{2}$ د $t=4$ هـ $t=5$

12 کام لەمانەی خوارەوە لێکەوتی نەخشەی $y=\sin x+\cos x$ لە $x=\pi$؟

أ $y=-x+\pi-1$

ب $y=-x+\pi+1$

ج $y=-x-\pi+1$

د $y=-x-\pi-1$

ه $y=x-\pi+1$

13 y'' بدۆزەوە کە $y=x\sin x$.

أ $-x\sin x$

ب $x\cos x+\sin x$

ج $-x\sin x+2\cos x$

د $x\sin x$

ه $-\sin x+\cos x$

14 تەنێك بەپێی نەخشەی لادانی $s(t)=3+\sin t$ دەجوڵێت لەکام لەم کاتانەی خوارەوە خێرایی تەنەکە دەکاتە سفر؟

أ $t=0$

ب $t=\frac{\pi}{4}$

ج $t=\frac{\pi}{2}$

د $t=\pi$

ه $\frac{3\pi}{4}$

15 $y=\tan(4x)$ کام لەمانەی دێن دەکاتە $\frac{dy}{dx}$.

أ $\frac{4\tan(4x)}{\cos x}$

ب $\frac{\tan(4x)}{\cos(4x)}$

ج $\frac{4}{\tan x}$

د $\frac{1}{\cos^2(4x)}$

ه $\frac{4}{\cos^2(4x)}$

16 $y=\cos^2(x^3+x^2)$ کام لەمانەی دێن دەکاتە $\frac{dy}{dx}$؟

أ $-2(3x^2+2x)$

ب $-(3x^2+2x)\cos(x^3+x^2)\sin(x^3+x^2)$

ج $-2(3x^2+2x)\cos(x^3+x^2)\sin(x^3+x^2)$

د $2(3x^2+2x)\cos(x^3+x^2)\sin(x^3+x^2)$

ه $2(3x^2+2x)$

17 $x^2-xy+y^2=1$ کام لەمانە دەکاتە $\frac{dy}{dx}$.

أ $\frac{y-2x}{2y-x}$

ب $\frac{y+2x}{2y-x}$

ج $\frac{2x}{x-2y}$

د $\frac{2x+y}{x-2y}$

ه $\frac{2x+y}{x}$

18 $y=x^{\frac{3}{4}}$ کام لەمانە دەکاتە $\frac{dy}{dx}$.

أ $\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{4}$

ب $\frac{4x^{\frac{1}{4}}}{3}$

ج $\frac{3x^{\frac{1}{4}}}{4}$

د $\frac{4}{3x^{\frac{1}{4}}}$

ه $\frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}$

19 کام لەمانە لاری لێکەوتی چەماوەی $y^2-x^2=1$ لەخاڵی $(1,\sqrt{2})$

أ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ب $-\sqrt{2}$

ج $\frac{1}{\sqrt{2}}$

د $\sqrt{2}$

ه 0

جێبەجێکردنەکانی داتاشراو
Applications of Differentiation

بەشی
4

بەشی چوارەم

وانەکان

1-4 تاقیکردنەوەی داتاشراوەی یەکەم.

2-4 تاقیکردنەوەی داتاشراوەی دووەم.

3-4 ئامانجەکان لە بێیایاندا.

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

4-4 کێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان

5-4 گەڕان بەدوای بەهایەکانی کۆتایی

پێداچوونەوە

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

چەند هۆکارێك کاریگەری هەیە لەسەر بەکاربردنی ئۆتۆمبێل بۆ سووتەمەنی، لەوانە جۆری قیری ڕێگا، جۆری تایەکان، خێرایی، جۆری بەنزینەکە. یەکێك لە کارگەکانی ئۆتۆمبێل نەخشەی $m(v)=0.00015v^3-0.032v^2+1.8v+1.7$ وەك نمونەیەك بەکاردەهێنێت بۆ هەژمارکردنی ئەو دوورییەی «بەمیل»، ئۆتۆمبێلەکە بە هەر گالۆنێك سووتەمەنی بەپێی خێرایی v «میل لەکاتژمێرێکدا» دەیبڕێت. بە چ خێراییەك ئەو جۆرە ئۆتۆمبێلە لێبخوڕیت تاوەکو دووری بەیەك گالۆن سووتەمەنی ببڕێت؟

GRADE12-2011-CHAPTER 4 3/25/18 11:34 AM Page 2

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

1 هەر دەستەواژەیەکی ستونی لای ڕاست بە لێکدانەوەکەی لە ستونی لای چەپ ببەستەوە.

1. تێکڕای گۆڕان
2. خێرایی ساتی
3. نەخشەی لادان
4. نەخشەیەك توانای داتاشرانی هەبێت.

أ نەخشەیەکە. شوێنی تەنە جوڵاوەکە بەپێی کات دیاریدەکات.
ب ئەنجامی دابەشکردنی دووریيە لەسەر کات.
ج ڕێژەیەکە گۆڕاوی ئازاد لە ژێرەکەی دەگۆڕێت و گۆڕاوی پەیوەست لە سەرەکە دەگۆڕێت.
د خێرایی تەنێکی جوڵاوە لەساتێکی دیاریکراو.
هـ نەخشەیەکە لاریيەکەی لەهەر خاڵێك لە خاڵەکانی ڕوونکردنەوەکەیدا پێناسەکراوە.

هەژمارکردنی داتاشراو

لە ڕاهێنانی 2 تاکو 7 داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە.

2 $f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$ **3** $f(x)=2\sin x\cos x$ **4** $f(x)=x\sqrt{2x+1}$

5 $f(x)=\ln\sqrt{x}$ **6** $f(x)=e^{(1+\ln x)}$ **7** $f(x)=xe^{-x}$

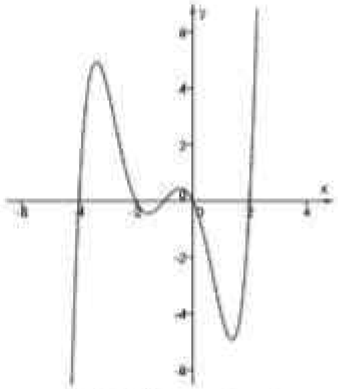
دیاریکردنی نیشانەی نەخشە بەجەبری و ڕوونکردنەوەیی

لە ڕاهێنانی 8 تاکو 10 بەهایەکانی x دیاریبکە کاتێك نیشانەی نەخشەکە دەگۆڕێت بە دیاریکردنی ئەو گۆڕانەی لە نیشانەی هەر خاڵێك ڕوودەدات.

8 $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$ **9** $f(x)=x^2-9$ **10** $f(x)=\ln x$

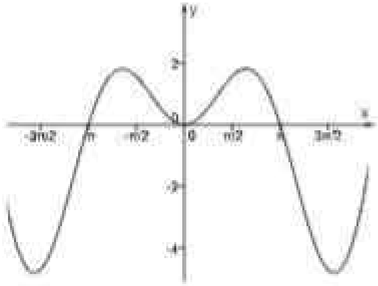
لە دوو ڕاهێنانی **11** و **12** لە نیشانەی نەخشەکە بکۆڵەوە لەماوە دیاریکراوەکەدا.

11



لە ماوەی $[-5, 5]$

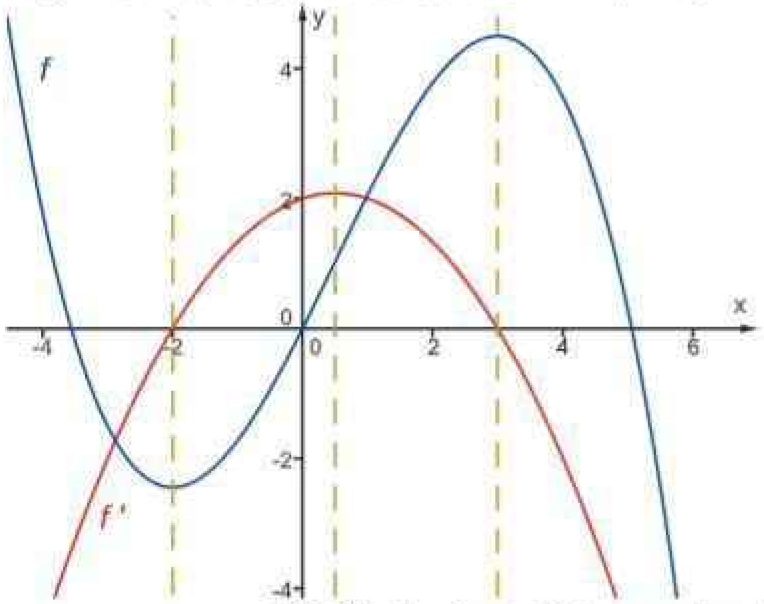
12



لە ماوەی $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

1-4 تاقیکردنەوەی داتاشراوی یەکەم
First Derivative Test

پەیوەندییەکی بەهێز لە نێوان نەخشەو داتاشراوەکانیان هەیە، بەمەش دەتوانیت زۆر کاری پەیوەست بە نەخشەیەك پوخت بکەیتەوە بەهۆی ئەو زانیارییانەی لە داتاشراوی یەکەم یان لە داتاشراوی دووەم دەستت دەکەوێت لەم بەشەدا فێری ئەم پەیوەندییە و چۆنیەتی بەکارهێنانی دەبیت.



ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەکان

لە وێنەی سەرەوە ڕوونکردنەوەی نەخشەی f (بەڕەنگی شین) و ڕوونکردنەوەی داتاشراوی یەکەم بە (ڕەنگی سوور) دەردەکەوێت، ئەگەر لەوێنە ڕوونکردنەوەکە وردبیتەوە: دەگەیتە ئەم دەرئەنجامانە.

1. کاتێك x لەسەر تەوەرکەی لە لای چەپ بەرەو لای ڕاست دەجولێت، خاڵی $M(x, f(x))$ لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەرەو خوارەوە دەجولێت کە ئەمەش دەربڕینە بۆ ڕوو لەکەمبوونی بەهایەکانی $f(x)$، تا x دەگاتە -2، دەتوانین ئەمەش بەو ناخاوتنە دەربڕین، نەخشەکە ڕوو لەکەمبوونە لەماوەی $]-\infty, -2[$.

2. دوای ئەوەی x لە-2 تێدەپەڕێت، خاڵی $M(x, f(x))$ لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەرەو سەرەوە دەجوولێت، دەربڕینە بۆ ڕوو لەزیادبوونی بەهایەکانی$f(x)$ ، تا x دەگاتە 3، دەتوانین ئەمەش بەو ناخاوتنە دەربڕین، نەخشەکە ڕوو لەزیادبوونە لە ماوەی $]-2, 3[$.

3. خاڵی $M(x, f(x))$ دەست بە جولان دەکاتەوە لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەرەو خوارەوە دوای ئەوەی بەهای x لە 3 تێپەڕدەبێت، دەربڕینە بۆ ڕوو لەکەمبوونی بەهایەکانی $f(x)$ دووبارە. دەتوانین ئەمەش بەو ناخاوتنە دەربڕین نەخشەکە ڕوو لەکەمبوونە لە ماوەی $]3, +\infty[$.

4. بەهایەکانی داتاشراوی یەکەمی نەخشەکە سالبە لەهەردوو ماوەی $]-\infty, -2[$ و $]3, +\infty[$ بەلام لەماوەی $]-2, 3[$ موجەبە.

5. ڕوو لەکەمبوونی نەخشە لەماوەیەکدا بەستراوەتەوە بە سالبوونی بەهایەکانی داتاشراوی یەکەم، و ڕوو لەزیادبوونی بەستراوتەوە بە موجەببونی بەهایەکانی داتاشراوی یەکەم، بە بەهایەکانی x کەوادەکات $f'(x)=0$ دەوترێت بەها **شلۆقەکانی** نەخشە.

ئامانجەکان

- چەمکی بەهای کۆتایی خۆجێی نەخشە فێردەبێت و جیایدەکاتەوە.
- بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشە دیاریدەکات.
- ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لە کەمبوونی نەخشە دیاریدەکات.
- تاقیکردنەوەی داتاشراوی یەکەم بەکاردەهێنێت بۆ دۆزینەوەی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشە.

زاراوەکان
Vocabulary

ڕوو لەکەمبوون
Decreasing

ڕوو لە زیادبوون
Increasing

بەهای بچووکترین کۆتایی خۆجێیی
Local Minimum value

بەهای گەورەترین کۆتایی خۆجێیی
local maximum value

خاڵی وەرگەران
point of Inffiction

بەهای شلۆق
Critical Value

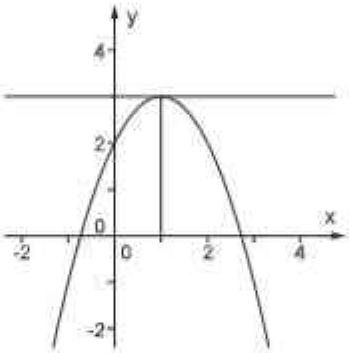
خشتەی گۆڕانەکان
Table of variations

دەتوانیت ئەوەی پێشوو لەم خشتەیە پوختەبکەیت.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	ڕوو لەکەمبوون ↘	ڕوو لەزیادبوون ↗	ڕوو لەکەمبوون ↘	

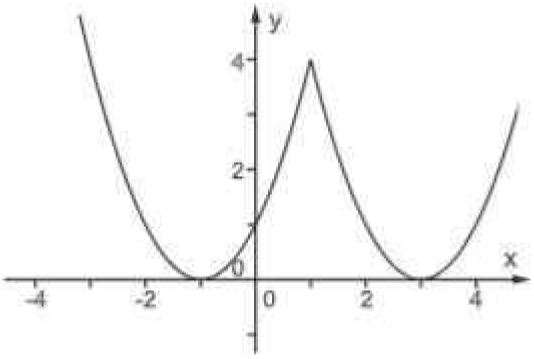
پێناسەی بەها شلۆقەکان

f نەخشەیەکی پێناسەکراوە لە $x=c$ ، بە بەهای c بۆ گۆڕاوی ئازادی x دەوترێت بەهای شلۆقی نەخشەی f ئەگەر داتاشراوەکەی پێناسە نەکرابێت لە $x=c$ یان ئەگەر $f'(c)=0$.



$f'(x)=0$

1 بەهای شلۆقی نەخشەکەیە.



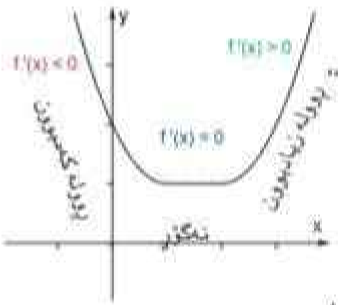
$f'(x)$ پێناسەنەکراوە لە $x=1$

1 بەهای شلۆقی نەخشەکەیە.

پێناسەی نەخشە ڕوو لە زیادبوونەکان و ڕوو لە کەمبوونەکان

بە نەخشەی f دەوترێت ڕوو لەزیادبوون لە ماوەی $I=[a,b]$ ئەگەر لاسەنگەی $x_1<x_2$ ئەوا $f(x_1)<f(x_2)$ کە x_1 و x_2 هەرچەندبێت لەماوەی I

هەروەها بە نەخشەی f دەوترێت ڕوو لەکەمبوون لەماوەی $I=[a,b]$ ئەگەرلاسەنگەی $x_1<x_2$ ئەوا $f(x_1)>f(x_2)$ کە x_1 و x_2 هەرچەندبێت لەماوەی I



بە واتایەکی تر، نەخشەکە ڕوو لەزیادبوون دەبێت کاتێك خاڵی $(x, f(x))$ بەرەو سەرەوە دەجوڵێت هەرچەند x بەرەو لای ڕاست بجوڵێت. و ڕوو لەکەمبوون دەبێت کاتێك خاڵی $(x, f(x))$ بەرەو خوارەوە دەجوڵێت، هەرچەند x بەرەو لای ڕاست بجوڵێت، بۆ نمونە:

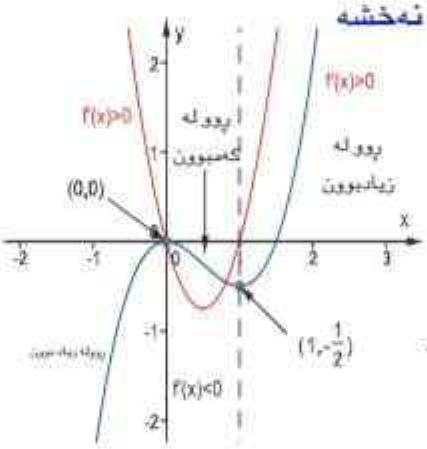
لەوێنەی بەرامبەر نەخشەکە ڕوو لەکەمبوونە لەماوەی $]-\infty, a[$ و نەگۆڕە لەماوەی $]a, b[$ و ڕوو لەزیادبوونە لەماوەی $]b, +\infty[$ هەروەها، لە وێنەکە ئەوە دەردەکەوێت کە موجەببوونی داتاشراوەکە بە ڕوولەزیادبوونی نەخشەکە لێکدەدرێتەوە، هەروەها کاتێك داتاشراوەکە سالب بێت بە ڕوولەکەمبوونی نەخشەکە لێکدەدرێتەوە، بەڵام نەبوونی داتاشراوەکە $(f'(x)=0)$ لە ماوەیەکدا بە نەگۆڕی لێکدەدرێتەوە.

سەلمێنراوی 1-4 رووی لەزیادبوون و ڕووی لەکەمبوون نەخشە

نەخشەی f توانای داتاشرانی دەبێت.

1. ئەگەر $f'(x) > 0$ لەماوەی I دا، ئەوا f نەخشەیەکی ڕوو لەزیادبوونە لەم ماوەیەدا.
2. ئەگەر $f'(x) < 0$ لەماوەی I دا، ئەوا f نەخشەیەکی ڕوو لەکەمبوونە لەم ماوەیەدا.
3. ئەگەر $f'(x) = 0$ لەماوەی I دا، ئەوا f نەخشەیەکی نەگۆڕە لەم ماوەیەدا.

نموونە 1 ماوەکانی ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لە کەمبوونی نەخشە



ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەی $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ بدۆزەوە.

شیکار

نەخشەی f توانای داتاشرانی هەیە لە R

چونکە نەخشەیەکی ڕاندارە بۆ دیاریکردنی بەهایەکانی شلۆق بۆ نەخشەکە، داتاشراوەکەی بدۆزەوە بەهایەکانی x دیاریبکە کە ئەو داتاشراوە دەکەنە 0.

$$f'(x) = 3x^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)x = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$$

بەهایەکانی x کە داتاشراو دەکەنە 0 بریتییە لە $x = 0$ و $x = 1$ نەخشەکە دوو بەهای شلۆقی هەیە ئەوانیش $x = 0$ و $x = 1$ ، دەتوانیت ئەوانەی پێشوو لەم خشتەی خوارەوە پوخت بکەیتەوە کە بە **خشتەی گۆڕان** ناودەبرێت.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3x$	$-\infty$	$-$	0	$+$	3	$+$	$+\infty$
$(x-1)$	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)=0$	$\searrow$	$f(1)=-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

نەخشەکە ڕوو لەزیادبوونە لەهەردوو ماوەی $]-\infty, 0[$ و $]1, +\infty[$ ڕوو لەکەمبوونە لەماوەی $]0, 1[$

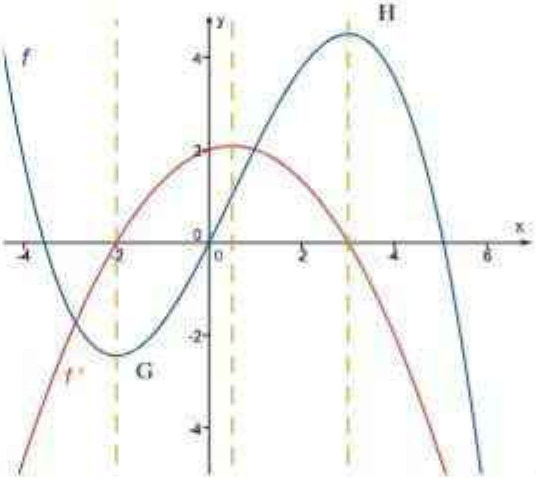
خاڵی جاوتێری

1. ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەی $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}$ بدۆزەوە.

بۆ ئەوەی پەیوەندی نێوان نیشانەی داتاشراو لە ماوەیەک و ڕوو لەزیادبوون و ڕوولەکەمبوونی نەخشەکە تێبگەیت، ئەمانەی دێت تێبینی بکە. ئەگەر نەخشەکە ڕوو لەزیادبوون بێت واتا $f(x+h) > f(x)$ کاتێك $h > 0$ واتا $f(x+h) < f(x)$ کاتێك $h < 0$. لەوەوە دەردەچێت کە $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$ لەهەموو ئەو بارانەی کە تێیدا $f'(x) = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$ لە دواییدا نەخشەکە ڕوو لەزیادبوونە. بەهەمان شێوە دەتوانیت لێکبدەیتەوە بۆچی داتاشراوەکە سالب دەبێت لە ماوەیەکدا ئەگەر نەخشەکە ڕوو لەکەمبوون بێت.

GRADE12-2011-CHAPTER 4 3/25/18 11:34 AM Page 6

بەهایەکانی گەورەترین خۆجێی و بچوکترین خۆجێی



لێرەوە فێردەبیت چۆن داتاشراو بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی بەهایەکانی گەورەترین خۆجێی و بچوکترین خۆجێی نەخشەیەک. سەیری وێنە ڕوونکردنەوەکەی بەرامبەر بکە ئەمانەت بۆ دەردەچێت.

1. ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بە خاڵی Gدا دەڕوات کاتێك بەهای x دەکاتە -2 ، هەروەها بەخاڵی H دا دەڕوات کاتێك بەهای x دەکاتە 3.
2. تانەکانی y بۆ هەموو خاڵەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لە هاوسێیەکانی خاڵی G گەورەترە لە تانی خاڵەکە کە یەکسانە بە $f(-2)$ ،
بە خاڵی G دەوترێت بەهای بچوکترین خۆجێی نەخشەی f دەنوێنێت وتانی y بچوکترین ئەو خاڵە دەکاتە بەهای بچوکترین خۆجێی نەخشەکە.
3. تانەکانی y بۆ هەموو خاڵەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لە هاوسێیەکانی خاڵی H بچوکترە لە تانی خاڵەکە کە یەکسانە بە $f(3)$ و خاڵی H بەهای گەورەترین خۆجێی نەخشەی f دەنوێنێت. تانی y ئەو خاڵە دەکاتە بەهای گەورەترین خۆجێی نەخشەکە.
4. داتاشراوی یەکەم دەکاتە 0 کاتێك نەخشەکە بەهای گەورەترین خۆجیی یان بەهای بچوکترین خۆجێی دەبێت. بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشە بریتییە لە گەورەترین و بچوکترین بەها خۆجێیەکان.

ئەم خشتەی خوارەوە تێبینیەکانی پێشوو پوختدەکاتەوە.

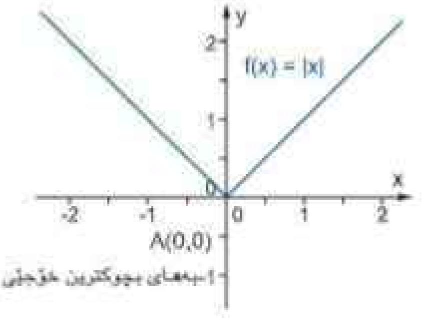
x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(3)$	↘

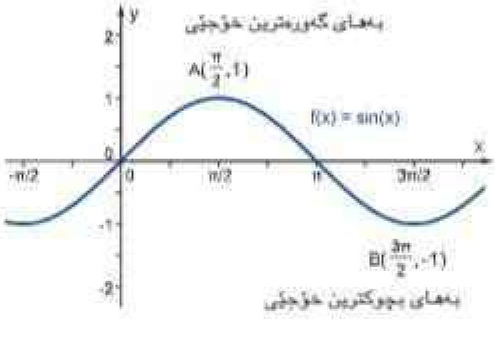
نمونە 2 بەهایەکانی داتاشراو لە بەهای کۆتایی خۆجێی

بەهای داتاشراوەکە بدۆزەوە لەهەر بەهایەکی کۆتایی خۆجێی بۆ هەردوو نەخشەی

أ $f(x)=|x|$ لەماوەی $[-1, 1]$

ب $f(x)=\sin x$ لەماوەی $[0, 2\pi]$





GRADE12-2011-CHAPTER 4 3/25/18 11:34 AM Page 9

شیکار

أ نەخشەی $f(x)=|x|$ بەهای بچوکترین خۆجێی هەیە لە $x=0$ داتاشراوی نەخشەکە لەو خاڵەدا پێناسەنەکراوە.

ب نەخشەی $f(x)=\sin x$ بەهای گەورەترین خۆجێی لە $x=\frac{\pi}{2}$ و بەهای بچوکترین خۆجێی لە $x=\frac{3\pi}{2}$ هەیە داتاشراوی نەخشەکە بریتییە لە $f'(x)=\cos x$ کە لە بەهایەکانی کۆتایی ئەم بەهایانەی دێت وەردەگرێت:

$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0 \quad \text{و} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

خاڵی چاودێری

2. بەهای داتاشراوەکە لەهەر بەهایەکی کۆتایی ئەم دوو نەخشەیە بدۆزەوە.

$$f(x)=\frac{9\left(x^2-3\right)}{x^3} \quad \text{و} \quad f(x)=-|x|$$

سەلمێتراوی 4-2 تاقیکردنەوەی داتاشراوی یەکەم

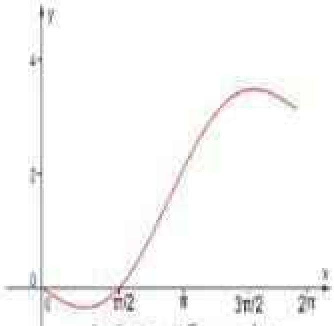
$x=c$ بەهای شلۆقە بۆ نەخشەی f کە توانای داتاشرانی لە هاوسێیەکانی ئەو بەهایەدا هەیە:

1. ئەگەر نیشانەی $f'(x)$ لە موجەبەوە بۆ سالب بگۆڕێت کاتێك بە $x=c$دا دەڕوات ئەوا خاڵی $(c,f(c))$ بەهای گەورەترین خۆجێی دەنوێنێت.
2. ئەگەر نیشانەی $f'(x)$ لە سالب بۆ موجەب بگۆڕێت کاتێك بە $x=c$ دا دەڕوات ئەوا خاڵی $(c,f(c))$بەهای بچوکترین خۆجێی دەنوێنێت.

نمونـــــە 3

بەکارهێنانی داتاشراوی یەکەم

بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$ لەماوەی $]0, 2\pi[$ بدۆزەوە.



بەهای بچوکترین خۆجێی

شیکار

نەخشەکە توانای داتاشرانی لەماوەی $]0, 2\pi[$ دا هەیە.

بە دۆزینەوەی خاڵەکانی شلۆق دەستپێبکە.

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$$

لەبەرئەوەی داتاشراوەکە پێناسەکراوە لە هەموو بەهایەکانی x ئەوا بەها شلۆقەکانی نەخشەکە ئەوانەن کە شیکاری هاوکێشەی $\frac{1}{2}-\cos x=0$ پێکدەهێنێت لە ماوەی $]0, 2\pi[$، لێرەدا دوو بەها هەیە $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$.

خشتەی گۆڕان ئەمەی خوارەوەیە

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$
$f(x)$	0	$\searrow$	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$	$\nearrow$	$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$	$\searrow$	π

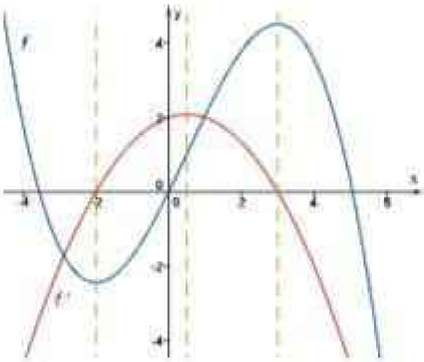
دوای دروستکردنی خشتەی گۆڕانەکان، دیاریکردنی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی وجۆری هەریەکەیان ئاسان دەبێت. نەخشەی f بەهای بچوکترین خۆجێی هەیە لە $x=\frac{\pi}{3}$ کە دەکاتە $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$ وبەهای گەورەترین خۆجێ هەیە لە $x=\frac{5\pi}{3}$ کە دەکاتە $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$

خاڵی چاودێری

3. بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشەی $f(x)=\cos x-\frac{1}{2}x$ بدۆزەوە لە ماوەی $]0,2\pi[$ و جۆری هەریەکەیان دیاربکە.

خاڵەکانی وەرگەڕان

وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەکانی نەخشەی f بە (ڕەنگی شین) وداتاشراوی یەکەمی (بەڕەنگی سوور) و داتاشراوی دووەمی بە (ڕەنگی سەوز) دەنوێنێت. دەتوانیت تێبینی ئەوە بکەیت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە قۆپاوە کاتێك داتاشراوی دووەمی موجەب دەبێت و قۆقز دەبێت کاتێك داتاشراوی دووەمی سالب دەبێت، هەروەها لە خاڵی E چەماوەکە لە قۆپاو بۆ قۆقز دەگۆڕێت، سەرنجبدە کە پۆی ئەو خاڵە بریتییە لە بەهای x کە داتاشراوی دووەمی دەکاتە 0. بە E دەوترێت خاڵی **وەرگەڕانی نەخشەکە**.



GRADE12-2011-CHAPTER 4 3/25/18 11:34 AM Page 11

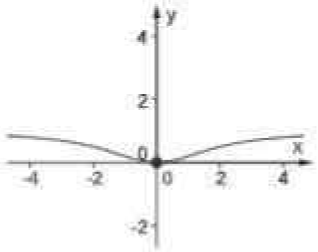
1-4 ڕاهێنان

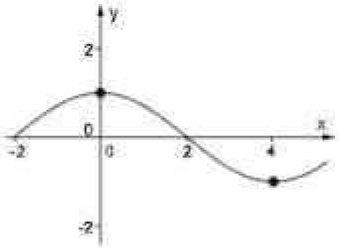
لە ڕاهێنانی **1** تا **3**، بەهای داتاشراوەکە (ئەگەر هەبوو) لەهەر بەهایەکی کۆتایی بدۆزەوە.

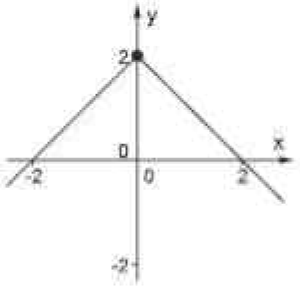
1 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$

2 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

3 $f(x)=2-|x|$



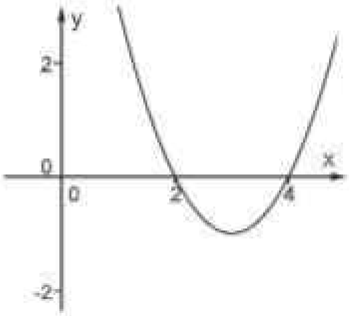


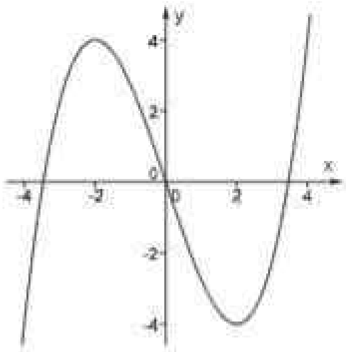


لە ڕاهێنانی **4** تا **10**، ماوەکانی ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لە کەمبوون بدۆزەوە.

4 $f(x)=x^2-6x+8$

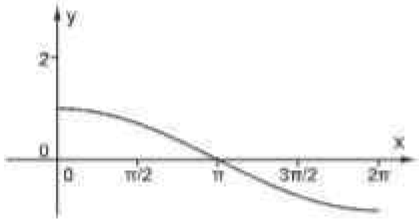
5 $f(x)=\frac{x^3}{4}-3x$





6 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$

$0<x<2\pi$



7 $f(x)=\frac{1}{x^2}$

8 $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

9 $f(x)=27x-x^3$

10 $f(x)=x-2\cos x$ $0<x<2\pi$

لە ڕاهێنانی **11** تا **13** بەها شلۆقەکانی نەخشەکە بدۆزەوە.

11 $f(x)=x^2(x-3)$

12 $f(x)=x^2\left(x^2-4\right)$

13 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

لە ڕاهێنانی 14 تا 22 أ) بەها شلۆقەکان بدۆزەوە ب) ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەکە بدۆزەوە جـ) داتاشراوی یەکەم بۆ دۆزینەوەی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێ بەکاربهێنە

14 $f(x)=x^2-6x$ **15** $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ **16** $f(x)=x^2(3-x)$

17 $f(x)=\frac{x^5-5x}{5}$ **18** $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-4$ **19** $f(x)=5-|x-5|$

20 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ **21** $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$ **22** $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+1}$

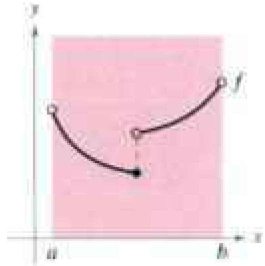
لە ڕاهێنانی 23 تا 24 أ) بەها شلۆقەکان بدۆزەوە ب) ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لە کەمبوونی نەخشەکە بدۆزەوە جـ) داتاشراوی یەکەم بۆ دیاریکردنی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێ بەکاربهێنە .

(تەنها لەماوەی $]0, 2\pi[$ کارەکەت ئەنجام بدە)

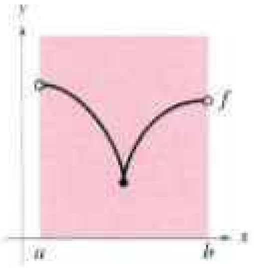
23 $f(x)=\frac{x}{2}+\cos x$ **24** $f(x)=(\sin x)(\cos x)$

لە ڕاهێنانی 25 تا 28 دیاریبکە ئەگەر نەخشەکە بەهای بچووکترین کۆتایی خۆجێ لەماوەی $]a, b[$ دا هەیە. بەپێی ڕوونکردنەوەکەی لەو ماوەیەدا.

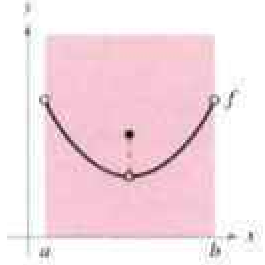
25



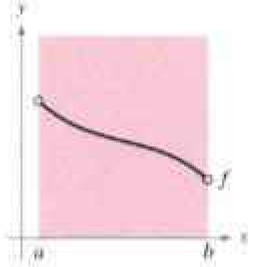
26



27

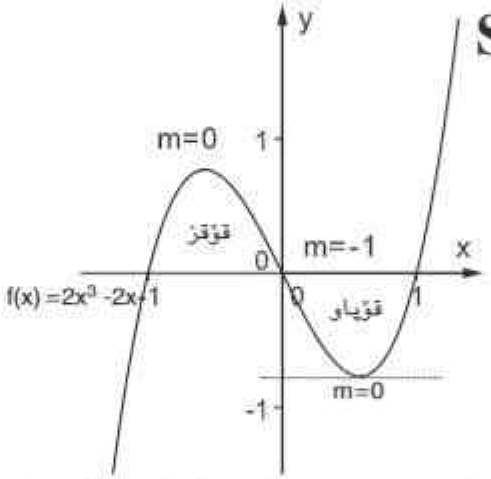


28



4-2 تاقیکردنەوەی داتاشراوی دووەم

Second Derivative Test



ئامانجەکان

- ئەو ماوانەی کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە تێیدا قۆپاوە یان قۆقزە دیاریدەکات.
- خاڵەکانی وەرگەڕانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دەدۆزێتەوە.
- داتاشراوی دووەم بۆ پۆلێنکردنی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشەکە بەکاردەهێنێت.

قۆقز و قۆپاو

ئەگەر نەخشەی f لەماوەیەکی کراوە توانای داتاشرانی هەبێت، و داتاشراوی یەکەمی لەو ماوەیەدا ڕوو لەزیادبوون بێت، ئەوا چەماوەکە **قۆپاوە** لەو ماوەیەدا بەڵام ئەگەر داتاشراوەکە لەو ماوەیەدا ڕوو لەکەمبوون بێت، ئەوا چەماوەکە **قۆقزە** لەو ماوەیەدا.

سەیری چەماوەی نەخشەی $f(x) = 2x^3 - 2x$ لە وێنەی بەرامبەر بکە، ئەم چەماوەیە لەماوەی $]-\infty, 0[$ قۆقزە و لەماوەی $]0\ ,\ +\infty[$ قۆپاوە.

نەخشەکە لێکەوتێکی لەخاڵی $(0, 0)$دا هەیە کە چەماوەکەی لە قۆقزەوە بۆ قۆپاو دەگۆڕێت.

زاراوەکان
Vocabulary

قۆپاو	Concave
قۆقز	Convex

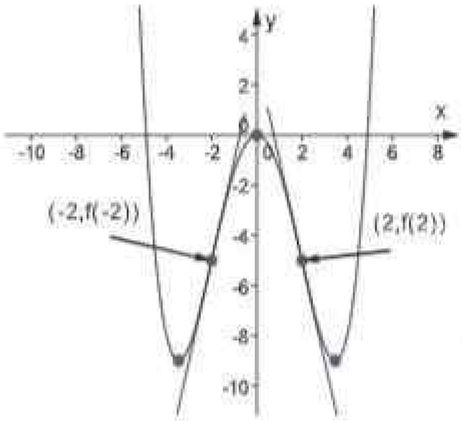
تاقیکردنەوەکانی قۆقز و قۆپاو

f نەخشەیەکە لەماوەی کراوەی I دووجار توانای داتاشرانی هەیە.

1. ئەگەر $f''(x) > 0$ لەماوەی I دا، ئەوا چەماوەی نەخشەکە لەماوەی I قۆپاوە.
2. ئەگەر $f''(x) < 0$ لە ماوەی I دا، ئەوا چەماوەی نەخشەکە لەماوەی I قۆقزە.

نموونە 1 دیاریکردنی قۆقز و قۆپاو

ماوەکانی قۆقز و قۆپاوی نەخشەی $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ بدۆزەوە.



شیکار

داتاشراوی یەکەمی نەخشەکە بریتییە لە $f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ و داتاشراوی دووەمی بریتییە لە $f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$.

دیارە $f''(x) = 0$ کاتێک $x = \pm 2$.

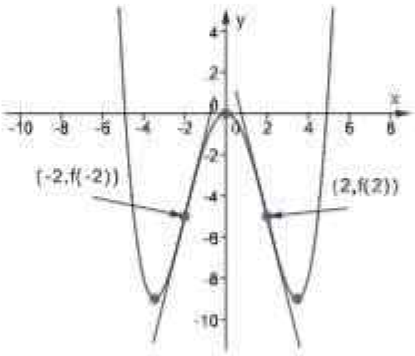
لەلایەکی ترەوە $f''(x) > 0$ لە هەردوو ماوەی $]-\infty, -2[$ وماوەی $]2, +\infty[$ و $f''(x) < 0$ لەماوەی $]-2, 2[$. لەمەوە بۆت دەردەکەوێت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە قۆقزە لەماوەی $]-2, 2[$ و قۆپاوە لە هەردوو ماوەی $]-\infty, -2[$ و $]2, +\infty[$، دەتوانیت ئەوەی پێشوو لەم خشتەی دێت پوختبکەیتەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 4 3/25/18 11:34 AM Page 12

x	$-\infty$ … -2	-2 … 2	2 … $+\infty$
$f''(x)$	+	−	+
ڕوونکردنەوەکە $f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

خاڵی جاوبڕی 1. ماوەکانی قۆقز و قۆپاو بۆ نەخشەی $f(x)=x^4-4x^2+1$ بدۆزەوە.

خاڵەکانی وەرگەڕان



بەگەڕانەوە بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەی نموونەی 1 دەبینیت ڕوونکردنەوەکە لە خاڵی $(-2, f(-2))$ لە قۆپاو بۆ قۆقز و لە خاڵی $(2, f(2))$ لە قۆقزەوە بۆ قۆپاو دەگۆڕێت بە هەریەکە لەو دوو خاڵە دەوترێت **خاڵی وەرگەڕان**.

پێناسەی خاڵی وەرگەڕان

ئەگەر نەخشەی f بەردەوام بێت و ئەگەر ڕوونکردنەوەکەی لێکەوتی لە خاڵی $(c, f(c))$ هەبێت، ئەوا ئەو خاڵە بریتییە لە خاڵی وەرگەڕانی نەخشەکە و ڕوونکردنەوەکەی.
ئەگەر چەماوەکە لەوخاڵەدا لە قۆپاو بۆ قۆقز یان لە قۆقزەوە بۆ قۆپاو بگۆڕێت.

لەبیرمەکە
لە پێناسەی خاڵی وەرگەڕان پێویستە نەخشەکە لێکەوتی هەبێت لەو خاڵەدا.

بۆ دۆزینەوەی خاڵەکانی هەڵبژێردراو کە دەبنە خاڵی وەرگەڕان، بەهایەکانی x دیاریبکە کە $f''(x)=0$ یان $f''(x)$ نەبێت.

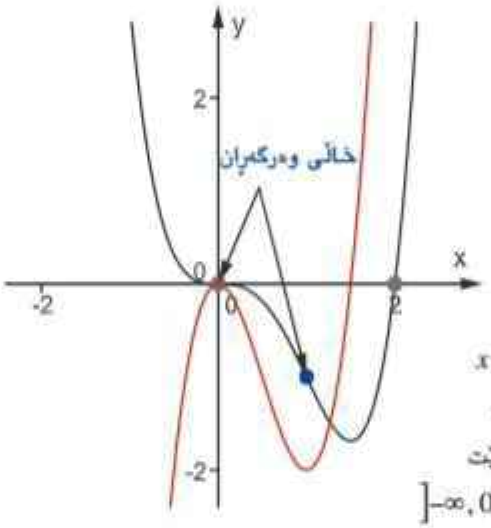
سەلمێنراوی 3-4 خاڵی وەرگەڕان

ئەگەر $(c, f(c))$ خاڵی وەرگەڕانی نەخشەیەک بێت، ئەوا $f''(c)=0$ یان $f''(c)$ ی پێناسەنەکراوە.

نموونە 2

دۆزینەوەی خاڵەکانی وەرگەڕان

خاڵەکانی وەرگەڕان بۆ نەخشەی $f(x)=x^4-2x^3$ دیاریبکە پاشان ماوەی قۆقز و قۆپاوی ڕوونکردنەوەکە دیاریبکە.



شیکار

داتاشراوی یەکەمی نەخشەکە دەکاتە $f'(x)=4x^3-6x^2$ و داتاشراوی دووەمی دەکاتە $f''(x)=12x^2-12x$ ، $f''(x)=0$ لە $x=0$ و $x=1$

ڕوونکردنەوە سوورەکە بریتییە لە ڕوونکردنەوەی داتاشراوی یەکەم، لەو ڕوونکردنەوەدا، دەردەکەوێت کە داتاشراوی یەکەم ڕوو لەزیادبوونە لەماوەی $]-\infty, 0[$ ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت.

ڕوونکردنەوەی نەخشەکە قۆپاوە لەم ماوەیەدا، لەلایەکی تر داتاشراوی یەکەم لەماوەی $]0, 1[$ ڕوو لەکەمبوونە ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەم ماوەیەدا قۆقزە، ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لە خاڵی $(0, 0)$ لە قۆپاوە وە بۆ قۆقز دەگۆڕێت، ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە ئەو خاڵە بریتییە لەخاڵی وەرگەڕان.

لەلایەکی تر داتاشراوی یەکەمی نەخشەکە لەماوەی $]1, +\infty[$ زیاد دەکات ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەو ماوەیەدا قۆپاوە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەخاڵی $(1, -1)$ لە قۆقزەوە بۆ قۆپاو دەگۆڕێت ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت ئەو خاڵە خاڵی وەرگەڕانە.

تێبینی بکە

نەخشەکە لە $x = 0$ و $x = 2$ لێکەوتنی هەیە

خاڵی جاودێری

2. خاڵەکانی وەرگەڕانی نەخشەی $f(x) = -x^4 + 2x^3$ دیاریبکە و لەقۆقز و قۆپاوی ڕوونکردنەوەکەی بکۆڵەوە.

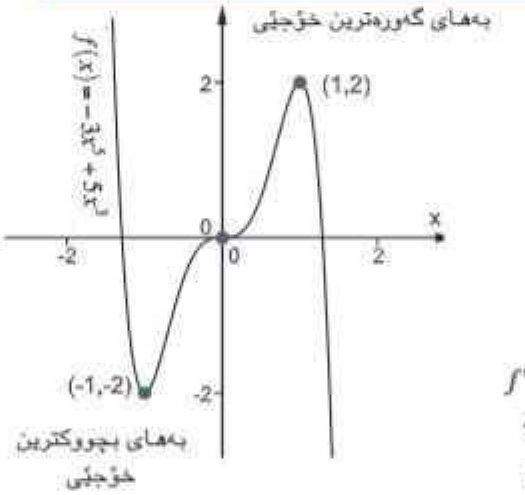
سەرەرای تاقیکردنەوەی قۆپاو وقۆقزی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە، داتاشراوی دووەم پارمەتیدەرە بۆ پۆلێنکردنی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی لەنێوان بەهایەکانی گەورەترین و بەهایەکانی بچووکترین. ئەم تاقیکردنەوەیە پشت دەبەستێت بەوەی کە قۆقزی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لە هاوسێکانی خاڵی $(c, f(c))$ کە $f'(c) = 0$ پێویستە $f(c)$ بکاتە بەهای گەورەترین خۆجێی. هەروەها قۆپاوی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەهاوسێکانی $(c, f(c))$ کە $f'(c) = 0$ پێویستە $f(c)$ بکاتە بەهای بچوکترین خۆجێی.

تاقیکردنەوەی داتاشراوی دووەم

$f(x)$ نەخشەیەکە پاسادانی $f'(c) = 0$ دەکات و $f''(x)$ لە هاوسێیەکانی $(c, f(c))$ پێناسەکراوە.

1. ئەگەر $f''(c) > 0$ ئەوا خاڵی $(c, f(c))$ بەهای بچوکترین خۆجێی نەخشەکە دەنوێنێت چونکە دەکەوێتە ناوچەی قۆپاو.
2. ئەگەر $f''(c) < 0$ ئەوا خاڵی $(c, f(c))$ بەهای گەورەترین خۆجێی نەخشەکە دەنوێنێت. چونکە دەکەوێتە ناوچەی قۆقز.

ئەگەر $f''(c) = 0$ ئەوا تاقیکردنەوەکە سەرکەوتوو نابێت، پێویستە لەو بارەدا داتاشراوی یەکەم بەکاربهێنێت.



نموونە 3 بەکارهێنانی داتاشراوی دووەم

بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشەی $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ بدۆزەوە.

شیکار

داتاشراوی یەکەم بۆ نەخشەکە دەکاتە:

$f'(x) = -15x^4 + 15x^2 = 15x^2(1 - x^2)$ و

داتاشراوی دووەمی دەکاتە $f''(x) = 30(-2x^3 + x)$

$f'(x) = 0$ کاتێك $x = -1$ و $x = 0$ و $x = 1$ نەخشەکە

بەهای بچوکترین خۆجێی دەبێت کاتێك $x = -1$

$f''(-1) = 30(-2(-1)^3 + (-1)) = 30 > 0$

بەهای گەورەترین خۆجێی دەبێت کاتێك $x = 1$ ئەوا $f''(1) = 30\ (-2 \times 1^3 + 1) = 30 < 0$

لەبەرئەوەی $f''(0) = 0$ ، ئەوا تاقیکردنەوەکە سەرکەوتوو نابێت بۆ دیاریکردنی کۆتایی خۆجێی لە $x = 0$ داتاشراوی یەکەم بەکاربهێنە بۆ ئەوەی دەربیخەیت نەخشەکە لە پێش و لەدوای $x = 0$ ڕوو لەزیادبوونە ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە لەوخاڵەدا بەهای کۆتایی خۆجێی نابێت.

خاڵی جاودێری

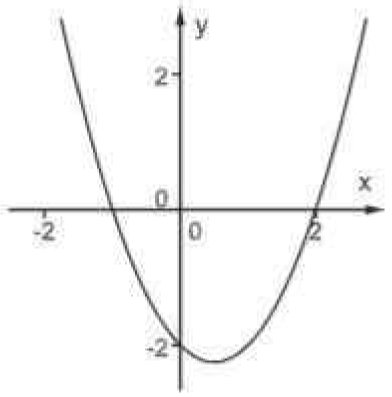
3. خاڵەکانی کۆتایی خۆجێی نەخشەی $f(x) = x^5 - 0.15x^3$ بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 4 3/25/18 11:34 AM Page 14

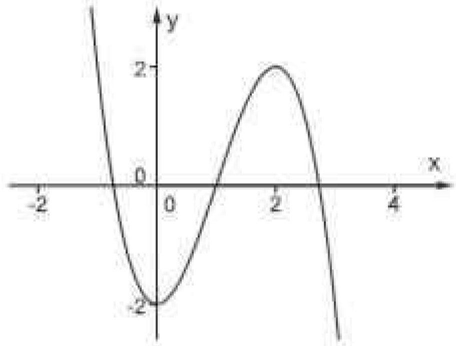
2-4 ڕاهێنان

لەڕاهێنانی 1 تا 4 ئەوماوە کراوانە دیاریبکە کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە تیایدا قۆپاوە یان قۆقزە.

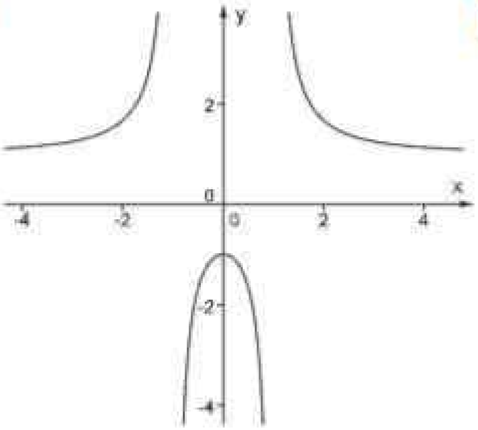
1



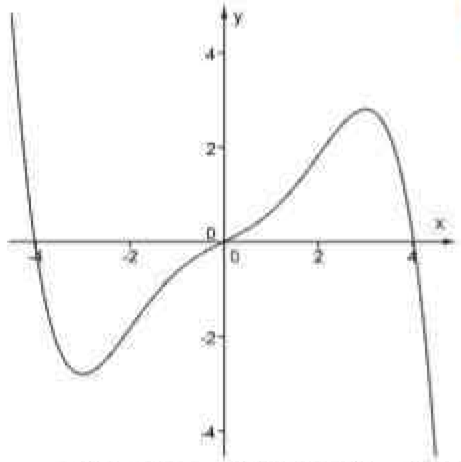
2



3



4



لە ڕاهێنانی 5 تا 11 خاڵەکانی وەرگەڕان بدۆزەوە وماوەکانی قۆپاو و قۆقزی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دیاریبکە.

5 $f(x)=x^3-6x^2+12x$

6 $f(x)=x\sqrt{x+3}$

7 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

8 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ لەماوەی $[0, 4\pi]$

9 $f(x)=\frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ لەماوەی $[0, 4\pi]$

10 $f(x)=\sin x+\cos x$ لەماوەی $[0, 2\pi]$

11 $f(x)=x+2\cos x$ لەماوەی $[0, 2\pi]$

لە ڕاهێنانی 12 تا 17 بەهایەکانی کۆتایی (گەورەترین و بچوکترین) خۆجێی بدۆزەوە بە بەکارهێنانی داتاشراوی دووەم ئەگەر لە توانادا بوو.

12 $f(x)=x^4-4x^3+2$

13 $f(x)=-(x-5)^2$

14 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-3$

15 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

16 $f(x)=x+\frac{4}{x}$

17 $f(x)=\cos x-x$

دەربارەی چەمکەکان

18 نەخشەی f داتاشراوەکەی نەخشەیەکی ڕوو لەزیادبوونە، ڕوونکردنەوەیەک بۆ f بکێشە کاتێک

أ $f' < 0$ ب $f' > 0$

19 نەخشەی f داتاشراوەکەی نەخشەیەکی ڕوو لەکەمبوونە، ڕوونکردنەوەیەک بۆ f بکێشە کاتێک

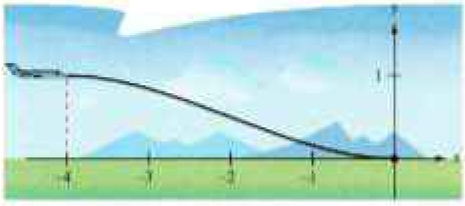
أ $f' < 0$ ب $f' > 0$

20 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f بکێشە خاڵی $(c, f(c))$ لەخۆبگرێت کە $f''(c) = 0$ کاتێک $(c, f(c))$ خاڵی وەرگەڕانی نەخشەکە نەبێت.

21 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \sqrt[3]{x}$ بکێشە وخاڵی وەرگەڕانی دیاریبکە، ئایا داتاشراوی دووەم $f''(x)$ لەخاڵی وەرگەڕان پێناسەکراوە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

22 بەهایەکانی a و b و c و d بدۆزەوە کاتێک نەخشەی سێجای $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بەهای گەورەترین خۆجێی لەخاڵی $(3, 3)$ و بەهای بچوکترین خۆجێی لەخاڵی $(5, 1)$ وخاڵی وەرگەڕانی لە خاڵی $(4, 2)$ دا هەبێت.

23 **نیشتنەوەی فڕۆکە** فڕۆکەیەک دەستیکرد بە نیشتنەوە کاتێک لەبەرزی یەک کیلۆمەتر، و لەدووری 4 کیلۆمەتر لە ڕاڕەوی (مدرج) فڕۆکەخانەیەکدا دابوو (سەیری وێنەی بەرامبەر بکە).



نەخشە سێجای $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ بدۆزەوە کە لەماوەی $[-4, 0]$ ڕێڕەوی فڕۆکەکە لەماوەی نیشتنەوەی دەنوێنێت؟

24 ئەوەی دێت دیاریبکە: ئەگەر f نەخشەیەکی سێجایی بێت و 3 شیکاری ڕاستی جیاوازی هەبێت، ئەوا خاڵی وەرگەڕانی هەیەو پۆی ئەو خاڵە دەکاتە ناوەندی هەرسێ شیکارەکانی نەخشەکە.

ڕاست یان هەڵە لە ڕاهێنانی 25 تاکو 28، دیاریبکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە و ئەگەر هەڵەیە بەدژە نمونەیەک بسەلمێنە

25 بۆ هەر نەخشەیەکی سێجا یەک خاڵی وەرگەڕان هەیە.

26 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \frac{1}{x}$ قۆقزە کاتێک $x < 0$ و قۆپاوە کاتێک $x > 0$ و خاڵی وەرگەڕانی لە $x = 0$ دا هەیە.

27 ئەگەر $f'(c) > 0$ ئەوا نەخشەی f لە $x = c$ قۆپاوە.

28 ئەگەر $f''(2) = 0$، ئەوا ڕوونکردنەوەی نەخشەی f خاڵی وەرگەڕانی لە $x = 2$ دا هەیە.

3-4 ئامانجەکان لە بێپایان

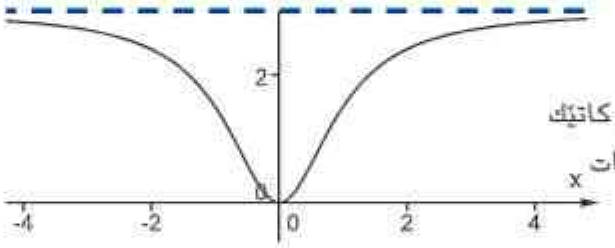
Limits at Infinity

ئامانجەکان

- ئامانجە دیاریکراوەکان لە بێپایان دەدۆزێتەوە.
- دەرکەنارە ئاسۆییەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشە ئەگەر هەبوو دەدۆزێتەوە.
- ئامانجە دیارینەکراوەکان لە بێپایان دەدۆزێتەوە.

زاراوەکان
Vocabulary

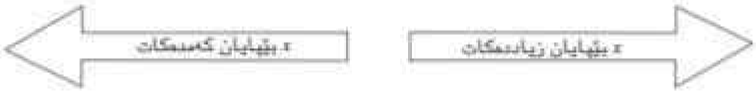
دەرکەنارە ئاسۆییەکان
Horizontal Asymptotes
دەرکەنارە ستونییەکان
Vertical Asymptotes



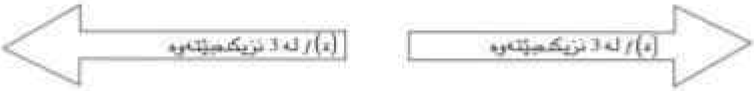
ئامانجەکان لە بێپایان

لەم وانەیەدا لەسیفەتی نەخشە دەکۆڵینەوە کاتێك بەهای x بێپایان زیاددەکات یان کەمدەکات ئەمەش بەم شێوەیە دەردەبڕین، کاتێك $(x \to +\infty)$یان $(x \to -\infty)$

لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$ دەردەکەوێت، هەروەها ئەوە دەردەکەوێت کە بەهای $f(x)$ لە 3 نزیکدەبێتەوە کاتێك x زیاددەکات یان کەمدەکات تابێپایان، دەتوانیت بەژمارەیی بگەیتە هەمان ئەنجام هەروەك لە خوارەوە دەردەکەوێت.



x	$-\infty \leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\to +\infty$
$f(x)$	$3 \leftarrow$	2.9997	2.97	1.5	0	1.5	2.97	2.9997	$\to 3$



لە خشتەکە وا دەردەکەوێت کەبەهای $f(x)$ لە 3 نزیکدەبێتەوە کاتێك x بێسنوور زیاددەکات$(x \to +\infty)$ یان کاتێك x بێسنوور کەمدەکات$(x \to -\infty)$ئەم دوو ئامانجە لە بێپایان بەم شێوەی خوارەوە دەنووسین.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$$ ئامانجی $f(x)$ لە بێپایانی سالب.

و

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$ ئامانجی $f(x)$ لە بێپایانی موجەب.

دەرکەنارە ئاسۆییەکان

لە نەخشەی $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$ بینیمان، ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەڕاستەهێڵی $y=3$ نزیکدەبێتەوە کاتێك x بێسنوور زیاددەکات بەو ڕاستەهێڵە دەوترێت **دەرکەناری ئاسۆیی** بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەکە.

پێناسەی دەرکەناری ئاسۆیی

ڕاستەهێڵی $y=a$ دەرکەناری ئاسۆییە بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ ئەگەر $\lim_{x \to -\infty} f(x)=a$ یان $\lim_{x \to +\infty} f(x)=a$

لەلایەکی ترەوە ئامانجەکان لە بێپایان هەمان ئەو سیفەتانەیان هەیە کە ئامانجەکان لە $x=c$ هەیانە کە c ژمارەیەکی ڕاستییە هەروەها سیفەتی دیکەی هەیە وەك

ئامانجەکان لە بێپایان

- ئەگەر r ژمارەیەکی ڕێژەیی موجەب بێت، ئەوا $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{c}{x^r}=0$
- ئەگەر r ژمارەیەکی ڕێژەیی موجەب بێت، وئەگەر x^r لە بەهایەکانی x ی سالب پێناسەکرابێت ئەوا $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r}=0$.

نموونە 1 دۆزینەوەی ئامانج لە بێپایان

ئامانجی $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)$ بدۆزەوە.

شیکار بەپێی سیفەتەکانی ئامانجەکان و سەلمێنراوی پێشوو.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}5-\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=5-0=5$$

خاڵی چاودێری 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$ بدۆزەوە.

نموونە 2 دۆزینەوەی ئامانج لە بێپایان

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}$ بدۆزەوە.

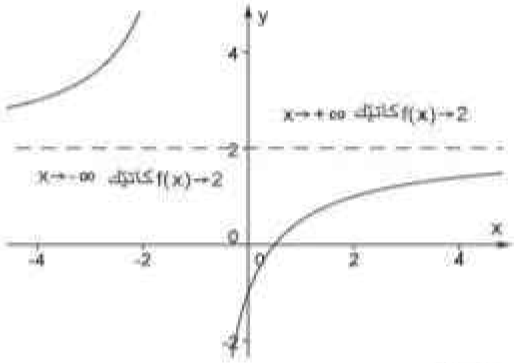
شیکار سەرنجبدە هەریەکە لەسەرەو ژێرە بەرەو $+\infty$ دەچێت کاتێک x بێسنوور زیاددەکات.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)}\to\frac{+\infty}{+\infty}$$

ئەوەش بارێکە لەبارەکانی نادیار، بۆ شیکاری ئەو پرسیارە، واتە بۆ لابردنی نادیاری هەریەکە لەسەرە و ژێرە بەسەر x دابەشبکە.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\frac{2-0}{1+0}=2$$



هەروەها ڕاستەهێڵی $y=2$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە لەلای ڕاست. ئەگەر بەدوای ئامانجی نەخشەکە بگەڕێیت کاتێک x بێسنوور کەمدەکات،

دەبینیت کە $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2$ و ڕاستەهێڵی $y=2$ ئەویش دەبێتە دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە لەلای چەپ.

سوود

کاتێک شێوەیەکی دیارینەکراوت دێتە پێش وەک نموونە 2، سەرە وژێرە بەسەر ئەو x ی گەورەترین هێزی هەیە لە ژێرەدا دابەشبکە

خاڵی چاودێری 2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}$ بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 4 3/25/18 11:34 AM Page 18

نموونە 3 بەراوردکردنی سێ نەخشەی ڕێژەیی

ئەم سێ ئامانجەی خوارەوە بدۆزەوە.

أ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1}$ ب $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5}{3x^2+1}$ ج $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5}{3x^2+1}$

شیکار

أ هەریەك لە سەرەو ژێرە بەسەر x^2 دابەشبکە.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{0+0}{3+0}=0$$

ب هەریەك لە سەرەو ژێرە بەسەر x^2 دابەشبکە.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

ج هەریەك لە سەرەو ژێرە بەسەر x^2 دابەشبکە.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3+5}{x^2}}{\frac{3x^2+1}{x^2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{+\infty}{3}=+\infty$$

بۆت دەردەکەوێت کە ئامانجی سێیەم دیارینەکراوە، چونکە سەرەکەی بێسنوور زیاددەکات، لەکاتێکدا ژێرەکەی نەگۆڕە.

دیاریکردنی دەرکەنارە ئاسۆییەکانی نەخشە ڕێژەییەکان کاتێك کۆلکەیەکی هاوبەش نێوان سەرەو ژێرە نەبێت

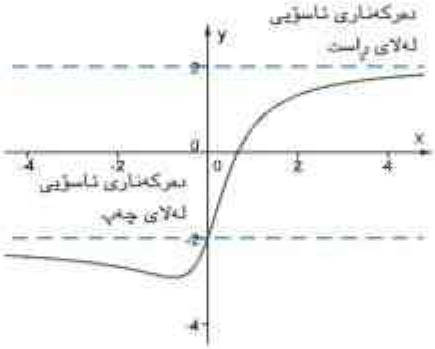
1. ئەگەر پلەی سەرە لەپلەی ژێرە کەمتربێت، ئەوا ڕاستەهێڵی $y=0$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە.
2. ئەگەر پلەی سەرە یەکسان بێت بەپلەی ژێرە، ئەوا ڕاستەهێڵی $y=\frac{a}{b}$ دەکاتە دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە، کاتێك a هاوکۆلکەی سەرەکی سەرەیە و b هاوکۆلکەی سەرەکی ژێرەیە.
3. ئەگەر پلەی سەرە لەپلەی ژێرە زیاتربێت. ئەوا نەخشەکە دەرکەناری ئاسۆیی نابێت.

3. ئایا نەخشەی $f(x)=\frac{5x^3-2x^2}{x-2x^3}$ دەرکەناری ئاسۆیی هەیە ئەگەر وەڵامەکەت بەڵێیە، هاوکێشەکەی بدۆزەوە.

لە نموونەکانی پێشوو تێبینی ئەمانەت کرد: ئەگەر ڕاستەهێڵی $y=a$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە بێت لەلای ڕاست، ئەوا بەهەمان شێوە دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە دەبێت لەلای چەپ. ئەمەش بۆ هەموو نەخشەیەکی ڕێژەیی ڕاستە، بەڵام بۆ نەخشەکانی تر ڕاست نابێت، هەروەك لەنموونەی 4 دا دەردەکەوێت.

نموونــــە 4 نەخشەیەک دوو دەرکەناری ئاسۆیی جیاوازی هەیە

هەریەکە لەم دوو ئامانجەی دێت بدۆزەوە، دوو هاوکێشەی هەردوو دەرکەنارە ئاسۆییەکە بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشە $y=\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$ بدۆزەوە.



أ $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

ب $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

شیکار

أ ئەگەر $x>0$ دەتوانیت بنووسیت $x=\sqrt{x^2}$ و
ئەگەر سەرەو ژێرە بەسەر x دابەشبکەیت ئەوا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3-0}{\sqrt{2+0}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

کەواتە $y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ بریتییە لە دەرکەناری ئاسۆیی لای ڕاست.

ب ئەگەر $x<0$ دەتوانیت بنووسیت $x=-\sqrt{x^2}$ و ئەگەر سەرەو ژێرە بەسەر x دابەشبکەیت ئەوا

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{3-0}{\sqrt{2+0}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

کەواتە $y=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$ بریتییە لە دەرکەناری ئاسۆیی لای چەپ.

خاڵی جاودێری 4. دەرکەنارە ئاسۆییەکانی نەخشەی $f(x)=\frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2}}$ بدۆزەوە.

ئامانجە دیارینەکراوەکان $\pm\infty$

زۆر نەخشە هەیە بەهایەکانی لە ئامانجی دیاریکراو نزیک نابێتەوە کاتێک x بێسنوور زیاددەکات یان کەمدەکات. لەو نەخشانەش نەخشە ڕاەدارەکانە ئەو پێناسەی خوارەوە بەکاردەهێنرێت بۆ باسکردنی سیفەتی نەخشە ڕاەدارەکان یان ئەوانی تر لە $\pm\infty$.

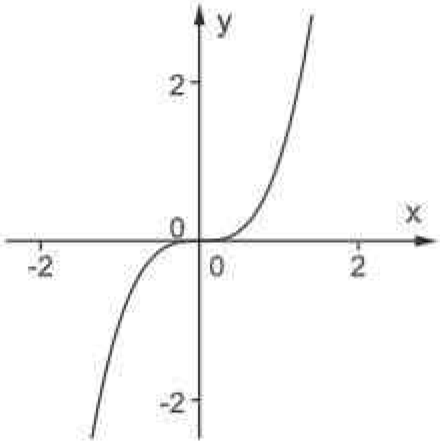
پێناسەی ئامانجە دیارینەکراوەکان لە $\pm\infty$

1. نووسینی $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ئەوە دەردەبڕێت کە بەهای $f(x)$ بێسنوور زیاددەکات کاتێک x بێسنوور زیاددەکات.

2. نووسینی $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ئەوە دەردەبڕێت کە بەهای $f(x)$ بێسنوور کەمدەکات کاتێک x بێسنوور زیاددەکات.

هەردوو نووسینی $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ بەهەمان ڕێگا پێناسە دەکرێت.

نموونـــە 5 دۆزینەوەی ئامانجە دیارینەکراوەکان لە $\pm\infty$



ئەمانەی دێت بدۆزەوە.

أ $\lim_{x\to+\infty} x^3$ ب $\lim_{x\to-\infty} x^3$

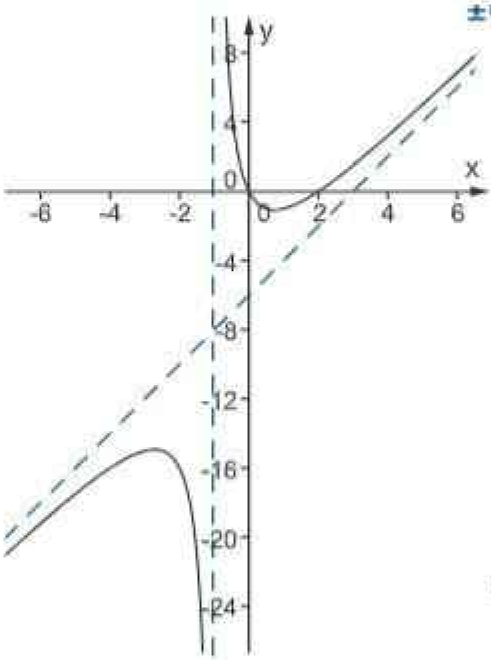
شیکار

أ کاتێک x بێسنوور زیاددەکات ئەوا x^3 بێسنوور زیاددەکات ئەمەش دەبێتە $\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

ب کاتێک x بێسنوور کەمدەکات ئەوا x^3 بێسنوور کەمدەکات ئەمەش دەبێتە $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$
ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^3$ ئەو ئەنجامانە دەسەلمێنێت.

خاڵی جاودێری 5. ئەنجامی ئەمانەی دێت بدۆزەوە. أ $\lim_{x\to+\infty} x^2$ ب $\lim_{x\to-\infty} x^2$

نموونـــە 6 دۆزینەوەی ئامانجە دیارینەکراوەکان لە $\pm\infty$



ئامانجی ئەمانەی دێت بدۆزەوە.

أ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}$

ب $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}$

شیکار

سەرە بەسەر ژێرەدا دابەشبکە.

$$\frac{2x^2-4x}{x+1}=2x-6+\frac{6}{x+1}$$

أ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-6+\frac{6}{x+1}\right)=+\infty$

ب $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-4x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-6+\frac{6}{x+1}\right)=-\infty$

ئەو ئەنجامانە ئەوە دەردەخات کە سیفەتی نەخشەی $f(x)=\frac{2x^2-4x}{x+1}$ لە $\pm\infty$ هەمان سیفەتی نەخشەی $g(x)=2x-6$ هەیە. لەوانەکانی داهاتوو ئەم جۆرە ئامانجانە بە ڕوونکردنەوەیی فێردەبیت و دەردەکەوێت کە ڕاستەهێڵی $y=2x-6$ دەرکەناری لارە Slant asymptote بۆ ڕوونکردنەوەی نەخشەکە وەک لەوێنەی سەرەوەدا دەردەکەوێت.

خاڵی جاودێری 6. ئەمانەی دێت بدۆزەوە. أ $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2-x+1}{x-1}$ ب $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2-x+1}{x-1}$

نموونە 7 دۆزینەوەی نامانجەکانی نەخشە سێگۆشەییەکان لە ±∞

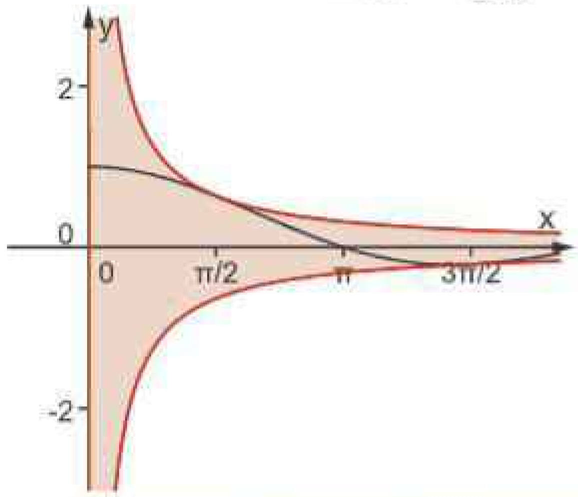
ئەنجامی ئەمانەی دێت بدۆزەوە.

أ $\lim_{x \to +\infty} \sin x$

ب $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$

شیکار

أ کاتێك بەهای x بە ئاڕاستەی $+\infty$ زیاددەکات، بەهای نەخشەی $\sin x$ لەنێوان -1 و 1 بە بەردەوامی دووبارە دەبێتەوە بۆیە $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ نامانجی نییە.



ب لەبەرئەوەی $-1 \le \sin x \le 1$ و
لەبەرئەوەی $x > 0$ کاتێك x لە $+\infty$
نزیکدەبێتەوە، ئەوا $\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$
بەڵام $\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
کەواتە بەپێی سەلمێنراوی
دووبەرج ئەوا $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$
هەروەك لە وێنەی بەرامبەر
دەردەکەوێت.

خاڵی جاوێزی 7. ئەنجامی ئەمانەی دێت بدۆزەوە أ $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ ب $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x}$

3-4 ڕاهێنان

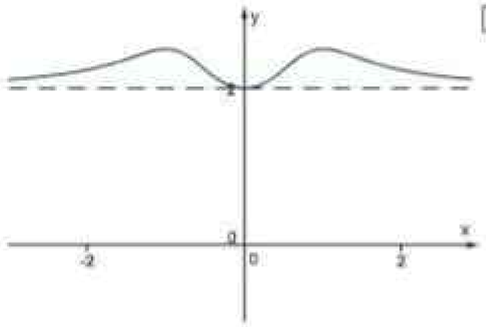
لە ڕاهێنانی 1 تا 2 بەشێوازی خۆت ڕوونیبکەوە.

1 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4$

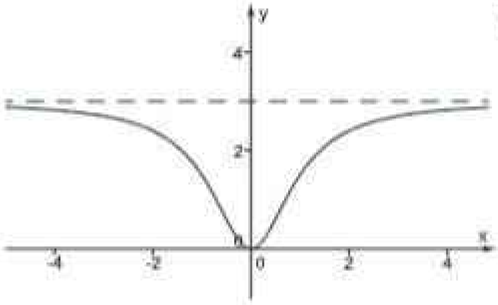
2 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

لە ڕاهێنانی 3 تا 6، ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بە بەکارهێنانی دەرکەنارە ئاسۆییەکان دیاریکە.

أ

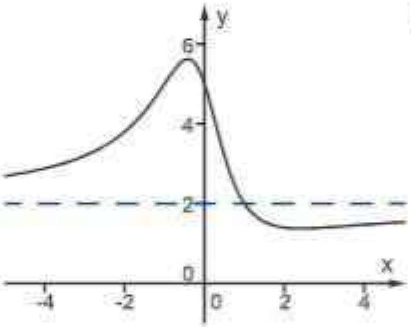


ب

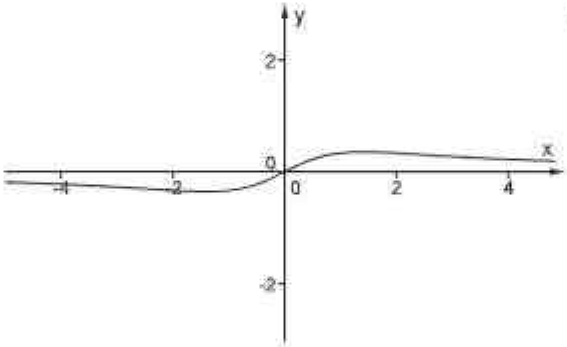


GRADE12-2011-CHAPTER 4 4/1/18 12:33 PM Page 22

ج



د



3 $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$

4 $f(x)\frac{3x^2}{x^2+2}$

5 $f(x)=\frac{2x^2-3x+5}{x^2+1}$

6 $f(x)=2+\frac{x^2}{x^4+1}$

7 ئەنجامی ئەمانەی دێت بدۆزەوە کاتێك $f(x)=5x^3-3x^2+10$

أ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$ ب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}$ ج $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^4}$

لە پرسیاری 8 تاکو 15 ئامانجە داواکراوەکە بدۆزەوە.

8 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{3x+2}$

9 $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2}{9x^3-3x^2+7}$

10 $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x+3}$

11 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x-\frac{4}{x^2}\right)$

12 $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}$

13 $\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}$

14 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x+\sin x}$

15 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin 2x}{x}$

دەربارەی چەمکەکان

16 نەخشەی f بەردەوامە. پاسادانی $\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$ دەکات. ئەگەر دەکرێت $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ لەم دووبارەدا بدۆزەوە.

أ ڕوونکردنەوەی نەخشەی f هاوجێبوونە لەگەڵ تەوەری y.

ب ڕوونکردنەوەی نەخشەی f هاوجێبوونە لەگەڵ خاڵی بنەڕەت.

لە پرسیاری 17 تاکو 22 یەکتربڕینەکان لەگەڵ دوو تەوەرەی پۆتانەکان و هاوجێبوونەکان و دەرکەنارەکان دیاریکە.

17 $f(x)=\frac{2+x}{1-x}$

18 $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$

19 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$

20 $f(x)=2-\frac{3}{x^2}$

21 $f(x)=3+\frac{2}{x}$

22 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

ڕاست یان هەڵە؟ لە دوو پرسیاری 23 و 24، دیارییکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە هۆیەکەی لێکبدەوە و ئەگەر هەڵەیە بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە

23 ئەگەر $f'(x)>0$ بەهای x هەرچەندبێت، ئەوا نەخشەی f بێسنوور زیاد دەکات

24 ئەگەر $f'(x)<0$ بەهای x هەرچەندبێت، ئەوا نەخشەی f بێسنوور کەمدەکات

بەشی 4

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

4-1 ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لە کەمبوونی نەخشەکان

1 ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لەکەمبونی هەر نەخشەیەك دیاریبکە.

أ $f(x)=x^3-x$ ب $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ ج $f(x)=x+\cos 2x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

4-2 بەهایەکانی کۆتایی

2 خشتەی گۆڕان بۆ هەریەك لەم نەخشانەی دێت دروستبکە و بەهایەکانی گەورەترین و بەهایەکانی بچوکترین خۆجێیەکەی بدۆزەوە.

أ $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$ ب $f(x)=\sin^2 x\left(-\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2}\right)$

4-2 خاڵەکانی وەرگەڕان

3 خاڵەکانی وەرگەڕان بۆ هەریەکە لەم نەخشانەی دێت دیاریبکە، وماوە کراوەکان کە نەخشەکە تێیدا قۆقزە یان قۆپاوە دیاریبکە.

أ $f(x)=2x^3-3x^2$ ب $f(x)=2\cos(\pi x)\quad(0\le x\le 2)$

4 بەهایەکانی هەریەکە لە a ، b ، c بدۆزەوە ئەگەر بزانیت نەخشەی $f(x)=ax^3+bx^2+c$ لە $x=-1$ خاڵی وەرگەڕانی هەیەو لێکەوتەکەی لەو خاڵەدا بریتییە لە $y=-3x-1$.

5 ئەگەر ڕستەکە ڕاستە ئەوا هۆیەکەی لێکبدەوە، و ئەگەر چەوتە بەدژە نمونە بیسەلمێنە.

أ خاڵی $(1,0)$ بریتییە لە خاڵی وەرگەڕانی نەخشەی $f(x)=(x-1)^4$.

ب ئەگەر $f''(c)>0$، ئەوا لاری لێکەوتی چەماوەی نەخشەکە موجەبە لە $x=c$.

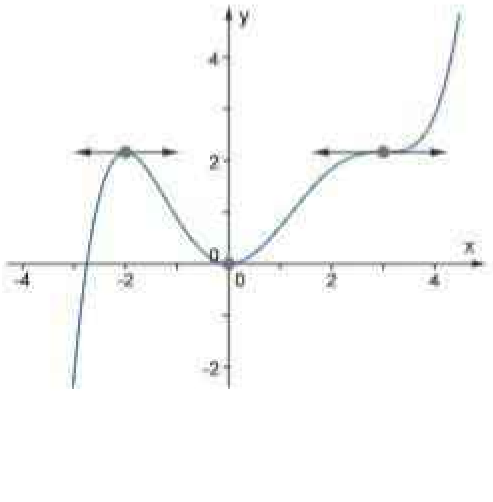
4-3 ئامانجەکان لە بێپایان

6 هەر ئامانجێك بدۆزەوە.

أ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-2x)^2}{2x^2+1}$ ب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x^2}-1+3x\right)$ ج $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x-1}{|x-2|}$

4-3 خشتەی گۆڕان

7 لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ دەردەکەوێت. خشتەی خوارەوە تەواوبکە بەدیاریکردنی نیشانەکانی هەر بەهایەك (موجەب ، سالب، سفر).



$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	
			$x=-2$
			$x=0$
			$x=3$
			$x=-3$
			$x=4$

4-4 وێنە ڕوونکردنەوەییەکانی نەخشە
Curve Sketching

ئامانجەکان

• نەخشە شیدەکاتەوە و ڕوونکردنەوەکەی دەکێشێت.

زاراوەکان
Vocabulary

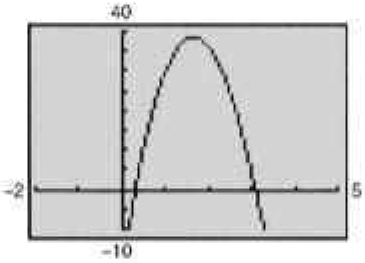
دەرکەناری لار
Slant Asymptote

شیکردنەوەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان

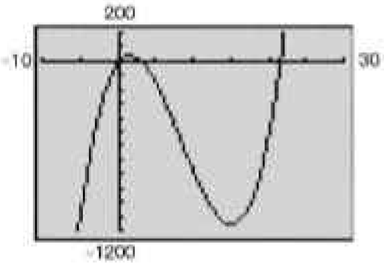
ناکرێت گرنگی بەکارهێنانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان لەبیرکاریدا فەرامۆش بکرێت، ئەندازەی شیکردنەوە کە زانای فەرەنسی دیکارت دایهێنا، بۆ پێشخستن و هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری لە ناوەڕاستی سەدەی حەڤدەم سەرەتای ئەم پێشکەوتنە بوو، و لەسەر ئەم کارەش زانای بیرکاری فەرەنسی لاگرانج ئەمەی بەمشێوەیە دەربڕی «کاتێك جەبرو ئەندازە هەریەکەیان لە خولگەی تایبەتی خۆی کاریان دەکرد، پێشکەوتنی هەریەکەیان لەسەرخۆ بوو و جێبەجێکردنەکانیان کەمبوو. بەیەك گەیشتنیان بووە هۆی تەواوکەرو بەهێزکردنی هەریەکەیان بۆ ئەوی تریان».

تاکو ئێستا زۆر لە چەمکەکان فێربوویت کە لە شیکردنەوەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان یارمەتیتدەدات.

• یەکتربڕینەکان لەگەڵ دوو تەوەرەی پۆتانەکان.
• هاوجێبوون.
• بوار و مەودا (لە هەندێ لە بارەکاندا)
• بەردەوامی.
• دەرکەنارە ستونییەکان.
• داتاشراو.
• بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی.
• خاڵەکانی وەرگەڕان.
• دەرکەنارەکان.
• ئامانجەکان لە بێپایان.



کاتێك وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە بەدەست «یان بەبژمێری ڕوونکردنەوەیی» دەکێشێت، ئەوە بزانە کە وێنەی بەشێك لە چەماوەکە دەکێشێت، و ناتوانیت وێنەکە بەتەواوی بکێشێت بڕیاردانت بۆ دیاریکردنی ئەو بەشەی لە ڕوونکردنەوەکە کە دەکێشێت بڕیارێکی گرنگە. سەیری هەردوو وێنەی بەرامبەربکە، بەڕای تۆ کامیان بەشێوەیەکی باشتر نەخشەی $f(x) = x^3 - 25x^2 + 74x - 2$ دەنوێنێت؟



ئاشکرایە کە وێنەی دووەم نەخشەکە بەشێوەیەکی باشتر دەنوێنێت، بەڵام ئایا وێنەی سێیەم هەیە کە بەشە گرنگەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دەربخات؟ بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارە پێویستت بە بەکارهێنانی جیاکاری دەبێت بۆ ئەوەی داتاشراوی یەکەم و داتاشراوی دووەمی نەخشەکە لێکبدەیتەوە.

ئەمانەی دێت چەند ڕێنماییەکە، بۆ ئەوەی ئەو بەشەی لە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەوێنەکەت دەردەکەوێت دیاریکردنێکی باش بێت، پێویستە بەشەکە ئەوانەی لەم ڕێنماییانە هاتووە دەربخات.

ڕێنماییەکانی شیکردنەوەی ڕوونکردنەوەی نەخشەیەک

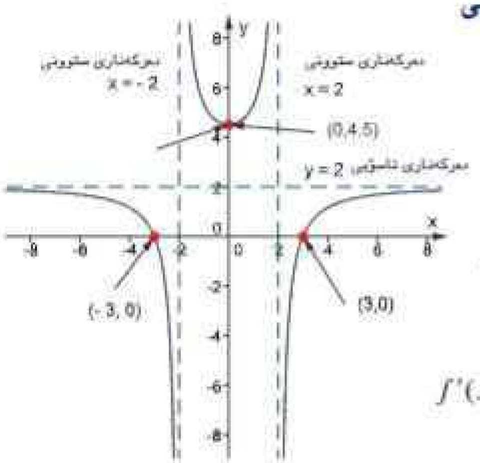
1. بوار و مەودای نەخشەکە دیاریبکە.

2. یەکتربڕینەکانی نەخشەکە لەگەڵ هەردوو تەوەرەی پۆتانەکان و نەرکەنارەکان و هاوجێبوون دیاریبکە.

3. بەهایەکانی x کە $f'(x)$ و $f''(x)$ دەکاتە 0 یان بوونی نییە دیاریبکە، ئەم ئەنجامانە بۆ دیاریکردنی بەهایەکانی کۆتایی خۆجێی و خاڵەکانی وەرگەڕانی نەخشەکە بەکاربهێنە.

نموونە 1

وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەی ڕێژەیی



ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\dfrac{2\left(x^2-9\right)}{x^2-4}$ بکێشە.

شیکار

داتاشراوی یەکەم:

$$f'(x)=\frac{2(2x)(x^2-4)-2(x^2-9)(2x)}{(x^2-4)^2}=\frac{20x}{(x^2-4)^2}$$

داتاشراوی دووەم:

$$f'(x)=\left[\frac{20x}{(x^2-4)^2}\right]'=\frac{20(x^2-4)^2-20x\times2(2x)(x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$

$$=\frac{20x^2-80-80x^2}{(x^2-4)^3}=\frac{-20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

یەکتربڕینە ئاسۆییەکان: $f(x)=0$ کاتێک $x^2-9=0$ کە $x=\pm3$.

دوو خاڵی یەکتربڕینی ئاسۆییەکان: $(-3, 0)$ و $(3, 0)$.

یەکتربڕینە ستونییەکان: یەک خاڵی ستوونی هەیە: $\left(0, f(0)\right)=\left(0, \frac{9}{2}\right)$

نەرکەنارە ستونییەکان: بۆ دۆزینەوەی نەرکەنارە ستونیەکان $x^2-4=0$ شیکار بکە و $x=\pm2$ دەست دەکەوێت. دوو نەرکەنارە ستونیەکە بریتییە لە $x=-2$ و $x=2$

نەرکەنارە ئاسۆییەکان: لەبەرئەوەی سەرە ژێرە هەمان پلەیان هەیە. کەواتە نەرکەناری ئاسۆیی بریتییە لە $y=\frac{2}{1}=2$.

بەهایە شلۆقەکان: تەنها یەک بەها هەیە کەداتاشراوەکە یەکسان دەکات بە 0. ئەویش $x=0$

خاڵەکانی وەرگەڕان: نییە. چونکە $f''(x)\neq0$ بۆ هەر بەهایەکی x. لە بواری نەخشەکە.

بوارەکەی: هەموو ژمارە ڕاستییەکان جگە لەو بەهایەی کە ژێرە دەکاتە 0. ئەویش $x=-2$ و $x=2$.

هاوجێبوون: هاوجێیە لەگەڵ تەوەری y لەبەرئەوەی نەخشەکە جووتە.

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2-9}{(-x)^2-4}=\frac{2(x^2-9)}{x^2-4}=f(x)$$

ماوەکانی تاقیکردنەوە و بەهایەکانی: $]-\infty, -2[$ ، -2 ، $]-2, 0[$ ، 0 ، $]0, 2[$ ، 2 ، $]2, +\infty[$. ئەم خشتەی خوارەوە چۆنیەتی بەکارهێنانی ماوەکان و بەهایەکانی تاقیکردنەوە نیشاندەدات بۆ دیاریکردنی سیفەتەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکەی سەرەوە.

خشتەی داتاشراوەی یەکەم

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	پێناسە نەکراوە	$-$	0	$+$	پێناسە نەکراوە	$+$
$f(x)$	↘	پێناسە نەکراوە	↘	$\frac{9}{2}$	↗	پێناسە نەکراوە	↗

خشتەی داتاشراوی دووەم:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	پێناسە نەکراوە	$+$	0	$+$	پێناسە نەکراوە	$-$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$	$\frac{9}{2}$	$\cup$		$\cap$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سیفەتەکانی چەماوەکە
$-\infty < x < -2$		$-$	$-$	ڕوو لەکەمبوونە، قۆقزە
$x = -2$	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	نەرکەناری ستونی
$-2 < x < 0$		$-$	$+$	ڕوو لەکەمبوونە، قۆپاوە
$x = 0$	4.5	0	$+$	بەهای بچوکترین خۆجێی
$0 < x < 2$		$+$	$+$	ڕوو لەزیادبوونە، قوپاو
$x = 2$	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	نەرکەناری ستونی
$2 < x < +\infty$		$+$	$-$	ڕوو لە زیادبوونە: قۆقزە

خاڵی جاودێری

1. وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{3(x-2)}{x^2-1}$ بکێشە.

نمونە 2 وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەیەکی ڕێژەیی

$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}$ بدۆزەوە.

شیکار

داتاشراوی یەکەم: $f'(x)=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

یەکتربڕینە ئاسۆییەکان: نییە

نەرکەنارە ستونییەکان: $x = 2$

بەهایە شلۆقەکان: $x = 0$ و $x = 4$

داتاشراوی دووەم: $f''(x)=\frac{8}{(x-2)^3}$

یەکتربڕینە ستوونییەکان: $(0, -2)$

نەرکەنارە ئاسۆییەکان: نییە

خاڵەکانی وەرگەڕان: نییە

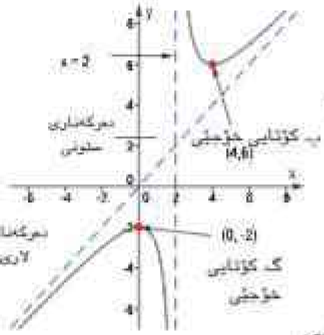
بوارەکەی: هەموو ژمارە ڕاستەییەکانە جگە لە $x = 2$.

ماوەکانی تاقیکردنەوەو بەهایەکانی $]-\infty, 0[$ ، 0 ، $]0, 2[$ ، 2 ، $]2, 4[$ ، 4 ، $]4, +\infty[$

ئەم نەخشەیە چۆنیەتی بەکارهێنانی ماوەکان و بەهایەکانی تاقیکردنەوە نیشاندەدات بۆ دیاریکردنی سیفەتەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سیفەتەکانی چەماوەکە
$-\infty < x < 0$		$+$	$-$	ڕوو لەزیادبوونە، قۆقزە
$x = 0$	-2	0	$-$	بەهای گەورەترین خۆجێی
$0 < x < 2$		$-$	$-$	ڕوو لەکەمبوونە، قۆقزە
$x = 2$	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	پێناسەنەکراوە	نەرکەناری ستوونی
$2 < x < 4$		$-$	$+$	ڕوو لەکەمبوونە، قۆپاوە
$x = 4$	6	0	$+$	بەهای بچوکترین خۆجێی
$4 < x < +\infty$		$+$	$+$	ڕوو لەزیادبوونە، قۆپاوە

خاڵی جاوتێری **2.** وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{3x^2-5x+3}{3x-2}$ بکێشە.



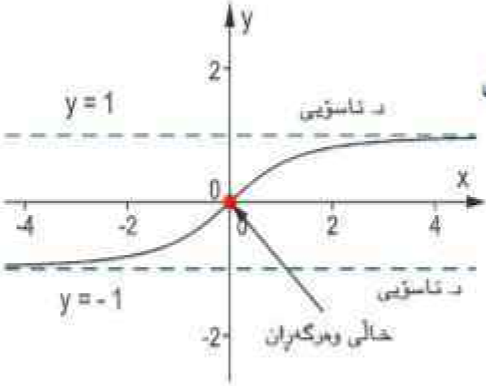
دەرکەنارە لارەکان

لە نموونەی 2 چەماوەی نەخشەکە دەرکەناری ئاسۆیی نییە، بەڵام دەرکەناری لاری هەیە. ڕوونکردنەوەی نەخشە ڕێژییەکە (کە لەنێوان سەرەو ژێرەکەی هاوکۆڵکەی هاوبەش نییە، پلەی ژێرەکەی لە 1 کەمتر نییە) دەرکەناری لاری هەیە ئەگەر پلەی سەرەکەی لە پلەی ژێرەکەی بە 1 زیاتربێت، بۆ دۆزینەوەی دەرکەنارە لارەکە دابەشی درێژ بەکاربهێنە بۆ نووسینی هاوکێشەی نەخشەکە وەك سەرجەمی ڕاندراری لە پلە یەك لەگەڵ نەخشەیەکی تری ڕێژەیی کە پلەی سەرەکەی لە پلەی ژێرەکەی کەمتربێت.

$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}$ هاوکێشەی نەخشەکە بنووسە

$f(x)=x+\frac{4}{x-2}$ دوای دابەشکردنەکە نەخشەکە بنووسەوە

ڕوونکردنەوەی بەرامبەر پوختەی پێدراوەکانی خشتەی سەرەوە و دەرکەنارە لارەکەی $y=x$



نموونە 3 وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەی ڕەگی

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ بکێشە.

شیکار

$$f''(x)=-\frac{6x}{\left(x^2+2\right)^{\frac{5}{2}}} \text{ و } f'(x)=\frac{2}{\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ڕوونکردنەوەکە یەك یەکتربڕینی لە خاڵی(0,0) دا هەیە. دەرکەناری ستونی نییە بەڵام دوو دەرکەناری ئاسۆیی هەیە $y=1, y=-1$ نەخشەکە بەهایەکانی شلۆقی نییە. لەوانەیە خاڵێکی وەرگەڕانی لە $x=0$ دا هەبێت بواری نەخشەکە بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان ڕوونکردنەوەکەی هاوجێبوونە لەگەڵ خاڵی بنەڕەت.

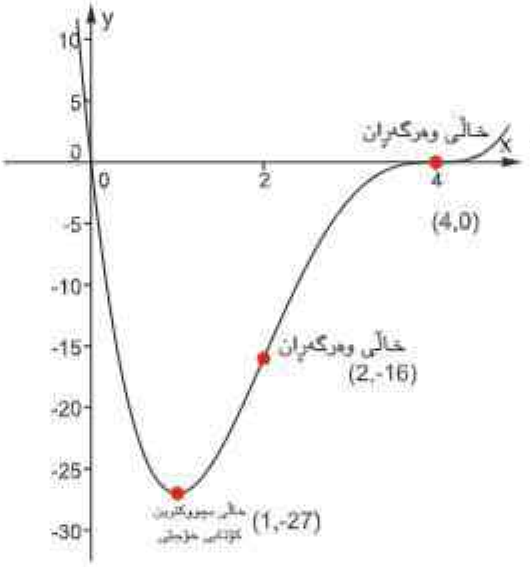
x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	سیفەتی ڕوونکردنەوە
$-\infty < x < 0$		+	+	ڕوو لەزیادبوونە، قۆپاوە
$x=0$	0		0	خاڵی وەرگەڕان
$0 < x < +\infty$		+	−	ڕوو لەزیادبوونە، قۆقزە

خاڵی جاوتێری **3.** وێنەی ڕوونکردنەوەی $f(x)=\frac{-2x}{\sqrt{x^2+2}}$ بکێشە.

نموونـــه 4 کێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشە زۆر ڕادەدارەکان

ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)= x\,(x-4)^3$ بکێشە.

شیکار



داتاشراوی یەکەم: $f'(x)=4(x-1)(x-4)^2$

داتاشراوی دووەم: $f''(x)=12(x-4)(x-2)$

یەکتربڕینە ئاسۆییەکان: $(0,0)$ و $(4,0)$

یەکتربڕینە ستونییەکان: $(0,0)$

دەرکەنارە ستونییەکان: نییە.

دەرکەنارە ئاسۆییەکان: نییە.

سیفەتەکەی لە ±∞ : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

دوو بەها شلۆقەکان : $x=1$ و $x=4$

خاڵی وەرگەڕان: $x=2$ و $x=4$

بوارەکەی: کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان.

ماوەکانی گۆڕان بەهاکەی: $]-\infty,1[$ ، 1 ، $]1,2[$ ، 2 ، $]2,4[$ ، 4 ، $]4,+\infty[$

سیفەتی ڕوونکردنەوە	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	x
ڕوو لە کەمبوون، قۆپاوە	+	−		$-\infty < x < 1$
بەهای بچوکترین خۆجێی	+	0	−27	$x=1$
ڕوو لە زیادبوون، قۆپاوە	+	+		$1 < x < 2$
خاڵی وەرگەڕان	0		−16	$x=2$
ڕوو لە زیادبوون، قۆقزە	−	+		$2 < x < 4$
خاڵی وەرگەڕان	0		0	$x=4$
ڕوو لە زیادبوون، قۆپاو	+	+		$4 < x < +\infty$

نەخشەی ڕادەداری نموونەی 4 بەهای بچوکترین خۆجێی هەیە و بەهای گەورەترین خۆجێی نییە. بەشێوەیەکی گشتی، بۆ نەخشەیەکی ڕادەداری پلە n دەکرێت بەلایەنی زۆر $n-1$ بەهای کۆتایی خۆجێی و بەلایەنی زۆر $n-2$ خاڵی وەرگەڕانی هەبێت. سەرەڕای ئەمەش نەخشە ڕادەدارە پلە جووتەکان بەلایەنی کەم بەهای کۆتایی خۆجێیان هەیە.

ئەوەی لەپۆلی دەیەم لە نەخشە ڕادەدارەکان خوێندوتە بەبیرخۆت بهێنەوە، کە سیفەتی نەخشە لە بێپایان بە پلەی نەخشەکە و نیشانەی هاوکۆڵکەی سەرەکی دیاریدەکرێت، چەماوەی نەخشەی نموونە 4 بەنزیك بوونەوە لە ∞+ بێسنوور زیاددەکات چونکە هاوکۆڵکە سەرەکییەکەی موجەبە. و بەنزیك بوونەوە لە ∞− بێسنوور زیاددەکات. چونکە پلەی نەخشەکە جووتە.

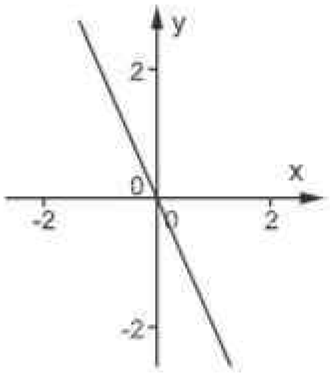
خاڵی چاوێری **4.** وێنەی ڕوونکردنەوەی $f(x)=5x^3-15x$ بکێشە.

GRADE12-2011-CHAPTER 4 3/25/18 11:35 AM Page 31

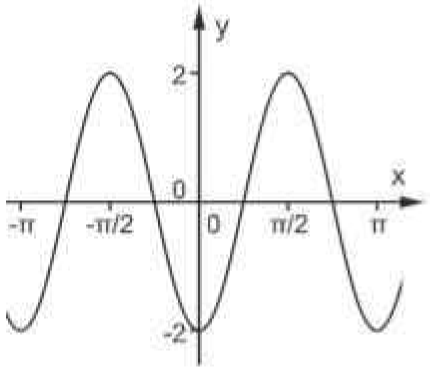
4-4 ڕاهێنان

ڕوونکردنەوەی داتاشراوی هەر نەخشەیەک دیاریبکە.

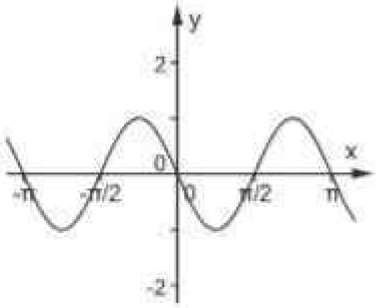
1 نەخشە



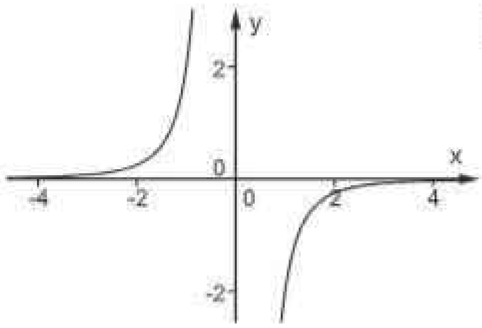
أ داتاشراوەکەی



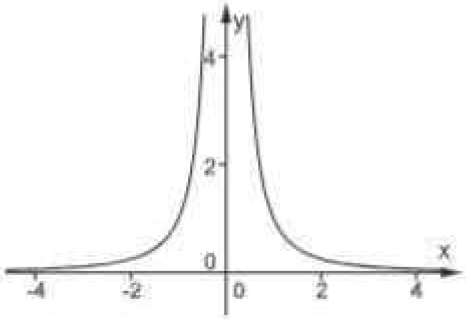
2



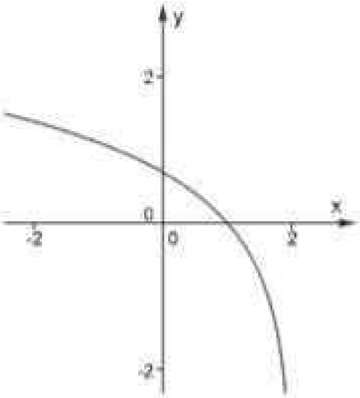
ب



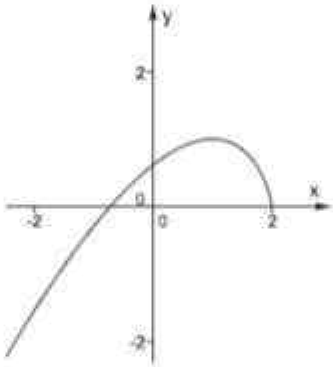
3



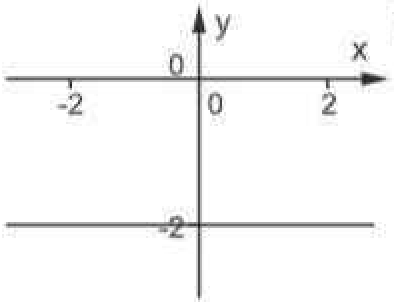
ج



4



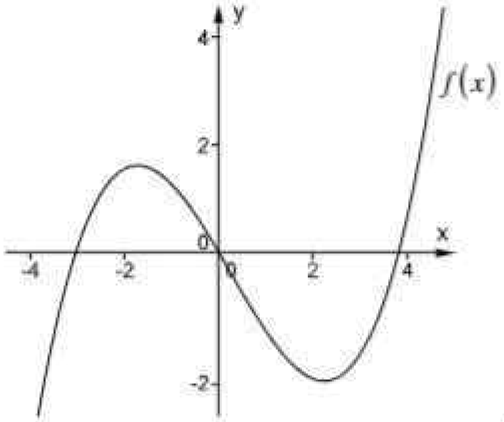
د



5 **خوێندنەوەی ڕوونکردنەوەکان** ئەم وێنەی خوارەوە ڕوونکردنەوەی نەخشەی f دەردەخات.

أ کام لە بەهایەکانی x وادەکات بەهای $f'(x)$ بکاتە 0؟ بکاتە موجەب؟ بکاتە سالب؟

ب کام لە بەهایەکانی x وادەکات بەهای $f''(x)$ بکاتە 0؟ بکاتە موجەب؟ بکاتە سالب؟



ج لە کام ماوەدا $f'(x)$ ڕوو لەزیادبوونە؟

د کام بەهای x وادەکات $f'(x)$ بەهای بچووکترینی هەبێت؟ بەراورد لە نێوان تێکڕای گۆڕانی f لەو بەهایەدا لەگەڵ تێکڕای گۆڕانی f لە بەهایەکانی تری x بکە. وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

لە ڕاهێنانی 6 تاکو 12 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

6 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$

7 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-9}$

8 $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

9 $f(x)=\frac{x^2-6x+12}{x-4}$

10 $f(x)=2-x-x^3$

11 $f(x)=3x^4+4x^3$

12 $f(x)=|2x-3|$

13 ئایا ڕوونکردنەوەی نەخشەکە یەکێك لە دەرکەنارە ستونییەکانی دەبڕێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە

14 ئایا ڕوونکردنەوەی نەخشەکە یەکێك لە دەرکەنارە ئاسۆییەکانی دەبڕێت؟

15 هاوکێشەی نەخشەی $f(x)=\frac{6-2x}{x-3}$ وا ئاماژە دەکات یەك دەرکەناری ستونی هەیە. هاوکێشەکەی بنووسە؟ وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشە بکێشە و بیسەلمێنە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە دەرکەناری ستونی نییە چۆن ئەمە لێکدەدەیتەوە؟

بیربکەوە لە هەردوو پرسیاری 16 و 17 ئەو نەخشەی ئەم مەرجانەی خوارەوەی تێدا بەدیدەکرێت بنووسە

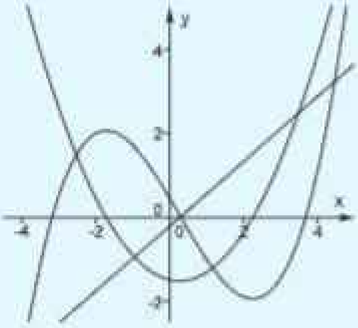
16 نەخشەیەك دەرکەناری ستونی کە هاوکێشەکەی $x=5$ و دەرکەناری ئاسۆیی هاوکێشەکەی $y=0$ هەبێت.

17 نەخشەیەك دەرکەناری ستونی $x=5$ و دەرکەناری لار کە هاوکێشەکەی $y=3x+2$ هەبێت.

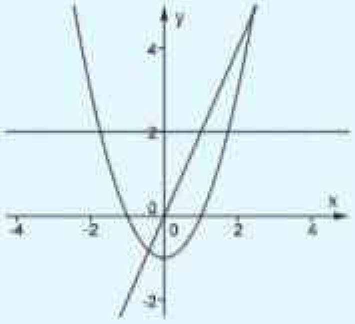
دەربارەی چەمکەکان

لە دوو ڕاهێنانی 18 و 19 لە وێنە ڕوونکردنەوەکان نەخشەی $f(x)$ و داتاشراوی یەکەم $f'(x)$ و داتاشراوی دووەم $f''(x)$ دەردەکەوێت. ڕوونکردنەوەکانی نەخشەکەو داتاشراوی یەکەم و داتاشراوی دووەم جیابکەوە.

18

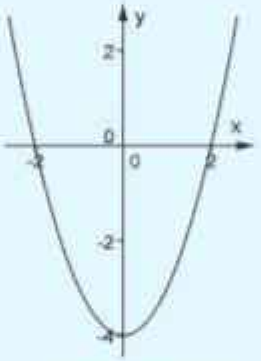


19

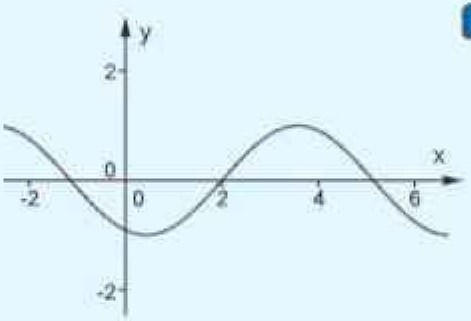


لە دوو ڕاهێنانی 20 و 21 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ بەهۆی ڕوونکردنەوەی داتاشراوی یەکەم $f'(x)$ بکێشە

20

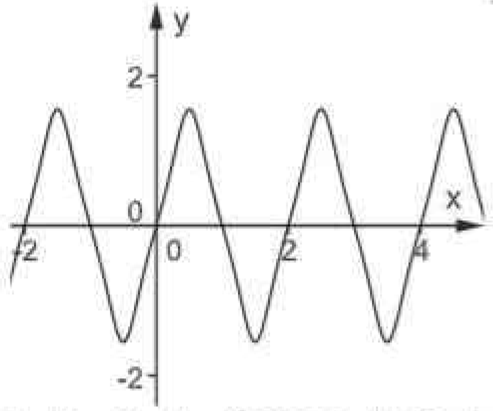


21



22 وا دابنێ کە $f'(x)<0$ لەماوەی $]2,8[$. ڕوونبکەوە بۆچی $f(5)<f(3)$؟

23 **خوێندنەوەی ڕوونکردنەوەکان** ڕوونکردنەوەی خوارەوە بریتییە لە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \tan(\sin \pi x)$.



أ ئایا وێنە ڕوونکردنەوەکە هاوجێبوونە؟ ئەگەر وایە جۆری هاوجێبوونەکە دیاریبکە.

ب ئایا نەخشەکە دووبارەبوونەوەیە؟ ئەگەر وایە ماوەی دووبارەبوونەوەکەی دیاریبکە.

ج بەهایەکانی کۆتایی بۆ نەخشەکە لەماوەی $]-1, 1[$ دیاریبکە.

د ئایا نەخشەکە خاڵی وەرگەڕانی لەماوەی $]0, 1[$ هەیە. ژمارەیان چەندە؟

5–4 گەڕان بەدوای بەها کۆتاییەکاندا
Optimization

ئامانجەکان

- پرسیارەکانی دیاریکردنی بەهایەکانی بچوکترین یان بەهایەکانی گەورەترین شیکاردەکات.

پرسیاری بەهایەکانی بچوکترین و بەهایەکانی گەورەترین

شیکارکردنی پرسیارەکانی گەورەترین کۆتایی و بچوکترین کۆتایی، بەیەکێك لە گرنگترین جێبەجێکردنەکانی هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری دادەنرێت. بێگومان گوێبیستی دەستەواژەکانی وەك گەورەترین قازانج یان کەمترین تێچوون و گەلێکیتر و زۆریتر گوێبیست بوویت. پێش ئەوەی بەفراوانی بچینە ناو ئەو بابەتە لەسەر ئەو نمونە دەوەستین.

نمونــــە 1 دیاریکردنی گەورەترین قەبارەی قوتویەك

ئەندازیارێك لەیەکێك لە کارگەکان دیزاینی قوتویەکی سەرکراوەی بنکە چوارگۆشە دەکات بۆ ئەوەی ڕووبەرەکەی $675cm^2$ بێت، وەك لەوێنەی لای ڕاست دەردەکەوێت. پێوانەکانی دووریيەکان بدۆزەوە بۆ ئەوەی قوتوەکە گەورەترین قەبارەی هەبێت؟

شیکار

لەبەرئەوەی بنکەی قوتوەکە چوارگۆشەیە قەبارەکەی دەبێتە $V = x^2h$ بەو هاوکێشە دەوترێت هاوکێشەی سەرەکی پرسیارەکە، چونکە پەیوەندییەکمان پێدەدات، بۆ هەژمارکردنی بەها گەورەترینەکەی، لەلایەکی تر ڕووبەری قوتوەکە دەکاتە سەرجەمی ڕووبەری بنکەکەی لەگەڵ چوار تەنیشتە ڕووبەرەکانی واتا $S = x^2 + 4xh$ ، بەڵام ڕووبەری قوتوەکە پێویستە بکاتە $675cm^2$ ئەوەش پەیوەندییەك لەنێوان لایەکی بنکەکەی x و بەرزییەکەی h پێکدەهێنێت.

$$S = x^2 + 4xh = 675$$

لەوەوە دەردەچێت کە $h = \frac{675-x^2}{4x}$ و $V = x^2\left(\frac{675-x^2}{4x}\right) = \frac{675}{4}x - \frac{x^3}{4}$.

پێش دیاریکردنی بەهایەکانی x کە گەورەترین قەبارە دابین دەکات، بواری بەسوود دیاریبکە، واتا ئەو بەهایانەی x دەتوانێت وەریبگرێت. دەزانیت بەهای x سالب نییە و ڕووبەری بنکەکەی x^2 لە 675 تێپەڕناکات، واتا $0 < x \le \sqrt{675}$.

بۆ ئەوەی ئەندازیارەکە گەورەترین قەبارەی دەستبکەوێت دەبێت بەهایەکانی x دیاریبکات کەوادەکات ئەخشەی $V(x) = \frac{675x-x^3}{4}$ گەورەترین بەها وەربگرێت، بۆ ئەمەش دەستبکە بە دۆزینەوەی داتاشراوەکە $V'(x)$ و شیکارکردنی هاوکێشەی $V'(x) = 0$.

$$V'(x) = \frac{675-3x^2}{4} = 0$$

$$3x^2 = 675$$

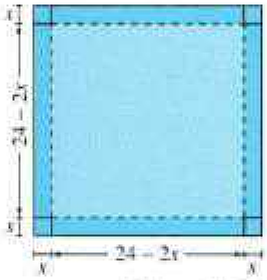
$$x^2 = 225$$

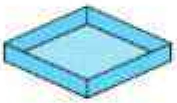
$x = -15$ یان $x = 15$.

بەهای دوو شلۆقەکە بریتیین لە $x = -15$ و $x = 15$ پێویستە بەهای $x = -15$ فەرامۆشبکەیت چونکە x سالب نییە. بۆ دڵنیابوون لەبەهای شلۆقی $x = 15$ دەگەڕێتەوە بۆ بەهای گەورەترینی ئەخشەکە، تاقیکردنەوەی داتاشراوەی دووەم بەکاربهێنە، داتاشراوەی دووەمی ئەخشەکە دەکاتە $V''(x) = -\frac{3}{2}x$ و بەهایەکەی لە $x = 15$ دەکاتە $V''(15) = -\frac{3}{2}(15) = -\frac{45}{2} < 0$ کەواتە ئەو خاڵە شلۆقە بۆ بەهای گەورەترین خۆجێی ئەخشەکە دەگەڕێتەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 4 3/25/18 11:35 AM Page 34

ئەندازیارەکە بۆ لایەکی بنکەی قوتوەکەی 15 cm و بۆ بەرزییەکەی $h = \frac{675-15^2}{4\times15} = 7.5$
هەڵدەبژێرێت، گەورەترین قەبارە دەکاتە $V_{max} = 15\times15\times7.5 = 1687.5cm^3$





خاڵی چاوتێری

1. ئەندازیارێك لەیەك لە کارگەکان دیزاین بۆ قوتویەکی بێ سەر پۆشی بنکە چوارگۆشە دادەنێت، بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێك درێژی لایەکی 24 cm بوویە بڕینی 4 چوارگۆشە لە گۆشەکانیەوە کە x درێژی هەر لایەکیانە، پاشان نوشتاندنەوەی لایەکانی، ئەندازیارەکە پێویستە چ بەهایەك بۆ x هەڵبژێرێت بۆ ئەوەی قوتوەکە گەورەترین قەبارەی هەبێت.

بە گەڕانەوە بۆ نمونە 1 پێش دەست بەشیکارکردن پێویستە ئەوە بزانیت زۆر قوتو هەیە رووبەرەکەی بکاتە $675cm^2$، دەستبکە بە پرسیارکردن لەشێوەی قوتوەکە کە گەورەترین قەبارەی هەیە؟ ئایا بەرزە یان نزمە یان لەخشتەك نزیکە.

لەوانەیە چاکتربێت لەسەرەتاوە قەبارەی ژمارەیەك لە قوتو هەژماربکەیت، هەروەك لەوێنەکان دەردەکەون بۆ ئەوەی بیرۆکەیەکی نزیکت لەشیکارەکە لا دروست بێت. ئەوە بزانە کە ناتوانیت دەست بەشیکاری پرسیارەکە بکەیت ئەگەر نەزانیت داواکراوەکە چییە؟

ئەمانەی خوارەوە ئەوهەنگاوە گشتیانەیە کەپێویستە پێی هەڵستیت بۆ شیکارکردنی ئەم جۆرە پرسیارانە.

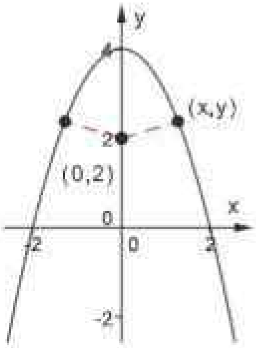
بۆ شیکارکردنی پرسیارێك لە پرسیارەکانی بەها کۆتاییەکان

1. هەموو ئەو بەهایانەی کەدراوە و ئەو بەهایانەی داواکراوە دیاریبکە وێنەکە بکێشە ئەگەر توانیت.
2. هاوکێشەی سەرەکی بۆ ئەو بڕەی کە پێویستە هەژماری بەهای کۆتایی بکەیت بنووسە.
3. هاوکێشەی یەکەم بنووسەوە بەمەرجێك هاوکێشە نوێیەکە تەنها یەك گۆڕاوی ئازاد لەخۆ بگرێت، لەوانەیە پێویستیت بە هاوکێشە لاوەکییەکان هەبێت کە گۆڕاوە ئازادەکانی هاوکێشەی سەرەکی بەیەکەوە دەبەستێتەوە
4. ماوەی بەسوود بۆ هاوکێشەی سەرەکی دیاریبکە، واتا بەهای ئەو گۆڕاوانەی وا دەکات پرسیارەکە مانای هەبێت دیاریبکە.
5. بەهای گەورەترین یان بەهای بچوکترین داواکراو بە بەکارهێنانی تەکنیکەکانی هەژمارکردنی جیاکاری کە لە وانەکانی پێشتر فێربیوویت دیاریبکە.

نمونە 2 دۆزینەوەی کورتترین دووری

ئەو خاڵانەی سەر برگەی هاوتای $f(x) = 4 - x^2$ بدۆزەوە کە نزیکترین خاڵن لە $(0, 2)$.

شیکار



وێنەی بەرامبەر ئەوە نیشاندەدات کە دوو خاڵ لەسەر برگە هاوتایەکە هەیە کە کەمترین دووریان لەخاڵی $(0,2)$هەبێت دەستپێکە بە دۆزینەوەی دووری نێوان خاڵی $(0,2)$و خاڵی $(x, f(x))$

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+\left(4-x^2-2\right)^2}=\sqrt{x^4-3x^2+4}$$

لەبەرئەوەی d کەمترین بەها وەردەگرێت کاتێك برەکەی ناو ڕەگەکە کەمترین بەهای هەبێت، بەها شلۆقەکانی نەخشەکە بدۆزەوە

$g(x)=x^4-3x^2+4$ داتاشراوی نەخشەی g بدۆزەوە، پاشان هاوکێشەی $g'(x)=0$ شیکاربکە.

$$g'(x)=4x^3-6x=2x\left(2x^2-3\right)$$

$$2x\left(2x^2-3\right)=0$$

$$x=-\sqrt{\frac{3}{2}},\ x=\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ x=0$$

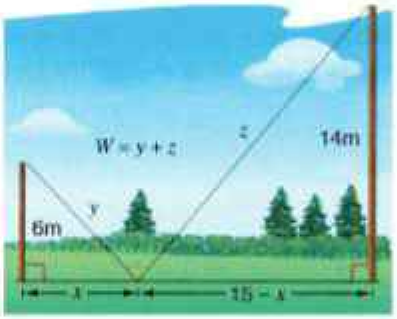
x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

خشتەکە ئەوە ڕووندەکاتەوە کە هەر دوو خاڵی شلۆقی $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$و $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ هەریەکەیان بەهای بچوکترین بۆ نەخشەکە دیاریدەکەن، بۆ دیاریکردنی ئەو خاڵانەی کە دەبنە شیکار بۆ پرسیارەکە، دووری نێوان خاڵی $(0,2)$ و هەریەك لە خاڵەکانی $(0, f(0))$و $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ و $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ بدۆزەوە، دەبینیت کە هەردوو خاڵی $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$و $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)$ بریتیین لە شیکارەکە، و دووری نێوان هەریەکەیان و خاڵی $(0,2)$ یەکسانە بە 1.45 بەنزیکەیی.

خاڵی چاودێری

2. ئەو خاڵانەی سەر برگەی هاوتای $f(x)=x^2-2$ بدۆزەوە کە نزیکترین خاڵن لە $(0,-1)$؟

نمونــــه 3 دۆزینەوەی کورترین درێژی



دوو ستون بەرزییەکانیان 14 m و 6 m دووری نێوانیان 15 m، لە ئەندازیارێك داواکرا هەریەك لە دوو ستونەکە بەهۆی تەلێك ببەستێتەوە بە خاڵێك کە دەکەوێتە نێوانیانەوە هەروەك لەم وێنەیە دەردەکەوێت، لەکام خاڵی نێوان دوو ستونەکە پێویستە دووسەری تەلەکە بەیەکتر ببەستێتەوە بۆ ئەوەی سەرجەمی دووجای درێژی هەردووکیان کەمترین بێت؟

شیکار درێژی تەلەکە بە W و دووری نێوان خاڵی بەستنەوە و ستوونە کورتەکە بە x دابنێ، ئەگەر سەیری وێنەکە بکەیت، دەبینیت کە $W = y + z$ ، لەم پرسیارەدا لە جیاتی ئەوەی یەک لە گۆڕاوەکان y یان z بەپێی ئەویتریان دەربڕێت، لەوانەیە گونجاو بێت هەردووکیان بەپێی x هەژماربکەین. $x^2 + 6^2 = y^2$ و $(15 - x)^2 + 14^2 = z^2$ $y = \sqrt{x^2 + 36}$ $z = \sqrt{x^2 - 30x + 421}$

هەروەها $W = y + z = \sqrt{x^2 + 36} + \sqrt{x^2 - 30x + 421}$ لەم پرسیارەدا ماوەی بەسوود بریتییە لە $0 \le x \le 15$.

داتاشراوی $W(x)$ بدۆزەوە: $W'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+36}} + \frac{x-15}{\sqrt{x^2-30x+421}}$

هاوکێشەی $W'(x) = 0$ شیکاربکە.

$$W'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+36}} + \frac{x-15}{\sqrt{x^2-30x+421}} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 30x + 421} = (15 - x)\sqrt{x^2 + 36}$$

$$x^2\left(x^2 - 30x + 421\right) = (15 - x)^2\left(x^2 + 36\right)$$

$$x^4 - 30x^3 + 421x^2 = x^4 - 30x^3 + 261x^2 - 1080x + 8100$$

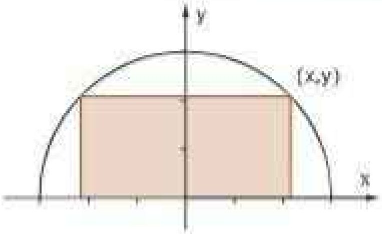
$$160x^2 + 1080x - 8100 = 0$$

$$20(8x^2 + 54x - 405) = 0$$

$$20(2x - 9)(4x + 45) = 0$$

$$x = -11.25 \qquad x = 4.5$$

شیکاری پەسەند بریتییە لە $x = 4.5$ پێویستە خاڵی بەستنەوە لە دووری 4.5 m لە ستوونە کورتەکە جێگیر بکرێت.



خاڵی چاودێری 3. درێژی و پانی گەورەترین لاکێشە بدۆزەوە کە دەتوانێت لەناو نیوە بازنەیەکدا بکێشێت نیوەتیرەکەی r بێت.

نموونە 4 دۆزینەوەی کەمترین ڕووبەر

دیزاینەرێکی چاپکردن کار لەسەر دیزاینی لاپەڕەیەکی لاکێشەیی دەکات، ئەو ڕووبەرەی کە تایبەتکراوە بۆ چاپکردنەکە بریتییە لە 150cm^2 و پانی پەراوێزەکانی سەرەوە و خوارەوەی 3 cm و پەراوێزەکانی لای ڕاست ولای چەپی 2cm، پێویستە چەند لە درێژی و پانی لاپەڕەکە هەڵبژێرێت بۆ ئەوەی بەکاربردنی کاغەزەکە کەمترین بێت؟

شیکار

درێژی ناوچەی تایبەتکراو بە چاپکردنەکە بە x وپانییەکەی بە y و ڕووبەری لاپەڕەکە بە A هێمابکە. $A = (x+6)(y+4)$ ، x و y بە پەیوەندی $xy = 150$ بەیەکەوە دەبەسترێنەوە. ئەمەش ڕێدەدات بە نووسینی A وەک نەخشەیەک بەپێی x

$$A(x) = (x+6)\left(\frac{150}{x} + 4\right) = 174 + 4x + \frac{900}{x}$$

لەم پرسیارەدا ماوە بەسوودەکە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییە موجەبەکان. داتاشراوی نەخشەی $A(x)$ بریتییە لە

$$A'(x) = 4 - \frac{900}{x^2}$$

و بەهایە شلۆقەکانی بریتیین لە ڕەگەکانی هاوکێشەی$A'(x) = 4 - \frac{900}{x^2} = 0$ ئەم هاوکێشە دوو ڕەگی هەیە کە بریتیین لە ± 15 بەنزیکەیی ڕەگە سالبەکە هیچ مانایەکی نییە. کەواتە درێژی لاپەڕەکە و پانییەکەی بەنزیکەیی بریتیین لە 21 cm و $\frac{150}{15} + 4 = 14$ یەك لەدوای یەك.

خاڵی جاوێدی

4. یەکێك کار لەسەر دیزاینی لاپەڕەیەکی لاکێشەیی دەکات ئەو ڕووبەرەی کە تایبەتکراوە بۆ چاپکردنەکە بریتییە لە$256cm^2$ و پانی هەریەکە لەچوار پەراوێزەکەی 3 cm دەبێت. پێویستە چەند لە درێژی و پانی لاپەڕەکە هەڵبژێرێت بۆ ئەوەی بەکاربردنی کاغەزەکە کەمترین بێت.

5-4 ڕاهێنان

1 ئەو دوو ژمارەیە بدۆزەوە کە سەرجەمیان دەکاتە S کاتێك ئەنجامی لێکدانیان گەورەترین بێت.

2 ئەو دوو ژمارەیە بدۆزەوە کە ئەنجامی لێکدانیان دەکاتە 192 کاتێك سەرجەمی یەکەمیان و 3 ئەوەندەی دووەمیان کەمترین ئەنجامی هەبێت.

3 ئەو دوو ژمارەیە بدۆزەوە کەسەرجەمی یەکەمیان و دوو ئەوەندەی دووەمیان بکاتە 100 وئەنجامی لێکدانیان گەورەترین بێت.

4 لاکێشەیەك چێوەکەی 100 m درێژی و پانییەکەی بدۆزەوە بۆ ئەوەی ڕووبەرەکەی گەورەترین بێت.

لە پرسیاری 5 و 6 دا خاڵێکی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بدۆزەوە کەنزیکترین خاڵ بێت لەخاڵە دراوەکە.

5 $(4, 0) : f(x) = \sqrt{x}$

6 $(-1, 3) : f(x) = (x+1)^2$

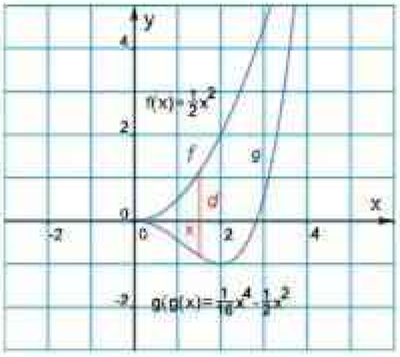
7 **هاتوچۆ** نەخشەی $F(v) = \frac{v}{22+0.02v^2}$ نمونەیەکە بۆ لێکۆڵینەوەی تێکڕای جووڵانەوەی هاتوچۆ (ژمارەی ئۆتۆمبێلەکان لە چرکەیەکدا) لەسەر ڕێگایەکی قەڵەباڵغ، کاتێك v هێمایە بۆ خێرایی ڕۆیشتن لەسەر ئەم ڕێگایە، کام خێرایی وادەکات ئەم تێکڕایە گەورەترین بێت.

8 جووتیارێك پلان دادەنێت بۆ پەرژینکردنی ڕووبەری زەویەکی لاکێشەیی لەسەر کەناری ڕووبارێك، لەپێناو دابینکردنی کێڵگەیەکی گژوگیا کە ڕانەمەڕێك تێیدا دەلەوەڕێت، درێژی و پانی پێویستی زەویەکە دەبێت چەندبێت بۆ ئەوەی درێژی پەرژینەکە کەمترین بێت ئەگەر بزانێت ڕووبەری ئەو زەویەی پەرژین کراوە پێویستە بکاتە$180\,000m^2$ و جووتیارەکە، ئەولایەی زەویەکە کە دەکەوێتە سەر ڕووبارەکە پەرژین ناکات؟

9 **گەورەترین ڕووبەر** پەنجەرەی نورماندی پێکدێت لە پەنجەرەیەکی شێوە لاکێشەیی لە بەشی سەرەوەی پەنجەرەیەکی نیوە بازنەیی هەیە، هەروەك لەوێنەی بەرامبەر دەردەکەوێت، دووریەکان گەورەترین پەنجەرەیەکی نۆرماندی بدۆزەوە کە چێوەی لاکێشەکەی 6m بێت.

10 تیرەی ئەو بازنەیەی کە بەوری سێگۆشەیەکی دوو لایەکسانی داوە بەکاتە 8 cm گەورەترین ڕووبەری سێگۆشەکە بدۆزەوە.

11 هەردوو نەخشەی $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ و $g(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ لەماوەی $[0, 4]$ بەکاربهێنە.



أ بڕێك بەپێی x بنووسە کەدووری ستونی d لەنێوان ڕوونکردنەوەی دوونەخشەکە لە x دەربڕێت، جیاکاری بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهای x کەوابکات ئەو دووریە گەورەترین بێت.

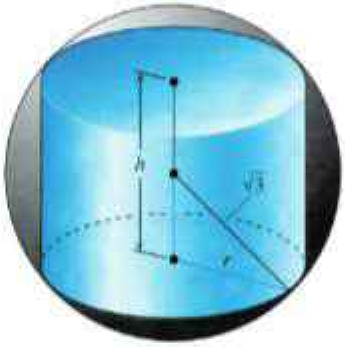
ب هاوکێشەی لێکەوتەکانی هەردوو ڕوونکردنەوەکە بدۆزەوە کاتێك x دەکاتە ئەو بەهایەی کە لەلقی أ دۆزیتەوە، وێنەی دوو لێکەوتەکە بکێشە. چ پەیوەندییەك لە نێوانیاندا هەیە؟

12 عەمبارێکی بچوك شێوەی لولەکی وەردەگرێت کە دوو بنکەکەی بەنیوەگۆ کۆتایی دێت، قەبارەی گشتی ئەو عەمبارە دەکاتە $12\ m^3$ نیوەتیرەی لولەکە کە بدۆزەوە، کە کەمترین ڕووبەری ڕووی عەمبارەکە دابینەکات.

13 عەمبارێکی دەستکرد هاوشێوەی عەمبارەکەی پرسیاری پێشوو قەبارەکەی $3m^3$ تێچوونی دوو نیوەگۆیەکە دوو ئەوەندەی تێچوونی لولەکەکە یە بەمەتر دووجا. نیوە تیرەی بنکەی لولەکە بدۆزەوە کەوا دەکات کەمترین تێچوونی هەبێت.

دەربارەی چەمکەکان

14 لاکێشەیەك چێوەکەی 20 m درێژی وپانییەکەی بدۆزەوە بۆ ئەوەی ڕووبەرەکەی گەورەترین بێت ئایا بەهایەك بۆ درێژی وپانی لاکێشەکە هەیە، کەوابەکات ڕووبەرەکەی کەمترین بێت؟ وەلامەکەت ڕوونبکەوە.



15 داواکرا لوولەکێك لەناو گۆیەك دابنرێت نیوەتیرەکەی $\sqrt{3}$ یەکەی درێژی بێت هەروەك لە وێنەی بەرامبەر دەردەکەوێت. بەرزی لوولەکەکەو نیوەتیرەکەی بدۆزەوە بۆ ئەوەی قەبارەکەی گەورەترین بێت.

بـەشی 4

پێداچوونەوەی بەش

1 پێناسەی خاڵی شلۆقی نەخشە بکە، چەماوەی نەخشەیەك بکێشە کە جۆرە جیاوازەکانی بەها شلۆقەکان نیشانبدات.

2 **نەخشەی تاك** بریتییە لە نەخشەی f کە پاسادانی $f(-x)=-f(x)$ دەکات بەهای x هەرچەندبێت. وادابنێ f نەخشەیەکی تاکی بەردەوامە وتوانای داتاشرانی هەیە. خشتەی خوارەوە چەند بەهایەکمان پێدەدات.

x	-5	-4	-1	0	2	3	6
y	55	80	35	0	-64	-81	0

أ $f(4)$ بدۆزەوە.

ب $f(-3)$ بدۆزەوە.

ج بە ڕوونکردنەوەیی پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنە و وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f لەماوەی $[-6, 6]$ بکێشە. کەمترین ژمارە بۆ بەها شلۆقەکانی سەر نەخشەکە لەو ماوەیەدا چەندە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

د ئایا دەکرێت $\lim_{x\to 0} f(x)$ ئامانجی نەبێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

لە دوو پرسیاری 3 و 4 دا (ئەگەر هەبێت) خاڵە شلۆقەکان و ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ماوەکانی ڕوو لەکەمبوونی نەخشەکە بدۆزەوە.

3 $f(x)=(x-1)^2(x-3)$

4 $f(x)=\sin x+\cos x$ لەماوەی $[0,2\pi]$

لە دوو پرسیاری 5 و 6 دا خاڵەکانی وەرگەڕان بدۆزەوە، لە قۆپاو و قۆقزی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکۆڵەوە.

5 $f(x)=x+\cos x$ لەماوەی $[0,2\pi]$

6 $f(x)=(x+2)^2(x-4)$

لە دوو پرسیاری 7 و 8 تاقیکردنەوەی داتاشراوەی دووەم بۆ دۆزینەوەی هەموو بەهایەکانی کۆتایی بەکاربهێنە.

7 $f(x)=2x^2(1-x^2)$

8 $f(x)=x-4\sqrt{x+1}$

GRADE12-2011-CHAPTER 4 3/25/18 11:35 AM Page 40

لە پرسیاری 9 تا 16 ئامانجە داواکراوەکە بدۆزەوە ئەگەر هەبێت.

9 $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{3x^2+5}$

10 $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{3x^2+5}$

11 $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x+5}$

12 $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{-2x}$

13 $\lim_{x \to +\infty} \frac{5\cos x}{x}$

14 $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$

15 $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x}{x+\cos x}$

16 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2\sin x}$

لە پرسیاری 17 تا 20 هەموو دەرکەنارە ئاسۆییەکان و ستونییەکان بۆ نەخشەکە بدۆزەوە.

17 $f(x)=\frac{2x+3}{x-4}$

18 $f(x)=\frac{5x^2}{x^2+2}$

19 $f(x)=\frac{3}{x}-2$

20 $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

لە پرسیاری 21 تا 24 ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

21 $f(x)=4x^3-x^4$

22 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

23 $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

24 $f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}$

25 **دوورییەکان** پاپۆڕی A لەلای ڕۆژهەڵات 100 km لە پاپۆڕی B دووربوو لەوکاتەی، پاپۆڕی A بەئاراستەی ڕۆژئاوا بەخێراییەك تێکڕایەکەی 12 km/h دەجولێت و پاپۆڕی B بەخێرایی 10 km/h بەرەو باشوور دەجولێت. لە چ کاتێك دووری نێوان دوو پاپۆڕەکە کەمترین دەبێت؟ ئەو دوورییە چەندە؟

26 لە سێگۆشەیەکی گۆشە وەستاودا دوو لا وەستاوەکەی لەسەر تەوەرەی پۆزەتانەکان جووتن و ژێیەکەی بەخاڵی$(1,8)$دادەڕوات. سەرەکانی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە بۆ ئەوەی ڕووبەرەکەی کەمترین بێت.

بـەشی 4

ئامادەكاری بۆ تاقیكردنەوە

1 كام لەم نەخشانەی خوارەوە تەنها دوو بەهای كۆتاییان هەیە؟

أ $f(x)=|x-2|$ ب $f(x)=x^3-6x+5$ ج $f(x)=x^3+6x-5$

د $f(x)=\tan x$ هـ $f(x)=x+\ln x$

2 لەكام ماوە نەخشەی $f(x)=e^{x^3-6x^2+x}$ ڕوو لەكەمبوونە؟

أ $]-\infty,-2]$ ب $]0\ ,4[$ ج $[2,4]$ د $]4,+\infty[$ هـ نییە

3 ئەگەر $a<0$ چەماوەی نەخشەی $f(x)=ax^3+3x^2+4x+5$ قۆپاو دەبێت لەماوەی.

أ $]-\infty,-\frac{1}{a}[$ ب $]-\infty,\frac{1}{a}[$ ج $]-\frac{1}{a},+\infty[$ د $]\frac{1}{a},+\infty[$ هـ $]-\infty,-1[$

4 پۆیەكانی x بۆ خاڵەكانی وەرگەڕانی نەخشەی $f(x)=x^5-5x^4+3x+7$.

أ تەنها 0   ب تەنها 1   ج تەنها 3   د 0 و 3   هـ 0 و 1

5 كام لەمانە ڕێگات پێدەدات، بڕیاربدەیت كەڕوونكردنەوەی نەخشەی f خاڵی وەرگەڕانی هەبێت لە $x=c$

أ f' گەورەترین خۆجێی هەیە لە $x=c$.   ب $f''(c)=0$ ج $f''(c)$ نەبێت.

د نیشانەی f' لە $x=c$ دەگۆڕێت.   هـ f نەخشەیەكی سێجاییە و $c=0$

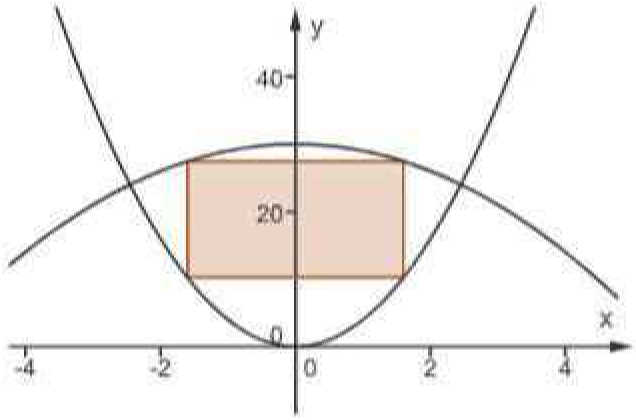
6 سەرجەمی دوو ژمارەی موجەب دەكاتە 60. ئەو بەهایەی ئەنجامی لێكدانی یەكێكیان لە دووجای ئەوی تریان دەكاتە گەورەترین بدۆزەوە.

أ 3481   ب 3600   ج 27 000   د 32 000   هـ 36 000

7 سێگۆشەیەكی گۆشە وەستاو درێژی ژێیەكەی دەكاتە 10 بەهای گەورەترین ڕووبەر كامەیە.

أ 24   ب 25   ج $25\sqrt{2}$ د 48   هـ 50

8 گەورەترین ڕووبەر بۆ ئەو لاكێشە سوورەی كە دەوردراوە بە برگەهاوتای $y=4x^2$ و برگەهاوتای $y=30-x^2$ بریتییە لە.



أ $20\sqrt{2}$ ب 40

ج $30\sqrt{2}$ د 50

هـ $40\sqrt{2}$

GRADE12-2011-CHAPTER 4 3/25/18 11:35 AM Page 42

9 قەبارەی خشتەکێك بەتێکڕای $24cm^3/min$ زیاددەکات، لەکاتێکدا درێژی لایەکی بەتێکڕای $2cm/min$ زیاددەکات درێژی لایەکی خشتەکەکە کامەیە؟

أ $2cm$ ب $2\sqrt{2}\,cm$ ج $\sqrt[3]{12}cm$ د $4cm$ هـ $8cm$

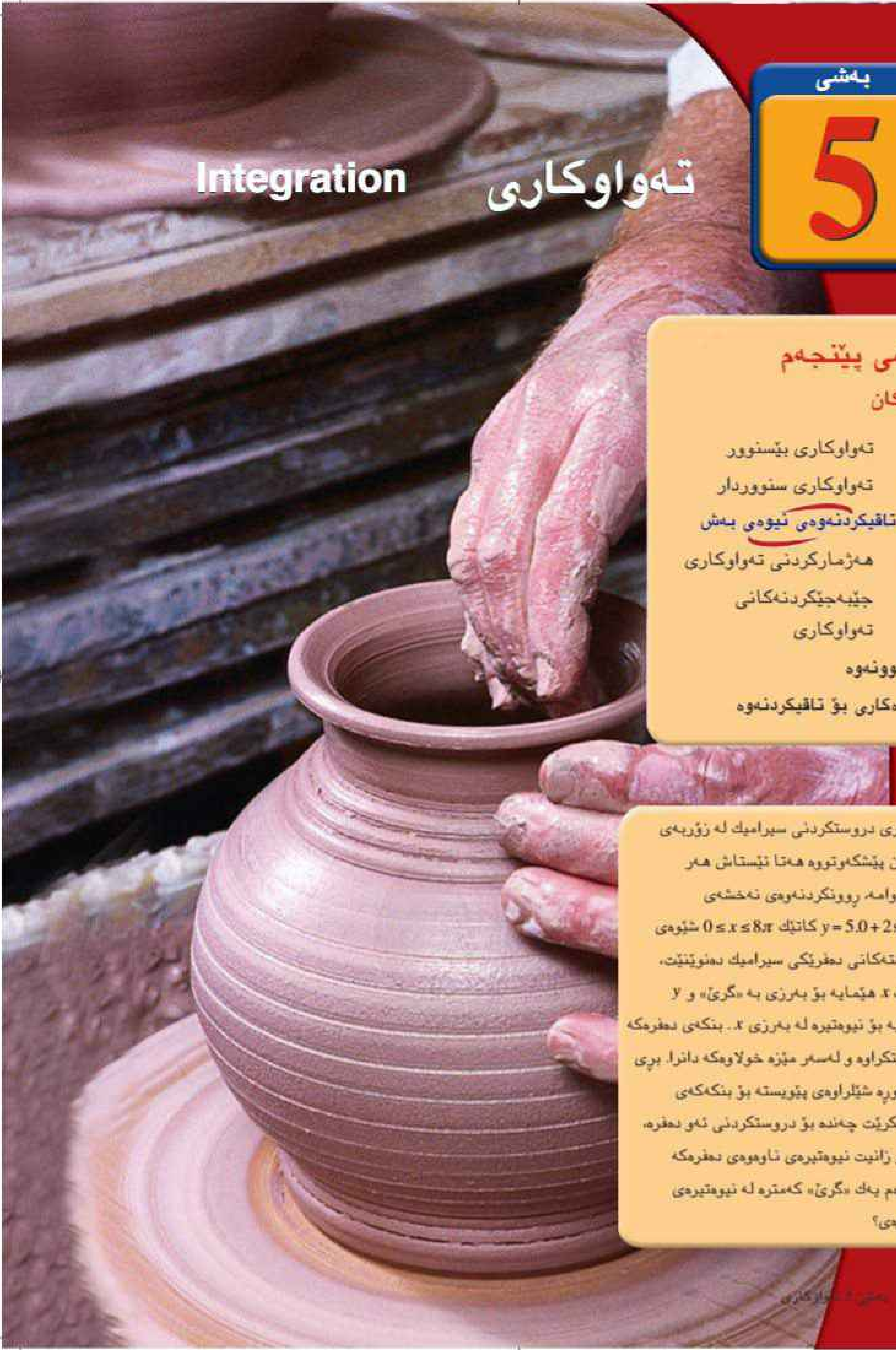
10 قەبارەی خشتەکێك بەتێکڕای $24cm^3/min$ زیاددەکات، لەکاتێکدا ڕووبەری ڕووەکەی بەتێکڕای $12cm^2/min$ زیاددەکات درێژی لایەکی خشتەکەکە کامەیە؟

أ $2cm$ ب $2\sqrt{2}\,cm$ ج $\sqrt[3]{12}cm$ د $4cm$ هـ $8cm$

11 خاڵێك لەسەر بازنەیەك دەجوڵێت، کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە، ئەگەر خێراییە ئاسۆییەکەی لەخاڵی $(0.6, 0.8)$ بکاتە $\frac{dx}{dt}=3$ ئەوا خێراییە ستونیەکەی $\frac{dy}{dt}$ لەو خاڵەدا کامەیە؟

أ -3.875 ب -3.75 ج -2.25 د 3.75 هـ 3.875

GRADE12-2011-CHAPTER 5 2/25/18 9:36 AM Page 3



بەشی

5

تەواوكاری Integration

بەشی پێنجەم

وانەكان

5-1 تەواوكاری بێسنوور

5-2 تەواوكاری سنووردار

تاقیكردنەوەی نیوەی بەش

5-3 هەژماركردنی تەواوكاری

5-4 جێبەجێكردنەكانی تەواوكاری

پێداچوونەوە

ئامادەكاری بۆ تاقیكردنەوە

هونەری دروستكردنی سیرامیك لە زۆربەی وڵاتان پێشكەوتووە هەتا ئێستاش هەر بەردەوامە. روونكردنەوەی نەخشەی $y = 5.0 + 2\sin\frac{x}{4}$ كاتێك $0 \le x \le 8\pi$ شێوەی تەنیشتەكانی دەفرێكی سیرامیك دەنوێنێت، كاتێك x هێمایە بۆ بەرزی بە «گرێ» و y هێمایە بۆ نیوەتیرە لە بەرزی x. بنكەی دەفرەكە دروستكراوە و لەسەر مێزە خولاوەكە دانرا. بڕی ئەو قوڕە شێلراوەی پێویستە بۆ بنكەكەی زیادبكرێت چەندە بۆ دروستكردنی ئەو دەفرە، ئەگەر زانیت نیوەتیرەی ناوەوەی دەفرەكە هەردەم یەك «گرێ» كەمترە لە نیوەتیرەی دەرەوەی؟

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

1 **هەر دەستەواژەیەك لەستونی لای ڕاست بە ڕاڤەکراوەکەی (لێکدانەوەکەی) لە ستونی لای چەپ ببەستەوە.**

1. داتاشراوی نەخشەی f کاتێك $x=a$.
2. تێکڕای گۆڕانی ناوەندی.
3. تێکڕای گۆڕانی ساتی.
4. نەخشەی بەردەوام.
5. ئامانج.

أ. ئامانجی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ کاتێك Δx لە سفر نزیك دەبێتەوە.

ب. نزیکبوونەوەی بڕێکە بەگۆڕاوی x کاتێك x لە بەهایەکی دیاریکراو یان لە $+\infty$ نزیکدەبێتەوە.

ج. نزیکبوونەوەی بڕی $\frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ ـە کاتێك h لە 0 نزیکدەبێتەوە.

د. ئەنجامی دابەشکردنی بڕی گۆڕانی y لەسەر بڕی گۆڕانی x.

هـ. گەورەترین بەها نەخشەکە لەماوەکەدا وەریدەگرێت.

و. نەخشەیەکە دەتوانرێت ڕوونکردنەوەکەی بکێشرێت بێ ئەوەی پێنووسەکەت هەڵبگیرێت.

سەرجەمە بەناوبانگەکان

2 سەرجەمی $s_n = 1+2+...+n$ بەپێی n بدۆزەوە، کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت.

3 بە بەکارهێنانی دەرئەنجامی بیرکاری بیسەلمێنە $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت.

داتاشراو

4 دوو نەخشەی جیاواز $u(x)$ ، $v(x)$ بدۆزەوە کە پاسادانی $u'(x)=v'(x)=a$ دەکەن کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

5 ڕوونیبکەوە دوو نەخشەی $f(x)=e^{2x}$ و $g(x)=e^{2x}+C$ هەمان داتاشراویان هەیە، کاتێك C ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

6 ئەگەر $f(x)$ داتاشراوی $u(x)$ بێت، داتاشراوی نەخشەی $v(x)=u(x)+C$ چییە، کاتێك C ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

ڕێسایەکانی داتاشراو

لە ڕاهێنانی 7 تا 12 داتاشراوی ئەم نەخشانە بدۆزەوە.

7 $f(x)=e^x+\sin x$

8 $f(x)=1+\tan x$

9 $f(x)=2\ln x-\frac{1}{x}$

10 $f(x)=e^x\ln(x+1)$

11 $f(x)=e^{\sin x}$

12 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$

ئامانجەکان

بە سادەترین شێوە بدۆزەوە.

13 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

14 $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2+7}$

15 $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}$

1–5 تەواوکاری بێسنوور
Indefinite Integral

دۆزینەوە

دۆزینەوەی نەخشە بنەڕەتییەکان: نەخشەی $F(x)$ کە ئەم داتاشراوەی لێ پەیدابووە بدۆزەوە.

.1 $F'(x)=2x$ .2 $F'(x)=x$ .3 $F'(x)=x^2$

.4 $F'(x)=\frac{1}{x^2}$ .5 $F'(x)=\cos x$

چۆن ئەو نەخشانەت دۆزیەوە؟

ئامانجەکان

- نووسینی تەواوکاری بێسنوور بۆ دەربڕینی نەخشەی بنەڕەت بەکاردەهێنێت.
- نەخشە بنەڕەتییەکان بە بەکارهێنانی ڕێسایەکانی تەواوکاری دەدۆزێتەوە.
- نەخشەی بنەڕەت بۆ نەخشەیەکی دیاریکراو دەدۆزێتەوە کە بەخاڵێکی دیاریکراودا دەڕوات.

زاراوەکان
Vocabulary

نەخشەی بنەڕەت
Antiderivative
تەواوکاری بێسنوور
Indefinite Integral
نەگۆڕی تەواوکاری
Constant of integration

نەخشەی بنەڕەت (بەرامبەری داتاشراو)

لە وانەکانی پێشوو فێربوویت چۆن داتاشراوی نەخشەیەکی زانراو بدۆزیتەوە. بەڵام ڕۆژێك پرسیوتە ئایا دەتوانیت نەخشەیەك بدۆزییەوە کاتێك داتاشراوەکەی زانراوبێت؟ وەڵامی ئەم پرسیارە: بەڵێ. لەم وانەیەدا فێردەبیت ئەگەر f نەخشەیەکی بەردەوام بێت دەتوانیت نەخشەی F بدۆزییەوە کە توانای داتاشراوی هەبێت، کاتێك f داتاشراوەکەی بێت، بە نەخشەی F دەوترێت نەخشەی بنەڕەتی نەخشەی f. لەمەودوا هەندێك ڕێسا فێردەبیت، کە یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوەی هەموو نەخشە بنەڕەتییەکانی نەخشەیەکی دیاریکراو.

نەخشەی بنەڕەت

بە نەخشەی F کە توانای داتاشرانی هەیە دەوترێت نەخشەی بنەڕەتی نەخشەی f کاتێك داتاشراوی F بکاتە f.

ئایا نەخشەیەکی دیاریکراو، زیاتر لە نەخشەیەکی بنەڕەتی هەیە؟ وەڵام بۆ ئەم پرسیارە زۆرناسانە. هەموو نەخشە نەگۆڕەکان، نەخشەی بنەڕەتین بۆ نەخشەی $f(x)=0$.

سەلمێنراوی 1–5 نەخشەی بنەڕەت

ئەگەر $F(x)$ نەخشەی بنەڕەتی $f(x)$ بێت، ئەوا نەخشەی $G(x)=F(x)+C$ کاتێك C، ژمارەیەکی ڕاستی بێت، نەخشەی بنەڕەتییە بۆ نەخشەی $f(x)$.

تەنها دۆزینەوەی داتاشراوی $G(x)=F(x)+C$ بەسە بۆ سەلماندنی ئەو سەلمێنراوە. ئەوانەی لەبواری بیرکاری کاردەکەن هێمای $\int f(x)dx$ بەکاردەهێنن بۆ هەر نەخشەیەکی بنەڕەتی $f(x)$ و بەو هێما دەوترێت تەواوکاری بێسنووری نەخشەی $f(x)$.

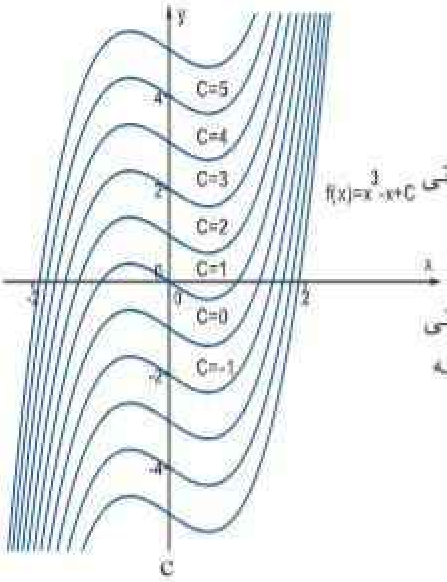
نموونە 1 دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەت

$\int x^2dx$ بدۆزەوە.

شیکار

ئەگەر ڕێسای داتاشراوی نەخشە توانییەکانی $f(x)=ax^n$ بەبیری خۆت بهێنیتەوە، بۆت دەردەکەوێت نەخشەی $f(x)=x^2$ داتاشراوی نەخشەیەکە بەشێوەی $F(x)=ax^3$. بەڵام داتاشراوی ئەوەی دوایی دەکاتە $F(x)=3ax^2$. ئەگەر $F'(x)=f(x)$ ئەوا $a=\frac{1}{3}$، $F(x)=\frac{1}{3}x^3$. نەخشەی بنەڕەتی نەخشەی $f(x)=x^2$. دەتوانیت بەشێوەی $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$ بنووسیت تێبینی ژمارەی C بکە. ئامانج لەبوونی ژمارەی نەگۆڕ تا بزانیت دوو نەخشەی بنەڕەت بۆ هەمان نەخشە جیاوازن لەیەکتری بەژمارەیەکی ڕاستی.

خاڵی جاوێزی 1. $\int x^3dx$ بدۆزەوە.



پەیوەندی $G(x)=F(x)+C$ نێوان دوو نەخشەی بنەڕەتی بۆ هەمان نەخشە، ئەوە دەگەیێنێت ڕوونکردنەوەی هەموو نەخشە بنەڕەتییەکانی نەخشەیەکی دیاریکراو لە ئەنجامی ڕاکێشانی ئەستونی ڕوونکردنەوەی یەکێکیان پەیدادەبێت وەك لە وێنەی بەرامبەردا دەردەکەوێت، بە ڕەچاوکردنی ئەم تێبینیە هەموو نەخشە بنەڕەتییەکانی نەخشەیەکی دیاریکراو یەك نەخشەی بنەڕەتییان هەیە ڕوونکردنەوەکەی بەخاڵێکی دیاریکراوی ڕووتەختی پۆتانەکاندا دەڕوات. نەگۆڕی c خاڵی بەکتربڕینی ستونی نەخشە بنەڕەتییەکە دەنوێنێ.

نموونە 2 دۆزینەوەی نەخشەیەکی بنەڕەتی دیاریکراو

نەخشەی بنەڕەتی بۆ نەخشەی $f(x)=x^2$ بدۆزەوە کە چەماوەکەی بەخاڵی $(3,3)$ دا دەڕوات.

شیکار

$G(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ نەخشەی بنەڕەتی $f(x)=x^2$. بۆ ئەوەی ڕوونکردنەوەی نەخشە بنەڕەتییەکە بە خاڵی $(3,3)$ بڕوات، دەبێت C پاسەدانی هاوکێشەی $3=\frac{1}{3}3^3+C$ بکات واتە دەبێت بکاتە -6. لەمەوە دەردەچێت نەخشەی بنەڕەتی بۆ نەخشەی $f(x)=x^2$ کە ڕوونکردنەوەکەی بەخاڵی $(3,3)$ دەڕوات بریتییە لە $G(x)=\frac{1}{3}x^3-6$.

خاڵی جاوێزی 2. نەخشەی بنەڕەتی بۆ نەخشەی $f(x)=x^4$ بدۆزەوە کە ڕوونکردنەوەکەی بەخاڵی $(2,4)$ دا دەڕوات.

لەم وانەیەدا فێردەبێت چۆن تەواوکاری بێسنوور بۆ نەخشەیەکی دیاریکراو بدۆزییەوە. لەبەرئەوەی داتاشراو بریتییە لە گواستنەوەی نەخشەیەك بۆ داتاشراوەکەی، ئەوا دۆزینەوەی تەواوکاری بێسنوور بۆ نەخشەیەکی دیاریکراو بریتییە لە کرداری پێچەوانەی داتاشراو **Antiderivative** لەو تێبینیەوە دەردەچێت لە ڕێسایەکانی داتاشراو، ڕێسایەکانی تەواوکاری بێسنوور بەرهەم دەهێنرێن.

GRADE12-2011-CHAPTER 5 2/25/18 9:36 AM Page 7

ڕێسایەکانی تەواوکاری بێ سنوور

ڕێسایەکانی داتاشراو	ڕێسایەکانی تەواوکاری
$(C)' = 0$	$\int 0dx = C$
$(kx)' = k$	$\int kdx = kx + C$
$\left(kf(x)\right)' = kf'(x)$	$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$	$\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad n \neq -1$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin dx = -\cos x + C$

نموونە 3 جێبەجێکردنی ڕێسایەکانی تەواوکاری

$\int(2\cos x - 5x)dx$ بدۆزەوە.

شیکار

$$\int(2\cos x - 5x)dx = \int 2\cos x dx - \int 5x dx = 2\int \cos x dx - 5\int x dx = 2\sin x - \frac{5}{2}x^2 + C$$

حاڵی جاودێری

3. $\int(2\sin x + 3x^2)dx$ بدۆزەوە.

بۆ ئاسانکردنی جێبەجێکردنی ڕێسایەکانی تەواوکاری، پێویستە لە هەندێك باردا نەخشەکە دووبارە بنووسرێتەوە «ڕێکبخەیت»، بەشێوەیەك بە ڕێسایەکانی تەواوکاری بچن، بۆ ئەوەی بە ئاسانی بتوانیت ڕێساکانی لەسەر جێبەجێبکەیت.

نموونە 4 هەنگاوەکانی دۆزینەوەی تەواوکاری بێ سنوور

ئەم خشتە تەواوبکە

تەواوکاری	ڕێکخستنی نەخشەکە	تەواوکاری بکە	سادەبکە
أ $\int \frac{1}{x} dx$			
ب $\int \sqrt{x}\, dx$			
ج $\int 2\sin x dx$			

شیکار

تەواوکاری	ڕێکخستنی نەخشەکە	تەواوکاری بکە	سادەبکە
ا $\int \frac{1}{x^3}dx$	$\int x^{-3}dx$	$\frac{-1}{2}x^{-2}+C$	$-\frac{1}{2x^2}+C$
ب $\int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{\frac{1}{2}}dx$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
ج $\int 2\sin x dx$	$2\int \sin x dx$	$2(-\cos x)+C$	$-2\cos x+C$

خاڵی جاوەدێری 4: $\int x\sqrt{x}\,dx$ بدۆزەوە.

1-5 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تاکو 3 .لە ڕاستی ئەنجامەکان بکۆڵەوە. بە وەرگرتنی داتاشراوی نەخشە بنەڕەتییەکە

1. $\int\left(-\frac{9}{x^4}\right)dx=\frac{3}{x^3}+C$
2. $\int\left(4x^3-\frac{1}{x^2}\right)dx=x^4+\frac{1}{x}+C$
3. $\int\frac{x^2-1}{x\sqrt{x}}dx=\frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}}+C$

خشتەکە تەواوبکە

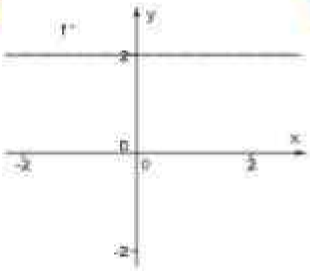
	تەواوکاری	ڕێکخستنی نەخشەکە	تەواوکاری بکە	سادەبکە
4	$\int\sqrt[3]{x}dx$			
5	$\int\frac{1}{x\sqrt{x}}dx$			
6	$\int\frac{1}{(3x)^2}dx$			

لە ڕاهێنانی 7 تا 15، تەواوکاری بێسنوور بدۆزەوە، پاسەدانی ڕاستی ئەنجامەکەت بەبەکارهێنانی داتاشراوەکەی ئەنجامبدە.

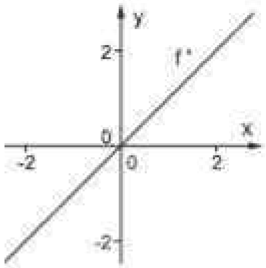
7. $\int(2x-3x^2)dx$
8. $\int(x^3-4x+2)dx$
9. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$
10. $\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx$
11. $\int(2x^2-1)^2dx$
12. $\int\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)dx$
13. $\int(2\sin x+3\cos x)dx$
14. $\int(x^2-\sin x)dx$
15. $\int(\tan^2 x+1)dx$

لە ڕاهێنانی 16 تا 18 دوو چەماوەی نزیك لەو نەخشانە بكێشە كە داتاشراوی هاویەشیان هەیە كە وێنە ڕوونكردنەوەكە دەینوێنێت.

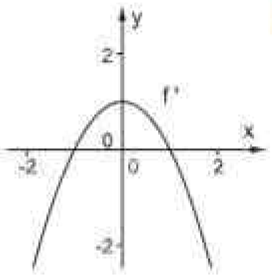
16



17



18



لە دوو ڕاهێنانی 19و 20 نەخشەی$f(x)$ بەزانینی داتاشراوەكەی و خاڵێكی سەر ڕوونكردنەوەی بدۆزەوە.

19 $(1,1)$: $f'(x)=2x-1$

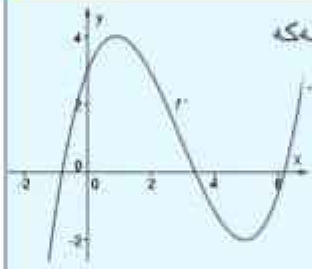
20 $(3,2)$ $f'(x)=2(x-1)$

21 **گەشەكردنی ڕووەكەكان** نەمامگەیەك جۆرێك لەنەمامی كورت دەفرۆشێت دوای 6 ساڵ لەچاندنی. نەخشەی$h'(t)=1.5t+5$ بەڕێسایەك دادەنرێت بۆ تێكڕای گەشەی ئەو جۆرە ڕووەكانە كە بە سم لە ساڵێكدا پێورا بێت، درێژی نەمامەكە12cm بوو كاتێك چێنرا $(t=0)$.

[أ] درێژی ئەو نەمامە بدۆزەوە$h(t)$دوای t ساڵ.

[ب] درێژی نەمامەكە لەكاتی فرۆشتنی چەندە؟

دەربارەی چەمكەكان



22 لە وێنەی بەرامبەر ڕوونكردنەوەی f' بۆ نەخشەی f دەردەكەوێت وێنەكە بەكاربهێنە بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارانە ئەگەر زانیت $f(0)=-4$.

[أ] بەهایەكی نزیكراو بەلاری نەخشەی f بدە كاتێك $x=4$ بێت.

[ب] ئایا دەكرێت $f(2)=-1$ ؟ وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.

[ج] ئایا دەكرێت $f(5)-f(4)>0$؟ وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.

[د] بەهایەكی نزیكراو بدە بە x كاتێك نەخشەی f بەهای گەورەترین كۆتایی وەردەگرێت. وەڵامەكەت ڕوونبكەوە.

[هـ] ئەو ماوەیە بخەمڵێنە كە نەخشەی f تیایدا قۆپاوە هەروەها تیایدا قۆقزە. بەهایەكی نزیكراوەییەكی بدە بە x لەخاڵی وەرگەڕان.

[و] بەهایەكی نزیكراوە بدە بە x بۆ ئەوەی f'' ببێتە بچوكترین كۆتایی.

[ز] وێنەیەكی ڕوونكردنەوەیی بەنزیكراوەیی بۆ نەخشەی f بكێشە.

23 **تاودان** ئۆتۆمبێلێك لە ترافیك لایت وەستابوو، كاتێك گڵۆپی سەوز دەركەوت، ئۆتۆمبێلەكە بە تاودانی2m/s^2 دەرچوو. لەهەمان ساتدا ئۆتۆمبێلێكی بارهەڵگر لێی تێپەڕیوو كە بەخێراییەكی نەگۆڕ برەكە 10m/s دەڕۆیشت.

[أ] دوای چەند مەتر ئۆتۆمبێلەكە دەگاتەوە بارهەڵگرەكە؟

[ب] خێرایی ئۆتۆمبێلەكە دەبێتە چەند كاتێك دەگاتە بارهەڵگرەكە؟

راست یان هەڵە لە ڕاهێنانی 24 تا 28 دیاریبکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە یان هەڵەیە هۆیەکە لێکبدەوە. ئەگەر هەڵەیە بە دژە نمونەیەک بیسەلمێنە

24 هەموو ئەخشەیەکی بنەڕەتی بۆ ئەخشەیەکی زۆر ڕادەداری پلە n بریتییە لە ئەخشەیەکی زۆر ڕادەداری پلە $n+1$.

25 ئەگەر f ئەخشەیەکی زۆر ڕادەداربێت، ئەوا ئەخشەیەکی بنەڕەتی تاقانە هەیە کە چەماوەکەی بەخاڵی بنەڕەتدا دەڕوات.

26 ئەگەر $F(x)$ و $G(x)$ دوو ئەخشەی بنەڕەتی ئەخشەی f بن، ئەوا $F(x)=G(x)+C$ کاتێک C ژمارەیەکی ڕاستییە.

27 $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$

28 بۆ هەر ئەخشەیەکی f تەنها یەک ئەخشەی بنەڕەتی هەیە.

29 ئەخشەی f بدۆزەوە کە داتاشراوی دووەمی دەکاتە $f''(x) = 2x$ و چەماوەکەی لێکەوتی ئاسۆیی لە خاڵی $(2,0)$ هەبێت.

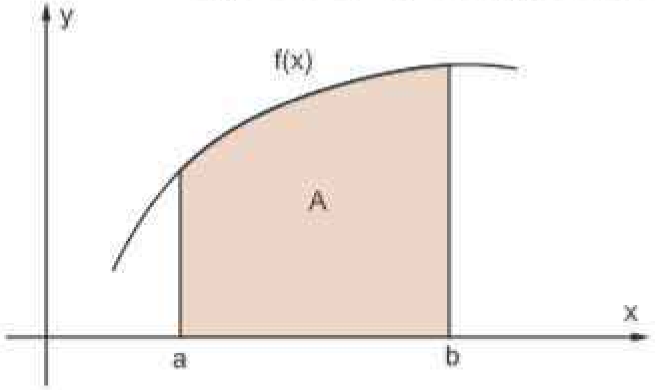
30 $f'(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 2 \\ 3x & 2 \le x \le 5 \end{cases}$. ئەخشەی f بدۆزەوە ئەگەر بزانیت بەردەوامە وە $f(2) = 6$
ئایا ئەم ئەخشەیە توانای داتاشرانی لە $x = 2$ هەیە ؟

GRADE12-2011-CHAPTER 5 2/25/18 9:36 AM Page 11

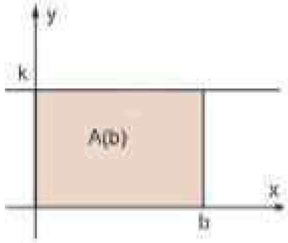
2–5 تەواوكاری سنووردار
Definite Integral

تەواوكاری سنووردار

لەوانەی پێشوو فێربوویت كە دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەت بۆ نەخشەیەكی دیاریكراو كردارێكە پێچەوانەی داتاشراوە. تەواوكاری بێسنوور بۆ نەخشەی f دەبێتە نەخشەی بنەڕەتی ئەو نەخشە. بەڵام تەواوكاری بێسنوور ڕۆڵێكی تریشی هەیە لەوەی پێشوو كەمترنییە. لەم وانەیەدا فێردەبیت چۆن نەخشەی بنەڕەت بەكاردەهێنیت بۆ شیكاركردنی دووەم جۆری پرسیاری سەرەكی لە هەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری. لەم وانەیەدا فێردەبیت چۆن نەخشەی بنەڕەتی بەكاردەهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری سنووردارو بە ڕوونكردنەوەی نەخشەیەك و تەوەری x لە لا یەك و دوو ڕاستەهێڵی $x = a$ و $x = b$ لەلایەكی ترەوە. هێمای A بۆ ڕووبەری ئەو ناوچەیە بەكاربهێنە.



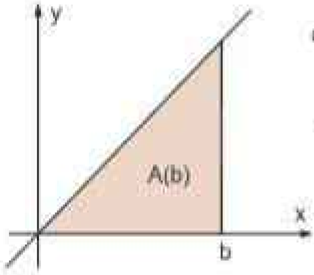
سەرەتا گرنگی بە ڕووبەری $A(b)$ بۆ ناوچەی سنووردراو بە ڕوونكردنەوەی نەخشەكەو تەوەری x لەلایەك و دوو ڕاستەهێڵی $x = 0$ و $x = b$ لەلایەكی ترەوە دەدەین.



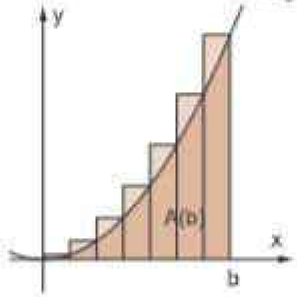
هەوڵدەدەین، شێوازێك بدۆزینەوە بۆ ئەو ڕووبەرە.

ئەگەر $f(x) = k$ ، كاتێك k ژمارەیەكی ڕاستی بێت، ئەوا $A(b) = bk$.

ئەگەر $f(x) = x$ ئەوا $A(b) = \frac{1}{2}b^2$.



ئەگەر $f(x) = x^2$ كارەكە ئاڵۆزتر دەبێت، چونكە ناوچەیەكی سنووردراو بە چەماوەی نەخشەكەو تەوەری x هەردوو ڕاستەهێڵی $x = 0$ و $x = b$ شێوەیەكی ئەندازەیی ناسراوی نییە. هەوڵدەدەین ئەم ڕووبەرە بەشێوەی نزیككراویی بدۆزینەوە بۆ ئەمەش ماوەی $[0,b]$ بەشدەكەین بۆ n ماوەی یەكسان كەمەودای هەریەكەیان بكاتە $\left(\frac{b}{n}\right)$ و لەسەر ئەو ماوانە لاكێشەكان دروستدەكەین كە بەرزییەكانیان یەك لە دوای یەك بكاتە $f\left(\frac{b}{n}\right) f\left(\frac{2b}{n}\right) \cdots f\left(\frac{nb}{n}\right)$؟ سەرجەمی ڕووبەرەكانی ئەو لاكێشانە بەهای نزیكەیی ڕووبەر $A(b)$ پێكدەهێنێت.



ئامانجەكان

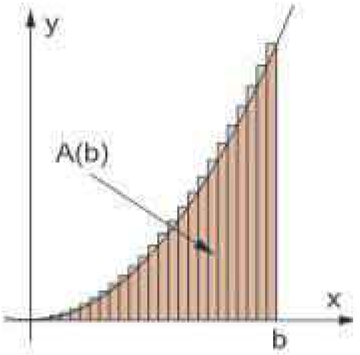
- تەواوكاری سنووردار بە بەكارهێنانی سیفەتەكانی هەژمارەكات.

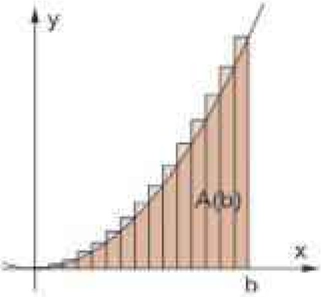
زاراوەكان
Vocabulary

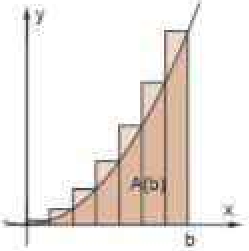
تەواوكاری سنووردار
Definite Integral

سنوورەكانی تەواوكاریەكە
Limits of integration

ئەگەر تەماشای ئەم سێ ڕوونکردنەوەی خوارەوە بکەین، دەبینین بە زیادبوونی بەهای n ژمارەی لاکێشەکان زیاددەکات وسەرجەمی ڕووبەرەکان نزیک دەبێتەوە لە $A(b)$. بەسوود وەرگرتن لەم تێبینیە دەڵێین $A(b)$ ئامانجی ئەو سەرجەمەیە کاتێك بەهای n بێسنوور زیاد دەکات.







سەرجەمی ڕووبەرەکانی ئەو لاکێشانە دەکاتە.

$$S_n = \frac{b}{n}f\left(\frac{b}{n}\right)+\frac{b}{n}f\left(\frac{2b}{n}\right)+\ldots+\frac{b}{n}f\left(\frac{nb}{n}\right)=\frac{b}{n}\left[\frac{b}{n}\right]^2+\frac{b}{n}\left[2\frac{b}{n}\right]^2+\ldots+\frac{b}{n}\left[n\frac{b}{n}\right]^2$$
$$=\frac{b^3}{n^3}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)$$

بەڵام $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

لەمەوە دەردەچێت:

$$A(b)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{b^3}{n^3}=\frac{1}{3}b^3\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{2n^3}=\frac{1}{3}b^3\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{2n^3}=\frac{1}{3}b^3$$

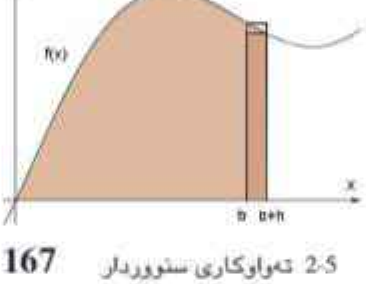
ئەوەی پێی گەیشتین، لەو خشتەیە پوخت کراوەتەوە.

A	$f(x)$
$A=kb$	$f(x)=k$
$A=\frac{1}{2}b^2$	$f(x)=x$
$A=\frac{1}{3}b^3$	$f(x)=x^2$

ئەم خشتەی سەرەوە ئەوە دەردەخات کە ڕووبەری A هەژماردەکرێت بە بەکارهێنانی نەخشەی $F(x)$ کاتێك $A=F(b)$. لەلایەکی ترەوە ئەم خشتە چۆنیەتی دۆزینەوەی نەخشەی $F(x)$ دەردەخات.

پەیوەندی نێوان $f(x)$ و $F(x)$	$F(x)$	A	$f(x)$
$F'(x)=f(x)$	$F(x)=kx$	$A=kb$	$f(x)=k$
$F'(x)=f(x)$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2$	$A=\frac{1}{2}b^2$	$f(x)=x$
$F'(x)=f(x)$	$F(x)=\frac{1}{3}x^3$	$A=\frac{1}{3}b^3$	$f(x)=x^2$

لەمەی پێشەوە دەردەچێت کە ڕووبەری $A(b)$ دەکاتە $F(b)$ کاتێك $F(x)$ نەخشەی بنەڕەتی نەخشەکەیە کاتێك $C=0$. ئەگەر بارە گشتییەکەمان باسکرد کاتێك f نەخشەیەکی بەردەوامە بەپێی وێنەی بەرامبەر دەتوانین ڕووبەری $A(b+h)-A(b)$ سنووردار بکەین بە دوو ڕادە.



بریتییە لە ڕووبەری لاکێشە بچووکەکە و ڕووبەری لاکێشە گەورەکە. بەڵام ڕووبەری لاکێشە بچوکەکە دەکاتە $hf(b+h)$ و ڕووبەری لاکێشە گەورەکە دەکاتە $hf(b)$.

لەمەوە دەردەچێت $hf(b+h) \le A(b+h) - A(b) \le hf(b)$

لەدوایدا $f(b+h) \le \frac{A(b+h)-A(b)}{h} \le f(b)$

کاتێك h لە 0 نزیك دەبێتەوە ئەمەمان بۆ دەردەچێت.

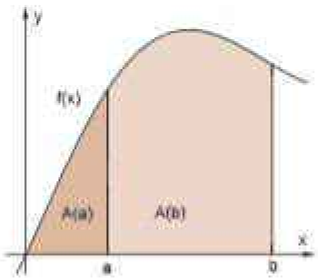
$$\lim_{h\to0} f(b+h) \le \lim_{h\to0}\frac{A(b+h)-A(b)}{h} \le \lim_{h\to0} f(b)$$

بەڵام $\lim_{h\to0} f(b+h) = f(b)$ چونکە f نەخشەیەکی بەردەوامە لە $x = b$ و $A'(b) = \lim_{h\to0}\frac{A(b+h)-A(b)}{h}$

بە پشتبەستن بە پێناسەی داتاشراو $\lim_{h\to0} f(b) = f(b)$.

بە پشتبەستن بە سەلمێنراوی دوو مەرج و لەوەی پێشوو بۆمان دەردەچێت کە $A'(b) = f(b)$ کە $A(x)$ نەخشەی بنەڕەتییە بۆ $f(x)$.

ئەگەر بگەڕێینەوە بۆ ڕووبەری ئەو ناوچەیەی سنووردراوە بە چەماوەکە و تەوەری x لەلایەك و ڕاستەهێڵی $x = a$ و $x = b$ لەلایەکی ترەوە.

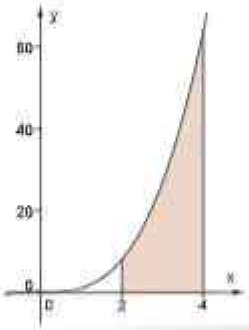


دەردەچێت کە $A(b) - A(a)$ ، $A(y)$

نەخشەی بنەڕەتییە بۆ $f(x)$ واتە $\boxed{S = A(b) - A(a)}$

لەوەوە دەردەکەوێت نەخشە بنەڕەتییەکان بۆ هەژمارکردنی ڕووبەرەکان بەسوودن.

نمونە 1 دۆزینەوەی ڕووبەری ناوچەیەك



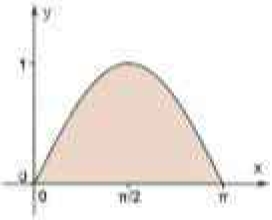
ئەگەر $f(x) = x^3$ ڕووبەری ئەو ناوچەیە بدۆزەوە کە سنووردراوە بە چەماوەی f وتەوەری x و هەر دوو ڕاستەهێڵی $x = 2$ و $x = 4$.

شیکار

بینیمان کە $A = F(b) - F(a)$ کاتێك F نەخشەی بنەڕەتی f بێت.

دەزانین کە $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ نەخشەی بنەڕەتی $f(x) = x^3$

لەوەوە دەردەچێت $A = F(4) - F(2) = \frac{1}{4}4^4 - \frac{1}{4}2^4 = 60$



خاڵی چاوبێری

1. ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بەنەخشەی $f(x) = \sin x$ و تەوەری x و هەر دوو ڕاستەهێڵی $x = 0$ و $x = \pi$ بدۆزەوە.

پێناسەی تەواوکاری سنووردار

ئەگەر f نەخشەیەکی بەردەوام بێت و a،b دوو بەهای بوارەکەی بن. ئەوا تەواوکاری سنووردار بۆ نەخشەی f لە نێوان a ، b دەکاتە $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

کاتێك $F(x)$ نەخشەی بنەڕەتی $f(x)$ بێت. بە a دەوترێت **نزمترین** ڕادەی تەواوکاری و b **بەرزترین** ڕادەی تەواوکاری، و f نەخشەی **بابەتی تەواوکارییە**.

ئەوانەی لەبواری بیرکاریدا کاردەکەن هێمای $\left[F(x)\right]_a^b$ لە جیاتی $F(b) - F(a)$ بەکاردەهێنن

تەواوکاری سنووردار چەند سیفەتێکی هەیە وادەکات هەژمارکردنی ئاسان بێت.

GRADE12-2011-CHAPTER 5 2/25/18 9:36 AM Page 12

سیفەتەکانی تەواوکاری سنووردار

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- ئەگەر f نەخشەیەکی بەردەوام بێت و $f(x) \geq 0$. x هەرچەند بێت لەماوەی $[a,b]$، ئەوا
  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- ئەگەر f و g دوو نەخشەی بەردەوام بن و $f(x) \leq g(x)$. x هەر چەند بێت لەماوەی $[a,b]$ ئەوا
  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- ئەگەر f نەخشەیەکی بەردەوام بێت ئەوا $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ نەخشەیەکە توانای داتاشرانی لە دراوسێی a دا هەیە. داتاشراوەکەی $F'(x) = f(x)$ ، بە نەخشەی $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ دەوترێت نەخشەی کەڵەکەبوو.

نموونـــــە 2

هەژمارکردنی تەواوکاری سنووردار

بەهای ئەم تەواوکاریانە هەژماربکە.

[ا] $\int_2^4 (x^2 - 3x - 2)dx$

[ب] $\int_{-1}^3 \left(-|x-1| + 2\right)dx$

شیکار

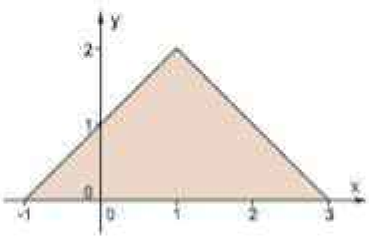
[ا] بە پشتبەستن بە سیفەتەکانی تەواوکاری سنووردار.

$$\int_2^4 (x^2 - 3x - 2)dx = \int_2^4 x^2dx - \int_2^4 3xdx - \int_2^4 2dx = \int_2^4 x^2dx - 3\int_2^4 xdx - 2\int_2^4 dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_2^4 - 3\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_2^4 - 2\left[x\right]_2^4 = \tfrac{1}{3}\left(4^3 - 2^3\right) - \tfrac{3}{2}\left(4^2 - 2^2\right) - 2\left(4 - 2\right) = -\tfrac{10}{3}$$

[ب] لەبەرئەوەی ئەخشەکە بەهای ڕووت لەخۆ دەگرێت، دەبێت خۆمان ڕزگاربکەین لە هێمای بەهای ڕووت بۆ ئەوەی بتوانین نەخشە بنەڕەتییەکە بدۆزینەوە ئەویش لە ڕێگای نووسینەوەی تەواوکارییەکە وەك سەرجەمی دوو تەواوکاری بەم شێوەی خوارەوە.

$$\int_{-1}^3 \left(-|x-1| + 2\right)dx = \int_{-1}^1 \left(-\left(-(x-1)\right) + 2\right)dx + \int_1^3 \left(+\left(-(x-1)\right) + 2\right)dx$$



$$= \int_{-1}^1 (x+1)dx + \int_1^3 (-x+3)dx$$

$$= \int_{-1}^1 xdx + \int_{-1}^1 1dx - \int_1^3 xdx + \int_1^3 3dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 + \left[x\right]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{2}x^2\right] + \left[3x\right]_1^3$$

$$= 2 - 4 + 6 = 4$$

دەتوانیت وەڵامەکەت ساغبکەیتەوە بەهۆی هەژمارکردنی ڕووبەری سێگۆشەکەی شێوەی سەرەوە

خۆت جاوبێری

2. بەهای ئەم تەواوکاریانە هەژماربکە.

[ا] $\int_{-2}^4 \left(x^2 - 2\right)dx$

[ب] $\int_{-1}^3 \left(1 - |x|\right)dx$

GRADE12-2011-CHAPTER 5 3/25/18 11:57 AM Page 15

بەهای ناوەند Mean Value

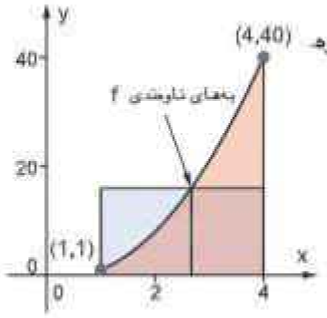
بە ژمارەی ڕاستی $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ دەوترێت **بەهای ناوەند بۆ نەخشەی f لەماوەی** $[a,b]$.

لەئامار‌دا فێربوویت کە ناوەڕاستەی کۆمەڵێك بەها لەوانەیە بەهایەك نەبێت لەو بەهایانە. ئەگەر ناوەندی نمرەکانی خوێندکارەکانی پۆلێك لە بابەتی بیرکاری65.7 ، ئەمە ئەوە ناگەیێنێت کە خوێندکارێك نمرەی 65.7 هێنابێت. ئایا بەهای ناوەندی نەخشەی f لەماوەکەدا بەهایەکە نەخشەکە وەریدەگرێت لە خاڵێکدا دەکەوێتە ئەو ماوەیە؟ وەڵامی ئەو پرسیارە بەڵێیە. بە پشتبەستن بە سەلمێنراوی بەهای ناوەند لە تەواوکارییدا.

سەلمێنراوی 5-2 بەهای ناوەند

ئەگەر f نەخشەیەکی بەردەوام بێت لەماوەی داخراوی $[a,b]$ ئەوا بەهایەك هەیە وەك $c\in[a,b]$ کە پاسادانی $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ دەکات.

نموونە 3 دۆزینەوەی بەهای ناوەند بۆ نەخشە



بەهای ناوەند بۆ نەخشەی $f(x)=3x^2-2x$ لەماوەی $[1,4]$ بدۆزەوە.

شیکار

بەهای ناوەند بۆ نەخشەکە لە ماوەی $[1,4]$ بریتییە لە

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{4-1}\int_1^4\left(3x^2-2x\right)dx=\frac{1}{3}\left[x^3-x^2\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{3}\left[64-16-(1-1)\right]=16$$

خاڵی چاودێری

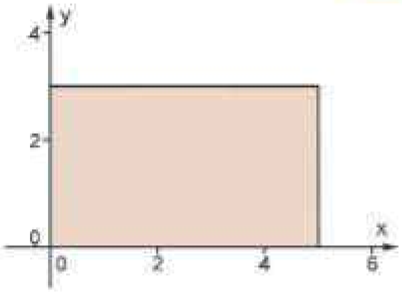
3. بەهای ناوەند بۆ نەخشەی $f(x)=2x+1$ لەماوەی $[1,4]$ بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 5 2/25/18 9:36 AM Page 14

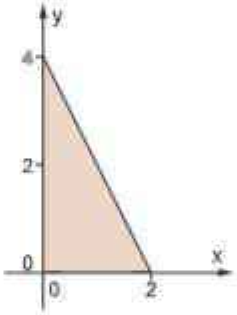
2-5 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 6 تەواوکارییەکی سنووردار بۆ ڕووبەری ناوچە سێبەرکراوە بنووسە بەبێ هەژمارکردنی بەهای ڕووبەرەکە.

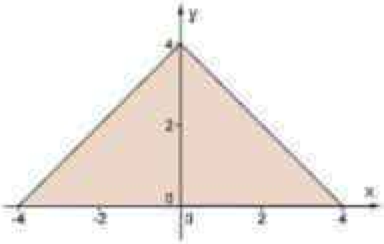
1 $f(x)=3$



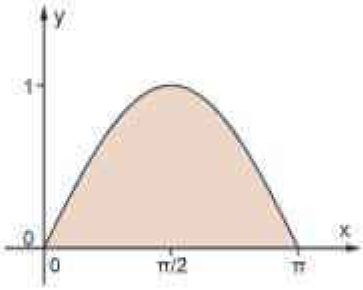
2 $f(x)=4-2x$



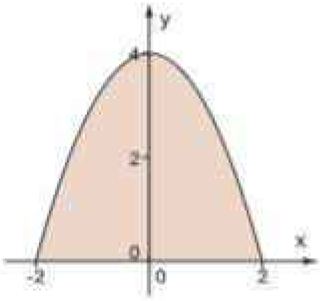
3 $f(x)=-|x|+4$



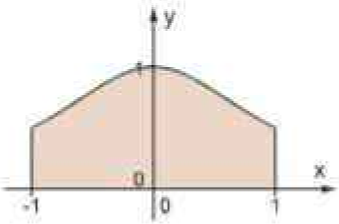
4 $f(x)=\sin(x)$



5 $f(x)=4-x^2$



6 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$



لە ڕاهێنانی 7 تا 10 وێنەی ئەو ناوچەیە بکێشە کە ڕووبەرەکەی دەکاتە تەواوکارییە سنووردارەکە. پاشان یاساکانی هەژمارکردنی ڕووبەر لە ئەندازە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوکارییەکە.

7 $\int_0^4 \frac{x}{2}dx$ **8** $\int_0^2 (2x+5)dx$ **9** $\int_{-1}^1 (1-|x|)dx$ **10** $\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$

لە ڕاهێنانی 11 تا 14 بەهای هەر تەواوکارییەک بە بەکارهێنانی ئەم بەهایانە بدۆزەوە.

$$\int_2^4 dx=2 \qquad \int_2^4 xdx=6 \qquad \int_2^4 x^3dx=60$$

11 $\int_2^4 4xdx$ **12** $\int_2^4 (x^3+4)dx$ **13** $\int_2^4 15dx$ **14** $\int_2^4 (6+2x-x^3)dx$

GRADE12-2011-CHAPTER 5 2/25/18 9:36 AM Page 17

لە ڕاهێنانی 15 تا 26 ئەم تەواوکاریانە هەژمار بکە

15 $\int_{2}^{7} 3dx$

16 $\int_{0}^{1} 2xdx$

17 $\int_{-1}^{0} (x^2-2)dx$

18 $\int_{1}^{3} (3x^2+5x-4)dx$

19 $\int_{1}^{2} \left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx$

20 $\int_{-3}^{3} x^{\frac{1}{3}}dx$

21 $\int_{1}^{4} \frac{x-2}{\sqrt{x}}dx$

22 $\int_{-1}^{0} \left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)dx$

23 $\int_{0}^{3} |2x-3|dx$

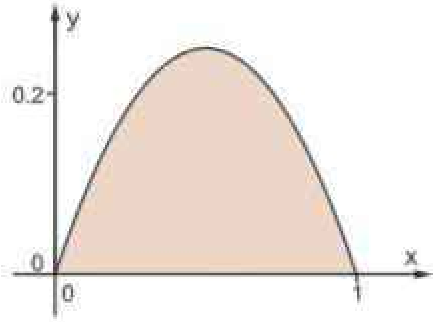
24 $\int_{1}^{4} (3-|x-3|)dx$

25 $\int_{0}^{\pi} (1+\sin x)dx$

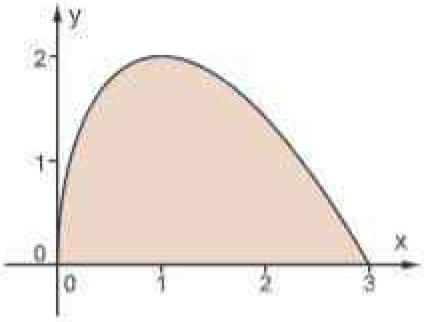
26 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

لە ڕاهێنانی 27 تا 30 ڕووبەری ناوچە سێبەرکراوەکە بدۆزەوە.

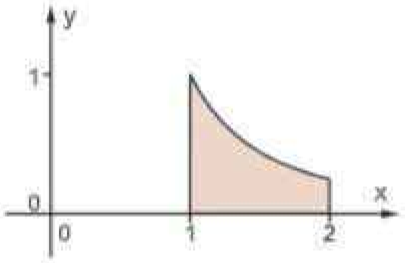
27 $f(x)=x-x^2$



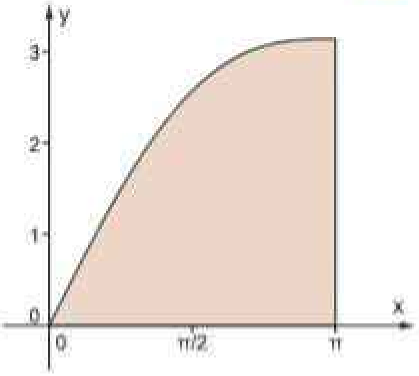
28 $f(x)=(3-x)\sqrt{x}$



29 $f(x)=\frac{1}{x^2}$



30 $f(x)=x+\sin x$

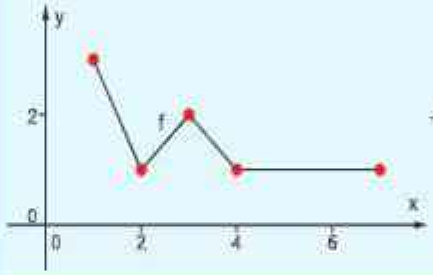


لە دوو ڕاهێنانی 31 و 32 ڕووبەری ئەو ناوچە بدۆزەوە کە سنووردراوە بە چەماوەی $f(x)$ و تەوەری x و دوو ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$.

31 $f(x)=3x^2+1$ $a=0$ $b=2$

32 $f(x)=1+\sqrt[3]{x}$ $a=0$ $b=8$

دەربارەی چەمکەکان



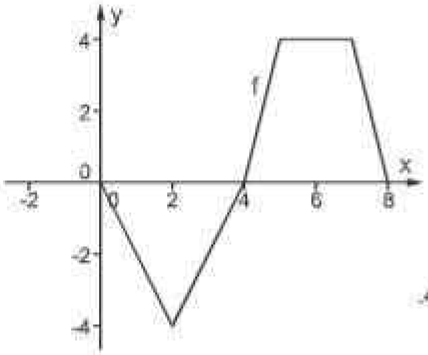
33 وێنەی بەرامبەر بەکاربهێنە.

أ $\int_1^7 f(x)dx$ بدۆزەوە.

ب بەهای ناوەند بۆ نەخشەی f لەماوەی $[1,7]$ بدۆزەوە.

ج شیکاری دوو پرسیاری پێشوو دووبارە بکەوە دوای ڕاکێشانی نەخشەکە بە دوو یەکە بۆ سەرەوە.

34 g نەخشەیەکی پێناسەکراوە وەک $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ کاتێک f نەخشەیەکە ڕوونکردنەوەکەی لەوێنەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.



أ بەهایەکی نزیکراوە بدە بە $g(0)$ ، $g(2)$ ، $g(4)$ ، $g(6)$ ، $g(8)$.

ب فراوانترین ماوە بدۆزەوە کە نەخشەکە تێیدا ڕوو لە زیادبوونە و تێیدا ڕوو لەکەمبوونە.

ج بەها بەرزەکان و نزمەکانی g بدۆزەوە.

د وێنەی ڕوونکردنەوەیی نزیکراوە بۆ چەماوەی g بکێشە.

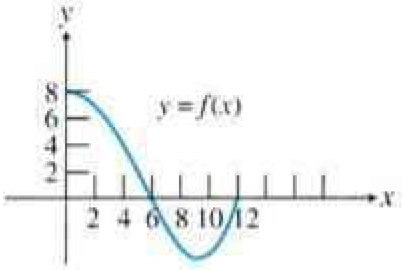
لە ڕاهێنانی 35 و 36 دا $F'(x)$ بدۆزەوە.

35 $F(x)=\int_8^x \sqrt[3]{t}dt$

36 $F(x)=\int_0^x t\left(t^2+1\right)dt$

37 **هەڵە لە کوێیە؟** هەڵە لەکوێیە لە نووسینی $\int_{-1}^{1} x^{-2}dx=\left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1}=(-1)-1=-2$.

38 $H(x)=\int_0^x f(t)dt$ کاتێک f نەخشەیەکی بەردەوامە بوارەکەی ماوەی $[0,12]$ ـەو چەماوەکەی لە وێنە بەرامبەردایە.



أ $H(0)$ بدۆزەوە.

ب لە چ ماوەیەکدا H نەخشەیەکی ڕوو لەزیادبوونە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

ج لە چ ماوەیەکدا ڕوونکردنەوەی H قۆقزە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

د $H(12)$ موجەبە یان سالب؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

هـ لە کوێدا نەخشەی H بەرزترین کۆتایی خۆجێی هەیە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

و جۆری ئەو بەرزترین کۆتایی خۆجێیە دیاریبکە. وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 5 2/25/18 9:36 AM Page 19

بەشی 5

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1-5 تەواوکاری بێسنوور

1 هەریەکە لەم تەواوکارییە بێسنوورانە بدۆزەوە.

أ $\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}\right)dx$　　ب $\int\frac{1+2\cos x}{3}dx$　　ج $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

2-5 تەواوکاری سنووردار

2 هەریەك لەم تەواوکارییە سنووردارانە بدۆزەوە.

أ $\int_{-1}^{0}(2x-1)(x+1)dx$　　ب $\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}}(1-|\cos x|)dx$

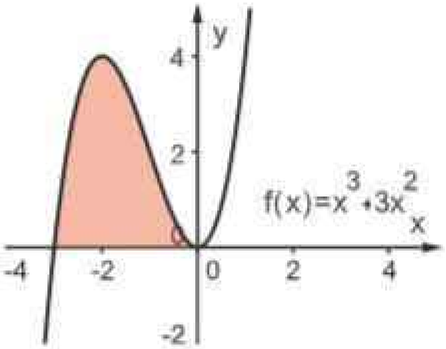
3 ئەگەر $\int_{-1}^{2}f(x)dx=3$ و $\int_{-1}^{4}f(x)dx=2$ ، ئەوا بەهای ئەمانە بدۆزەوە.

أ $\int_{-1}^{2}(x-2f(x))dx$　　ب $\int_{2}^{4}f(x)dx$

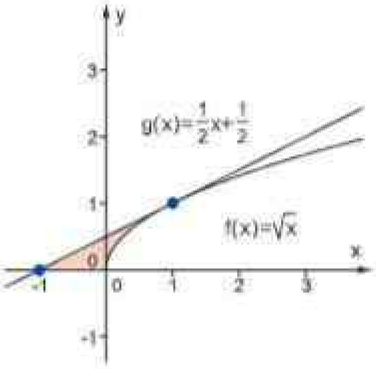
2-5 هەژمارکردنی ڕووبەرەکان

4 ڕووبەری ناوچە سێبەرکراوەکان بدۆزەوە.

أ



ب



2-5 تاودان

5 خێرایی ئۆتۆمبێلێك $30m/s$ بوو کاتێك شۆفێرەکە پێی لە برێك نا، دوای دوو چرکە ئۆتۆمبێلەکە ڕاوەستا. ئەگەر وادانرا تاودانی ئۆتۆمبێلەکە نەگۆڕە لە ماوەی برێك کردنەکەدا، ئەو تاودانە و ئەو دوورییەی بڕیویەتی بدۆزەوە لەو کاتەی برێکی گرتوە تا وەستاوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 5 2/25/18 9:36 AM Page 18

3-5 هەژمارکردنی تەواوکاری
Integration Methods

هەژمارکردنی تەواوکاری، سنوورداربێت یان بێسنوور بەکارێکی گران دادەنرێت بەبەراوردکردن بە هەژمارکردنی داتاشراو. دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەت بۆ نەخشەیەکی دیاریکراو هەموو کات کارێکی ئاسان نییە بۆ زاڵبوون بەسەر ئەو ئاستەنگانە بیرکاریناسان لەم بوارەدا گەیشتنە چەند ڕێگایەکی جیاواز. لەگەڵ بەکارهێنانی ڕێسا بنەڕەتییەکانی دۆزینەوەی تەواوکاری وەك لەپێشەوە باسکرا دوو ڕێگای تریش هەن دەتوانرێت لەزۆر باردا پەنایان بۆ ببەین، ئەویش ڕێگای تەواوکاری بە بەشبەشکردن و ڕێگای تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆڕاوە.

ئامانجەکان

- تەواوکاری سنووردار هەژماردەکات بەڕێگای تەواوکاری بەبەشبەشکردن.
- تەواوکاری سنووردار هەژماردەکات بەڕێگای لەجیاتیدانانی گۆڕاو.

زاراوەکان Vocabulary

تەواوکاری بە بەشبەشکردن Integration by parts

تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆڕاو Integration by Substitution

تەواوکاری بە بەشبەشکردن

زانای بیرکاری لایبنیز Leibniz ئەم ڕێگایەی بەکارهێنا: ئەگەر $u(x)$ نەخشەیەك بێت بەپێی x ئەوا $du = u'(x)dx$ ، du بە جیاکاری $u(x)$ و dx بە جیاکاری x ناونا. ئەو ڕێگایە بەکاردەهێنین، چونکە وادەکات دوو بابەتەکەی ئەم وانەیە ئاسان بن.

ڕێگای تەواوکاری بە بەشبەشکردن لە ڕێسای داتاشراوی ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشە دەردەچێت. وەك دەزانین $(uv)' = uv' + vu'$.

لەمەوە دەردەچێت

$$d(uv) = (uv)'dx = (uv' + vu')dx = uv'dx + vu'dx = udv + vdu$$

لەمەوەش

$$u(x)v(x) = \int [u(x)v(x)]' dx = \int (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))dx$$

$$= \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx$$

ئەمەی پێشوو بەم شێوەیە دەنووسرێت

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

یان $\int udv = uv - \int vdu$

سەرکەوتنی بەکارهێنانی ئەم ڕێگایە دەکەوێتە سەر باش دیاریکردنی u و dv هەردەم هەوڵبدە u وا هەڵبژێریت کە داتاشراوەکەی لەخۆی ئاسانتربێت.

نموونە 1 تەواوکاری بە بەشبەشکردن

$\int xe^x dx$ بدۆزەوە.

شیکار

وەك دیارە داتاشراوی $f(x) = x$ ئاسانترە لە نەخشەکە خۆی. کەواتە $u = x$ و $dv = e^x dx$ هەڵبژێرە.

ئینجا du و v بدۆزەوە. دەردەچێت $u'(x) = 1$ ، $du = u'(x)dx = dx$

$$v(x) = \int v'(x)dx = \int e^x dx = e^x$$

ئێستا ڕێسای تەواوکاری بە بەشبەشکردن بەکاربهێنە.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int (1)e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

خاڵی چاودێری

.1 $\int x^2 \ln x dx$ بدۆزەوە.

نموونە 2 تەواوکاری نەخشەی یەک ڕادەیی

$\int_1^e \ln x dx$ بدۆزەوە.

شیکار

سەرەتا تەواوکاری بێسنوور $\int \ln x dx$ بدۆزەوە. دیارە کە داتاشراوی $f(x) = \ln x$ لە نەخشەکە خۆی ئاسانترە، کەواتە $u = \ln x$ و $dv = dx$ هەڵبژێرە ئینجا du و v بدۆزەوە. $du = u'(x)dx = \frac{1}{x}dx$ و $v = \int dx = x$. ڕێسای تەواوکاری بە بەشبەشکردن بەکاربهێنە.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int\left(\frac{1}{x}\right)(x)dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

ئێستا تەواوکارییە سنووردارەکە هەژمار بکە.

$$\int_1^e \ln x dx = \left[x(\ln x - 1)\right]_1^e = (e)(\ln(e) - 1) - (1)(\ln(1) - 1) = e(1-1) - (0-1) = 1$$

خاڵی جاودێری

2. $\int_1^3 \ln 3x dx$ بدۆزەوە.

تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆڕاو

بۆ بەکارهێنانی ڕێسای تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆڕاو سوود لە داتاشراوی نەخشەی ناوێتە وەردەگرین بە بەکارهێنانی ڕێگای لایبینز Leibniz ئەگەر $u = g(x)$ ئەوا $du = g'(x)dx$ ئەوکاتە.

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

نموونە 3 تەواوکاری بە لەجیاتیدانانی گۆڕاو

$\int 2x(x^2+1)^2 dx$ بدۆزەوە.

شیکار

وا دابنێ $u = x^2 + 1$ لەوەوە دەردەچێت $du = 2xdx$ بەمەش

$$\int 2x(x^2+1)^2 dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}(u)^3 + C = \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + C$$

خاڵی جاودێری

3. $\int 2x\sqrt{x^2-1}dx$ بدۆزەوە.

نموونە 4 هەژمارکردنی تەواوکاری سنووردار بە لەجیاتیدانانی گۆڕاو

$\int_0^1 x(x^2+1)^3 dx$ بدۆزەوە.

شیکار

تەواوکاری بێسنووری $\int x(x^2+1)^3 dx$ بدۆزەوە ئەویش بە لەجیاتیدانانی $u = x^2 + 1$ کەواتە $du = 2xdx$ یان $xdx = \frac{1}{2}du$ لەوەوە دەردەچێت.

$$\int x(x^2+1)^3 dx = \int \frac{1}{2}u^3 du = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]$$

ئێستا تەواوکارییە سنووردارە کە هەژمار بکە.

$$\int_0^1 x(x^2+1)^3 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

خاڵی جاودێری

4. $\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}dx$ بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 5 2/25/18 9:36 AM Page 20

3-5 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 4 نەخشەکە بە تەواوکاری گونجاو لەو تەواوکارییە بێسنوورانە ببەستەوە.

(أ) $\int \ln x dx$ (ب) $\int x\sin x dx$ (ج) $\int x^2 e^x dx$ (د) $\int x^2\cos x dx$

1 $f(x)=\sin x - x\cos x + c$ **2** $f(x)=x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

3 $f(x)=x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$ **4** $f(x)=-x + x\ln x + c$

لە ڕاهێنانی 5 تا 8 u و dv دیاریبکە بۆ دەستپێکردنی تەواوکاری بە بەشبەشکردن (تەواوکارییەکە داواکراو نییە).

5 $\int xe^{2x}dx$ **6** $\int(\ln x)^2 dx$ **7** $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$ **8** $\int x^2\cos x dx$

لە ڕاهێنانی 9 تا 10 $g(x)$ جیابکەوە لە $\int f(g(x))g'(x)dx$

9 $\int 10x(5x^2+1)^2 dx$ **10** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

لە ڕاهێنانی 11 تا 13 تەواوکاری بێسنوور بە گونجاوترین ڕێگا بدۆزەوە.

11 $\int (x^2-1)e^x dx$ **12** $\int x\sqrt{x-1}dx$ **13** $\int x\cos x dx$

لە ڕاهێنانی 14 تا 16 نەخشەی بنەڕەتی بۆ f کە بەخاڵێکی دیاریکراودا دەڕوات بدۆزەوە.

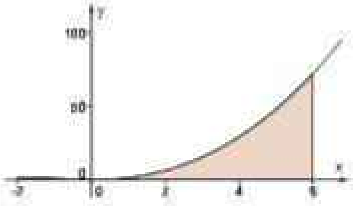
14 $f(x)=x\cos\frac{x}{2}$ ، $(0,3)$ **15** $f(x)=2x(4x^2-10)^2$ ، $(2,10)$ **16** $f(x)=-2x\sqrt{8-x^2}$ ، $(2,7)$

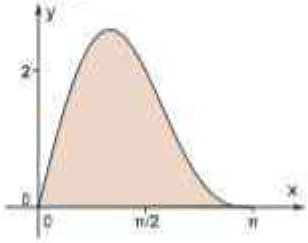
ئەم تەواوکارییە سنووردارە هەژماربکە.

17 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

لە دوو ڕاهێنانی 18 و 19 ڕووبەری ناوچە سێبەرکراوەکە بدۆزەوە.

18 $\int_{-2}^{6} x^2\sqrt[3]{x+2}dx$ **19** $\int_0^{\pi}(2\sin x + \sin 2x)dx$





20 ئەمە $\int_0^2 x^2dx = \frac{8}{3}$ بەکاربهێنە بۆ دەستکەوتنی بەهای ئەو تەواوکارییە سنووردارانە بەبێ ئەوەی تەواوکاری ئەنجامبدەیت.

(أ) $\int_{-2}^{0} x^2dx$ (ب) $\int_{-2}^{2} x^2dx$ (ج) $\int_0^2 -x^2dx$ (د) $\int_{-2}^{0} 3x^2dx$

دەربارەی چەمکەکان

21 ڕوونیبکەوە بۆچی $\int x(5-x^2)^3dx \neq \int u^3du$ کاتێک $u=5-x^2$.

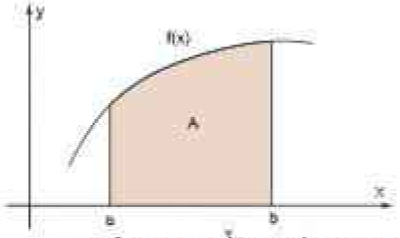
22 ڕوونیبکەوە بۆچی $\int_{-2}^{2} x(x^2+1)^2dx = 0$ بەبێ ئەوەی تەواوکاری ئەنجامبدەیت.

23 $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx$ بدۆزەوە بە بەکارهێنانی:

(أ) تەواوکاری بە بەشبەشکردن کاتێک $dv=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx$ بێت. (ب) بە لەجیاتدانانی گۆڕاو کاتێک $u=4+x^2$ بێت.

GRADE12-2011-CHAPTER 5 3/25/18 11:57 AM Page 23

4-5 جێبەجێکردنەکانی تەواوکاری
Applications of Integral

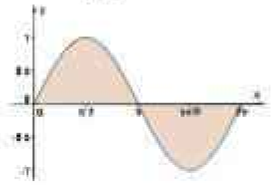


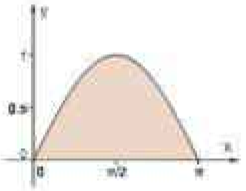
ئامانجەکان

- تەواوکاری سنووردار بۆ هەژمارکردنی ڕووبەر بەکاردەهێنێت.
- تەواوکاری سنووردار بۆ هەژمارکردنی قەبارە بەکاردەهێنێت.

هەژمارکردنی ڕووبەر

لەوانەکانی پێشوو فێربوویت کە تەواوکاری سنووردار یارمەتیتدەدات بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری ئەو ناوچەی سنووردراوە بە ڕوونکردنەوەی نەخشە و تەوەری x لەلایەك و هەردوو ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$ کاتێك $a<b$ لە لایەکی تر. نەخشەکە موجەبە لە ماوەی $[a,b]$ واتا $f(x)>0$ بۆ هەربەهایەکی x لەو ماوەیەدا. بۆ ئەوەی گرنگی ئەمە تێبگەیت هەژماری $\int_0^{\pi}\sin x dx$ و $\int_0^{2\pi}\sin x dx$ بکە.





$$\int_0^{\pi}\sin x dx=-[\cos x]_0^{\pi}=-\cos 2\pi-(-\cos 0)=2$$

$$\int_0^{2\pi}\sin x dx=[\cos x]_0^{2\pi}=-\cos 2\pi-(-\cos 0)=0$$

لە ئەنجامەکانی پێشوو بۆت دەردەکەوێت کە $\int_0^{2\pi}\sin x dx=0$ واتا بەهای $\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx$ ژمارەیەکی سالبە ئەمەش وامان لێدەکات جیاوازی بکەین لەنێوان ئەو بارەی نەخشەکە تێیدا سالب نییە لەماوەی $[a,b]$ کاتێك $a<b$ و ئەو بارەی نەخشەکە تێیدا موجەب نییە لە هەمان ماوەدا.

هەژمارکردنی ڕووبەر

ئەگەر a ، b دوو ژمارە ڕاستی بن، بەمەرجێك $a<b$ ئەوا ڕووبەری ئەو ناوچەیەی کە بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ و تەوەرەی x و دوو ڕاستە هێڵی $x=a$ ، $x=b$ سنووردراو دەکاتە $\int_a^b f(x)dx$.

بۆ هەژمارکردنی ناوچەیەکی سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی f تەوەری x و دوو ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$ ، پێویستە سەرەتا ماوەی $[a,b]$ بەشبکەیت، بەشێوەیەك نەخشەکە هێمایەکەی بپارێزێت لە هەموو بەشەکان، پاشان ڕووبەری هەموو بەشەکان هەژماربکە لەکۆتاییدا ڕووبەرەکان کۆبکەوە. بگەڕێنەوە بۆ ڕووبەری سنووردراو بە نەخشەی $f(x)=\sin x$ و تەوەری x دوو ڕاستەهێڵی $x=0$ و $x=2\pi$ ئەوا ئەو ڕووبەرە دەکاتە $\int_0^{\pi}\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx=2-(-2)=4$.

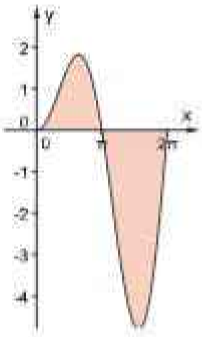
نموونــــە 1

هەژمارکردنی ڕووبەر

ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x\sin x$ و تەوەری x لەلایەك و دوو ڕاستەهێڵی $x=0$ و $x=2\pi$ لەلایەکی تر بدۆزەوە.

شیکار

سەرەتا نەخشەی بنەڕەتی بۆ نەخشەی f بدۆزەوە پێشتر زانیت $F(x)=\sin x-x\cos x$ نەخشەی بنەڕەتییە بۆ نەخشەی $f(x)=x\sin x$. ئینجا وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە بۆ دیاریکردنی چۆنیەتی بەشبوونی ماوەکە $[0,2\pi]$.



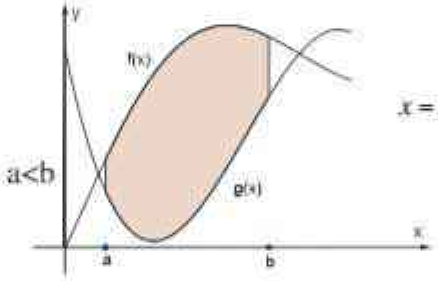
نەخشەکە موجەبە لە ماوەی $[0,\pi]$ و سالبە لەماوەی $[\pi, 2\pi]$. لەمەوە دەردەچێت کە ڕووبەری ناوچەی سێبەرکراوی A دەکاتە.

$$A=\int_0^{\pi} x\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx=\left[\sin x-x\cos x\right]_0^{\pi}-\left[\sin x-x\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=\left[\sin(\pi)-(\pi)\cos(\pi)\right]-\left[\sin(0)-(0)\cos(0)\right]$$
$$-\left[\left[\sin(2\pi)-(2\pi)\cos(2\pi)\right]-\left[\sin(\pi)-(\pi)\cos(\pi)\right]\right]$$
$$=\left[\pi-0\right]-\left[-2\pi+(-\pi)\right]=4\pi$$

خاڵی چاوتێری

1. ڕووبەری ئەو ناوچەیە بدۆزەوە سنووردراوە بە ڕوونکردنەوەی $f(x)=\cos x$ و تەوەری x لەلایەک و دوو ڕاستەهێڵی $x=-\pi$ و $x=\pi$.

ڕووبەری نێوان چەماوەی دوو نەخشە



بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی هەردوو نەخشەی $f(x)$ و $g(x)$ و دوو ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$ کاتێک $a<b$ ئەمەی خوارەوە بەکاربهێنە.

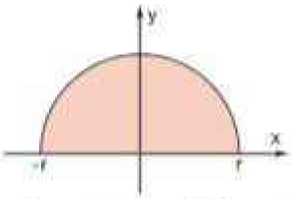
هەژمارکردنی ڕووبەری نێوان چەماوەی دوو نەخشە

ئەگەر f، g دوو نەخشەی بەردەوام بن وپاسادانی $f(x)\geq g(x)$ لەماوەی $[a,b]$، ئەوا ڕووبەری سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی هەردوو نەخشەی $f(x)$ و $g(x)$ و هەردوو ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$ کاتێک $a<b$ دەکاتە.

$$A=\int_a^b \left| f(x)-g(x)\right| dx$$

نموونە 2

ڕووبەری بازنە



تەواوکاری بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری بازنەیەک نیوەتیرەکەی r بێت.

شیکار

ئەنجامەکە ناگۆڕێت ئەگەر چەقی بازنەکە لە خاڵی بنەڕەت دابنێت، ئەوکات هاوکێشەی بازنەکە دەبێتە $x^2+y^2=r^2$. ڕووبەری نیوەی بازنەکەی دەکەوێتە سەرەوەی تەوەری x بەسە بیدۆزیتەوە. ئەو ڕووبەرە A بریتییە لە ڕووبەری نێوان ڕوونکردنەوەی $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ و $g(x)=0$ لەلایەک و دوو ڕاستەهێڵی $x=-r$ و $x=r$ لەلایەکی تر.

$$A=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

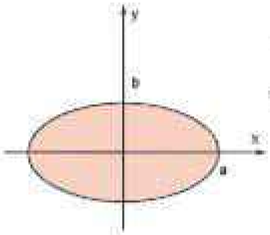
بۆ دۆزینەوەی ئەم تەواوکارییە گۆڕاوەکە دەگۆڕین $x=r\cos t$ کەواتە $dx=-r\sin t dt$ لەدواییدا:

$$A=\int_{\pi}^{0}\sqrt{r^2-r^2\cos^2 t}\,(-r\sin t)dt=\int_{\pi}^{0}-r^2\sqrt{1-\cos^2 t}\,\sin t dt=r^2\int_0^{\pi}\sin^2 t dt$$
$$=r^2\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{r^2}{2}\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{r^2}{2}\left[\pi-0\right]=\frac{\pi r^2}{2}$$

کەواتە ڕووبەری بازنەکە دەکاتە πr^2.

لەبیرت بێت

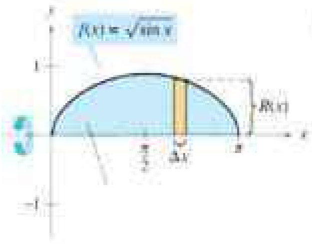
بۆ ئەوەی x هەموو بەهایەکانی ماوەی $[-r, r]$ وەربگرێت ئەبێت t هەموو بەهایەکانی ماوەی $[\pi, 2\pi]$ وەربگرێت کەواتە نزمترین ڕاددەی تەواوکارییەکە π و بەرزترین ڕاددەی 2π دەبێت.

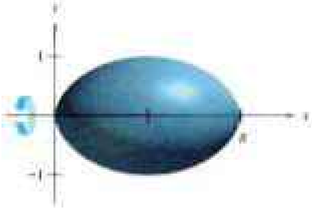


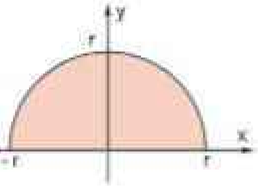
خاڵی چاودێری

2. ئەم برگە ناتەواوەی بەرامبەرت چەماوەیەکی داخراوە هاوکێشەکەی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ئەم جۆرە چەماوانە لەبەشی داهاتوودا فێردەبیت، بیسەلمێنە ڕووبەری ئەو برگە ناتەواوە دەکاتە πab.

هەژمارکردنی قەبارەکان







تەواوکاری سنووردار بۆ هەژمارکردنی قەبارەکان بەکاردێت. لەمەودوا هەژمارکردنی قەبارەی بارێك (بارێکی تایبەت) لەبارەکان فێردەبێت، ئەویش باری قەبارەی ئەو تەنەیە کە دەستت دەکەوێت لە ئەنجامی سووڕانی بەشێك لە ڕوونکردنەوەی نەخشە $f(x)$، لە ماوەی $[a, b]$دا بە دەوری تەوەری x بە خولێکی تەواو لە بۆشاییدا. بۆ نموونە گۆ: گۆیەکت دەست دەکەوێت کە نیوەتیرەکەی r بێت و چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت لە ئەنجامی سوڕانەوەی نیوەی سەرەوەی بازنەی $x^2+y^2=r^2$ بەدەوری تەوەری x بە خولێکی تەواو.

قەبارەی ئەو جۆرە تەنانە هەژمار دەکرێت بە بەکارهێنانی ئەو ڕێسابیەی خوارەوە.

هەژمارکردنی قەبارەی تەنێکی خولاوە

ئەگەر f نەخشەیەکی بەردەوام بێت ئەوا قەبارەی ئەو تەنەی پەیدا دەبێت لە ئەنجامی سوڕانەوەی بەشێك لە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ بەخولێکی تەواو لە بۆشاییدا بەدەوری تەوەری x لە ماوەی $[a,b]$، بە پێی ئەم ڕێسایە هەژمار دەکرێت $V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$.

ئەگەر f، g دوو نەخشەیەکی بەردەوام بن ئەوا قەبارەی ئەو تەنەی پەیدا دەبێت لە ئەنجامی سوڕانەوەی هەردوو نەخشەکە بەخولێکی تەواو بەدەوری تەوەری x لە بۆشاییدا لە ماوەی $[a,b]$ دا بەم ڕێسایە هەژمار دەکرێت $V=\pi\int_a^b \left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)dx$.

نموونە 3 قەبارەی گۆ

قەبارەی گۆیەك بدۆزەوە، نیوەتیرەکەی r بێت.

شیکار

ئەنجامەکە ناگۆڕێت ئەگەر چەقی گۆیەکە لە خاڵی بنەڕەت دابنێیت. لەبەرئەوەی ئەو گۆیە نیوەتیرەکەی r و چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە پەیدادەبێت لە ئەنجامی سوڕانەوەی نیوەی سەرەوەی بازنەی $x^2+y^2=r^2$ خولێکی تەواو بەدەوری تەوەری x، قەبارەکەی دەکاتە بەهای تەواوکاری.

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(f(x))^2\,dx=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\int_{-r}^{r}r^2dx-\pi\int_{-r}^{r}x^2dx$$

$$=\pi\left[r^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}=\pi\left[r^3-(-r^3)-\tfrac{1}{3}\left(r^3-(-r)^3\right)\right]=\pi\left[2r^3-\tfrac{2}{3}r^3\right]=\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

کەواتە قەبارەی گۆیەك نیوەتیرەی r بێت دەکاتە $v=\frac{4}{3}\pi r^3$.

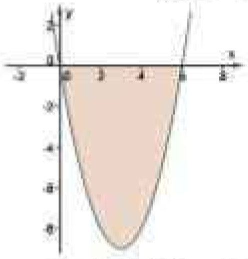
4-5 ڕاهێنان

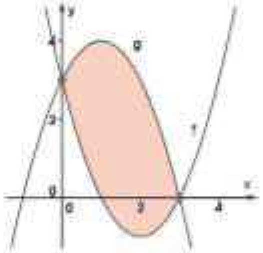
لە ڕاهێنانی 1 تا 3 تەواوکاری سنووردار بۆ ڕووبەری ناوچەی سێبەرکراو بنووسە.

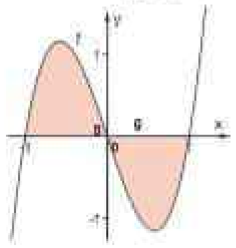
1 $f(x)=x^2-6x$ ، $g(x)=0$

2 $f(x)=x^2-4x+3$ ، $g(x)=-x^2+2x+3$

3 $f(x)=3\left(x^3-x\right)$ ، $g(x)=0$







لە ڕاهێنانی 4 تا 6 نەخشەی ناو تەواوکاری بەشێوەی جیاوازی نێوان دوو نەخشە دەردەکەوێت، ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بکێشە،و ئەو ناوچەی کە تەواوکارییەکە ڕووبەرەکەی دەنوێنێت سێبەربکە.

4 $\int_0^4\left[(x+1)-\frac{x}{2}\right]dx$

5 $\int_2^3\left[4\left(\frac{x^3}{3}-x\right)-\frac{x}{3}\right]dx$

6 $\int_0^1\left[e^x(-x+1)\right]dx$

لە دوو ڕاهێنانی 7 و 8 ئەو بەهایە هەڵبژێرە کە باشترین خەملاندن بۆ ڕووبەری سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی چەماوەی دوو نەخشەکە پێکدەهێنێت.

7 $f(x)=x+1$ ؛ $g(x)=(x-1)^2$ ؛
ا -2 ب 2 ج 10 د 4 هـ 8

8 $f(x)=2-\frac{1}{2}x$ ؛ $g(x)=2-\sqrt{x}$ ؛
ا 1 ب 6 ج -3 د 3 هـ 4

لە ڕاهێنانی 9 تاکو 12 دا ئەو ڕووبەرە بدۆزەوە کە سنووردراوە بە تەوەری x و ڕوونکردنەوەی نەخشەکە و دوو ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$.

9 $f(x)=\sin x$ ؛ $a=0$ ؛ $b=\pi$

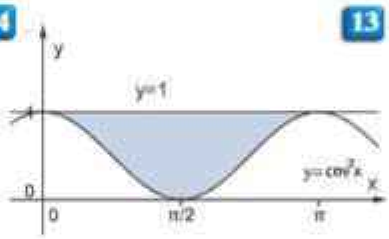
10 $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ؛ $a=-\frac{\pi}{4}$ ؛ $b=\frac{\pi}{4}$

11 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ؛ $a=-3$ ؛ $b=3$

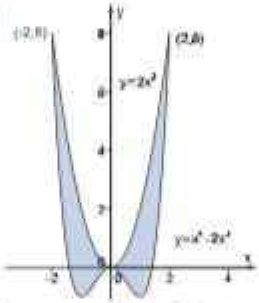
12 $f(x)=e^{2x}$ ؛ $a=0$ ؛ $b=1$

لە ڕاهێنانی 13 تا 15 ڕووبەری ناوچەی سێبەرکراو بدۆزەوە.

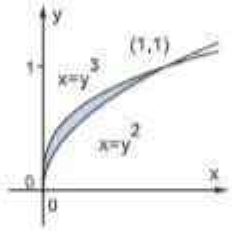
13



14



15



لە ڕاهێنانی 16 تا 21 خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکە بدۆزەوە، لە پاشاندا ڕووبەری ئەو ناوچەی سنووری دەدەن بدۆزەوە.

16 $f(x)=x^2-2$ ؛ $g(x)=2$

17 $f(x)=7-2x^2$ ؛ $g(x)=x^2-5$

18 $x+y^2=0$ ؛ $x+3y^2=2$

19 $x+y^2=3$ ؛ $4x+y^2=0$

20 $f(x)=8\cos x$ ؛ $g(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ؛ $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}$

21 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ ؛ $g(x)=x$

لە دوو پرسیاری 22 و 23 دا بەهای b بدۆزەوە کاتێك ڕاستەهێڵی $y=b$ ناوچەی سنووردراو بە دوو ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەشدەکات بۆ دوو بەشی یەکسان لە ڕوویەردا.

22 $g(x)=0 : f(x)=9-x^2$

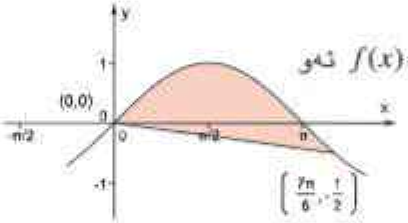
23 $g(x)=0 : f(x)=9-|x|$

ڕاست یان هەڵە **لە پرسیاری 24 تاکو 26، دیاریبکە ئەگەر ڕستەکە ڕاستە، هۆیەکەی لێکبدەوە، و ئەگەر هەڵەیە بە دژە نموونەیەك بیسەلمێنە**

24 ئەگەر ڕوویەری ناوچەی سنووردراو بە هەردوو ڕوونکردنەوەی f و g بکاتە 1، ئەوا ڕوویەری سنووردراو بە دوو چەماوەی $h(x)=f(x)+c$ و $k(x)=g(x)+c$ ئەویش دەکاتە 1.

25 ئەگەر $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=A$ ئەوا $\int_a^b [g(x)-f(x)]dx=-A$.

26 ئەگەر هەردوو چەماوەی f و g لە خاڵێکدا کە پۆتانی x ی لە ناوەڕاستی a و bدایە یەکتری ببڕن. ئەوا $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=0$.



27 **ڕوویەر** ڕوویەری سنووردراو بە چەماوەی نەخشەی $f(x)=\sin x$ ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی کە خاڵی بنەڕەت دەگەیەنێت بە خاڵی $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ بدۆزەوە وەك لە وێنەکەدا دەردەکەوێت.

لە پرسیاری 28 تا 31 قەبارەی ئەو تەنە بدۆزەوە کە لە ئەنجامی خولانەوەی ناوچە دیاریکراو بە ڕوونکردنەوەی هاوکێشەکان بەدەوری تەوەری x دروست دەبێت.

28 $x=2$ ، $y=0$ ، $y=x^2$

29 $y=0$ ، $y=\sqrt{9-x^2}$

30 $x=0$ ، $y=1$ ، $y=x$

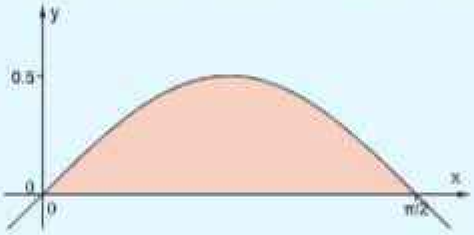
31 $y=x+3$ ، $y=x^2+1$

32 تەواوکاری بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی قەبارەی ئەو تەنەی لەئەنجامی خولانەوەی سێگۆشەی $(0,0)$ ، $(b,0)$ ، $(0,h)$ بەدەوری تەوەری x دا دروست دەبێت.

33 تەواوکاری بەکاربهێنە بۆ نووسینەوەی ڕێسای هەژمارکردنی قەبارەی قوچەکێك کە نیوەتیرەی بنکەکەی r و بەرزییەکەی h بێت.

بەرەنگاری

34 قەبارەی ئەو تەنە بدۆزەوە کە لە ئەنجامی خولانەوەی ناوچەی سنووردراو بە چەماوەی نەخشەی $f(x)=\cos x \sin x$ و تەوەری x بەدەوری تەوەری x دا دروست دەبێت.



بەشی 5

پێداچوونەوەی بەش

لە پرسیاری 1 تاکو 4 تەواوکاری بێسنوور بدۆزەوە.

1. $\int\left(2x^2+x-1\right)dx$

2. $\int\frac{2}{\sqrt[3]{3x}}\,dx$

3. $\int\frac{x^3+1}{x^2}\,dx$

4. $\int\left(5\cos x-\frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$

5. **خێرایی و تاودان** فڕۆکەیەک دوای بڕینی ماوەی 1350m لەسەر ڕاڕەوەکەی هەستا. فڕۆکەکە لەخاڵی وەستانەوە بە تاودانێکی نەگۆڕ دەرچوو بۆ ماوەی 30 چرکە پێش هەستانی، خێراییەکەی چەندبووە لەکاتی هەستانیدا؟

6. **خێرایی و تاودان** تۆپێک بەشاوڵی بەرەو سەرەوە هەڵدرا لەئاستی ڕووی زەوییەوە بەخێرایەیی سەرەتای کە بڕەکەی $30\,m/s$بوو.

أ تۆپەکە چەند کاتی پێویستە بۆ ئەوەی بگاتە بەرزترین خاڵ؟

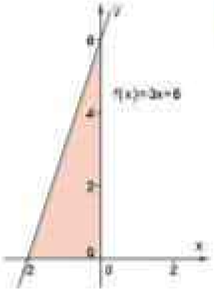
ب بەرزی ئەم خاڵە چەندە؟

ج کەی خێرایی تۆپەکە دەکاتە نیوەی خێراییە بنەڕەتییەکەی؟

د بەرزی تۆپەکە چەندە کاتێک خێراییەکەی دەکاتە نیوەی خێراییە بنەڕەتییەکەی؟

تەواوکارییەکی سنووردار بنووسە بۆ هەژمارکردنی ڕووبەرە سێبەرکراوەکە.

7.



لە دوو پرسیاری 8 و 9 دا وێنەی ڕووبەری ئەو ناوچەیە کە تەواوکارییەکە دەینوێنێت بکێشە.

8. $\int_0^5\left(5-|x-5|\right)dx$

9. $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

10. ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە ئەگەر زانیت $\int_2^6 f(x)dx=10$ و $\int_2^6 g(x)dx=3$.

أ $\int_2^6\left[f(x)+g(x)\right]dx$

ب $\int_2^6\left[f(x)-g(x)\right]dx$

ج $\int_2^6\left[2f(x)-3g(x)\right]dx$

د $\int_2^6 5f(x)dx$

11. ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە ئەگەر زانیت $\int_0^3 f(x)dx=4$ و $\int_3^6 f(x)dx=-1$.

أ $\int_0^6 f(x)dx$

ب $\int_6^3 f(x)dx$

ج $\int_4^4 f(x)dx$

د $\int_3^6 -10f(x)dx$

GRADE12-2011-CHAPTER 5 2/25/18 9:37 AM Page 29

لە ڕاهێنانی 12 تا 15 وێنەی ئەو ناوچەی کە تەواوکارییەکە ڕووبەرەکەی دەنوێنێت بکێشە و ڕووبەرەکە بدۆزەوە.

12 $\int_0^1 (2x+1)dx$

13 $\int_0^1 (x-x^3)dx$

14 $\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)dx$

15 $\int_3^4 (x^2-9)dx$

لە ڕاهێنانی 16 تا 19 تەواوکارییە بێسنوورەکە بدۆزەوە.

16 $\int (x^2+1)^3 dx$

17 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+3}} dx$

18 $\int \sin^3 x \cos x dx$

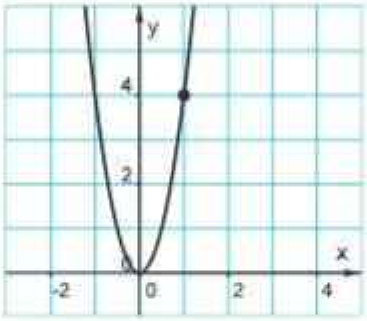
19 $\int \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}} d\theta$

20 بەهای ناوەند بۆ نەخشەی $f(x)$ لە ماوەی I بدۆزەوە.

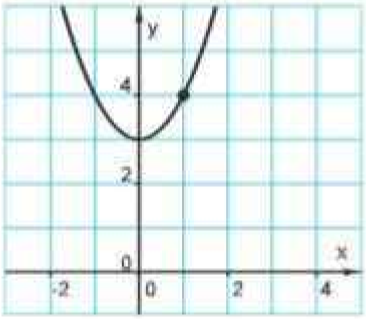
أ $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ $I=[0,4]$

ب $f(x)=a\sqrt{x}$ ؛ $I=[0,a]$

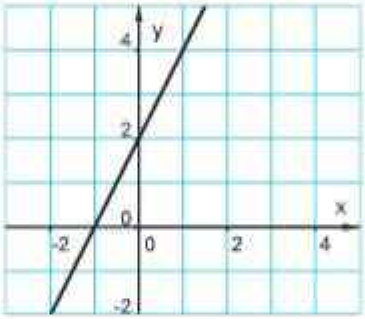
21 **بنووسە** کام لەمانەی خوارەوە ڕوونکردنەوەی نەخشەیە، کە $f'(x)=2x$ و $f(1)=4$ پاسادان دەکات.



(أ)



(ب)



(ج)

GRADE12-2011-CHAPTER 5 2/25/18 9:37 AM Page 28

بەشی 5

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

1 ئەگەر $\int_a^b f(x)dx = a+2b$ ئەوا بەهای $\int_a^b [f(x)+3]dx$ دەکاتە

أ $a+2b+3$ ب $3b-3a$ ج $4a-b$

د $5b-2a$ هـ $5b-3a$

2 بەهای k چەندە کەوا دەکات $\int_2^k x^2 dx = 0$.

أ -2 ب 0 ج 2

د $2 , -2$ هـ $0 , 2 , -2$

3 کام لەمانەی خوارەوە دەکاتە ئامانجی $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ ؟

أ 0 ب 1 ج $f'(x)$

د $f(x)$ هـ جگە لەوانە

4 کام لەمانەی خوارەوە دەکاتە ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بە ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشە $y=x^2$ و $y=-x$ و دوو ڕاستەهێڵی $x=0$ و $x=3$.

أ 2 ب $\frac{9}{2}$ ج $-\frac{9}{2}$

د 13 هـ $\frac{27}{2}$

5 کام لەمانەی خوارەوە دەکاتە ڕووبەری سنووردراو بە هەردوو چەماوەی نەخشەی $f(x)=e^x$ ، $g(x)=\frac{1}{x}$ لەلایەک هەردوو ڕاستەهێڵی $x=1$ و $x=2$ لەلایەکی تر.

أ $e^2-e-\ln 2$ ب $\ln 2-e^2+e$ ج $e^2-\frac{1}{2}$

د $2-e-\frac{1}{2}$ هـ $\frac{1}{2}-\ln 2$

GRADE12-2011-CHAPTER 6 2/25/18 9:46 AM Page 3

بەشی

6

برگە قوچەكییەكان Conics

بەشی شەشەم

وانەكان

1-6 برگە قوچەكییەكان

2-6 پۆلێنكردنی برگە قوچەكییەكان

تاقیكردنەوەی نیوەی بەش

3-6 هاوكێشە دووجایەكان بە دوو گۆڕاو

پێداچوونەوە

ئامادەكاری بۆ تاقیكردنەوە

هەسارەكانی كۆمەڵەی خۆر بەدەوری خۆردا دەخوولێنەوە لە چەندەها خولگە كە شێوەی برگەی ناتەواو وەردەگرن و ڕۆژ دەوری تیشكۆ دەبینێت. زۆربەی ئەو خولگانە نیمچە بازنەیین، خولگەی پلۆتۆ Pluto بازنەییەكەی لەوانیتر كەمترە هەروەها (عەتارد) mercury، هەندێك خولگە هەن، شێوەی برگەی ناتەواوی درێژن، وەك خولگەی ئەستێرەی بچووك (ئیكار) Icarus كە ئەستێرەیەكی بچوكە پانییەكەی كەمێك زیاترە لە1,5 km و لەماوەی 409 ڕۆژ جارێك بەدەوری ڕۆژدا دەخولێتەوە.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

1 هەر دەستەواژەیەك لەستونی لای ڕاست ببەستەوە بە لێکدانەوەکەی لە ستونی لای چەپ.

1. بازنە
2. برگەی هاوتا
3. لەتکەری گۆشە
4. دەرکەناری ئاسۆیی

أ. ڕاستەهێڵێکە گۆشە بەشدەکات بۆ دوو گۆشەی جووت بوو.
ب. ڕاستەهێڵێکە بازنە دەکاتە دوو کەرتی جووت بوو.
ج. کۆمەڵە خاڵێکی ڕووتەختێکە هەمان دووریان لە خاڵێکی دیاریکراو هەیە.
د. ڕوونکردنەوەی نەخشەی دووجا.
هـ. ڕاستەهێڵێکی ئاسۆییە ڕوونکردنەوەی نەخشە لێی نزیك دەبێتەوە کاتێك x نزیك دەبێتەوە لە $\pm\infty$.

بازنە

لە ڕاهێنانی 2 تا 5 چەقی بازنەو نیوەتیرەکەی دیاریبکە.

2 $x^2+y^2=49$

3 $x^2+(y+1)^2=25$

4 $(x-5)^2+y^2=15$

5 $(x-2)^2+(y+3)^2=36$

لە ڕاهێنانی 6 تا 9 هاوکێشەی بازنەکە بدۆزەوە.

6 چەق: $(0, 3)$، نیوەتیرە $\sqrt{5}$.

7 چەق: $(0, 0)$، نیوەتیرە 8.

8 چەق: $(5, 0)$، نیوەتیرە 13

9 چەق: $(5, -3)$ ، نیوەتیرە $\sqrt{2}$.

یاسای دووری

لە ڕاهێنانی 10 تا 12 دووری نێوان دوو خاڵەکە بدۆزەوە.

10 $(0, 2)$ و $(4, 5)$.

11 $(3, -5)$ و $(-2, -10)$.

12 $(-5, 1)$ و $(3, 6)$.

لە ڕاهێنانی 13 تا 16 دووری نێوان خاڵەکەو ڕاستەهێڵەکە بدۆزەوە.

13 خاڵی: $(3, 5)$ ، ڕاستەهێڵی $y=-5$.

14 خاڵی: $(-7, -9)$، ڕاستەهێڵی $x=2$.

15 خاڵی: $(3, 3)$ ، ڕاستەهێڵی $x+y=1$.

16 خاڵی: $(-2, 3)$ ، ڕاستەهێڵی $y=-2x+5$

تەواوکردنی دووجا

لە ڕاهێنانی 17 تا 20 برە جەبرییەکە تەواوبکە بۆ ئەوەی ببێتە دووجای تەواو:

17 $3x^2+6x$

18 $5y^2+20y$

19 x^2+x

20 y^2-3y

GRADE12-2011-CHAPTER 6 2/25/18 9:46 AM Page 5

1–6 بڕگە قوچەکییەکان
Conic Sections

ئامانجەکان

- بڕگە قوچەکییەکان پێناسە بەکات.
- هاوکێشەی بڕگەی هاوتا دەنووسێت و پێکهاتەکانی دیاریدەکات.
- هاوکێشەی بڕگەی ناتەواو دەنووسێت و پێکهاتەکانی دیاریدەکات.
- هاوکێشەی بڕگەی زیاد دەنووسێت و پێکهاتەکانی دیاریدەکات.
- وێنەی بڕگە قوچەکییەکان دەکێشێت.

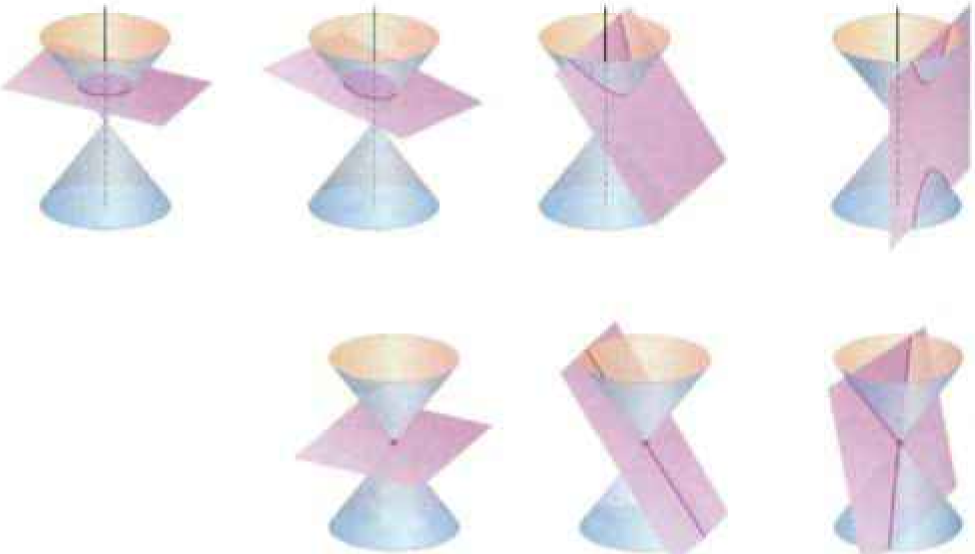
زاراوەکان
Vocabulary

Parabola	بڕگەی هاوتا
Ellipse	بڕگەی ناتەواو
Hyperbole	بڕگەی زیاد
Focus	تیشکۆ
Directrix	دەلیل
Vertex	سەر
Focal axis	تەوەری تیشکۆیی
Major axis	تەوەری گەورە
Minor axis	تەوەری بچوک
Real axis	تەوەری ڕاستی
Cojugate axis	تەوەری ئاوێل

ڕێڕەوی هەسارەکان و مانگەکان و تەنەکانی تر (هەتا ئەلیکترۆنەکانیش) بڕگە قوچەکییەکان پێکدەهێنن، کە جووڵەیان دیاریدەکرێت بەهێزێك پێچەوانە هاوڕێژەیە لەگەڵ دووجای دوورییەکەیان ، لەکاتێدا زانیت ڕێڕەوی تەنێکی جولاو بڕگەیەکی قووچەکی دیاریکراوە تا زانیارییەکانت دەربارەی خێرایی و ئەو هێزەی تەنەکە دەجولێنێت دەست ئەکەوێت.
لەم بەشەدا فێری بەیەکتربەستنی نێوان بڕگە قوچەکییەکان و هاوکێشە دووجایەکانی دوو گۆڕاو دەبێت. هەروەها فێری پۆلێنکردنی بڕگە قوچەکییەکان دەبێت بەپێی جیاوازی چەقەکانیان Eccentricity.

بڕگە قوچەکییەکان

زانا گریکەکان لەسەردەمی ئەفلاتوندا بڕگە قوچەکییەکانیان بەو هێڵە چەماوانەی کە لە ئەنجامی بڕینی قوچەکێکی دووانی بە ڕووتەختێك پەیدادەبێت پێناسەکردووە. بەلام ئێستا زانایەکانی بیرکاری بڕگە قووچەکییەکان بە بەکارهێنانی یاسای دووری لە ڕووتەختی پۆوتانەکان پێناسەدەکەن.



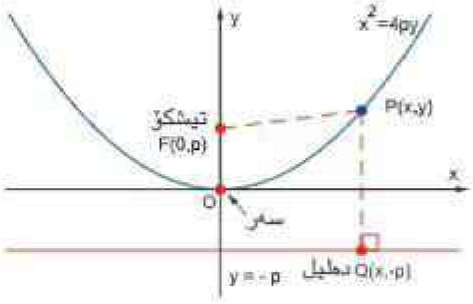
زۆر ڕێگا هەیە بۆ پێناسەکردنی بڕگە قوچەکییەکان. دەتوانیت وا پێناسەی بکەیت، کە لە ئەنجامی بڕینی قوچەکێکی دووانی بە ڕووتەختێك دروست دەبێت، وەك ئەوەی گریکەکان کردیان ودەتوانیت بەشێوەی جەبری پێناسەی بکەیت، کە بریتییە لە نواندنی ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی پلە دووی دوو گۆڕاو.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

هەروەها دەتوانیت بەم شێوەیە پێناسەی بکەیت، بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك لە ڕووتەختێکدا کە پاساداتی مەرجێکی ئەندازەیی دیاریکراو دەکات. ئاسانترین نمونەی ئەم ڕێگایە پێناسەی بازنەیە کە بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك لە ڕووتەختێکدا، هەمان دوورییان هەیە لە خاڵێکی دیاریکراو.

GRADE12-2011-CHAPTER 6 3/25/18 12:34 PM Page 4

بڕگەی هاوتا



لە پۆلی دە فێربوویت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەیەکی دووجا بڕگەیەکی هاوتایە. لەم وانەیەدا سیفەتێکی بنەڕەتی فێردەبیت بۆ ئەوەی پێناسەیەکی ئەندازەیی بڕگەکە بکەیت. بڕگەی هاوتا یەکێکە لە بڕگە قوچەکییە بنەڕەتییەکان و سیفەتی وێنەدانەوەی هەیە کە وای لێدەکات بواری بەکارهێنانی فراوانبێت.

بڕگەی هاوتا Parabola

بڕگەی هاوتا: کۆمەڵە خاڵێکە لە ڕووتەختێکدا کە هەمان دوورییان هەیە لە خاڵێکی دیاریکراو (پێیدەوترێت تیشکۆ) و لە ڕاستەهێڵێک کە پێیدا ناڕوات (پێیدەوترێت دەلیل). خاڵی ناوەڕاستی نێوان تیشکۆو دەلیل پێیدەوترێت سەری بڕگە. بەڵام ئەو ڕاستەهێڵەی بە تیشکۆو سەری بڕگەکەدا دەڕوات پێیدەوترێت تەوەری بڕگەی هاوتا. بە ڕوانینت بۆ وێنەکەی سەرەوە کە بڕگەیەکی هاوتا دەردەخات، بۆت دەردەکەوێت کە هاوجێبوونە لەگەڵ تەوەرەکەی کە دەبێتە تەوەری هاوجێ.

ئەگەر سەری بڕگە هاوتایەکە خاڵی $(h\,,\,k)$ بێت و هاوکێشەی دەلیلەکەی $y=k-p$ بێت، ئەوا پۆوتانی تیشکۆیەکەی دەکاتە $(h\,,\,k+p)$، دووری نێوان خاڵی $P(x\,,\,y)$ و تیشکۆ دەکاتە $\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p))^2}$ و دووری نێوان P و دەلیل دەکاتە $\sqrt{(y-(k-p))^2}$.
ئەگەر P دانەی بڕگەی هاوتایەکە بێت ئەوا:

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p))^2}=\sqrt{(y-(k-p))^2}$$

$$(x-h)^2+(y-(k+p))^2=(y-(k-p))^2$$

$$(x-h)^2+y^2-2y(k+p)+(k+p)^2=y^2-2y(k-p)+(k-p)^2$$

$$(x-h)^2+2y(k-p)-2y(k+p)+(k+p)^2-(k-p)^2=0$$

$$(x-h)^2-4(y-k)p=0$$

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

لەبەرامبەردا دەتوانیت بیسەلمێنیت کە خاڵی $P(x\,,\,y)$ پاسادانی پەیوەندی $(x-h)^2=4p(y-k)$ دەکات و دەکەوێتە سەر ئەو بڕگە هاوتایەی سەرەکەی $(h\,,\,k)$ و دەلیلەکەی $y=k-p$ بێت.

هاوکێشەی بڕگە هاوتا

شێوەی گشتی: هاوکێشەی بڕگەی هاوتا کە سەرەکەی $(h\,,\,k)$ و دەلیلەکەی ڕاستەهێڵی $y=k-p$ بێت دەکاتە $(x-h)^2=4p\,(y-k)$ لەو بارەدا تەوەری بڕگەکە دەبێتە ڕاستەهێڵی ستونی $x=h$ و تیشکۆیەکەی خاڵی $(h\,,\,k+p)$ یە. بەڵام ئەگەر سەرەکەی (h,k) و هاوکێشەی دەلیلەکەی $x=h-p$ شێوەی گشتی هاوکێشەکەی دەبێتە $(y-k)^2=4p(x-h)$ لەم بارەدا تەوەری بڕگەکە ڕاستەهێڵی ناسۆیی $y=k$ و تیشکۆیەکەی خاڵی $(h+p\,,\,k)$ دەبێت.

نموونــــه 1 دۆزینەوەی پێکهاتەکانی برگەی هاوتا

پێکهاتەکانی برگە هاوتای $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ بدۆزەوە (تیشکۆ و سەر و دەلیل و تەوەرەکەی)

شیکار

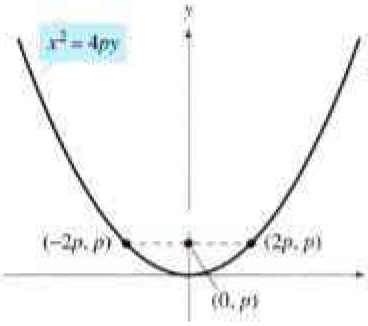
سەرەتا هاوکێشەی برگە هاوتایەکە بەشێوەی گشتی بە بەکارهێنانی تەواوکردنی دووجا بنووسە.

$$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x+1\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow (x+1)^2=-2(y-1)$$

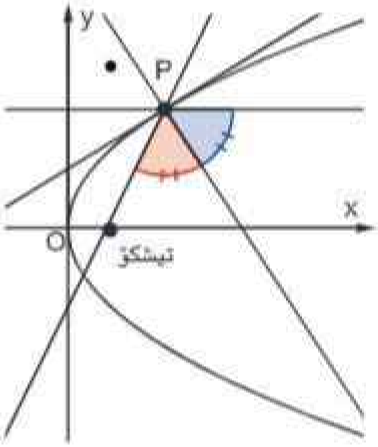
بە بەراوردکردن لەگەڵ شێوە گشتییەکەی کە تەوەری ستونی هەیە دەردەچێت $p=\frac{-1}{2}, k=1, h=-1$ لەمەوە بۆمان دەردەچێت کە تیشکۆی برگەکە بریتییە لە خاڵی $(h, k+p)=\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ و خاڵی سەری برگەکە $(h, k)=(-1, 1)$ و هاوکێشەی دەلیلەکەی ڕاستەهێڵی $y=k-p=1.5$ و تەوەرەکەی ڕاستەهێڵی $x=h=-1$.

خاڵی چاودێری 1. پێکهاتەکانی ئەم برگە هاوتایە بدۆزەوە. $2x+y^2+2y-1=0$

یەکێك لە سیفەتەکانی برگەی هاوتا کە زۆر بەکاردێت، (**سیفەتی تیشکدانەوەیە**) زانا فیزیاییەکان بە ڕوویەك دەڵێن **تیشکدەرەوە** ئەگەر ئەو گۆشەی پێکدێت بە تیشکی بەرکەوتووی ڕووەکە و لێکەوتەکەی لە خاڵی بەرکەوتندا جووت بێت لەگەڵ ئەو گۆشەیەی تیشکەکە دروستیدەکات پاش تیشکدانەوەی لەگەڵ لێکەوتەکەی. یەکەم گۆشە پێیدەوترێت گۆشەی بەرکەوتن و بەگۆشەی دووەم دەوترێت **گۆشەی تیشکدانەوە**، ڕووی ئاوێنەکانی ماڵەوە ساکارترین نموونەیە لە ڕووە تیشکدەرەکان.



چەند جۆرێکی تر لە ڕووە تیشکدەرەوەکان هەیە وەك سێڵەکانی (صحون) وەرگرتنی پەخشی تەلەفزیۆنی لە مانگە دەستکردەکان کە لە ئەنجامی سوڕانەوەی برگەیەکی هاوتا بە دەوری تەوەری ئەم ڕووانە دروست دەبن. ئەم ڕووە تیشکدەرانە سیفەتێکی گرینگیان هەیە، کە تیشکە بەرکەوتووەکان بەشێوەی تەریب بە تەوەرەکەی وەردەگرێت و دەیداتەوە بەو جۆرەی کە بە تیشکۆی برگەکەدا بڕوات. هەروەها هەموو ئەو تیشکانەی کە تیشکۆ پەخشی دەکاتەوە بە ئاراستەی ڕووەکە تیشکی تەریب بە تەوەری برگە هاوتایەکە تیشکدەداتەوە.



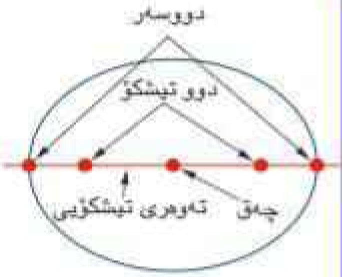
سیفەتی تیشکدانەوەی برگەی هاوتا

ئەستونی سەر لێکەوتی برگەی هاوتا لە خاڵی P کە یەکێکە لە خاڵەکانی دەبێتە لەتکەری ئەو گۆشەی کە دروست دەبێت لەنێوان ئەو ڕاستەهێڵەی کە بە خاڵەکەو تیشکۆدا دەڕوات لەگەڵ ڕاستەهێڵێکی تەریب بە تەوەرەکەی کە بە P دا دەڕوات.

GRADE12-2011-CHAPTER 6 3/25/18 12:34 PM Page 6

بڕگەی ناتەواو

زانای پۆلۆنی (نیکۆلاس کۆپەرنیکس) Nicolas Copernics دەریخست کە هەسارەکان (لەناویاندا زەوی) بەدەوری خۆردا دەخولێنەوە لە چەندەها خولگەی بازنەییدا کە خۆر چەقەکەیەتی، بەڵام زانای ئەڵمانی یۆهانس کیپلر Johannes Kepler بیردۆزەکەی کۆپرنیکسی ڕاستکردەوە و ڕوونیکردەوە کە هەسارەکان بەدەوری خۆردا دەخولێنەوە بە چەندەها خولگە کە لە شێوەی بڕگەی ناتەواوە (Ellipse) و خۆر دەبێتە یەکێك لە تیشکۆکانی. یەکێك لە بەکارهێنانەکانی بڕگەی ناتەواو ڕوونکردنەوەی جولانەوەی هەسارەکانە. بۆ ناسینی بڕگەی ناتەواو لە ڕێگای پێناسەکەیەوە دەستپێدەکەین وەك لە بڕگەی هاوتا کردمان کە کۆمەڵە خاڵێکە لە ڕووتەختێکدا بە مەرجێکی دیاریکراو، بۆ پێناسەکردنی بڕگەی ناتەواو دوو تیشکۆ باس دەکەین لەجیاتی یەك تیشکۆ وەك لە بڕگەی هاوتا هاتبوو.

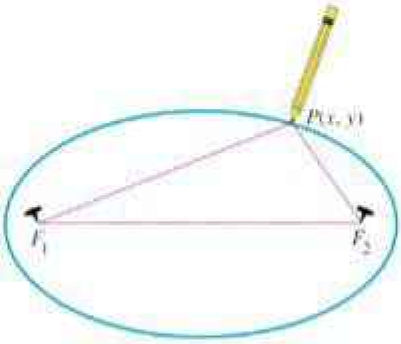


بڕگەی ناتەواو

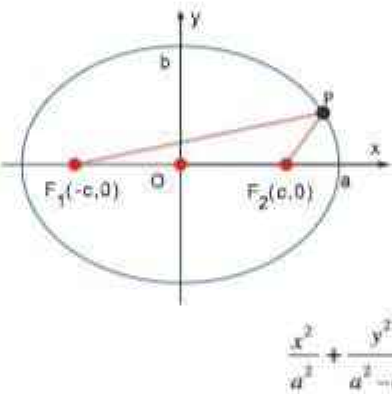
بڕگەی ناتەواو: کۆمەڵە خاڵێکە لە ڕووتەختێکدا کە سەرجەمی دوورییان لە دوو خاڵی دیاریکراو(تیشکۆ) دەکاتە بەهایەکی نەگۆڕ. بەم دوو خاڵە دەوترێت دوو **تیشکۆی** بڕگە ناتەواوەکە، ئەو ڕاستەهێڵەی کە دوو تیشکۆیەکەی لەسەرە پێی دەوترێت تەوەری تیشکۆیی یان **تەوەری گەورە** کە دەکەوێتە نێوان هەردوو سەری بڕگەکە، و ناوەڕاستی ئەم تەوەرەیە دەبێتە چەقی بڕگەکە و ڕاستەهێڵی ئەستون لەسەر تەوەری تیشکۆیی لە چەقەکەیدا کە بڕگەکە دەبڕێت لە دوو خاڵ پێیدەوترێت دوو سەری بچوك، ئەو ڕاستەهێڵەی دوو سەرە بچووکەکە بەیەك دەگەیێنێت پێیدەوترێت (**تەوەرەی بچوك**)ی بڕگەی ناتەواو.

لەبیرت بێت

a و b و c بە پەیوەندی $c^2 = a^2 + b^2$ دەبەسترێنەوە بەپێی سەلمێنراوی فیساگۆرس.



ئاسانترین ڕێگا بۆ وێنەکێشانی بڕگەی ناتەواو بە زانینی دوو تیشکۆیەکەی بەکارهێنانی پێناسەکەیەتی. داوێك بگرە بەدەستەوە کە درێژییەکەی بکاتە سەرجەمی دوو دووری خاڵێکی سەر بڕگەکە لە دوو تیشکۆکانیەوە و هەردوو سەری داوەکە لە دوو تیشکۆکەی F_1 و F_2 گیربکە. دوای ئەوە قەڵەمێك لەداوەکە ببەستەوە بیجوڵێنە وێنەیەکت دەست دەکەوێت کە بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك کە سەرجەمی دوو دوورییەکانیان لە تیشکۆکانەوە یەکسانە بە درێژی داوەکە ئەمەش بڕگەی ناتەواوە داواکراوەکەیە.



ئەگەر دوو تیشکۆکان خاڵەکانی $F_1(-c, 0)$، $F_2(c, 0)$ بن کە $PF_1 + PF_2 = 2a$ کاتێك خاڵی $P(x, y)$ لە خاڵەکانی بڕگەکە بێت ئەم پەیوەندییە پاسادان دەکات.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

بۆ سادەکردنی ئەم هاوکێشەیە هەریەکێك لە ڕەگەکان لەلایەك دابنێ و هەردوو لای دووجا بکە. دوایی ئەو ڕەگەی دەمێنێتەوە، لەلایەك بەتەنیا دابنێ و بۆ جاری دووەم دووجای بکە. لە کۆتاییدا ئەم هاوکێشەت دەستدەکەوێت $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

GRADE12-2011-CHAPTER 6 3/25/18 12:34 PM Page 9

لەلایەکی ترەوە دەتوانین تێبینی ئەمەی خوارەوە بکەین ئەگەر پۆوتانی خاڵی $P(x, y)$ پاسادانی هاوکێشەکەی پێشووی کرد ئەوا پاسادانی $PF_1 + PF_2 = 2a$ دەکات ئەوا خاڵی $P(x, y)$ دەکەوێتە سەر بڕگەی ناتەواو ئەگەر و تەنها ئەگەر پۆوتانەکەی پاسادانی هاوکێشەی سەرەوە بکات.

لەبەرئەوەی $PF_1 + PF_2 > F_1F_2$ (لاسەنگەی سێگۆشەیی سەر بە سێگۆشەی PF_1F_2) ئەوا $2a > 2c$ لەپاشدا $a > c$ لەوەوە دەردەچێت کە $a^2 - c^2$ ژمارەیەکی موجەبە، ئەگەر واماندانا b ڕەگی دووجای $a^2 - c^2$ هاوکێشەکە دەبێت. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ئەمەش **شێوەی سادەی** هاوکێشەی بڕگەی ناتەواوە کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە. لەو هاوکێشەدا دەردەکەوێت کە بڕگەی ناتەواو هاوجێبونە لەگەڵ هەردوو تەوەرەکان و خاڵی بنەڕەت و دەکەوێتە ناو لاکێشەیەك سنووردراوە بەم ڕاستەهێڵانەی $x = -a$، $x = a$، $y = -b$، $y = b$ کە لێکەوتن بۆ بڕگەکە لە 4 خاڵدا کە ئەمانەن.

- هەردوو سەری بڕگە $(a, 0)$، $(-a, 0)$.
- هەردوو سەری بچوك $(0, b)$ $(0, -b)$

لە کۆتاییدا لێکەوتەکانی بڕگە قوچەکییەکە لەو خاڵانەی سەرەوە لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکان ئەستونە. بەڵام ئەگەر چەقی بڕگەکە خاڵی بنەڕەت نەبێت ئەوا شێوەی هاوکێشەی بڕگە ناتەواوەکە بەم شێوەیە دەبێت.

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و بەم شێوەیە بێت:

$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئەستونی بێت. لێرەدا $a > b$ هەموو کات لەبیرت بێت پۆوتانی چەق لەم بارەدا خاڵی (h, k) دەبێت.

هاوکێشەی بڕگەی ناتەواو

شێوەی گشتی هاوکێشەی بڕگە ناتەواو بریتییە لە :

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ کاتێك تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت.

$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ کاتێك تەوەری تیشکۆیی ستونی بێت.

لەم هاوکێشەیەدا a نیوەی تەوەرەی گەورەیە و b نیوەی تەوەرەی بچوکە و (h, k) چەقە.

پێکهاتەکانی بڕگەی ناتەواو:

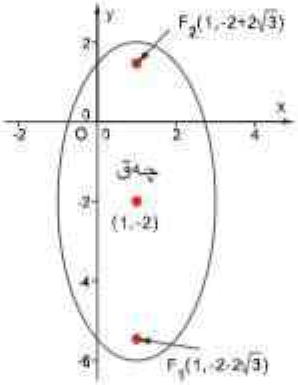
- دووری نێوان تیشکۆ و چەق: c
- سەرەکان $(h \pm a, k)$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $(h, k \pm a)$ ئەگەر ئەستوونی بێت.
- دوو سەرە بچووکەکە $(h, k \pm b)$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $(h \pm b, k)$ ئەگەر ئەستونی بێت.
- دوو تیشکۆیەکان $(h \pm c, k)$ ئەگەر تەوەری تیشکۆی ئاسۆیی بێت و $(h, k \pm c)$ ئەگەر ئەستونی بێت.

نموونە 2 دۆزینەوەی پێکهاتەکانی برگەی ناتەواو

پێکهاتەکانی برگە ناتەواوی $4x^2+y^2-8x+4y-8=0$ بدۆزەوە.

شیکار

هاوکێشەی برگە ناتەواوەکە بگۆڕە بۆ شێوەی گشتی بە تەواوکردنی دووجا بۆ x و y



$$4x^2+y^2-8x+4y-8=0$$
$$4x^2-8x+y^2+4y=8$$
$$4(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=8+4+4$$
$$4(x-1)^2+(y+2)^2=16$$
$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

لەم هاوکێشەیە دەردەچێت کە:

$a^2=16$ ، $b^2=4$ ، $c^2=a^2-b^2=12$ ، $h=1$ ، $k=-2$

نیوەی تەوەری گەورە $a=\sqrt{16}=4$ ، نیوەی تەوەری بچوک $b=\sqrt{4}=2$

چەق $(h,k)=(1,-2)$ دووری نێوان تیشکۆ و چەق $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

دوو تیشکۆ: $(h,k\pm c)=(1,-2\pm2\sqrt{3})$

دوو سەری تەوەرەی بچوک: $(h\pm b,k)=(1\pm2,-2)=\begin{cases}(3,-2)\\(-1,-2)\end{cases}$

دوو سەری تەوەرەی گەورە: $(h,k\pm a)=(1,-2\pm4)=\begin{cases}(1,2)\\(1,-6)\end{cases}$

لەبیرنەکەی
$a>b$

خاڵی جاودێری **2.** پێکهاتەکانی برگە ناتەواوی $2x^2+3y^2+4x+6y-1=0$ بدۆزەوە.

نموونە 3 خولگەی مانگ

خولگەی مانگ بەدەوری زەویدا برگەیەکی ناتەواوە یەکێک لە تیشکۆیەکانی چەقی زەوییە درێژی تەوەری گەورەی 768 800 km وەدرێژی تەوەرەی بچوکی 767 640 km ئایا دوورترین خاڵ و نزیکترین خاڵ لەچەقی زەوییەوە چەندە کە مانگ پێیدا دەڕوات.

شیکار

بەهای a و b بدۆزەوە.

$$2a=768800\Rightarrow a=384400$$
$$2b=767640\Rightarrow b=383820$$

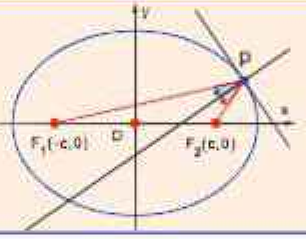
هەژماری بەهای c بکە $c=\sqrt{a^2-b^2}\approx21108$

دوورترین خاڵ کە مانگ پێیدا دەڕوات $a+c\approx405508$ km لە چەقی زەوییەوە.

نزیکترین خاڵ کە مانگ پێیدا دەڕوات $a-c\approx363292$ km لە چەقی زەوییەوە.

خاڵی جاودێری **3.** دووری تیشکۆی دووەمی خولگەی مانگ لە چەقی زەوییەوە چەندە؟

سیفەتی تیشکدانەوەی برگەی ناتەواو

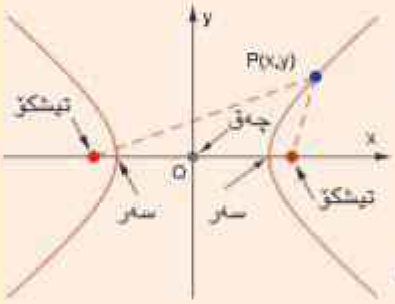


ئەستونی سەر لێکەوتی برگەی ناتەواو لە خاڵی P کە یەکێك لە خاڵەکانی برگەکەیە دەبێتە لەتکەری ئەو گۆشەی پێکدێت بەو دوو ڕاستەهێڵەی کە بەو خاڵەدا و بە دوو تیشکۆیەکەیدا دەڕۆن.

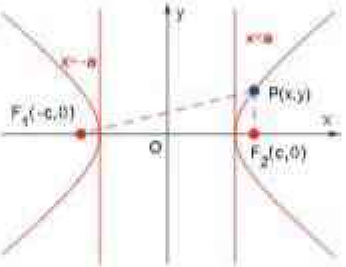
برگەی زیاد **Hyperbola**

پێناسەی برگەی زیاد لە پێناسەی برگەی ناتەواو دەچێت. برگەی ناتەواو بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك لە ڕووتەختێکدا کە سەرجەمی دوو دوورییەکەیان لە دوو خاڵی دیاریکراو بڕێکی نەگۆڕە. هەروەها برگەی زیاد بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك لە ڕووتەختێکدا کە بەهای ڕووتی جیاوازی نێوان دوورییەکانیان لە دوو خاڵی دیاریکراو بڕێکی نەگۆڕە.

برگەی زیاد



برگەی زیاد: کۆمەڵە خاڵێکە لە ڕووتەختێکدا کە بەهای ڕووتی جیاوازی دوو دوورییەکانیان لە دوو خاڵی دیاریکراو بڕێکی نەگۆڕە. هەریەك لەم دوو خاڵە پێی دەوترێت **تیشکۆ** بەو ڕاستەهێڵەی پێیاندا دەڕوات دەوترێت تەوەرەی تیشکۆیی و بەو ڕاستەهێڵەی هەردوو سەری برگەکە دەگەیەنێت پێیدەوترێت **تەوەری ڕاستی** و ناوەڕاستەکەی دەبێتە چەقی برگە زیادەکە. ئەو ڕاستەهێڵەی ئەستونە لەسەر تەوەری تیشکۆیی پێیدەوترێت **تەوەرەی ناوەڵ** (خەیاڵی)، برگەی زیاد بەوە لە هەردوو برگەی ناتەواو و هاوتا جیادەکرێتەوە کە پێکدێت لە دوو لقی هاوجێ بەپێی چەقەکەی و تەوەری ناوەڵەکەی.



ئەگەر دوو تیشکۆی برگەکە بریتی بێت لە دوو خاڵی$F_1(-c,0)$ و $F_2(c,0)$ $|PF_1 - PF_2| = 2a$ ئەوا خاڵی$P(x,y)$پاسادانی ئەو پەیوەندییەی خوارەوە دەکات.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

بەسادەکردنی ئەو هاوکێشەیە ودانانی هەریەك لە ڕەگەکان لەلایەك بەجیا و بەدووجاکردنی هاوکێشەکە پاشان ئەو ڕەگەی دەمێنێتەوە لەلایەك بەتەنها دابنێ و دووبارە دووجای هاوکێشەکە بکە ئەمەی خوارەوەت دەستدەکەوێت.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

ئەم هاوکێشەیە لە هاوکێشەی برگەی ناتەواو دەچێت بەڵام $a < c$ چونکە$2a$ کەمترە لە$2c$ چونکە جیاوازی نێوان دوو لای سێگۆشەیPF_1F_2 دەنوێنێت، لەلایەکی ترەوە دەتوانیت دەربیخەی ئەگەر خاڵی$P(x, y)$پاسادانی هاوکێشەکەی پێشوو بکات لەگەڵ$0 < a < c$ ئەوا پاسادانی $|PF_1 - PF_2| = 2a$ دەکات. ئەگەر b ناوبنێن ڕەگی دووجای موجەبی$c^2 - a^2$ ئەوا $c^2 - a^2 = b^2$ هاوکێشەکە دەبێتە$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ئەوەش هاوکێشەی برگەی زیادە بە **شێوەی سادە**.

ئەگەر بەراوردی نێوان دوو هاوکێشەی سادەی برگەی ناتەواو و زیادبکەین دەردەکەوێت کە لەیەکتر دەچن، تەنها لە دوو شت نەبێت

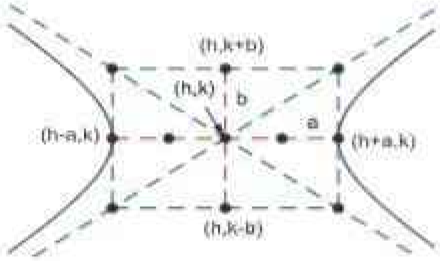
(یەکەم) هاوکێشەی برگەی ناتەواو نیشانەی کۆکردنەوە + لەخۆدەگرێت، بەڵام هاوکێشەی برگەی زیاد نیشانەی لێدەرکردن - لەخۆدەگرێت.

(دووەم) $c^2 = a^2 + b^2$ لە هاوکێشەی برگەی ناتەواو، بەڵام $c^2 = a^2 - b^2$ لەهاوکێشەی برگەی زیاد. لەهاوکێشەی برگەی زیاددا دەردەکەوێت کە برگەی زیاد هاوجێبونە لەگەڵ هەردوو تەوەری پۆتانەکان کە بریتین لە تەوەری تیشکۆ و تەوەری ناوەڵ و هاوجێبونە لەگەڵ خاڵی بنەڕەت. برگەی زیاد تەوەری x لە دوو خاڵی $(-a, 0)$ و $(a, 0)$ دەبڕێت کە دەبنە سەری برگەکە، لە کۆتاییدا دوو لێکەوتی برگەی زیاد لە سەرەکانیدا بریتییە لەو دوو ڕاستەهێڵەی ئەستونن لەگەڵ تەوەری تیشکۆیی، بەڵام کاتێك چەقی برگەکە خاڵی بنەڕەت نەبێت، ئەوا هاوکێشەکەی ئەم شێوەی خوارەوە وەردەگرێت.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئەستونی بێت.

کاتێك خاڵی (h, k) چەقی برگە زیادەکە بێت.



دوو هێڵە دەرکەنارەکان

لە برگەی زیاددا دوو هێڵی دەرکەناری هەیە کە بریتین لە $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$ کاتێك تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$ کاتێك تەوەری تیشکۆیی ئەستونی بێت. دوو هێڵە دەرکەنارەکە یارمەتیدەرن بۆ وێنەکێشانی برگە زیادەکە و هەروەها یارمەتیدەرن بۆ ئەوەی بزانیت کە هەردوو دەرکەنارەکە لە چەقدا یەکتردەبڕن و دەبنە دوو تیرەی ئەو لاکێشەی کە چەقەکەی هەمان چەقی برگە زیادەکەیە و دووریيەکانیان $2a$ و $2b$ دەبن.

هاوکێشەی برگەی زیاد

شێوەی گشتی هاوکێشەی برگەی زیاد:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئەستونی بێت.

لەم هاوکێشەیەدا (h, k) چەقی برگە زیادەکەیەو a نیوەی تەوەری ڕاستیە و $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ بریتییە لە دووری نێوان چەق و تیشکۆ.

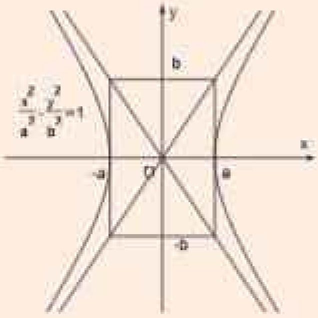
پێکهاتەکانی تری برگەی زیاد ئەمانەن:

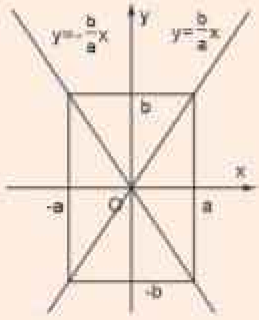
- سەرەکان: $(h \pm a, k)$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $(h, k \pm a)$ ئەگەر ئەستونی بێت.
- تیشکۆکان: $(h \pm c, k)$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $(h, k \pm c)$ ئەگەر ئەستونی بێت.
- دەرکەنارەکان: $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$ ئەگەر تەوەری تیشکۆیی ئاسۆیی بێت و $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$ ئەگەر ئەستونی بێت.

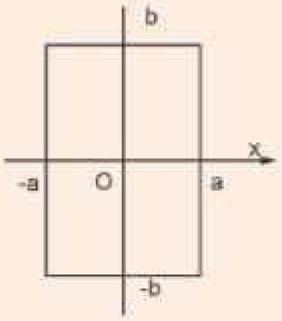
لاكێشەی $2a \times 2b$ كە چەقەكەی خاڵی بنەڕەتە یارمەتیدەرە بۆ وێنەكێشانی بڕگەی ناتەواوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و بڕگەی زیادی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ تێبینی ئەوەت كرد كە بڕگەی ناتەواو بەتەواوی دەكەوێتە ناو لاكێشەكە، بەڵام بڕگەی زیاد بەتەواوی دەكەوێتە دەرەوەی لاكێشەكە. چونكە هاوكێشەی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ دەردەچێت $\frac{x^2}{a^2}\geq 1$ لەمەش $x \geqslant +a$ یان $x \leqslant -a$ تێبینی بكە هەردوو بڕگەكە دوو لێكەوتیان لە دوو سەرەكانیاندا هەیە، كە دوولای بەرامبەر یەكترن لە لاكێشەكەدا.

جۆن وێنەی بڕگە زیاد دەكێشیت

1. خاڵەكانی $(\pm a, 0)$ و $(0, \pm b)$ دیاریبكە و لاكێشەی سنووردراو بەو خاڵانە وێنە بكێشە.
2. دوو هێڵە دەركەنارەكانیان بە درێژكردنەوەی دوو تیرەی لاكێشەكە بكێشە.
3. لاكێشەكەو هێڵە دەركەنارەكان بەكاربهێنە وەك یارمەتیدەرێك بۆ كێشانی بڕگەكە.







نموونە 4

دوو دەركەنارەكان بەكاربهێنە بۆ وێنەكێشانی بڕگەی زیاد

وێنەی بڕگەی زیادی $4x^2 - y^2 = 16$ بكێشە.

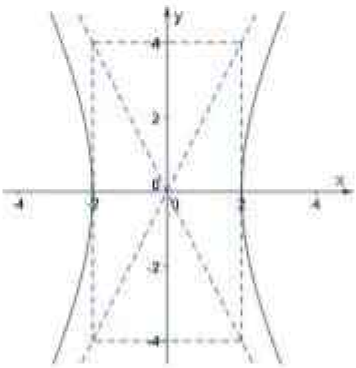
شیكار

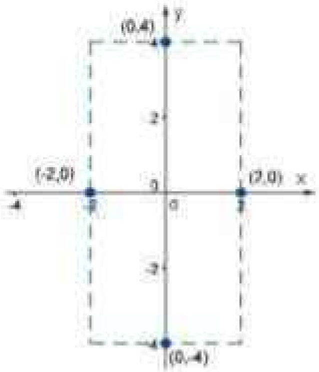
سەرەتا هاوكێشەی بڕگە زیادەكە بەشێوەی گشتی بنووسە.

$$4x^2 - y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$$

لەمەوە بۆمان دەردەچێت كە تەوەری تیشكۆیی ئاسۆییە و چەقی بڕگەكە خاڵی بنەڕەتە. دوو دووری لاكێشەكە بریتین لە $2a = 4$ و $2b = 8$.

ئێستا لاكێشەكە دروست بكە.





دوو تیرەی لاكێشەكە بكێشەو درێژیانبكەوە تا دوو هێڵە دەركەنارەكانی بڕگەكەت دەست بكەوێت. ئێستا دەتوانیت وێنەی بڕگە زیادەكە بەشێوەیەكی گونجاو بكێشیت.

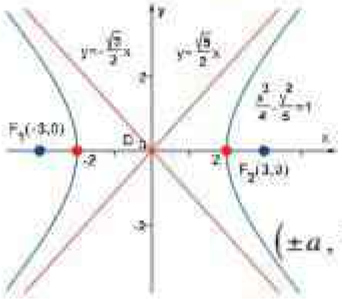
خاڵی جاودێری 4. وێنەی بڕگەی زیادی $y^2 - 4x^2 = 16$ بكێشە.

GRADE12-2011-CHAPTER 6 2/25/18 9:46 AM Page 12

دەتوانیت پێکهاتەکانی بڕگەی زیادبە بەکارهێنانی هاوکێشەی بڕگەکە بدۆزیتەوە کە بریتین لە دووسەر و دوو تیشکۆ و دوو هێڵە دەرکەنارەکان پێش ئەمانە پێویستە بزانیت تەوەری تیشکۆیی ئاسۆییە یان ستونییە.

نمونــــە 5

دۆزینەوەی پێکهاتەکانی بڕگەی زیاد، تیشکۆیەکانی لەسەر تەوەری x بێت



پێکهاتەکانی بڕگەی زیادی $1=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}$ بدۆزەوە.

شیکار

$c^2=a^2+b^2=9 \quad ، b^2=5 \quad ، a^2=4$

دووری نێوان چەق و تیشکۆ $c=3$

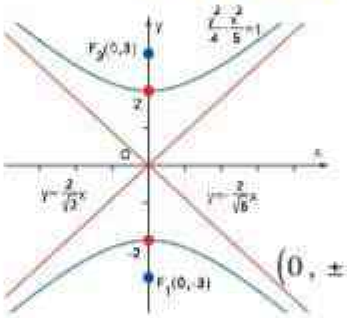
دوو تیشکۆیەکە $(\pm c\,,0)=(\pm 3\,,0)$ دوو سەرەکان $(\pm a\,,0)=(\pm 2\,,0)$

دوو هێڵە دەرکەنارەکان $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$ چەق: $(0\,,0)$

خاڵی جاوبڕی 5. پێکهاتەکانی بڕگەی زیادی $1=\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}$ بدۆزەوە.

نمونــــە 6

دۆزینەوەی پێکهاتەکانی بڕگەی زیاد، تیشکۆکانی لەسەر تەوەری y بێت.



پێکهاتەکانی ئەم بڕگە زیادە بدۆزەوە $1=\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}$

شیکار

$c^2=a^2+b^2=9 \quad ، b^2=5 \quad ، a^2=4$

دووری نێوان چەق و تیشکۆ $c=3$

دووتیشکۆیە $(0\,,\pm c)=(0\,,\pm 3)$ دوو سەرەکان $(0\,,\pm a)=(0\,,\pm 2)$

هێڵە دەرکەنارەکان $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$ چەق: $(0\,,0)$

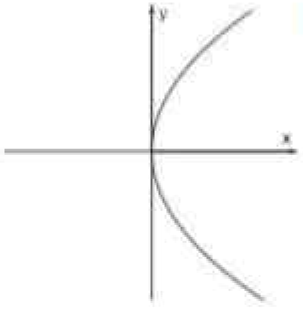
خاڵی جاوبڕی 6. پێکهاتەکانی بڕگەی زیادی $1=\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}$ بدۆزەوە.

1-6 ڕاهێنان

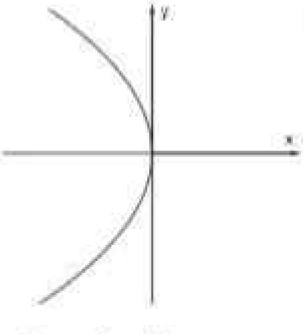
لە ڕاهێنانی 1 تا 4 بەراوردی بڕگە هاوتاکە بکە لەگەڵ ئەو هاوکێشەیەی کە دەینوێنێت.

$y^2=-4x \quad ، y^2=8x \quad ، x^2=-6y \quad ، x^2=2y$

1

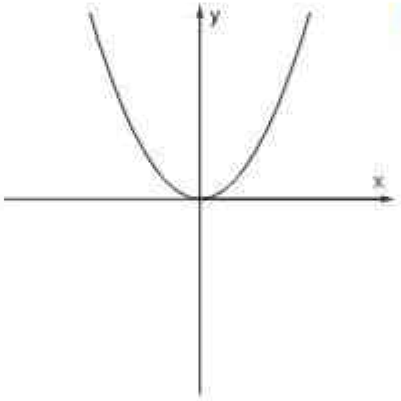


2

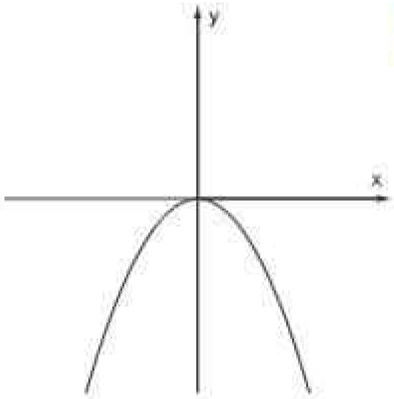


GRADE12-2011-CHAPTER 6 2/25/18 9:46 AM Page 15

3



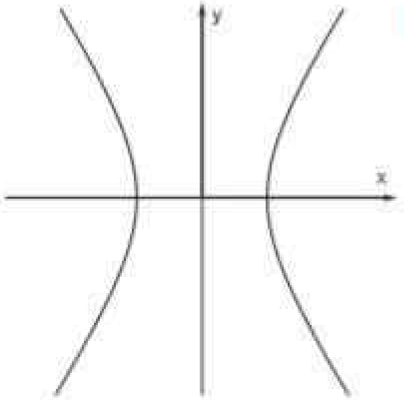
4



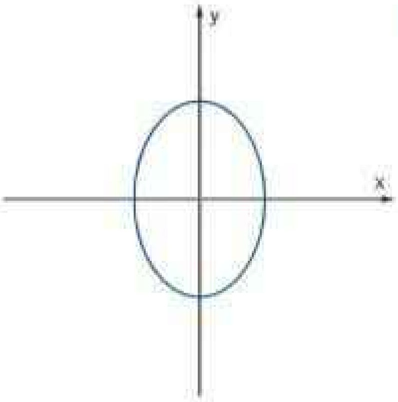
لە ڕاهێنانی 5 تا 8 بڕگە قوچەکییەکە بەو هاوکێشەی دەینوێنێت ببەستەوە.

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ ، $\frac{y^2}{4}-x^2=1$ ، $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ، $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

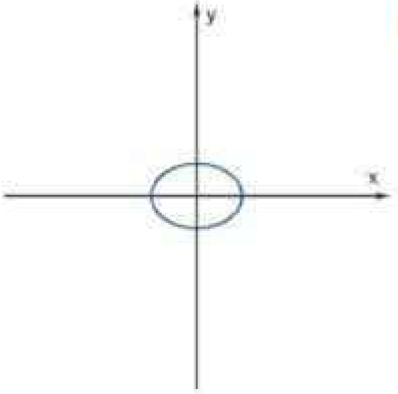
5



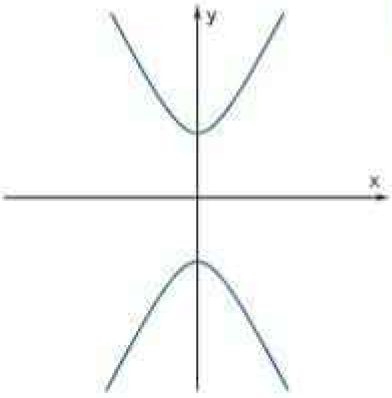
6



7



8



لە ڕاهێنانی 9 تا 13 تیشکۆ و سەرو دەلیلی ئەم بڕگە هاوتایانە بدۆزەوە، وێنەکانیان بکێشە.

9 $y^2=12x$

10 $y^2=-6x$

11 $(x+3)+(y-2)^2=0$

12 $x^2+4x+4y-4=0$

13 $y^2+4y+8x-12=0$

لە ڕاهێنانی 14 تاکو 17 هاوکێشەی ئەو بڕگە هاوتایانە بدۆزەوە.

14 سەر: $(3, 2)$ تیشکۆ: $(1, 2)$

15 سەر: $(0, 4)$ دەلیل: $y=-2$

16 تیشکۆ: $(2, 2)$ دەلیل: $x=-2$

17 سەر: $(2, 4)$ یەکتربڕینە ئاسۆییەکان و $(0, 0)$ ، $(4, 0)$.

لە پرسیاری 18 تا 21 پێکهاتەکانی ئەم بڕگە ناتەواوانە بدۆزەوە و وێنەکانیان بکێشە.

18 $5x^2+7y^2=70$

19 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$

20 $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$

21 $9x^2+25y^2-36x+150y+36=0$

لە پرسیاری 22 تا 25 هاوکێشەی ئەم بڕگە ناتەواوانە بدۆزەوە.

22 چەق: $(0,0)$ تیشکۆ: $(2,0)$ سەر: $(3,0)$

23 سەرەکانی $(3,1)$ و $(3,9)$، تەوەری بچوک: 6

24 تیشکۆیەك: $(0,\pm5)$ تەوەری گەورە 14

25 چەق: $(1,2)$ تەوەری تیشکۆیی ستونییە بە دوو خاڵی $(1,6)$ و $(3,2)$دا دەڕوات.

لە پرسیاری 26 تا 29 پێکهاتەکانی ئەم بڕگە زیادانە بدۆزەوە وێنەکانیان بکێشە

26 $y^2-\frac{x^2}{4}=1$

27 $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{1}=1$

28 $9x^2-y^2-36x-6y+18=0$

29 $x^2-9y^2+2x-54y-81=0$

لە پرسیاری 30 تا 33 هاوکێشەی ئەم بڕگە زیادانە بدۆزەوە.

30 دوو سەرەکانی: $(\pm1,0)$دوو دەرکەنارەکان $y=\pm3x$.

31 دوو سەرەکانی: $(3\pm2,\ )$ بە خاڵی $(0,5)$دا دەڕوات.

32 چەق: $(0,0)$ تیشکۆ: $(0,4)$، سەر: $(0,2)$.

33 دوو سەرەکانی: $(2,\pm3)$ دوو تیشکۆ: $(2,\pm5)$.

دەربارەی چەمکەکان

34 پێناسەی هەریەك لە بڕگەی هاوتا و بڕگەی ناتەواو و بڕگەی زیادبکە.

35 هاوکێشەی ئەو بڕگە هاوتایەی کە سەرەکەی خاڵی (h,k) بێت بەشێوەی گشتی بنووسە.

36 هاوکێشەی ئەو بڕگە ناتەواوەی کە چەقەکەی (h,k) بێت بەشێوەی گشتی بنووسە.

37 هاوکێشەی ئەو بڕگە زیادەی کە چەقەکەی (h,k) بێت بەشێوەی گشتی بنووسە.

38 هاوکێشەی دوو هێڵە دەرکەنارەکانی ئەو بڕگە زیادەی چەقەکەی (h,k) بێت بدۆزەوە.

39 بەشێوازی خۆت (أسلوب) سیفەتی تیشکدانەوەی بڕگەی هاوتا بنووسە.

40 بڕگە هاوتای $y^2=8x$ دوو یەکە بۆ خوارەوە و یەك یەکە بۆ لای ڕاست ڕاکێشرا بۆ بەدەستهێنانی بڕگەی هاوتای $(y+2)^2=8(x-1)$.

أ سەری بڕگە هاوتا بنەڕەتییەکە و پۆوتانی تیشکۆو هاوکێشەی دەلیلەکەی بدۆزەوە.

ب سەری بڕگە هاوتا نوێیەکە و پۆوتانی تیشکۆ و هاوکێشەی دەلیلەکەی بدۆزەوە.

ج وێنەی هەردوو بڕگەکە (بنەڕەت و نوێیەکە) بکێشە.

2-6 پۆلێنکردنی بڕگە قوچەکییەکان
Classifying Conics

ئامانجەکان

- بڕگە قوچەکییەکان بەپێی جیاوازی چەقی پۆلێن دەکات.
- پێناسەی بڕگە قوچەکییەکان بە تیشکۆ و دەلیل پێناسە دەکات.

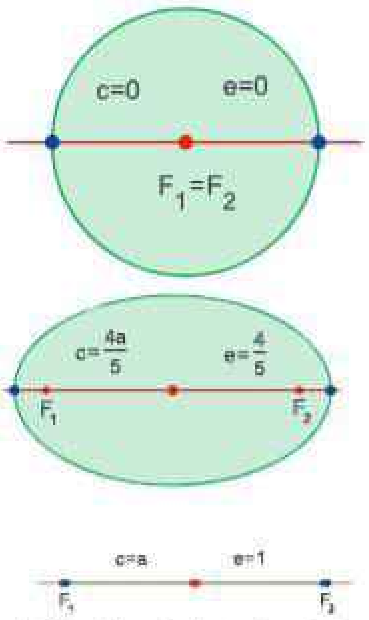
زاراوەکان
Vocabulary

جیاوازی چەقی Eccentricity
تیشکۆ Focus
دەلیل Directrix

هەر بڕگەیەکی قوچەکی بە ژمارەیەک دەبەسترێت پێیدەوترێت **(جیاوازی چەقی)** بەهای جیاوازی چەقی جۆری بڕگەکە دیاریدەکات، ئایا بڕگەکە بازنەیە یان هاوتایە یان ناتەواوە یان زیادە هەروەها پێکهاتەکانی لە هەردوو باری بڕگەی ناتەواو و بڕگەی زیاد دیاریدەکات. بە بڕگەی ناتەواو دەستپێدەکەین هەرچەندە دووری نێوان چەق و یەک لە تیشکۆکانی واتە c دەرناکەوێت لە هاوکێشەکەی.

$$(a>b)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

لەبەرئەوە بە بەکارهێنانی $c=\sqrt{a^2-b^2}$ دەدۆزرێتەوە ئەگەر بەهای a نەگۆڕێت و c بگۆڕێت لەماوەی $[0\ ,\ a]$ ئەوا شێوەی بڕگەکە دەگۆڕێت وەک لەوێنەی بەرامبەر دەردەکەوێت. بڕگەکە دەبێتە بازنە کاتێک $c=0$ $(a=b)$ و درێژدەبێتەوە بە زیادکردنی بەهای c تا وایلێدێت دەبێتە پارچە ڕاستەهێڵ کاتێک $c=a$.



بەزیادبوونی بەهای c ، بڕگەی ناتەواو لە بازنە دەگۆڕێت بۆ پارچە ڕاستەهێڵ

ڕێژەی c بۆ a بۆ باسکردنی شێوە جیاوازەکانی بڕگەی ناتەواو بەکاردەهێنرێت ئەم ڕێژەیەش بریتییە لە جیاوازی چەقی.

جیاوازی چەقی

جیاوازی چەقی بڕگەی ناتەواوی $(a>b)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **بریتییە لە** $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

نمونە 1 دۆزینەوەی سەرەکانی بڕگەی ناتەواو

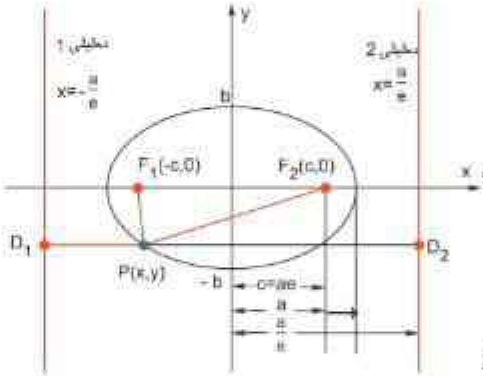
پۆتانی سەرەکانی بڕگە ناتەواوێک بدۆزەوە، کە جیاوازی چەقییەکەی 0.8 و تیشکۆکانی $(0\ ,\ \pm 7)$ بێت.

شیکار

پۆتانی دوو سەرەکانی $(0\ ,\ \pm a)$ لەبەرئەوەی $e=\frac{c}{a}$ ئەوا $a=\frac{c}{e}=\frac{7}{0.8}=8.75$ کەواتە پۆتانی دوو سەرەکانی دەبنە $(0\ ,\ \pm 8.75)$.

1. پۆتانی سەرەکانی بڕگە ناتەواوێک کە جیاوازی چەقییەکەی 0.75 و دوو تیشکۆکانی $(0\ ,\ \pm 6.5)$ بێت بدۆزەوە.

GRADE12-2011-CHAPTER 6 2/25/18 9:46 AM Page 16



بڕگەی هاوتا یەك تیشكۆ و یەك دەلیلی هەیە، بەڵام بڕگەی ناتەواو دوو دەلیل و دوو تیشكۆی هەیە. دوو دەلیلەكەی بریتیین لە دوو ڕاستەهێڵی ئەستون لەگەڵ تەوەری تیشكۆیی و لە دووری $\pm\frac{a}{e}$ لەچەقەوە دەیانبڕێت x هەر خاڵێكی وەك P لە خاڵەكانی بڕگەی هاوتا ئەم سیفەتەی هەیە $PF = 1 \times PD$ كە D نزیكترین خاڵە لە خاڵەكانی دەلیل لە P .

ئەم پەیوەندییە لەبڕگەی ناتەواودا دەبێتە $F_1 = e \times PD_1$ $PF_2 = e \times PD_2$ كاتێك e جیاوازی چەقی بڕگەی ناتەواوە كە تیشكۆكانی F_1، F_2 و D_1، D_2 دوو خاڵی سەر دوو دەلیلەكەن و نزیكترین خاڵن لە P .

لە هەردوو هاوكێشەی $PF_1 = e \times PD_1$ و $PF_2 = e \times PD_2$ پێویستە تیشكۆ و دەلیل لەهەمان دیوی چەقی بڕگە ناتەواوەكە بن.
دەلیلی $x = -\frac{a}{e}$ لەگەڵ تیشكۆی F_1 و دەلیلی $x = \frac{a}{e}$ لەگەڵ تیشكۆی F_2 بەكاربهێنە.

جیاوازی چەقی بۆ بڕگەی زیادی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ و $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

سەرنجبدە جیاوازی چەقی بڕگەی ناتەواو و زیاد دەكاتە ڕێژەی دووری نێوان دوو تیشكۆ و دووری نێوان هەردوو سەرەكەی چونكە $e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a}$

جیاوازی چەقی $= \dfrac{\text{دووری نێوان دوو تیشكۆ}}{\text{دووری نێوان دوو سەر}}$

دووری نێوان دوو تیشكۆی بڕگەی ناتەواو لە دووری نێوان دوو سەرەكەی بچوكترە بۆیە، جیاوازی چەقی لە 1 كەمتر دەبێت، بەڵام دووری نێوان دوو تیشكۆی بڕگەی زیاد لە دووری نێوان دوو سەرەكەی گەورەترە، بۆیە جیاوازی چەقی لە 1 گەورەترە.

نموونە 2 دۆزینەوەی جیاوازی چەقی

جیاوازی چەقی بۆ بڕگەی زیادی $9x^2 - 16y^2 = 144$ بدۆزەوە.

شیكار

سەرەتا هاوكێشەكە بەشێوەی گشتی بنووسە.

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

لەوەوە دەردەچێت $a = 4$، $b = 3$.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ و $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

خاڵی چاودێری

2. جیاوازی چەقی بۆ بڕگەی زیادی $16x^2 - 9y^2 = 144$ بدۆزەوە.

وەك لە بڕگەی ناتەواودا و هەروەها لە بڕگەی زیاددا دوو ڕاستەهێڵی $x = \pm\frac{a}{e}$ ڕۆڵی دوو ڕاستەهێڵی دەلیل دەبینین و $PF_1 = e \times PD_1$ و $PF_2 = e \times PD_2$ کە P خاڵێکی بڕگەو F_1 و F_2 دوو تیشکۆکانیەتی کاتێك D_1 و D_2 نزیکترین دوو خاڵی سەر دەلیلەکانن لە P . وە هەروەها لە بارەی هاوکێشەی بڕگەی ناتەواو، دەتوانین ڕوونیبکەینەوە کە هەردوو دەلیلەکە بریتین لە: $x = \pm\frac{a}{e}$.

پێناسەی یەکگرتووی بڕگە قووچەکییەکان

بۆ تەواوکردنی شێوە دەربارەی بڕگە قوچەکییەکان، جیاوازی چەقی بڕگەی هاوتا بە $e = 1$ پێناسە دەکەین.

جیاوازی چەقی بڕگەی هاوتا

جیاوازی چەقی لە بڕگەی هاوتا بریتییە $e = 1$.

ئەگەر پێداچوونەوەیەك بۆ ئەو پەیوەندییانەی کە سێ بڕگە قوچەکییەکان هەیانە بکەیت دەتوانیت پێناسەیەکی یەکگرتووی بدەینێ بە بەکارهێنانی تیشکۆ و دەلیل و جیاوازی چەقی.

پێناسەی یەکگرتووی بڕگە قوچەکییەکان

ئەگەر F خاڵێکی سەر ڕووتەخت بێت و d ڕاستەهێڵێك بێت لە ڕاستەهێڵەکانی و e ژمارەیەکی ڕاستی سالب نەبێت، ئەوا ئەو بڕگە قوچەکییەی تیشکۆیەکەی F و دەلیلەکەی d و جیاوازی چەقی e بێت بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك P لە ڕووتەختێکدا کە پاسادانی $PF = e \times PD$ یان $\frac{PF}{PD} = e$ دەکەن.

بڕگەی قوچەکی دەبێتە

- بڕگەی هاوتا کاتێك $e = 1$.
- بڕگەی ناتەواو کاتێك $e < 1$.
- بڕگەی زیاد کاتێك $e > 1$.

هاوکێشەی $e = \frac{PF}{PD}$ بەکارهێنانی ئاسان نییە، چونکە پۆتانەکانی تێدانییە ئەگەر هەوڵبدەیت بیگۆڕیت بە بەکارهێنانی پۆتانەکان چەند ئەنجامێکی جیاوازت بۆ دەردەچێت بەپێی شێوەکانی و بەهای e بەڵام لە سیستمی پۆتانەکانی تر کە سیستمی جەمسەرییە کردارەکە زۆر ئاسانە، لەبەرئەوە زانایانی فەلەکناس و بۆشایی ئاسمان زیاتر لە 300 ساڵ بەر لەئێستا بەکاریاندەهێنێن.

ئەگەر تیشکۆو دەلیلی ئاوەڵی بڕگەی زیاد زانراوبێت و چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و تیشکۆی لەسەر تەوەرەی x بێت. دەتوانیت بەهای جیاوازی چەقی e دەستبکەوێت پاشانیش هاوکێشەیەکی تەوەرەییت لە هاوکێشەی $PF = e \times PD$ دەستدەکەوێت وەك لەم نموونەیەدا دەردەکەوێت، دەتوانین هەمانشت بکەین بۆ هاکێشەی بڕگەی ناتەواو چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و تیشکۆیەکەی لەسەر تەوەرەی x بێت.

نموونە 3 بەکارهێنانی تیشکۆو دەلیل

هاوکێشەی تەوەرەیی ئەو بڕگە زیادە بدۆزەوە کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و تیشکۆیەکیان $(3, 0)$ و دەلیلەکەی ڕاستەهێڵی $x = 1$ بێت.

شیکار

لەبەرئەوەی چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و تیشکۆیەکەشی $(3, 0)$ ئەوا $c = 3$، لەلایەکی ترەوە هاوکێشەی دەلیل $x = \frac{a}{e} = 1$ ئەمەش $a = e$ مان دەداتێ، لە کۆتاییدا $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}$ و بەوەش $e^2 = 3$ لە هەموو ئەمانە دەردەچێت $e = \sqrt{3}$.

GRADE12-2011-CHAPTER 6 2/25/18 9:46 AM Page 18

لە لایەکی ترەوە دەتوانیت پەیوەندی بە تەوەرەیی بگۆڕیت بۆ $PF = e \times PD$.

$$PF = e \times PD$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} = \sqrt{3}|x-1|$$

$$x^2-6x+9+y^2 = 3\left(x^2-2x+1\right)$$

$$2x^2-y^2=6$$

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$$

خاڵی جاوەڕێ

3. هاوکێشەی تەوەرەیی ئەو بڕگە ناتەواو بدۆزەوە کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و تیشکۆیەکی $(3,0)$ و دەلیلەکەی ڕاستەهێڵی $x = 4$ بێت.

2-6 ڕاهێنان

لە پرسیاری 1 تا 4 جیاوازی چەقی و دوو تیشکۆ و دوو دەلیلی بڕگە ناتەواوە کە بدۆزەوە.

1 $16x^2+25y^2=400$ **2** $2x^2+y^2=2$ **3** $3x^2+2y^2=6$ **4** $6x^2+9y^2=54$

لە دوو پرسیاری 5 و 6 دا جیاوازی چەقی پاشان هاوکێشەی گشتی بڕگەی ناتەواو بدۆزەوە کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە بەزانینی تیشکۆ و دەلیل.

5 تیشکۆ: $\left(\sqrt{5}\,,0\right)$، دەلیل $x=\frac{9}{\sqrt{5}}$.

6 تیشکۆ: $(-4\,,0)$، دەلیل $x=-16$.

7 وێنەی بڕگەیەکی ناتەواو بکێشە کە جیاوازی چەقی بکاتە $\frac{4}{5}$ ڕێگای وێنەکێشانەکە ڕوونبکەوە.

8 سەرەکانی بڕگەیەکی ناتەواو بریتییە لە $(1\,,1)$، $(3\,,4)$، $(1\,,7)$، $(-1\,,4)$ وێنەکەی بکێشەو هاوکێشە گشتیەکەی بدۆزەوە، جیاوازی چەقی و تیشکۆکانی و دەلیلەکانی بدۆزەوە.

9 هاوکێشەی بڕگەیەکی ناتەواو بدۆزەوە کە جیاوازی چەقییەکەی $\frac{2}{3}$ و یەکێك لە تیشکۆکانی $(4\,,0)$ و دەلیلەکەی $x=9$ بێت.

لە پرسیاری 10 تا 13 جیاوازی چەقی و تیشکۆکانی و دەلیلەکانی بڕگە زیادەکە بدۆزەوە.

10 $9x^2-16y^2=144$ **11** $y^2-x^2=8$

12 $8x^2-2y^2=16$ **13** $8y^2-2x^2=16$

لە دوو پرسیاری 14 و 15 دا هاوکێشەی گشتی بڕگە زیادەکە بەشێوەی پێوانەیی بدۆزەوە بە زانینی جیاوازی چەقی و هەردوو سەرەکانی یان هەردوو تیشکۆکانی.

14 جیاوازی چەقی 3 : دوو سەرە ستوونیەکانی $(0\,,\pm1)$.

15 جیاوازی چەقی 3 : تیشکۆکان $(\pm3\,,0)$.

16 بەهایەکانی a و b و c بدۆزەوە کاتێك بڕگە ناتەواوی $4x^2+y^2+ax+by+c=0$ بە خاڵی $(-1\,,2)$ دەڕوات و لە تەوەری x دەکەوێت لە خاڵی بنەڕەتدا، بەهای جیاوازی چەقی بڕگەکە چەندە؟

17 هاوکێشەی ئەو بڕگە زیادە بدۆزەوە کە پێکهاتووە لەو خاڵانەی ڕووتەختێك کە بەهای ڕووتی جیاوازی نێوان دوو دووریەکانیان لە دوو خاڵی $(2\,,2)$ و $(10\,,2)$ دەکاتە بەهای نەگۆڕ 6 .

بەشی **6**

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1-6 بڕگە قوچەکییەکان

1 پۆوتانی تیشکۆ و سەری بڕگەو هاوکێشەی دەلیلی بڕگە هاوتایەکە بدۆزەوە، پاشان وێنەکەی بکێشە.

أ $y^2-4x=0$ ب $x=2(1-y^2)$ ج $x^2-2x+2y+3=0$

2 پۆوتانی چەق و دوو تیشکۆ و جیاوازی چەقی بڕگە ناتەواوەکە بدۆزەوە، پاشان وێنەکەی بکێشە.

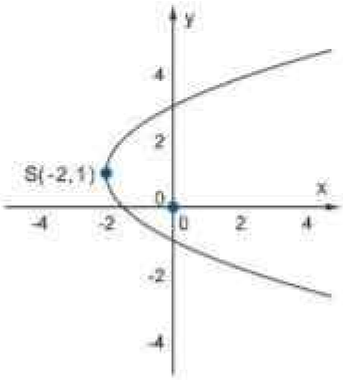
أ $x^2+4y^2=1$ ب $4x^2+y^2-8x-12=0$

3 پۆوتانی چەق و دوو تیشکۆ و درێژی تەوەرەی ڕاستی بڕگە زیادەکە بدۆزەوە، پاشان وێنەکەی بکێشە.

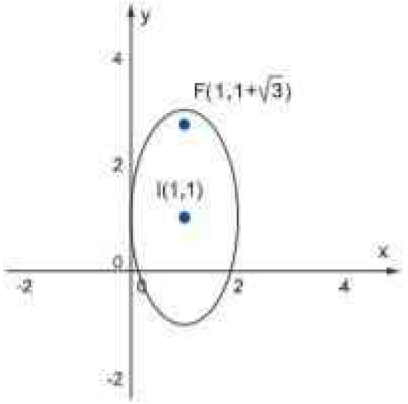
أ $x^2-y^2=4$ ب $4(y-1)^2-x^2=1$

4 هاوکێشەی ئەم بڕگە قوچەکییانە بەشێوەی گشتی بنووسە.

أ



ب



5 هاوکێشەی بڕگە ناتەواوێك بەشێوەی گشتی بدۆزەوە، کاتێك چەقەکەی $I(3,1)$ یەکێك لەسەرەکانی $A(6,1)$ و یەکێك لە دەلیلەکانی ڕاستەهێڵی $x=7$ بێت.

6 هاوکێشەی بڕگە زیادێك بەشێوەی گشتی بدۆزەوە، کاتێك چەقەکەی خاڵی بنەڕەت ویەکێك لەسەرەکانی $A(3,0)$ و جیاوازی چەقی $\frac{5}{3}$ بێت.

2-6 پۆلێنکردنی بڕگە قوچەکییەکان

7 M خاڵێکە لە ڕووتەختی پۆوتاندا بەپێی ئەم پەیوەندییە $|MA-MB|=1$ دەجوڵێت، کاتێك $A(0,-1)$، $B(0,3)$ بێت، جۆری چەماوەی جوڵەی خاڵەکە دیاریبکەو هاوکێشەکەی بدۆزەوە.

8 خاڵی M لە ڕووتەختی پۆوتاندا دەجوڵێت بەمەرجێك دووری نێوانی و خاڵی بنەڕەت دەکاتە (دوو سێیەکی) دووری نێوانی و ڕاستەهێڵی $x=\frac{5}{2}$. جۆری چەماوەی جوڵەی خاڵەکە دیاریبکە و هاوکێشەکەی لەسەر شێوەی گشتی بنووسە.

3–6 هاوکێشە دووجایەکان بە دوو گۆڕاو
Quadratic Equations in 2 Variables

ئامانجەکان

- لە ڕاددەی یەکتربڕین دەرباز دەبیٚ بە سوڕانی تەوەری پۆوتانەکان.
- تواندنە ڕوونکردنەوەییە جیاوازەکانی هاوکێشەیەکی دووجای دوو گۆڕاو دیاریدەکات.
- تاقیکردنەوەی جیاکەرەوە بەکاردەهێنێت بۆ پۆلینکردنی هاوکێشەی دووجای بە دوو گۆڕاو.

زاراوەکان
Vocabulary

چەماوە دووجاکان
Quadratic Curves

جیاکەرەوە
Discriminant

چەماوە دووجاکان

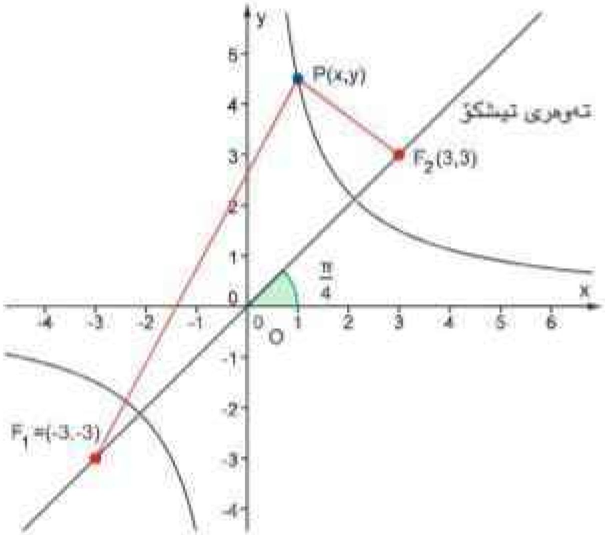
لەم وانەیەدا فێری بابەتێکی زۆر سەرسورهێنەر دەبێت لە ئەندازەی پۆوتانەکان، کە بریتییە لە تواندنی ڕوونکردنەوەی هاوکێشەیەکی دووجای دوو گۆڕاو کە بەشێوەی
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ دەنووسرێت، کاتێك A و B و C و D و E و F ژمارەی ڕاستین هەموویان ناکەنە سفر، بەزۆری ئەم چەماوەیە بڕگەی قوچەکییە، بەڵام جار هەیە لەباری شێواوی (خاڵێك یان دوو ڕاستەهێڵی تەریب یان کۆمەڵەی بەتاڵ) دەبێت.

ئەو چەماوانەی هاوکێشەی دووجای دوو گۆڕاو دەنوێنن بە **چەماوە دووجاکان** ناسراون، بێ گومان دەربارەی ڕاددەی Bxy دەپرسێت، کە پێشتر لە هاوکێشەی بڕگە قوچەکییەکان بەرچاوت نەکەوتووە بەو ڕاددەیە دەوترێت ڕاددەی یەکتربڕین. نەبوونی ڕاددەی یەکتربڕین بۆ ئەوە دەگەڕێتەوە کە تەوەرەکانی بڕگە قوچەکییەکان هەردەم بە تەوەری پۆوتانەکان تەریب بوون، بۆ ئەوەی ببینیت چی ڕوودەدات و کاتێك تەوەرەکان بەتەوەری پۆوتانەکان تەریب نابێت، هاوکێشەی بڕگەی زیاد لەباری $a = 3$ و تیشکۆکان $F_1(-3, -3)$ ، $F_2(3, 3)$ دەنووسین.

ئەو بڕگە زیادە بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێکی $P(x, y)$ کە پاسادانی $|PF_1 - PF_2| = 2a = 2(3) = 6$ دەکات بەشێوەی پۆوتانەکان دەکاتە.

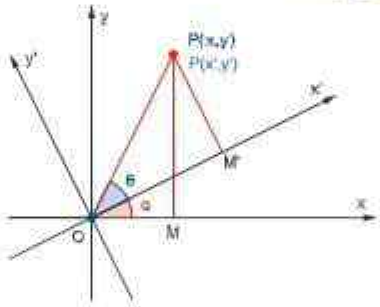
$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \pm 6$$

ئەگەر یەکێك لە ڕەگەکانت جیاکردەوە بۆ لایەك بەتەنیا و دووجات کرد، پاشان ئەو ڕەگەی ماوە لەلایەك بەتەنیات داناو لەنوێیەوە دووجات کرد و لە دوای کورتکردنەوە $2xy = 9$ دەستدەکەوێت.



دوو هێڵە دەرکەنارەکانی بڕگە زیادەکە بەپێی هاوکێشە نوێیەکە هەردوو تەوەری پۆوتانەکانە، بەڵام تەوەری تیشکۆ لەگەڵ ئاڕاستەی موجەبی تەوەری x گۆشەیەك پێکدەهێنێت، پێوانەکەی $\frac{\pi}{4}$ ڕادیان (بازنەیی)

سوڕاندنی دوو تەوەری پۆوتانەکان بۆ ڕزگاربوون لە ڕادەی Bxy



بۆ ڕزگاربوون لە ڕادەی یەکتربڕین، ئەوانەی لە بواری بیرکاری کاریەکەن هەڵدەستن بە سوڕانی تەوەرەکانی پۆوتان بەدەوری خاڵی بنەڕەتدا بۆ دەستکەوتنی ڕووتەختێکی نوێ بۆ ئەوەی هاوکێشەی چەماوەکە هیچ ڕادەیەکی یەکتربڕینی تێدا نەمێنێت.

بەپێی وێنەی بەرامبەر دەتوانیت بنووسیت:

$$x = OM = OP\cos(\theta+\alpha) = OP\cos\theta\cos\alpha - OP\sin\theta\sin\alpha$$

$$y = PM = OP\sin(\theta+\alpha) = OP\cos\theta\sin\alpha + OP\sin\theta\cos\alpha$$

لەبەرئەوەی $OP\cos\theta = OM' = x'$ و $OP\sin\theta = M'P = y'$.

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

دەتوانین پەیوەندی سەرەوە بەشێوەی ریزکراوەکان دەربڕین وەك لەپۆلی یازدەم فێری بوویت.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

نموونە 1 ڕزگاربوون لە ڕادەی یەکتربڕین

هاوکێشەی برگەی زیادی $2xy = 9$ لە ڕووتەختی پۆوتانەکان کە لە ئەنجامی سووڕانی تەوەری پۆوتانەکان دەردەچێت بەدەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $\frac{\pi}{4}$ دا بدۆزەوە.

شیکار

لە $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ دەردەچێت $x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$ و $y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ بە لە جیاتیدانی x و y لە $2xy = 9$

دەردەچێت کە: $2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) = 9$

یان $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{9} = 1$ دەبێتە هاوکێشەی برگەی زیاد لە ڕووتەختی پۆوتانە نوێیەکە.

خاڵی چاودێری

1. هاوکێشەی برگە زیادی $xy = 1$ کە لە ئەنجامی سوڕانی تەوەری پۆوتانەکان دەردەچێت بە دەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $\frac{\pi}{4}$ رادیان بدۆزەوە.

ئەگەر بگەڕێینەوە بۆ هاوکێشەی دووجای دوو گۆڕاو و لەجیاتی x و y بەهایەکانی α و x' و y' دانا ئەوا ئەم شێوەی خوارەوەمان لە هاوکێشەکە دەستدەکەوێت لە ڕووتەختە نوێیەکەی پۆوتانەکان.

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

هاوکۆلکەی نوێیەکان و کۆنەکان بەم پەیوەندییەی خوارەوە بەیەکەوە دەبەسترێن.

$$A' = A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha$$

$$B' = B\cos 2\alpha + (C-A)\sin 2\alpha$$

$$C' = A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

$$D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha$$

$$E' = -D\sin\alpha + E\cos\alpha$$

$$F' = F$$

GRADE12-2011-CHAPTER 6 2/25/18 9:46 AM Page 22

بۆ رزگاربوون لە ڕادەی $B'x'y'$ ئەوەندە بەسە کە α هەڵبژێریت کاتێك $B'=0$ ئەمەی خوارەوەمان دەستدەکەوێت.

دیاریکردنی گۆشەی سووڕان α

- ئەگەر $A=C$ ، $\alpha=\frac{\pi}{4}$ هەڵبژێرە ئەوا $B'=B\cos 2\alpha = B\cos\frac{\pi}{2}=0$.
- ئەگەر $A\neq C$ ، α هەڵبژێرە بە مەرجێك $\tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}$.

نموونە 2 رزگاربوون لەڕادەی یەکتربڕین

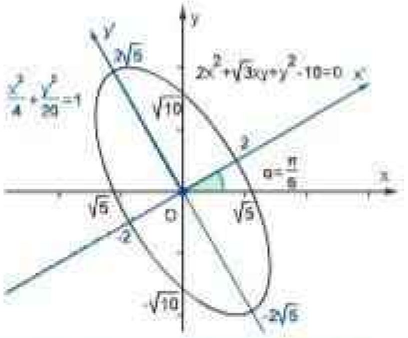
گۆشەی سووڕانەوەی α بدۆزەوە بەمەرجێك هاوکێشەی $2x^2+\sqrt{3}xy+y^2-10=0$ لە ڕووتەختی پۆوتانی نوێدا ڕادەی یەکتربڕینی تێدانەبێت، هاوکێشەی چەماوەکە لە ڕووتەختی پۆوتانی نوێدا بدۆزەوە.

شیکار

$A=2$ ، $B=\sqrt{3}$ ، $C=1$ بە لە جیاتیدانان $\tan 2\alpha=\frac{B}{A-C}=\frac{\sqrt{3}}{2-1}=\sqrt{3}$ مان دەستدەکەوێت لەمەش دەردەچێت $2\alpha=\frac{\pi}{3}$ و $\alpha=\frac{\pi}{6}$ ، هاوکۆلکەی هاوکێشەی چەماوەکە لەڕووتەختی پۆوتانی نوێدا ئەمەیە $2\alpha=\frac{\pi}{3}$ و $\alpha=\frac{\pi}{6}$ و $A'=\frac{5}{2}$ و $B'=0$ و $C'=\frac{1}{2}$ و $D'=E'=0$ و $F'=-10$ ئەمەش ئەوەمان دەداتێ:

$$\frac{5}{2}(x')^2+\frac{1}{2}(y')^2-10=0$$

یان $\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{20}=1$ ئەم چەماوەیە هی برگەی ناتەواوە، تیشکۆکانی دەکەونە سەر تەوەرەی y'



2. گۆشەی سووڕانەوەی α بدۆزەوە کاتێك هاوکێشەی چەماوەی $xy-x-y+1=0$ لە ڕووتەختی پۆوتانی نوێدا ڕادەی یەکتربڕینی تێدانەبێت وهاوکێشەی چەماوەکە لەڕووتەختی پۆوتانی نوێدا بدۆزەوە.

نواندنی ڕوونکردنەوەی هاوکێشەی دووجا بە دوو گۆڕاو

لەبەرئەوەی هەموو کات دەتوانین ڕادەی یەکتربڕین لابدەین کەواتە دەتوانین $B=0$ گریمان بکەین و هاوکێشەی دووجای دوو گۆڕاو بەم شێوەیە بنووسین $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

ئەم هاوکێشەیە یەکێك لەم بارانەی خوارەوە دەنوێنێت.

1. **بازنە** کاتێك $A=C\neq 0$ (دووباری نارێکی هەیە ئەویش خاڵ و کۆمەڵەی بەتاڵە).
2. **برگەی هاوتا** کاتێك یەکێك لە گۆڕاوەکانی دووجاو ئەوی تریان پلەیەك بێت.
3. **برگەی ناتەواو** کاتێك A و C هەمان نیشانەیان هەبێت (دووباری نارێکی هەیە خاڵ وکۆمەڵەی بەتاڵ).
4. **برگەی زیاد** کاتێك A و C دوو نیشانەی جاوازیان هەبێت (بارێکی نارێکی هەیە دوو ڕاستەهێڵی یەکتربڕ).
5. **ڕاستەهێڵ** کاتێك $A=C=0$ و بەلایەنی کەمەوە یەکێك لە دوو هاوکۆلکەی D و E جیاوازبن لە سفر.

6. ڕاستەهێڵێک یان دوو ڕاستەهێڵ ئەگەر لە توانادا بوو لای چەپی هاوکێشەکە شیتەڵ بکرێت بە شێوەی ئەنجامی لێکدانی دوو کۆڵکەی هێڵی. ئەم خشتەیەی خوارەوە چەند نموونەیەکن.

تێبینی	هاوکێشە	F	E	D	C	B	A	
$F<0 ؛ A=C$	$x^2+y^2=4$	-4	0	0	1	0	1	بازنە
دووجایە لە y ، هێڵییە لە x	$y^2=9x$	0	0	-9	1	0	0	بڕگەی هاوتا
$F<0 ، A\neq C ، AC>0$	$4x^2+9y^2=36$	-36	0	0	9	0	4	بڕگەی ناتەواو
تەوەری y	$x^2=0$	0	0	0	0	0	1	یەک ڕاستەهێڵ
شیتەڵ بۆ $(x-1)(y+1)=0$ $y=-1 ، x=1$	$xy+x-y-1=0$	-1	-1	1	0	1	0	دوو ڕاستەهێڵی یەکتربڕ
شیتەڵ بۆ $(x-1)(x-2)=0$ $x=2 ، x=1$	$x^2-3x+2=0$	2	0	-3	0	0	1	دوو ڕاستەهێڵی تەریب
خاڵی بنەڕەت	$x^2+y^2=0$	0	0	0	1	0	1	خاڵ
کۆمەڵەی بەتاڵ	$x^2=-1$	1	0	0	0	0	1	کۆمەڵەی بەتاڵ

تاقیکردنەوەی جیاکەرەوە Discriminant Test

بە ڕەچاوکردنەوەی ئەوەی هەندێك بڕگەی قوچەکی باری نارێکیان هەیە، بەڵام ئەو چەماوەی هاوکێشەی $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ بنوێنێت، دەبێتە:

- بڕگەی هاوتا کاتێك جیاکەرەوە بکاتە 0.
- بڕگەی ناتەواو کاتێك جیاکەرەوە سالبە.
- بڕگەی زیاد کاتێك جیاکەرەوە موجەبە.

جیاکەرەوە
B^2-4AC

نموونــــە 3 تاقیکردنەوەی جیاکەرەوە

جۆری ئەم چەماوەیە دیاریبکە کە هەریەك لەم هاوکێشانە دەنوێنێت:

أ $3x^2-6xy+3y^2+2x-7=0$ ب $x^2-xy+y^2-1=0$ ج $xy-y^2-5y+1=0$

شیکار

أ $B^2-4AC=(-6)^2-4(3)(3)=36-36=0$ بڕگەی هاوتایە.

ب $B^2-4AC=(1)^2-4(1)(1)=1-4=-3<0$ بڕگەی ناتەواوە.

ج $B^2-4AC=(1)^2-4(0)(-1)=1>0$ بڕگەی زیاد.

خاڵی چاوبڕی

3. جۆری ئەم چەماوەیە دیاریبکە کە هەریەك لەم هاوکێشانە دەنوێنێت.

أ $2x^2-4xy+2y^2+2x-7=0$ ب $2x^2+xy+y^2-5=0$

ج $x^2-xy-y^2-5y+1=0$

GRADE12-2011-CHAPTER 6 2/25/18 9:46 AM Page 24

3-6 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تا 8 جیاکەرەوە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی جۆری ئەو چەماوەی هاوکێشەکە دەنوێنێت.

1. $x^2-3xy+y^2-x=0$
2. $3x^2-7xy+\sqrt{17}y^2=1$
3. $x^2+2xy+y^2-y+2=0$
4. $x^2+4xy+4y^2-3x=6$
5. $xy+y^2-3x=5$
6. $3x^2-5xy+2y^2-7x-14y=-1$
7. $x^2-3xy+3y^2+6y=7$
8. $6x^2+3xy+2y^2+17y+2=0$

9. **بنووسە** چی دەتوانیت بنووسیت لەبارەی ئەو وێنە ڕوونکردنەوەی هاوکێشەی $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ دەنوێنێت، ئەگەر $AC<0$؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

10. **بنووسە** ئایا هیچ برگەیەکی قووچەکی ڕێك هەیە لە هاوکێشەی $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ ئەم سیفەتانەی تێدابێت.

    أ) هاوجێ بێت لەگەڵ خاڵی بنەڕەت.

    ب) بەخاڵی $(1, 0)$ دا بڕوات، بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

11. أ) جۆری برگەی قوچەکی ئەم هاوکێشەیە $xy+2x-y=0$ دیاریبکە؟

    ب) هاوکێشەکە بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بەهای y بەپێی x بنووسیت، ئەو هاوکێشەی دەستت کەوت بە شێوەی نەخشەیەکی ڕێژەیی y بەپێی x بنوێنە.

    ج) پۆوتانی دوو خاڵی برگە قوچەکییەکە بدۆزەوە کە تێیدا لێکەوت ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=-2x$

12. **نیشانەی AC** ڕاستی هەر دەستەواژەیەك لەبارەی چەماوەی $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ بسەلمێنە یان دژە نموونەیەك بهێنەوە بۆ سەلماندنی ناڕاستی دەستەواژەکە.

    أ) ئەگەر $AC>0$ ئەوا چەماوەکە برگەی ناتەواوە.

    ب) ئەگەر $AC=0$ ئەوا چەماوەکە برگەی هاوتایە.

    ج) ئەگەر $AC<0$ ئەوا چەماوەکە برگەی زیادە.

بەرەنکاری «بۆ تێڕوانین»

13. **ڕووبەری برگەی ناتەواو** ئەگەر $B^2-4AC<0$ ئەوا وێنەی ڕوونکردنەوەی هاوکێشەی $Ax^2+Bxy+Cy^2=1$ برگەی ناتەواوە، تەوەرە گەورەکەی $2a$ و تەوەرە بچووکەکەی $2b$ و ڕووبەرەکەی دەکاتە πab بسەلمێنە کە ڕووبەری برگەی ناتەواو دەکاتە $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC-B^2}}$

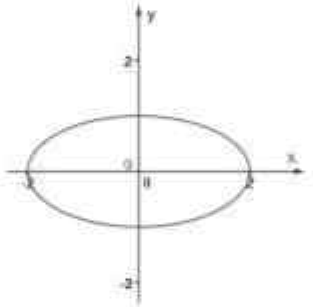
GRADE12-2011-CHAPTER 6 2/25/18 9:46 AM Page 27

بـەشی 6

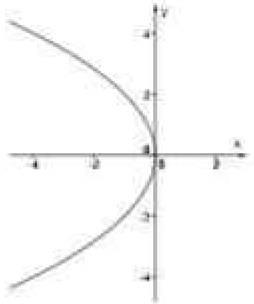
پێداچوونەوەی بەش

لە پرسیاری 1 تا 6 وێنەی ڕوونکردنەوەی هەر هاوکێشەیەک دیاریبکە.

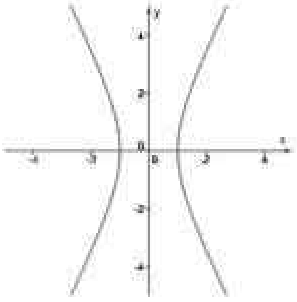
أ



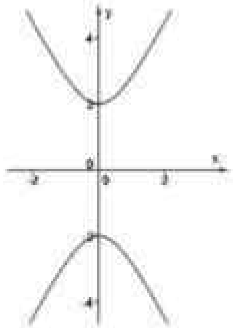
ب



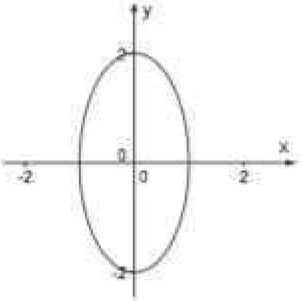
ج



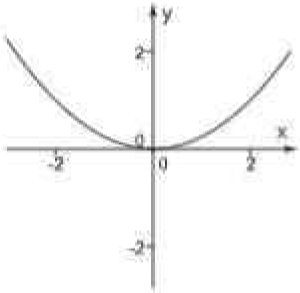
د



هـ



و



1 $4x^2 + y^2 = 4$ **2** $4x^2 - y^2 = 4$ **3** $y^2 = -4x$

4 $y^2 - 4x^2 = 4$ **5** $x^2 + 4y^2 = 4$ **6** $x^2 = 4y$

لە پرسیاری 7 تا 10 هاوکێشەکە شیتەڵبکە و ڕوونکردنەوەکەی بکێشە.

7 $16x^2 + 16y^2 - 16x + 24y - 3 = 0$ **8** $3x^2 - 2y^2 + 24x + 12y + 24 = 0$

9 $3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 29 = 0$ **10** $y^2 - 12y - 8x + 20 = 0$

لە دوو پرسیاری 11 و 12 هاوکێشەی برگە هاوتایەکە بدۆزەوە.

11 سەر $(0, 2)$ دەلیل $x = -3$ **12** سەر $(4, 2)$ تیشکۆ $(4, 0)$

لە دوو پرسیاری 13 و 14 هاوکێشەی برگە ناتەواوەکە بدۆزەوە.

13 سەرەکان: $(-3, 0)$ $(7, 0)$
تیشکۆکان: $(0, 0)$ $(4, 0)$

14 چەق: $(0, 0)$
بە دوو خاڵی $(1, 2)$ و $(2, 0)$ دا دەڕوات.

لە دوو پرسیاری 15 و 16 هاوکێشەی برگە زیادەکە بدۆزەوە.

15 سەرەکان: $(-4, 0)$ و $(4, 0)$
تیشکۆکان: $(-6, 0)$ $(6, 0)$

16 تیشکۆکان: $(0, -8)$ ، $(0, 8)$
هێڵە نەرکەنارەکان: $y = -4x$ و $y = 4x$.

17 هاوكێشەی لێكەوتی بڕگەی هاوتای $y = x^2 - 2x + 2$ بدۆزەوە، كە ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y = x - 2$.

18 هاوكێشەی لێكەوتی بڕگە هاوتای $3x^2 + y = x - 6$ بدۆزەوە، كە ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $2x + y = 5$.

19 **سێڵی وەرگر** پارچەیەكی سێڵە وەرگرێكی گەورە شێوەی بڕگە هاوتایەك وەردەگرێت كە هاوكێشەكەی $y = \frac{x^2}{200}$ بێت كاتێك $-100 \le x \le 100$ ئەخشەسازەكە ئامێری وەرگرەكەی لە تیشكۆی بڕگە هاوتایەكە دانا، پۆوتانی ئەم تیشكۆیانە چەندە؟

20 جیاوازی چەقی بۆ ئەم بڕگە قوچەكییانە بدۆزەوە و جۆرەكانی دیاریبكە.

أ $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

ب $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$

ج $25x^2 - 10x - 200y - 199 = 0$

د $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y + 34 = 0$

لە پرسیاری 21 تا 24 هاوكێشەی بڕگە قوچەكییەكە بەشێوەی گشتی بدۆزەوە.

21 جیاوازی چەقی: 0.7 تیشكۆكان: $(0, \pm 2)$

22 سەرەكان: $(\pm 5, 0)$ جیاوازی چەق: 1.5

23 بڕگەی هاوتا تیشكۆ: $(1, 1)$ سەر: $(1, 0)$

24 بڕگەی ناتەواو تیشكۆ: $(-3, 0)$ دەلیل: $x = -9$، جیاوازی چەقی: $\frac{1}{2}$

لە پرسیاری 25 تا 28 جۆری بڕگە قوچەكییەكەو پێكهاتەكانی بدۆزەوە.

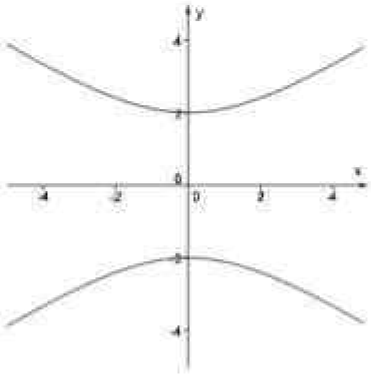
25 $16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$

26 $16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0$

27 $4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0$

28 $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$

بەشی 6
ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە



1 کام لەمانە هاوکێشەی وێنەی بەرامبەرە؟

أ $9x^2-4y^2=36$

ب $4x^2+9y^2=36$

ج $9y^2-4x^2=36$

د $9x^2+4y^2=36$

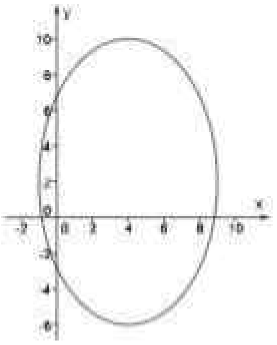
2 کام لەم خاڵانە دەبێتە خاڵی یەکتربڕینی هاوکێشەی $4x^2+25y^2=100$ لەگەڵ تەوەری x.

أ $(2,0)$ و $(-2,0)$

ب $(4,0)$ و $(-4,0)$.

ج $(5,0)$ و $(-5,0)$

د $(10,0)$ و $(-10,0)$



3 کام لەمانە هاوکێشەی وێنەی بەرامبەرە؟

أ $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{64}=1$

ب $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{576}=1$

ج $\frac{(x-1)^2}{20}+\frac{(y-1)^2}{150}=1$

د $\frac{x^2}{175}+\frac{y^2}{225}=1$

4 کام لەم برگە زیادانە گەورەترین دووری نێوان دوو تیشکۆی هەیە؟

أ $\frac{(x-6)^2}{36}-\frac{(y+2)^2}{81}=1$

ب $\frac{(x+22)^2}{45}-\frac{(y-36)^2}{125}=1$

ج $\frac{(y+115)^2}{49}-\frac{(x-225)^2}{100}=1$

د $\frac{(y-59)^2}{90}-\frac{(x+76)^2}{95}=1$

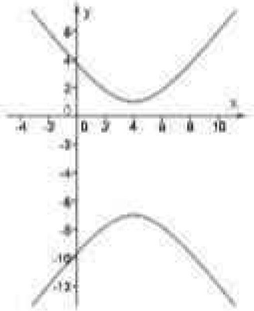
5 کام لەم هاوکێشانە دەرکەنارە بۆ برگەی زیاد $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

أ $y=-\frac{2}{3}x$

ب $y=\frac{3}{2}x$

ج $y=-\frac{9}{4}x$

د $y=\frac{9}{4}x$



6 کام لەمانە هاوکێشەی وێنەی بەرامبەرە؟

أ $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+4)^2}{9}=1$

ب $\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-4)^2}{9}=1$

ج $\frac{(y-3)^2}{16}-\frac{(x+4)^2}{9}=1$

د $\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{(x-4)^2}{9}=1$

7 درێژی تەوەری بچووکی برگەی ناتەواوی $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{121}=1$ بریتییە لە:

أ 7 ب 11 ج 14 د 22

8 کام لەم بڕگە هاوتایانەی خوارەوە کراوەتەوە بەلای چەپدا؟

أ $16y-4x^2=12$

ب $16y+4x^2=12$

ج $16x-4y^2=12$

د $16x+4y^2=12$

9 کام لەمانەی دێت تەوەرەی هاوجێیە بۆ بڕگەی هاوتای $x-4=\frac{1}{8}(y+2)^2$؟

أ $x=0$ ب $y=-2$ ج $x=4$ د $y=8$

10 کام لەم بڕگە هاوتایانە دەلیلەکەی بریتییە لە $y=4$؟

أ $y+3=\frac{1}{4}(x-1)^2$

ب $y-5=\frac{1}{4}(x+2)^2$

ج $x-5=\frac{1}{4}(y+4)^2$

د $x+3=\frac{1}{4}(y-2)^2$

11 لێکەوتی بڕگە هاوتای $y=ax^2$ لە $x=p$ تەوەری x دەبڕێت لە؟

أ $x=\frac{p}{2}$ ب $x=\frac{p^2}{2}$ ج $x=\frac{ap}{2}$ د $x=\frac{ap^2}{2}$

12 لاری لێکەوت بۆ چەماوەیەك لە خاڵی (x, y) دەکاتە $\frac{x}{y}$ بۆ هەر خاڵێکی سەر چەماوەکە، جۆری چەماوەکە چییە؟

أ بازنە ب بڕگەی هاوتا ج بڕگەی ناتەواو د بڕگەی زیاد

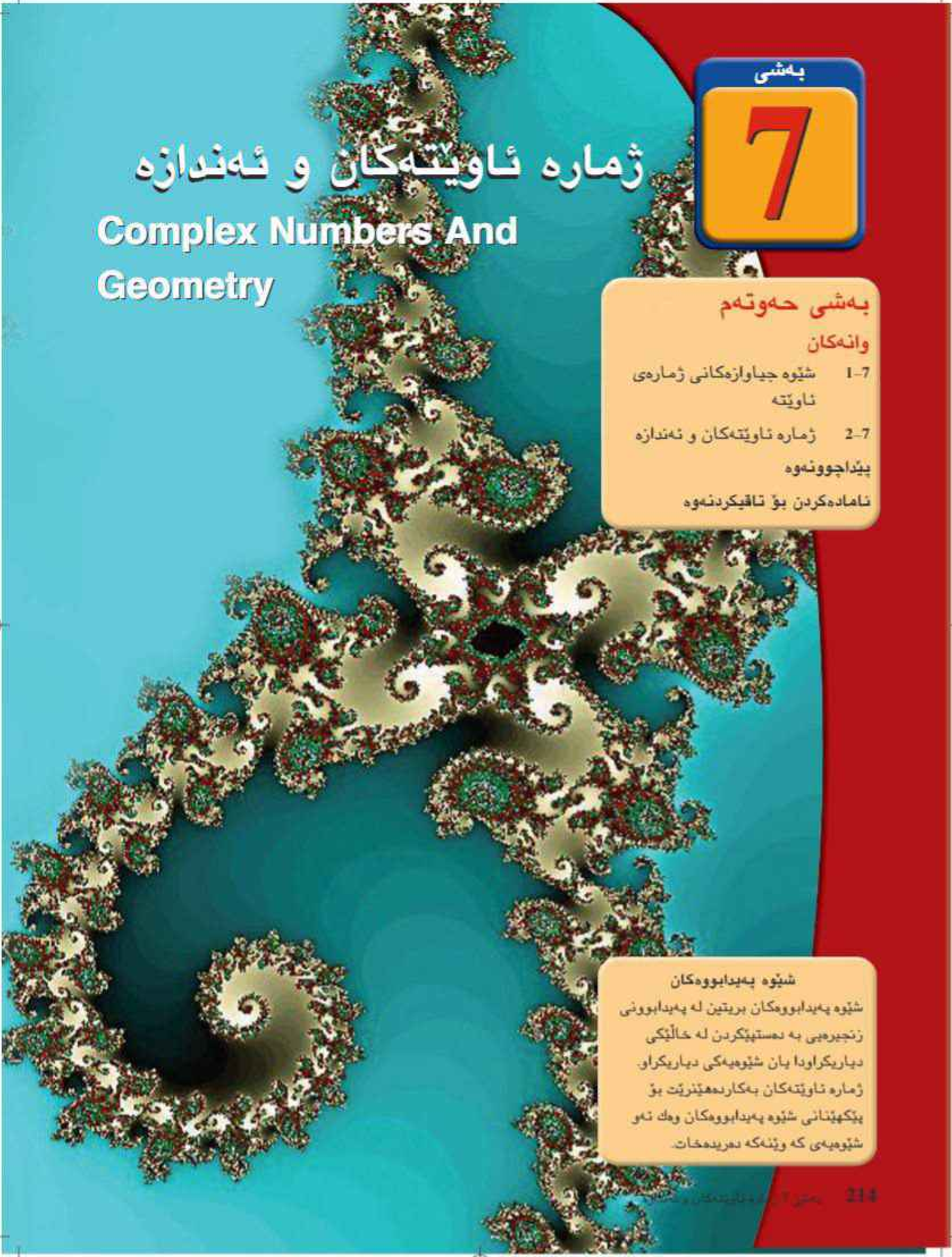
13 کام لەمانەی خوارەوە تیشکۆی بڕگە هاوتای $y^2+4y-8x+36=0$؟

أ $(-2, 6)$ ب $(6, -2)$ ج $(2, -2)$ د $(4, -2)$

14 جۆری ئەو چەماوە چییە کە هاوکێشەکەی $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$ بێت.

أ بازنە ب بڕگەی هاوتا ج بڕگەی ناتەواو د بڕگەی زیاد

GRADE12-2011-CHAPTER 7 2/25/18 10:19 AM Page 3



بەشی

7

ژمارە ئاوێتەکان و ئەندازە

Complex Numbers And Geometry

بەشی حەوتەم

وانەکان

7–1 شێوە جیاوازەکانی ژمارەی ئاوێتە

7–2 ژمارە ئاوێتەکان و ئەندازە

پێداچوونەوە

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

شێوە پەیدابووەکان

شێوە پەیدابووەکان بریتین لە پەیدابوونی زنجیرەیی بە دەستپێکردن لە خاڵێکی دیاریکراودا یان شێوەیەکی دیاریکراو. ژمارە ئاوێتەکان بەکاردەهێنرێت بۆ پێکهێنانی شێوە پەیدابووەکان وەک ئەو شێوەیەی کە وێنەکە دەریدەخات.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

1 هەر دەستەواژەیەك لەستوونی یەکەم ببەستەوە بە ڕوونکردنەوەکەی لە ستوونی دووەم.

1. ژمارەی ناوێتە	أ. ژمارەیەکە بەشێوەی $\frac{a}{b}$ دەنووسرێت، کاتێك a ، b دوو ژمارەی تەواون و $b \neq 0$.
2. ڕاکێشان	ب. جێگۆڕکێیەکی ئەندازەییە خاڵی $A(x, y)$ بۆ خاڵی $A'(kx, ky)$ دەگۆڕێت.
3. وێنەدانەوە بەدەوری ڕاستەهێڵ	ج. ژمارەیەکەبەشێوەی $a + ib$ دەنووسێت کاتێك a ، b ژمارەی ڕاستین $i^2 = -1$.
4. ژمارەی ڕاستی	د. جێگۆڕکێیەکی ئەندازەییە. هەموو خاڵەکانی ڕووتەختێك کاتێك k ژمارەیەکی ڕاستییە بەهەمان ماوە و بەهەمان ئاڕاستە ڕادەکێشێت.
5. هاوڕێژەی ئەندازەیی.	هـ. دووری نێوان خاڵێکی لەسەر تەوەری ژمارەکان و خاڵی بنەڕەتە.
	و. جێگۆڕکێیەکی ئەندازەییە. هەر خاڵێکی وەك A بۆ خاڵی A' دەگۆڕێت بەمەرجێك $\overline{AA'}$ تەوەری ڕاستەهێڵەکە بێت.

جێگۆڕکێ ئەندازەییەکان

لە ڕاهێنانی 2 تا 9 پۆوتانی شێوەی خاڵی $A(1, 1)$ بە جێگۆڕکێی دیاریکراو بدۆزەوە:

2 وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x.

3 وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری y.

4 وێنەدانەوە بەدەوری ڕاستەهێڵی $y = x$.

5 ڕاکێشان بە ئاڕاستە بڕی $\vec{u}\langle 2, -3\rangle$

6 هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و ڕێژەکەی $\frac{1}{2}$.

7 خولانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $135°$.

8 خولانەوە بەدووری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $-90°$.

9 وێنەدانەوە بەدەوری ڕاستەهێڵی $x = 2$ پاشان خولانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت گۆشەکەی $90°$ بێت.

هاوکێشەی دووجایی

لە ڕاهێنانی 10 تا 13 جۆری ڕەگەکانی هاوکێشەی دووجایی و ژمارەکانیان دیاریبکە.

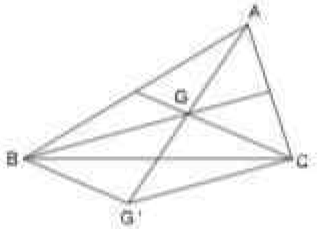
10 $2x^2 + 5x - 9 = 0$

11 $x^2 + x + 1 = 0$

12 $-3x^2 + 5x - 11 = 0$

13 $2x^2 + 8x + 8 = 0$

ئاڕاستەبڕەکان



14 لەوێنەی بەرامبەر، G خاڵی یەکتربڕینی هێڵە ناوەندەکانی سێگۆشەی ABC و G' شێوەی G بە وێنەدانەوە بەدەوری ناوەڕاستی $\overline{BC}$ دەنوێنێت $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ بدۆزەوە.

7–1 شێوە جیاوازەکانی ژمارەی ئاوێتە
Various Forms of a Complex Number

ئامانجەکان

- بەهای ڕووتی ژمارە ئاوێتە و گۆشە جەمسەرییەکەی دەدۆزێتەوە.
- ژمارەیەکی ئاوێتە بەشێوەی جەبری و سێگۆشەیی و جەمسەری دەنووسێت.

زاراوەکان
Vocabulary

بەهای ڕووت Absolute Value
گۆشەی جەمسەری Argument
شێوەی جەبری Algebraic Form
شێوەی سێگۆشەیی Trigonometric Form
شێوەی جەمسەری Polar Form

لەپۆلی یازدەدا فێربوویت کە شیکارکردنی ئەو هاوکێشە دووجایانەی جیاکەرەوەکانیان سالبە، پێویستیان بە جۆرێکی نوێ لە ژمارەکان هەیە ئەویش **ژمارە ئاوێتەکانە**. هەروەها فێربوویت هەر ژمارەیەکی ئاوێتە بەشێوەی $z = x + iy$ و تەنها بەو شێوەیە دەنووسرێت، کاتێك x و y دوو ژمارە ڕاستین و i ژمارەیەکی خەیاڵییە پاسادانی $i^2 = -1$ دەکات.

لەمەوە دەردەچێت هەر ژمارەیەکی ئاوێتە $z = x + iy$ جووتە ڕێکخراوێکی وەك (x , y) دیاریدەکات کە لە دوو ژمارەی ڕاستی پێکهاتووە و بەخاڵێکی وەك $M(x , y)$ لە ڕووتەختی پۆتاندا دەنوێنرێت بەم خاڵەش دەوترێت خاڵی ژمارە ئاوێتەی z وبەشێوەی M_z دەنووسرێت. لەلایەکی ترەوە هەر خاڵێکی وەك $A(a , b)$ لە ڕووتەختی پۆتانەکان وەك جووتە ڕێکخراوی (a , b) دیاریدەکات ولە کۆتاییدا ژمارەیەکی ئاوێتەی وەك $u = a + ib$ پێکدەهێنێت وبەم ژمارەیە دەوترێت ژمارەی خاڵی ئاوێتەی A بە شێوەی z_A دەنووسرێت.

شێوەی جەبری

شێوەی جەبری ژمارەی ئاوێتەی z بەشێوەی $z = x + iy$ دەنووسرێت، کاتێك x و y دوو ژمارەی ڕاستین و i ژمارەیەکی خەیاڵییە و پاسادانی $i^2 = -1$ دەکات و هەروەها لەپۆلی یازدەدا فێربوویت کە z تەنها بەیەك ڕێگا دەنووسرێت، بە x دەوترێت **بەشی ڕاستی** z و دەنووسرێت $R(z)$ و بە y دەوترێت **بەشی خەیاڵی** z و دەنووسرێت $I(z)$.

هەموو ژمارەیەکی ئاوێتە $z = a + ib$ ژمارەیەکی ئاوڵی هەیە $\bar{z} = a - ib$ ($\bar{z}$ **ئاوڵی ژمارەی** z) تێبینی ئەوە بکە بەشی ڕاستی هەردوو ژمارەی z و $\bar{z}$ یەکسانن $R(\bar{z}) = R(z)$ وهەر دوو بەشی خەیاڵی لەنیشانەدا پێچەوانەی یەکترن $I(\bar{z}) = -I(z)$

نمونـــــە 1 دۆزینەوەی بەشی ڕاستی وبەشی خەیاڵی ژمارەی ئاوێتە

ژمارەی ئاوێتەی $z = \frac{1-2i}{1+2i}$ بەشێوەی جەبری بنووسە و بەشی ڕاستی و خەیاڵی بدۆزەوە.

شیکار

$$z = \frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$ سەرەو ژێرە لەئاوڵی ژێرە بدە، بۆ ئەوەی لە i ی ژێرە ڕزگاربێت.

$$z = \frac{1-2i-2i+4i^2}{1-4i^2} = \frac{1-4i-4}{1+4} = \frac{-3-4i}{5} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

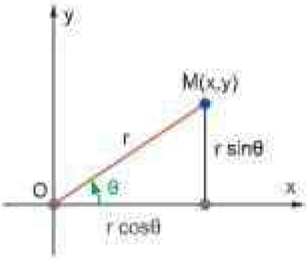
بەشی ڕاستی z دەکاتە $R(z) = -\frac{3}{5}$ وبەشی خەیاڵی $I(z) = -\frac{4}{5}$.

خاڵی چاودێری

1. ژمارەی $z = (2 - 3i)(5i - 4)\big(-7(i-1)\big)$ بەشێوەی جەبری بنووسە و بەشی ڕاستی و خەیاڵی بدۆزەوە.

لەگەڵ شێوەی جەبری ژمارەی ئاوێتە، شێوەی سێگۆشەیی و شێوەی جەمسەری هەیە، کە بۆ شیکارکردنی زۆر لە پرسیارەکان بەچەندەها ڕێگای کورت بەکاردەهێنرێن.

شێوەی سێگۆشەیی



لەشێوەی بەرامبەردا M خاڵی ژمارەی ناوێتەی $z = x + iy$ ، $(z \neq 0)$
ئەم خاڵە ژمارەیەکی موجەب r دەنوێنێت کە دەکاتە دووری نێوان M
و خاڵی بنەڕەت O ، لەگەڵ ژمارەیەکی ڕاستی تر کە بریتییە لە پێوانەی
گۆشەی ناڕاستەکراوی θ (بەڕادیان) کە تیشکی OM لەگەڵ نیوەی
موجەبی تەوەری x پێکدەهێنێت. بەژمارەی یەکەم دەوترێت بەهای
ڕووتی z و بە $|z|$ هێما دەکرێت و بەژمارەی دووەم دەوترێت گۆشەی
جەمسەری ژمارە z و بە $\arg(z)$ هێمادەکرێت.

تێبینی ئەوە بکە کە بەهای ڕووتی ژمارەی ناوێتە دیاریکراوە بە بێ هیچ ئاڵۆزییەك بەڵام دیاریکردنی گۆشەی جەمسەری هەندێك ئاڵۆزی دروست دەکات. بۆ نموونە: ئەگەر $\frac{\pi}{3}$ پێوانەی گۆشەی جەمسەری z بێت، ئەوا $\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ کاتێك n ژمارەیەکی تەواوە، پێوانەیەکی تری گۆشەکەیە، ئەوەش وامان لێ دەکات کە باس لە گۆشەیەکی جەمسەری ژمارەی ناوێتە بکەین نەك باس لە گۆشە جەمسەرییەکەی ژمارەیەکی ناوێتە بکەین.

ئەگەر بگەڕێینەوە بۆ وێنەی سەرەوە، دەتوانین بنووسین: $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ و
لەدوایدا $z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

شێوەی سێگۆشەیی ژمارەی ناوێتە

شێوەی سێگۆشەیی ژمارەی ناوێتە $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ دەکاتە $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
کاتێك $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

نموونە 2 نووسینی ژمارەی ناوێتە بەشێوەی سێگۆشەیی

ژمارەی $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ بەشێوەی سێگۆشەیی بنووسە.

شیکار

دەست بە دۆزینەوەی بەهای ڕووتی ژمارەکە بکە.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

گۆشەی جەمسەری بدۆزەوە.

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ بەمەش $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$، چونکە خاڵی M دەکەوێتە چارێکی یەکەم لە ڕووتەختی پۆوتانەکان.

شێوەی سێگۆشەیی بۆ ژمارە ناوێتەی z بریتییە لە $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

خاڵی چاودێری **2.** ژمارە ناوێتەی $z = 2\sqrt{3} + 2i$ بەشێوەی سێگۆشەیی بنووسە.

شێوەی سێیەم بۆ نووسینی ژمارەی ناوێتە پێی دەوترێت شێوەی جەمسەری (هەندێك جار پێی دەوترێت شێوەی توانی) ئەوەش کورتکراوەی کرداری شێوەی سێگۆشەییە.

شێوەی جەمسەری

ئەوانەی لەبواری بیرکاری کاردەکەن پێناسەی $e^{i\theta}$ بەم شێوەیە دەکەن $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ئەمەش ڕێگا دەدات هەر ژمارەیەکی ناوێتەی $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ جیاواز بێت لەسفر بەشێوەی $z = re^{i\theta}$ بنوسرێت. ئەم نووسینە پێی دەوترێت **شێوەی جەمسەری** ژمارە ناوێتەی z لەوانەیە پرسیار لە پەیوەندییەك لەنێوان $e^{i(\theta+\theta')}$ و هەریەکە لە $e^{i\theta}$ و $e^{i\theta'}$ بکەیت ئایا پەیوەندیەك هەیە لەنێوان ئەم نووسینانە و پەیوەندی $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ وەك لە توانەکاندا هەیە کاتێك $a^{x+y} = a^x a^y$ ؟
وەڵام بۆ ئەم پرسیارە بەڵێیە و دەتوانین بەم شێوەیە بیسەلمێنیت.

$$\begin{aligned}
e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\
&= \cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + i^2\sin\theta\sin\theta' \\
&= \cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\
&= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\
&= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')}
\end{aligned}$$

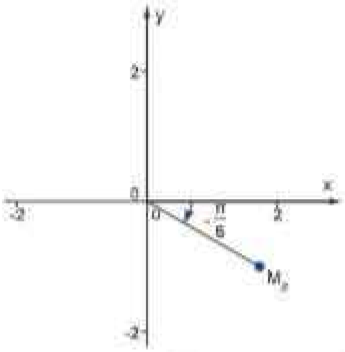
شێوەی جەمسەری ژمارەی ناوێتە

شێوەی جەمسەری ژمارەی ناوێتەی $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ بریتییە لە $z = re^{i\theta}$
کاتێك $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

نموونـــە 3

نووسینی ژمارەی ناوێتە بەشێوەی جەمسەری

ژمارەی $z = \sqrt{3} - i$ بەشێوەی جەمسەری بنووسە



شیکار

دەست بە دۆزینەوەی بەهای ڕووتی ژمارەکە بکە.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

گۆشەی جەمسەری ژمارەکە بدۆزەوە.

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$، بەمەش $\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ لەبەرئەوەی خاڵی M_z دەکەوێتە چارێکی چوارەم لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا.

شێوەی جەمسەری ژمارەی ناوێتەی z دەکاتە $z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

خاڵی جاودێری

3. ژمارە ناوێتەی $z = -2 + 2i$ بە شێوەی جەمسەری بنووسە.

سیفەتەکانی بەهای ڕووت و گۆشەی جەمسەری ژمارەی ناوێتە

ا) $|z| \geq 0$ و $|z| = 0$ ئەگەر وتەنها ئەگەر $z = 0$.
ب) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ و $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
ج) $|-z| = |z|$ و $|\bar{z}| = |z|$.
د) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

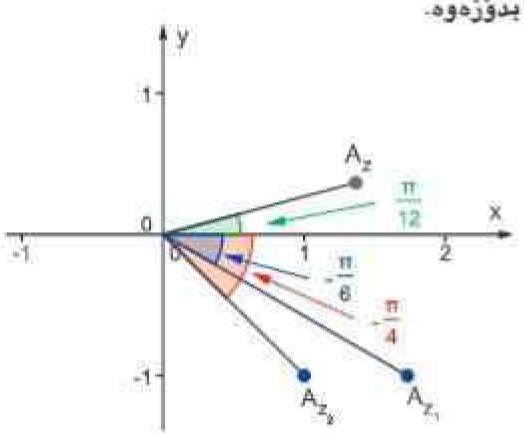
ا) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$
ب) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$
ج) $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$
د) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$

نموونە 4 بەکارهێنانی سیفەتەکانی بەهای ڕووت و گۆشەی جەمسەری

بەهای ڕووت و گۆشەی جەمسەری هەریەکە لەم ژمارە ناوێتانە بدۆزەوە.

أ $z_1=\sqrt{3}-i$ ب $z_2=1-i$ ج $z=\frac{z_1}{z_2}$

پاشان بەهای هەریەکە لە $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ بدۆزەوە.



شیکار

بەهای ڕووتی هەر ژمارەیەك هەژماربکە.

$$|z_1|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{4}=2$$

$$|z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$|z|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

گۆشەی جەمسەری هەر ژمارەیەك بدۆزەوە.

$\tan\theta_1=\frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \arg(z_1)=\theta_1=-\frac{\pi}{6}+2m\pi$ چونکە خاڵی z_1 دەکەوێتە چارێکی چوارەم.

$\tan\theta_2=-1 \Rightarrow \arg(z_2)=\theta_2=-\frac{\pi}{4}+2n\pi$ چونکە خاڵی z_2 دەکەوێتە چارێکی چوارەم.

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)=-\frac{\pi}{6}+2m\pi-\left(-\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)=\frac{\pi}{12}+2(m-n)\pi$$

ژمارەی z بەشێوەی سێگۆشەیی بەم جۆرە دەنووسرێت $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

بۆ دۆزینەوەی بەهای هەریەکە لە $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$، ژمارەی z بەشێوەی جەبری بنووسە.

لەوەوە دەردەچێت کە $z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}=\frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i=z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{3}+1}{2}=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}$$

کەواتە $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

خاڵی چاودێری

4. بەهای ڕووت و گۆشەی جەمسەری هەریەکە لەم ژمارانە بدۆزەوە.

أ $z_1=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ ب $z_2=1+i$ ج $z=\frac{z_1}{z_2}$

پاشان بەهای هەریەکە لە $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$ بدۆزەوە.

سەلمێنراوی 1-7 De Moivre

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

ئەم سەلمێنراوە سوودێکی گەورەی هەیە بۆ سادەکردنی هەندێك لە برە جەبرییەکان، هەروەها بەکاردەهێنرێت لە سێگۆشەزانی چونکە یارمەتیدەرە بۆ سەلماندنی زۆر لە هاوتەتجامەکان.

نموونە 5 جێبەجێکردن لە سێگۆشەزانی

ئەم برە $\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

شیکار

$$\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4=\cos 4\frac{\pi}{12}+i\sin 4\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

خاڵی جاودێری

5. بڕی $\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)^6$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

نموونە 6 دۆزینەوەی هاوتەنجامە سێگۆشەییەکان

دوو هاوئەنجام بدۆزەوە بۆ نووسینی $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ بەپێی $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

شیکار

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$$
$$=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta$$

بەڵام

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

بەپشت بەستن بە سەلمێنراوی De Moivre دەردەچێت:

$$\cos 3\theta+i\sin 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$

لەمەش

$$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta \quad \text{و} \quad \cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$$

خاڵی جاودێری

6. دوو هاوئەنجام بدۆزەوە بۆ نووسینی $\cos 2\theta$ و $\sin 2\theta$ بەپێی $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

ڕەگەکانی یەک

دەزانیت یەک دوو ڕەگی دووجای هەیە ئەویش 1 و 1- و یەک ڕەگی سێجای هەیە ئەویش 1، ئەمە ڕاستە بۆ کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان بەڵام ئەگەر فراوانبکرێت بۆ کۆمەڵەی ژمارە ئاوێتەکان دەبینیت کە یەک سێ ڕەگی سێجای هەیە.

ڕەگەکانی یەک

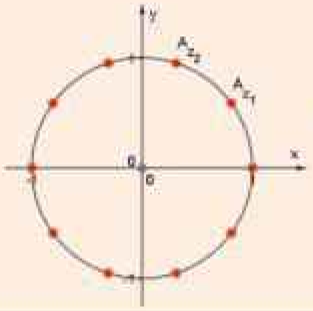
بە ژمارە ئاوێتەی $z=re^{i\theta}$ دەوترێت ڕەگی یەک لەپلەی n کاتێک n ژمارەیەکی تەواوی موجەبە ئەگەر پاسادانی $z^n=1$ بکات.

ئەگەر هاوکێشەی $z^n=1$ بە بەکارهێنانی شێوەی جەمسەری بۆ دوو ژمارەی z و 1 نووسراوبێت. ئەوا $z^n=r^n e^{in\theta}=1=1\times e^{i\times 0}$ دەستدەکەوێت.

لەوەش دەردەچێت $\begin{cases} r^n=1 \\ n\theta=0+2k\pi \end{cases}$ پاشان $\begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{2k\pi}{n} \end{cases}$

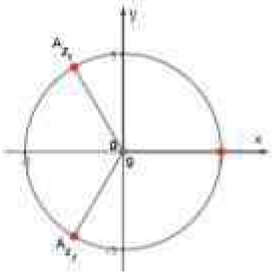
هەر بەهایەک بدەیتە k ڕەگێك بۆ یەک لە پلە n دیاریدەکات.

سەلمێنراوی 2-7 رەگەکانی یەك



ئەگەر n هەر ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت ئەوا یەك n رەگی پلە n ی هەیە. ئەم رەگانە سەرەکانی چەند لایەکی رێك پێکدەهێنێت و هەموویان دەکەونە سەر بازنەی یەکە.

نمونە 7 رەگە سێجاکانی یەك



رەگە سێجاکانی یەك بدۆزەوە و خاڵەکان لە رووتەختی پۆوتاندا دیاریبکە.

شیکار

ژمارە یەك سێ رەگی سێجای هەیە ئەمانەن:

$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ و $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$.

ئەوانەی لەبواری بیرکاری کاردەکەن هێمایەکی تایبەت j بۆ رەگی سێجای $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ بەکاردەهێنن.

دەتوانیت بە ئاسانی دەربیخەیت کە $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2 = \bar{j}$.

خاڵی جاوێری 7. **رەگەکانی یەك لەپلە 4 بدۆزەوە وخاڵەکانی لە رووتەختی پۆوتانەکاندا دیاریبکە.**

1-7 راهێنان

لە راهێنانی 1 تا 12 ژمارە ناوێتەکە بەشێوەی جەبری بنووسە.

1 $(1+i)^2$	**2** $(1-i)^2$	**3** $(1+3i)^2$	**4** $(1-3i)^2$
5 $(1+i)^3$	**6** $(1-i)^3$	**7** $(3+4i)(3-4i)$	**8** $(3+2i)^3$
9 $\frac{i-5}{3+5i}$	**10** $\frac{3+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}$	**11** $\frac{i-4}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}$	**12** $\frac{4+5i}{2-i}+\frac{1-3i}{1+i}$

لە راهێنانی 13 تا 20 هەر ژمارەیەکی ناوێتە بەشێوەی سێگۆشەیی و جەمسەری بنووسە.

13 $z=1+i$	**14** $z=1-i$	**15** $z=i$	**16** $z=9i$
17 $z=-6$	**18** $z=8$	**19** $z=1+i\sqrt{3}$	**20** $z=1-i\sqrt{3}$

له ڕاهێنانی 21 تا 25 ژماره ناوێتەکە بەشێوەی جەمسەری بنووسە ئەگەر زانیت $z = re^{i\theta}$.

21 $\frac{1}{z}$ 22 $\overline{z}$ 23 iz 24 z^3 25 $\frac{ie^{i\alpha}}{z^2}$

26 هەریەک لەم دوو ژمارە ناوێتانە بە شێوەی جەمسەری بنووسە.

أ $z = (1-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{8}}$ ب $z = 1+\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}$

27 بیسەلمێنە: $|z| = |-z|$ و $|z| = |\overline{z}|$.

28 بیسەلمێنە $z\overline{z} = |z|^2$ ئەم ئەنجامە بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی $|zz'| = |z||z'|$.

29 بیسەلمێنە $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

30 بیسەلمێنە $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

31 ژمارە ناوێتەکانی z بدۆزەوە کە پاسادانی $|1+z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z|$ دەکات.

32 ژمارە ناوێتەکانی z بدۆزەوە کە پاسادانی $|1-z| = |\overline{z}| = |z^2|$ دەکات.

له ڕاهێنانی 33 تا 36 ژمارە ناوێتەکە بەشێوەی سێگۆشەیی بنووسە کاتێک.

33 $z = \sin\alpha + i\cos\alpha$ 34 $z = \cos\alpha - i\sin\alpha$

35 $z = -\cos\alpha - i\sin\alpha$ 36 $z = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}$

37 وەڵامی ئەمانەی خوارەوە بدەوە ئەگەر زانیت $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

أ j بە شێوەی جەمسەری بنووسە ودەریبخە کە ئەم ژمارە ڕەگی سێجایە بۆ یەک.

ب j^2 بدۆزەرە، و دەریبخە کە ڕەگی سێجای ناڕاستییە بۆ یەک و جیاوازە لە j.

ج دیاریبکە کە $j^{3m} = 1$ و $j^{3m+1} = j$ و $j^{3m+2} = j^2 = \overline{j}$ و $1 + j + j^2 = 0$.

دەربارەی چەمکەکان

38 بەڕای تۆ ژمارەی ڕەگەکانی یەک لە پلە n دەکاتە چەند؟ ڕوونیبکەوە.

2–7 ژمارە ئاوێتەکان و ئەندازە
Complex Numbers and Geometry

ئامانجەکان

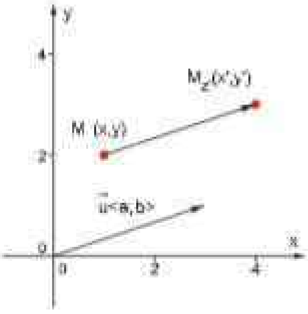
- کردارەکان لەسەر ژمارە ئاوێتەکان بەئەندازەیی لێکدەداتەوە
- بە بەکارهێنانی ژمارە ئاوێتەکان شیکاری پرسیاری ئەندازەیی دەکات.

زاراوەکان
Vocabulary

ژمارەی خاڵی
Affix of the point
خاڵی ژمارەی ئاوێتە
Point of the complex number
ژمارەی ئاڕاستەبڕ
Affix of the vector
ئاڕاستەبڕی ژمارەی ئاوێتە
Vector of the complex number
شێوەی ئاوێتە Complex form

لەوانەی پێشوو فێربوویت کە خاڵەکانی ڕووتەخت و ژمارە ئاوێتەکان بەرامبەر یەکترن، واتە هەر خاڵێك $M(x, y)$ ژمارەیەکی ئاوێتەی تاکانە $z_M = x + iy$ دیاریدەکات پێیدەوترێت ژمارەی خاڵی $M(x, y)$ و هەر ژمارەیەکی ئاوێتە $z = x + iy$ خاڵێکی تاکانە $M_z(x, y)$ دیاریدەکات پێیدەوترێت خاڵی ژمارە ئاوێتەی $z = x + iy$ لەلایەکی تر هەر ئاڕاستەبڕێکی وەك $\vec{u}\langle a, b\rangle$ ژمارەیەکی ئاوێتە $z_{\vec{u}} = a + ib$ دیاریدەکات پێیدەوترێت ژمارەی ئاڕاستەبڕ، هەروەها هەر ژمارەیەکی ئاوێتە $z = p + iq$ ئاڕاستەبڕێکی وەك $\vec{v}_z\langle p, q\rangle$ دیاریدەکات پێیدەوترێت ئاڕاستەبڕی ژمارەی $z = p + iq$ ، بەرامبەربوون لە نێوان ژمارە ئاوێتەکان لەلایەك و خاڵەکانی ڕووتەخت و ئاڕاستەکانی لەلایەکی تر ڕێگا دەدات بەنواندنی کردارەکان لەسەر ژمارە ئاوێتەکان بەئەندازەیی هەروەها ڕێگا دەدات بەدەربڕینی بارە ئەندازەییەکان ئەمە لەم وانەیەدا فێردەبێت.

کۆکردنەوەی ژمارە ئاوێتەکان



با $u = a + ib$ ژمارەیەکی ئاوێتە و $\vec{u}\langle a, b\rangle$ ئاڕاستەبڕەکەی بێت، ئەگەر ژمارەی u لەگەڵ ژمارەی ئاوێتە $z = x + iy$ کۆبکەیتەوە ئەوا ژمارەیەکی ئاوێتەی ترت دەستدەکەوێت.

$$z' = z + u = (x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b)$$

ئەگەر $M(x, y)$ خاڵی ژمارە ئاوێتەی z بێت و $M'(x', y')$ خاڵی ژمارە ئاوێتەی z' بێت، ئەوا $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ دەسەلمێنێت کە M' دەبێتە وێنەی M.

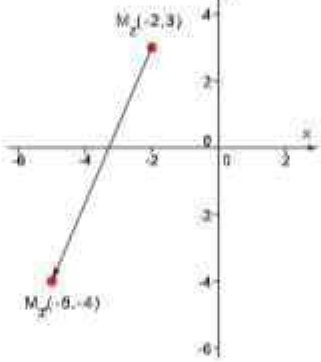
بەڕاکێشانی ئاڕاستەبڕی $\vec{u}\langle a, b\rangle$.

لێکدانەوەی ئەندازەیی بۆ کۆکردنەوەی ژمارە ئاوێتەکان

کۆکردنەوەی دوو ژمارەی ئاوێتە u و z خاڵی ژمارەی z دەگۆڕێت بەڕاکێشانی ئاڕاستەبڕی $\vec{u}$.

نموونە 1

دۆزینەوەی ئاڕاستەبڕی ڕاکێشان



ئاڕاستەبڕی ئەو ڕاکێشانەی کە خاڵی ژمارەی $z = -2 + 3i$ دەگۆڕێت بۆ خاڵی ژمارەی $z' = -5 - 4i$ بدۆزەوە.

شیکار

ئەگەر $\vec{u}\langle a, b\rangle$ ئاڕاستەبڕی ڕاکێشان بێت کە M_z بۆ $M_{z'}$ دەگۆڕێت ئەوا $\begin{cases} -5 = (-2) + a \\ -4 = (3) + b \end{cases}$ لەدواییدا $a = -3$ و $b = -7$.

ئاڕاستەبڕی $\vec{u}\langle a, b\rangle$ دەکاتە $\vec{u}\langle -3, -7\rangle$.

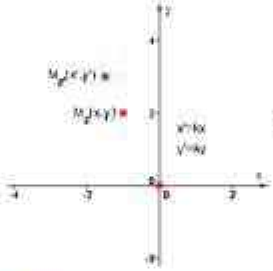
خاڵی جاوێری

1. ناڕاستەبڕی ڕاکێشان کەخاڵی ژمارەی ناوێتەی $z=6-2i$ دەگوازێت بۆ خاڵی ژمارەی ناوێتەی $z'=6+4i$ بدۆزەوە.

لێکدانی ژمارەیەکی ناوێتە لە ژمارەیەکی ڕاستی

با $z=x+iy$ ژمارەیەکی ناوێتە بێت و k ژمارەیەکی ڕاستی بێت، ئەگەر z لە k درا، ئەوا ژمارەیەکی ناوێتەت دەستدەکەوێت: $z'=kz=k(x+iy)=(kx)+i(ky)$

ئەگەر $M_z(x,y)$ خاڵی ژمارەی ناوێتەی z بێت و $M'_{z'}(x',y')$ خاڵی ژمارەی ناوێتە z' بێت ئەوا:



$$\begin{cases}x'=kx\\y'=kx\end{cases}$$

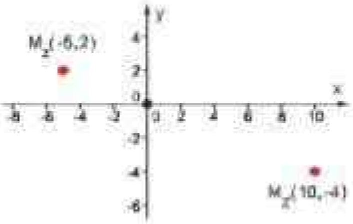
ئەمەش دەیسەلمێنێت کە $M'_{z'}$ بریتییە لە وێنەی M_z بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و ڕێژەکەی k بێت.

لێکدانەوەی ئەندازەیی بۆ لێکدانی ژمارەیەکی ناوێتە لە ژمارەیەکی ڕاستی

لێکدانی ژمارە ناوێتەی z لە ژمارەیەکی ڕاستی k دەبێتە هۆی گۆڕانی خاڵی ژمارەی z بە هاوڕێژەییەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و ڕێژەکەی k بێت.

نموونە 2

دۆزینەوەی ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی



ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت چەندە کە خاڵی ژمارەی ناوێتەی $z=-5+2i$ بۆ خاڵی ژمارەی ناوێتەی $z'=10-4i$ دەگۆڕێت.

شیکار

ئەگەر $M_z(x,y)$ و $M'_{z'}(x',y')$ دوو خاڵی ژمارە ناوێتەی z و z' بن و k ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی بێت چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت و M_z بۆ $M'_{z'}$ بگۆڕێت، ئەوا

$$\begin{cases}10=k(-5)\\-4=k(2)\end{cases}$$ لەمەوە دەردەچێت $k=-2$.

خاڵی جاوێری

2. ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی بدۆزەوە کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت و خاڵی ژمارە ناوێتەی $z=6-2i$ بۆ خاڵی ژمارە ناوێتەی $z'=-3-i$ دەگۆڕێت.

بە سوود وەرگرتن لەوەی پێشوو ئەوا گۆڕینی خاڵی M بە هاوڕێژەییەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و ڕێژەکەی ژمارەی ڕاستی k بێت، دەگەڕێتەوە بۆ لێکدانی z_M، ژمارەی خاڵی M لە ژمارە ڕاستی k ودیارکردنی خاڵی ژمارە ناوێتەی ئەنجام $z'=kz$ بەدوا نووسینی $z'=kz$ دەوترێت **شێوەی ناوێتە** بۆ ئەم هاوڕێژە ئەندازەییە. شێوەی ناوێتە بۆ هاوڕێژەییەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی A و ڕێژەکەی ژمارەی ڕاستی k بێت چەندە؟

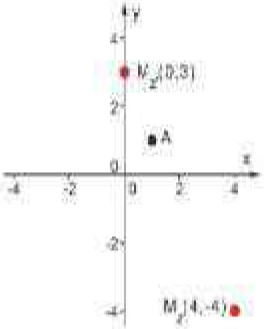
نووسینی ناوێتە بۆ هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی

نووسینی ناوێتە بۆ هاوڕێژەییەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی A و ڕێژەکەی ژمارەی ڕاستی k بێت دەکاتە $z'-a=k(z-a)$ کاتێك $a=z_A$ ژمارەی ناوێتەیە بۆ خاڵی A.

GRADE12-2011-CHAPTER 7 2/25/18 10:19 AM Page 12

نموونە 3

دۆزینەوەی وێنەی خاڵێک بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی



شێوەی خاڵی $M(3,-3)$ بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی $A(1,1)$ و ڕێژەکەی ژمارەیەکی ڕاستی $-\frac{1}{2}$ بێت بدۆزەوە.

شیکار

کاتێک $a = z_A = 1+i$ و $m = z_M = 3-3i$ ، M' وێنەی M بە هاوڕێژەی ئەندازەیی و، $m' = z_{M'}$ ئەوا $m' - a = -\frac{1}{2}(m-a)$

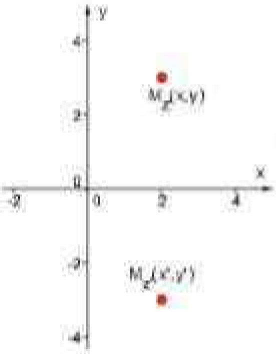
$$m' = -\frac{1}{2}(m-a)+a = -\frac{1}{2}\big(3-3i-(1+i)\big)+(1+i) = 3i$$

کەواتە وێنەی خاڵی $M(3,-3)$ بەهاوڕێژەی ئەندازەیی دەبێتە خاڵی $M'(0,3)$.

خاڵی جاوێنی

3. وێنەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی وێنەی خاڵی $M(4,-4)$ بە هاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی $A(-1,-1)$ وڕێژەکەی ژمارەی ڕاستی $-\frac{1}{4}$ بێت.

ژمارەی ناوڵ



لەبیرت بێت ژمارە ئاوێتەی $z = x+iy$ ناوڵی ژمارەی $\overline{z} = x-iy$ ئەگەر $M_z(x,y)$ خاڵی ژمارەی ئاوێتەی z و $M'_{z}(x',y')$ خاڵی ژمارە ئاوێتەی $\overline{z}$ بێت،

ئەوا $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ دەیسەلمێنێت کە M'_{z} وێنەی M_z بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x.

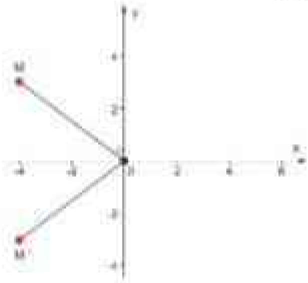
لێکدانەوەی ئەندازەیی بۆ ژمارەی ناوڵ

گواستنەوە لە ژمارەی ئاوێتە z بۆ ناوڵەکەی $\overline{z}$ خاڵی ژمارە z بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x جێگۆڕکێ دەکات.

نموونە 4

شێوەی خاڵی ژمارەی ئاوێتە بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x

وێنەی خاڵی ژمارەی ئاوێتەی $z = -5(2-i) - 2i(3i+1)$ بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x بدۆزەوە.



شیکار

دەستبکە بە نووسینی ژمارە ئاوێتەکە بەشێوەی جەبری

$$z = -5(2-i) - 2i(3i+1) = -10+5i-6(i^2)-2i$$

$$z = -4+3i$$

$M_z(-4,3)$ دەکاتە خاڵی ژمارە ئاوێتەی z و خاڵی $M'_{z}(-4,-3)$ وێنەی خاڵەکیە بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x.

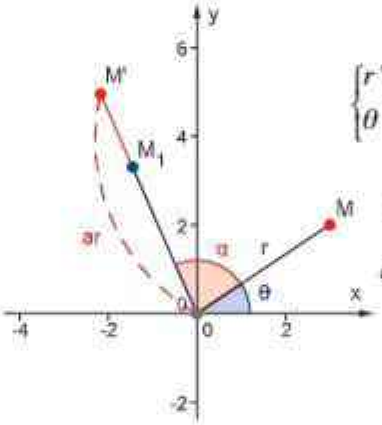
خاڵی جاوێنی

4. وێنەی خاڵی ژمارەی ئاوێتەی $z = 3(-7i+14)(8-11i)$ بە وێنەدانەوە بە دەوری تەوەری x بدۆزەوە.

لێکدانی ژمارە ناوێتەکان «بۆ تێڕوانین»

لێکدانەوەی ئەندازەیی بۆ لێکدانی دوو ژمارەی ناوێتە زۆر ئاڵۆزترە لە لێکدانەوەکانی پێشوو، لێرەدا شێوەی سێگۆشەیی بەکاردەهێنین بۆ نووسینی ژمارە ناوێتەکان چونکە گەیشتن بە ئەنجام ئاسانتر دەکات. با $u = ae^{i\alpha}$ ژمارەیەکی ناوێتە بێت بەها ڕووتەکەی a و θ گۆشە جەمسەرییەکەی بێت. ئەگەر u لەژمارەی ناوێتەی $u = ae^{i\alpha}$ بدەیت ئەمەت دەستدەکەوێت.

$$z' = zu = re^{i\theta}ae^{i\alpha} = (ra)e^{i(\theta+\alpha)}$$



با M_z و $M'_{z'}$ دوو خاڵی ژمارە ناوێتەی z و z' بن، ئەوا $\begin{cases} r' = ar \\ \theta' = \theta + \alpha + 2k\pi \end{cases}$ کاتێک $z' = r'e^{i\theta'}$. ئەگەر بەوردی سەیری وێنەی بەرامبەر بکەیت دەبینیت جێگۆڕکێ لە M_z و $M'_{z'}$ بە دوو قۆناغدا تێدەپەڕێت: یەکەمیان M_z بۆ M_1 بە سوڕانەوەیەک چەقەکەی خاڵی بنەڕەت وگۆشەکەی $\alpha = \arg(u)$ و دووەمیان لە M_1 بۆ $M'_{z'}$ بەهاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت وڕێژەکەی $a = |u|$ بێت. «ڕووتی ژمارەی ناوێتەی u»

لێکدانەوەی ئەندازەیی بۆ لێکدانی ژمارە ناوێتەکان

لێکدانی ژمارەی ناوێتە z لە ژمارەی ناوێتەی u بریتییە لە جێگۆڕکێی خاڵی ژمارە z بەسووڕانەوە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت وگۆشەکەی $\arg(u)$ بێت، پاشان بە هاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت وڕێژەکەی $|u|$ بێت.

نموونە 5 جێگۆڕکێی خاڵ بەبەکارهێنانی لێکدانی ژمارە ناوێتەکان

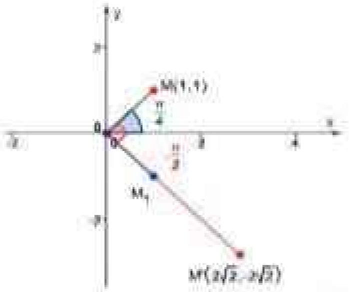
دیارییکە کە دەتوانرێت ژمارە ناوێتەی $z = 1 + i$ جێگۆڕکێی بکەیت بۆ خاڵی ژمارە ناوێتەی $z' = 2\sqrt{2}(1 - i)$ بە سووڕانەوە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت پاشان بە هاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت. گۆشە سوڕانەوەو ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی چەندە؟

شیکار

دۆزینەوەی ژمارەیەکی ناوێتە u بەسە بۆ ئەوەی z' دەستکەوێت ئەویش بەهۆی لێکدانی z لە u لەبەرئەوەی u پێویستە پاسادانی $z' = uz$ بکات و لەبەرئەوەی $z \neq 0$ ئەوا $u = \frac{z'}{z}$.

شێوەی جەمسەری بەکاربهێنە بۆ نووسینی ژمارەی ناوێتەکە.

$z = re^{i\theta}$ و $z' = r'e^{i\theta'}$ بنووسە، پاشان بەهای ڕووت وگۆشەی هەردوو ژمارەی z و z' بدۆزەوە.



$|z| = |1 + i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$؛ $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$ و $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت $\theta = \frac{\pi}{4} + 2m\pi$

$|z'| = |2\sqrt{2}(1 - i)| = 2\sqrt{2}|1 - i| = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}) = 4$؛

$\tan\theta' = \frac{-1}{1} = -1$ و $0 \leq \theta' \leq -\frac{\pi}{2}$

ئەمەش ئەوە دەگەیێنێت $\theta' = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$

بەهای ڕووتی u بدۆزەوە، $|z'| = |z||u|$ لەمەوەش $|u| = \frac{|z'|}{|z|} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

هەروەها $\arg(z') = \arg(u) + \arg(z)$.

GRADE12-2011-CHAPTER 7 2/25/18 10:19 AM Page 14

لەدواییدا

$$\arg(u) = \arg(z') - \arg(z) = \theta' - \theta = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi - \frac{\pi}{4} - 2m\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

کاتێك $k = n - m$

کەواتە، گۆشەی سوڕانەوە دەکاتە $-\frac{\pi}{2}$ و ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی دەکاتە $2\sqrt{2}$.

خاڵی چاودێری

5. دیاریبکە کە دەتوانرێت خاڵی ژمارەی $z = 1 - i$ بۆ خاڵی ژمارەی $z' = \sqrt{2}(1+i)$ جێگۆڕکێ بکرێت بە سوڕانەوەیەك چەقەکەی خاڵی بنەڕەت، پاشان بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت، گۆشەی سوڕانەوە و ڕێژەی هاوڕێژەیی ئەندازەیی بدۆزەوە.

بەسوود وەرگرتن لەوەی پێشوو، دەتوانیت جێگۆڕکێی خاڵی M بکەیت بە سووڕانەوەیەك چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت، لەڕێگای لێکدانی ژمارەی خاڵی M لە ژمارەیەکی ئاوێتە بەها ڕووتەکەی 1 بێت. بەواتایەکی تر بۆ جێگۆڕکێی خاڵی M بە سووڕانەوە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و گۆشەکەی θ بێت، ژمارە ئاوێتەی $m = z_M$ «ژمارەی خاڵی M » لە ژمارە ئاوێتەی $e^{i\theta}$ بدە (1 بەهای ڕووتی ژمارەکەیە و θ گۆشەی جەمسەرەکەیەتی) خاڵی ژمارە ئاوێتەی دۆزراوە دەکاتە $z' = e^{i\theta} z$ بە نووسینی $z' = e^{i\theta} z$ دەوترێت **شێوەی ئاوێتە** Complex form بۆ سوڕانەوە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت وگۆشەکەی θ بێت.

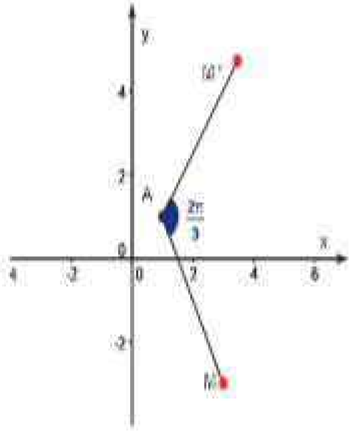
شێوەی ئاوێتە بۆ سووڕانەوە «بۆ تێڕوانین»

نووسینی ئاوێتە بۆ سووڕانەوە چەقەکەی خاڵی A وگۆشەکەی θ بێت دەکاتە: $z' - a = e^{i\theta}(z - a)$
کاتێك $a = z_A$ ژمارە ئاوێتەیە بۆ خاڵی A .

نموونــــە 6

شێوەی خاڵێك بە سووڕانەوە

شێوەی خاڵی $M(3, -3)$ بە سووڕانەوە چەقەکەی خاڵی $A(1, 1)$ و گۆشەکەی $\frac{2\pi}{3}$ بێت بدۆزەوە.



شیکار

$a = z_A = 1 + i$ و $m = z_M = 3 - 3i$ شێوەی M بە سووڕانەوەی خاڵەکە $M' = M_{m'}$ کاتێك $m' - a = e^{i\theta}(m - a)$

$$m' = e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(3 - 3i - (1+i)\right) + (1+i)$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(2 - 4i) + 1 + i$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 - 4i) + 1 + i = 2\sqrt{3} + i\left(3 + \sqrt{3}\right)$$

شێوەی خاڵی $M(3, -3)$ بە سووڕانەوە دەبێتە خاڵی $M' = \left(2\sqrt{3},\ 3 + \sqrt{3}\right)$.

خاڵی چاودێری

6. شێوەی خاڵی $M(4, -4)$ بدۆزەوە بە سووڕانەوە چەقەکەی $A(-1, -1)$ و گۆشەکەی $-\frac{\pi}{4}$ بێت.

دەتوانین سوود لە پەیوەندی نێوان ژمارە ئاوێتەکان و خاڵەکانی ڕووتەختی پۆوتانەکاندا وەربگرین بۆ شیکاری پرسیارە ئەندازەییەکان یان بۆ بەکارهێنانی هەندێك سەلمێنراو لەبواری ئەندازەیی.

GRADE12-2011-CHAPTER 7 2/25/18 10:19 AM Page 17

2–7 ڕاهێنان

لە ڕاهێنانی 1 تاکو 6 ژمارە ناوێتەکە بۆ شێوەی خاڵی M بەجێگۆڕکێی دیاریکراو بنووسە.

1. $M(2, -1)$: ڕاکێشانی ناڕاستەبڕی $\vec{u}\langle -3, 2\rangle$

2. $M(-3, 5)$: ڕاکێشانی ناڕاستەبڕی $\vec{u}\langle 2, -2\rangle$

3. $M(2, 0)$: سووڕانەوە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و گۆشەکەی $\frac{\pi}{3}$ بێت.

4. $M(2, 1)$: هاوڕێژەی ئەندازەیی ڕێژەکەی $\frac{3}{2}$ بێت.

5. $M(-1, 3)$: وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x .

6. $M(4, 1)$: وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری y

بەشی 7

پێداچوونەوەی بەش

لە ڕاهێنانی 1 تا 5 ئەم ژمارە ناوێتانە بەشێوەی جەبری بنووسە.

1 $\frac{3+6i}{3-4i}$

2 $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i}$

3 $\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$

4 ژمارەیەکی ناوێتە بەهای رووتی 2 و گۆشەی جەمسەری $\frac{\pi}{3}$ بێت.

5 ناوێتەیەکی بەهای رووتی 3 و گۆشەی جەمسەری $-\frac{\pi}{6}$ بێت.

6 ئەم برەیە $(3+2i)(1-3i)$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

7 ژمارەیەکی ناوێتە بەهایە ڕووتەکەی 2 و گۆشە جەمسەرەکەی $\frac{\pi}{3}$ بێت لەیەکێکی تر بدە کە بەهایە رووتەکەی 3 و گۆشە جەمسەرەکەی $\frac{-5\pi}{6}$.

8 بەسادەترین شێوە بری $\frac{3+2i}{1-3i}$ بنووسە.

9 ژمارەیەکی ناوێتە بەهایە ڕووتەکەی 2 و گۆشە جەمسەرەکەی $\frac{\pi}{3}$ بێت دابەشی یەکێکی تر بکە بەهایە رووتەکەی 3 و گۆشە جەمسەرەکەی $\frac{-5\pi}{6}$ بێت.

10 بە جەمسەری هەریەکە لەم دوو ژمارە ناوێتەیە $u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $v=1-i$ بنووسە پاشان لەسەر هەمان شێوە ژمارەی ناوێتە $w=\frac{u}{v}$ بنووسە.

11 ژمارەی $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ بەشێوەی جەبری بنووسە پاشان بەشێوەی سێگۆشەیی $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\tan\frac{\pi}{12}$ و $\tan\frac{5\pi}{12}$ بدۆزەوە شیکاری هاوکێشەی $z^{24}=1$ بکە.

بەشی 7

ئامادەکاری بۆ تاقیکردنەوە

1 بەشی ڕاستی ژمارە ناوێتەی $z=(2+i)^2$ بریتییە لە:

أ 2 ب 4 ج 3 د 1

2 بەشی خەیاڵی ژمارە ناوێتەی $z=(1-i)^2$ بریتییە لە:

أ $2-$ ب $1-$ ج 0 د $-2i$

3 بەهای ڕووتی ژمارە ناوێتەی $z=4+3i$ بریتییە لە:

أ 7 ب $\sqrt{7}$ ج 5 د $\sqrt{5}$

4 کام لەم پێوانەی گۆشانەی دێن، گۆشەی جەمسەری ژمارە ناوێتەی $z=2-2i$ بێت؟

أ $\frac{\pi}{4}$ ب $-\frac{\pi}{4}$ ج $\frac{\pi}{2}$ د $\frac{3\pi}{4}$

5 ژمارەیەکی ناوێتە بەها ڕووتەکەی 2 وگۆشەی جەمسەری دەکاتە $\frac{\pi}{3}$ کام لەمانەی دێن نووسینی z بەشێوەی جەبرییە.

أ $\sqrt{3}+i$ ب $1+i\sqrt{3}$ ج $2+i\frac{\pi}{3}$ د $\sqrt{3}-i$

6 کۆمەڵەی شیکاری هاوکێشەی $z^2+z+1=0$ بریتییە لە (لەبیرت بێت کە $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$.

أ کۆمەڵەی بەتاڵ.   ب $\left\{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

ج $\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ د $\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}$

7 A و B دوو خاڵی دوو ژمارەی ناوێتەی $a=1+i$ و $b=1-i$ کام لەمانەی دێن کۆمەڵەی خاڵەکانی M کە پاسادانی $|z_M-1+i|=|z_M-1-i|$ دەکات.

أ ڕاستەهێڵی AB.   ب ناوەڕاستی AB.

ج بازنەیەکە تیرەکەی $\overline{AB}$.   د تەوەری $\overline{AB}$

8 A ، B ، C خاڵن لە ڕووتەختی پۆوتاندا کە پاسادانی $z_A=z_C-z_B$ کام لەمانەی دێن ڕاستە؟

أ $OACB$ لاتەریبێکە، O خاڵی بنەڕەتە.   ب خاڵەکانی A ، B ، C لەڕێکی یەکترن.

ج A ناوەڕاستی $\overline{BC}$.   د B ناوەڕاستی $\overline{AC}$.

9 A و B دوو خاڵی دوو ژمارەی ناوێتەی $a=1+i$ و $b=3-i$ کام لەمانەی دێن ڕاستە؟

أ $AB=2.82$ ب $AB=0$ ج $AB=\sqrt{10}-\sqrt{2}$ د $AB=2\sqrt{2}$

10 A و B دوو خاڵی دوو ژمارە ناوێتەی $a=1+i$ و $b=3-i$ و H ناوەڕاستی $\overline{AB}$ و $z_H=h$ کام لەمانەی دێن ڕاستە.

أ $h=1-i$ ب $h=2$ ج $h=2-2i$ د $h=-2$

GRADE12-2011-CHAPTER 7 2/25/18 10:19 AM Page 18

هەندێک زانیاری پێویست بۆ خوێندکار

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin (x + y) = \sin x \cos x + \cos x \sin x$$

$$\sin (x - y) = \sin x \cos x - \cos x \sin x$$

$$\cos (x + y) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

$$\cos (x - y) = \cos x \cos x + \sin x \sin x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin (-x) = - \sin x , \qquad \cos (-x) = \cos x, \qquad \tan (-x) = - \tan x$$

$$\sin (\frac{\pi}{2} - x) = \cos x, \ \cos (\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

$$\sin (\pi - x) = \sin x, \ \cos (\pi - x) = - \cos x$$

Content-Student-g12 Literary 3/7/18 10:27 AM Page 4