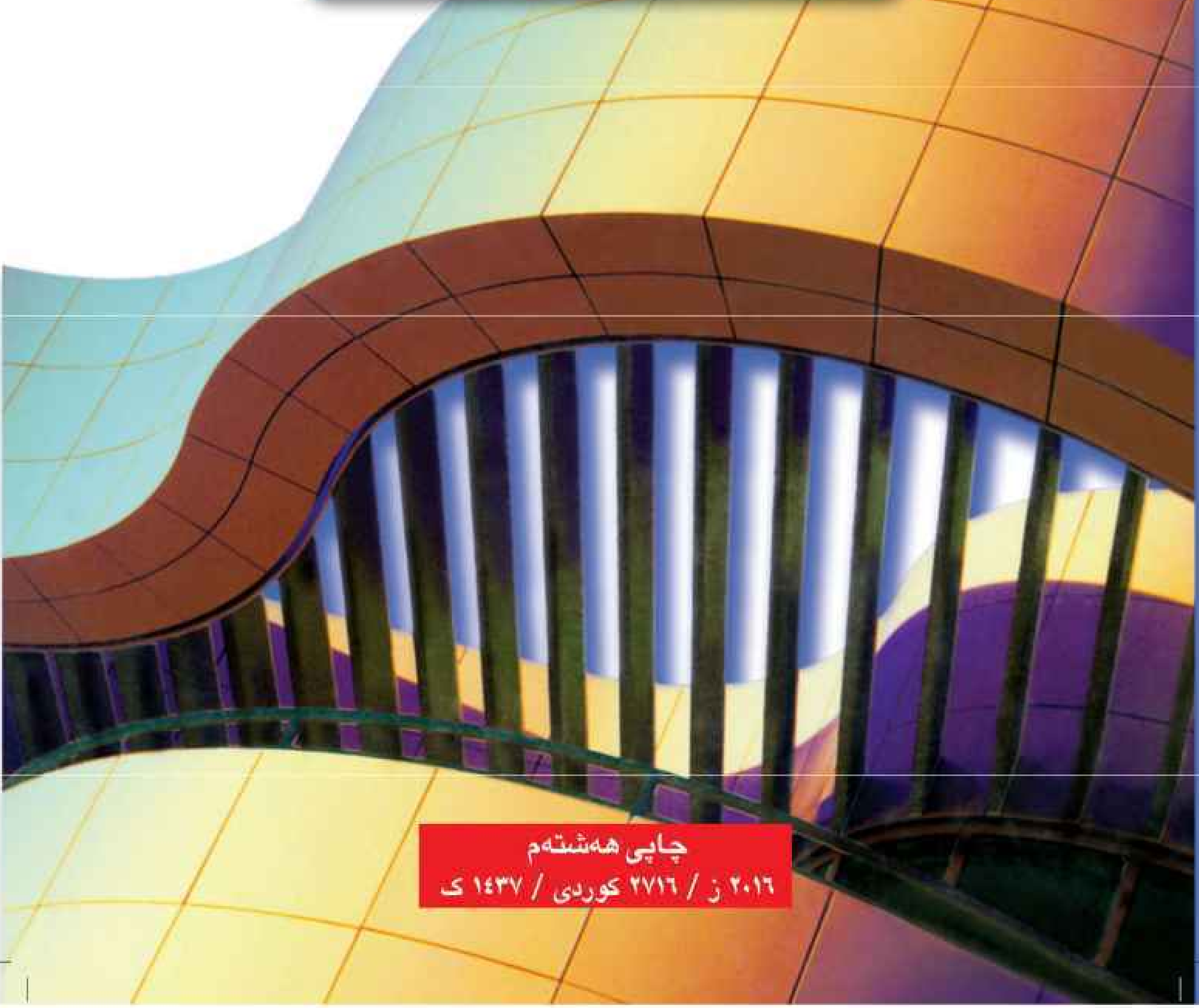
١١

حکومەتی هەرێمی کوردستان- عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەکان

بیرکاری بۆ هەمووان

کتێبی خوێندکار
پۆلی یازدەهەمی زانستی



چاپی هەشتەم
٢٠١٦ ز / ٢٧١٦ کوردی / ١٤٣٧ ک

سەرپەرشتی هونەری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ئاری محسن احمد

ئـــەندازە Geometry

ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready? 3

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە Study Guide: Preview 4

بیرکاری بە خوێندنەوە و نووسین Reading and Writing Math 5

1–1 بۆشایی پۆتان 3D Coordinate System 6

تەکنۆلۆژی دروستکردنی چەندلا ڕێکەکان
Constructing regular polygons 12

2–1 چەندلایەکان Polygons 14

3–1 هاوڕێژەی ئەندازەیی Dilation 21

4–1 ئاڕاستەبڕەکان Vectors 27

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکانی 1–4) Quiz 36

5–1 ڕووبەری بازنە و چەندلاڕێکەکان
Area of Circles and Regular Polygons 37

6–1 هەندێك لە یاساکانی بۆشایی Formulas in Three Dimensions 43

7–1 گۆ Sphere 51

8–1 کەرتە بازنەییەکان و کەوانەکان Sectors and Arcs 59

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە Study Guide: Review 65

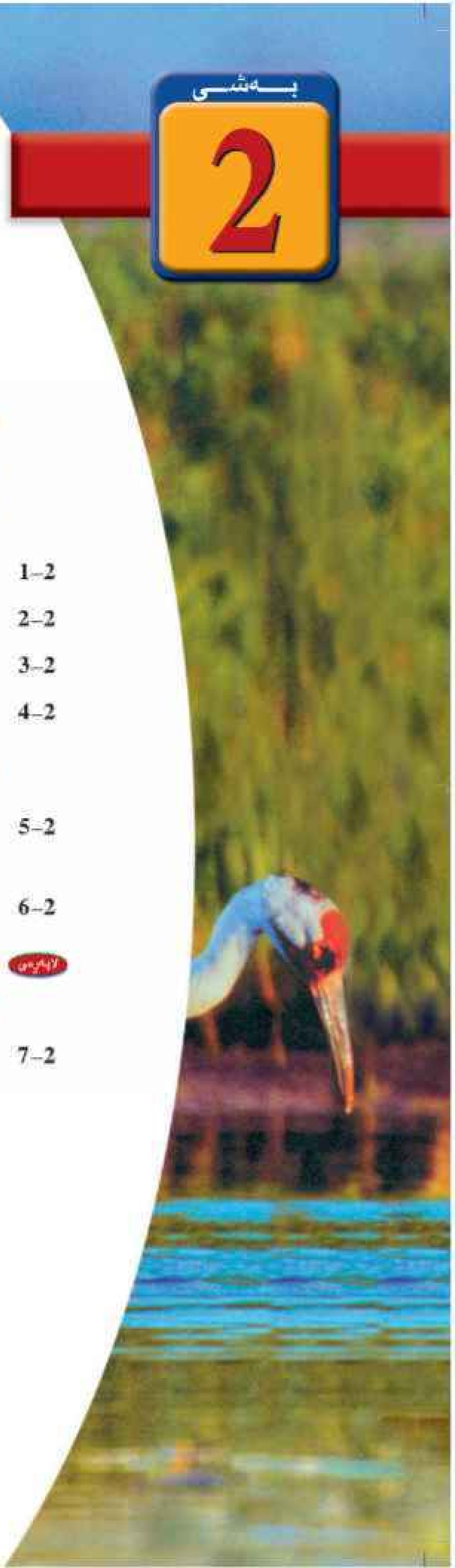
تاقیکردنەوەی بەش Chapter Test 67

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو Cumulative Assessment 68

بەشی 2

سیستمی هاوکێشەکان و لاسەنگە هێڵییەکان

Systems of Linear Equations and Inequalities



ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready? 71

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە Study Guide: Preview 72

بیرکاری بە خوێندنەوە و نووسین Reading and Writing Math 73

1–2 لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوەکان Linear Inequalities in 2 Unknowns 74

2–2 مۆدیلە هێڵییەکان Linear Models 83

3–2 سیستمەکانی لاسەنگە هێڵییەکان Systems of Linear Inequalities 92

4–2 پرۆگرامی هێڵی Linear Programming 98

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکانی 1-4) Quiz 106

5–2 شیکارکردنی سیستمی هێڵی بەسێ نەزانراو
Solving Linear Systems in 3 Unknowns 107

6–2 پێوانە ئامارییەکان Statistical Measurements 115

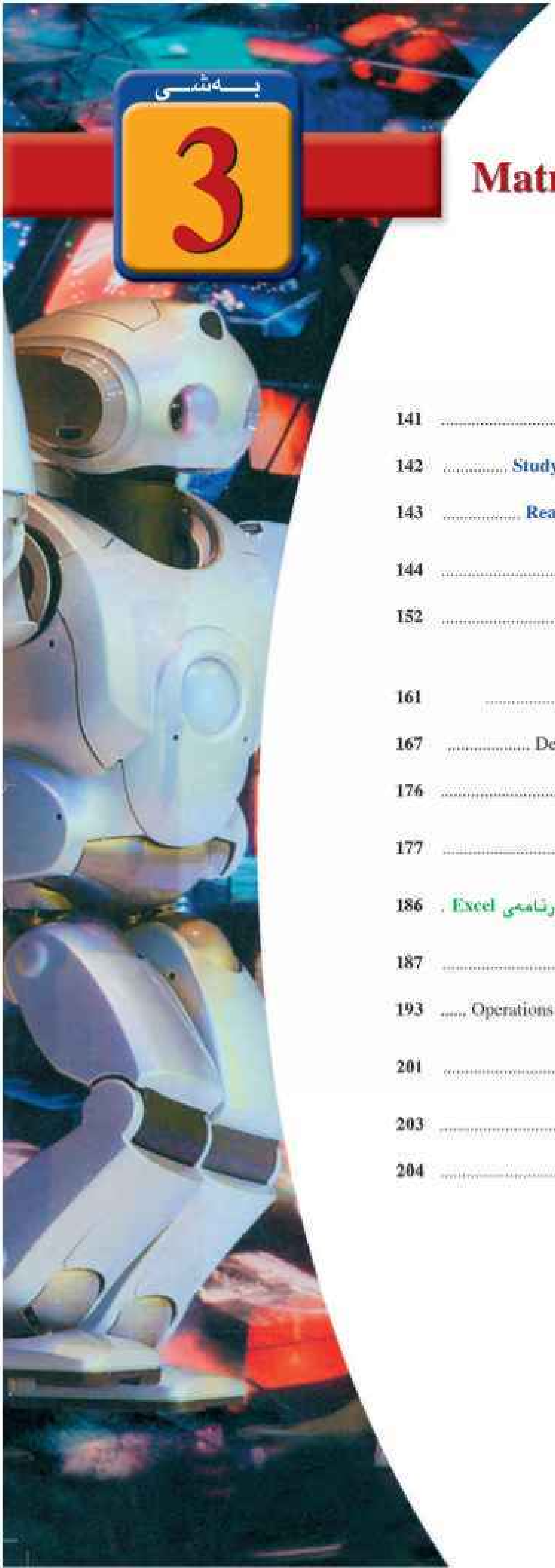
تەکنۆلۆژیا: کۆکردنەوەی پێدراوەکان بەشێوەی تاقیکردنەوە
Collecting Experimental Data 124

7–2 بەشینەوەکانی دووانی «گراوەی دووڕاندەار» Binomial Distributions 125

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە Study Guide: Review 135

تاقیکردنەوەی بەش Chapter Test 137

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو Cumulative Assessment 138



بەشی 3

ڕیزکراوەکان Matrices

ئایا تۆ ئامادەیت؛ Are You Ready? 141

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە Study Guide: Preview 142

بیرکاری بە خوێندنەوە و نووسین Reading and Writing Math 143

1-3 ڕیزکراوەکان Matrices 144

2-3 لێکدانی ڕیزکراوەکان Multiplying Matrices 152

3-3 ڕیزکراوەکان و جێگۆڕکێی ئەندازەییەکان Matrices and Geometrical Transformations 161

4-3 سنوردەرەکان و ڕێسای گرامر Determinants and Cramer's Rule 167

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکانی 1-4) Quiz 176

5-3 هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکان Matrix Inverse 177

زیاتر تەکنۆلۆژیا شیکارکردنی سیستمی هێڵی بەبەکارهێنانی بەرنامەی Excel 186

6-3 ژمارە ئاوێتەکان Complex Numbers 187

7-3 کردارەکان لەسەر ژمارە ئاوێتەکان Operations with Complex Numbers 193

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە Study Guide: Review 201

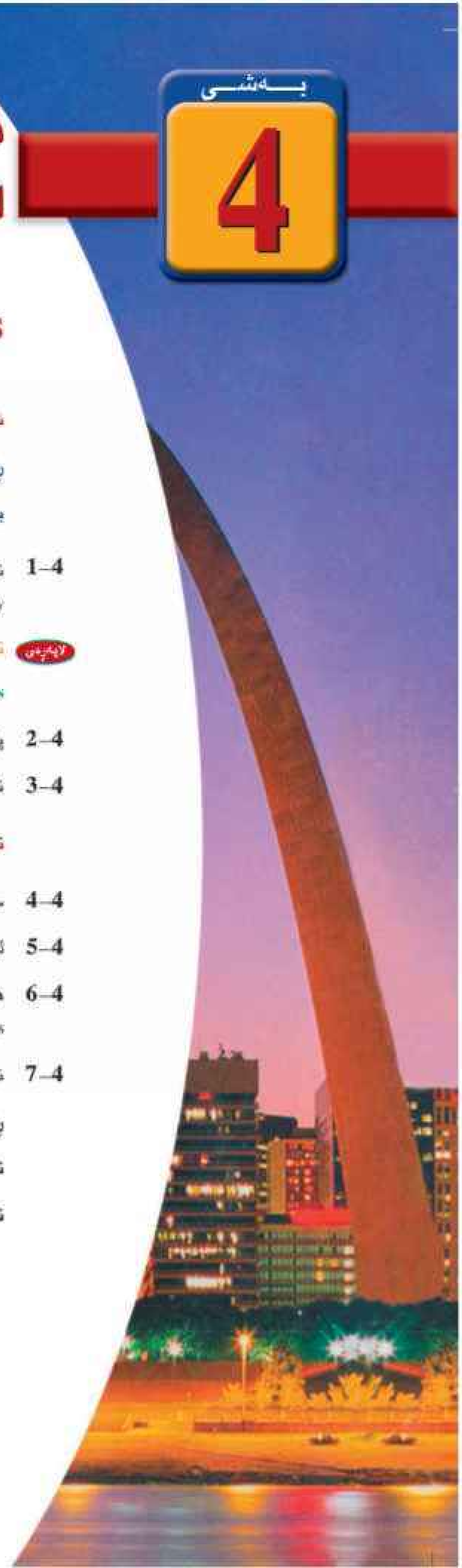
تاقیکردنەوەی بەش Chapter Test 203

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو Cumulative Assessment 204

بەشی 4

نەخشە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان

Exponential and Logarithmic Functions



ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready? 206

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە Study Guide: Preview 208

بیرکاری بە خوێندنەوە و نووسین Reading and Writing Math 209

4–1 نەخشە توانییەکان وگەشە و پووکانەوە «گەڕانەوە»
Exponential Functions, Growth and Decay 210

تەکنۆلۆژیا: دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەکان
Explore Inverses of Functions 218

4–2 پێچەوانەی نەخشە Inverse Function 219

4–3 نەخشە لۆگاریتمییەکان Logarithmic Functions 226

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکانی 1-3) Quiz 233

4–4 سیفەتەکانی لۆگاریتم Properties of Logarithm 234

4–5 لۆگایتمی سروشتی Natural Logarithm 242

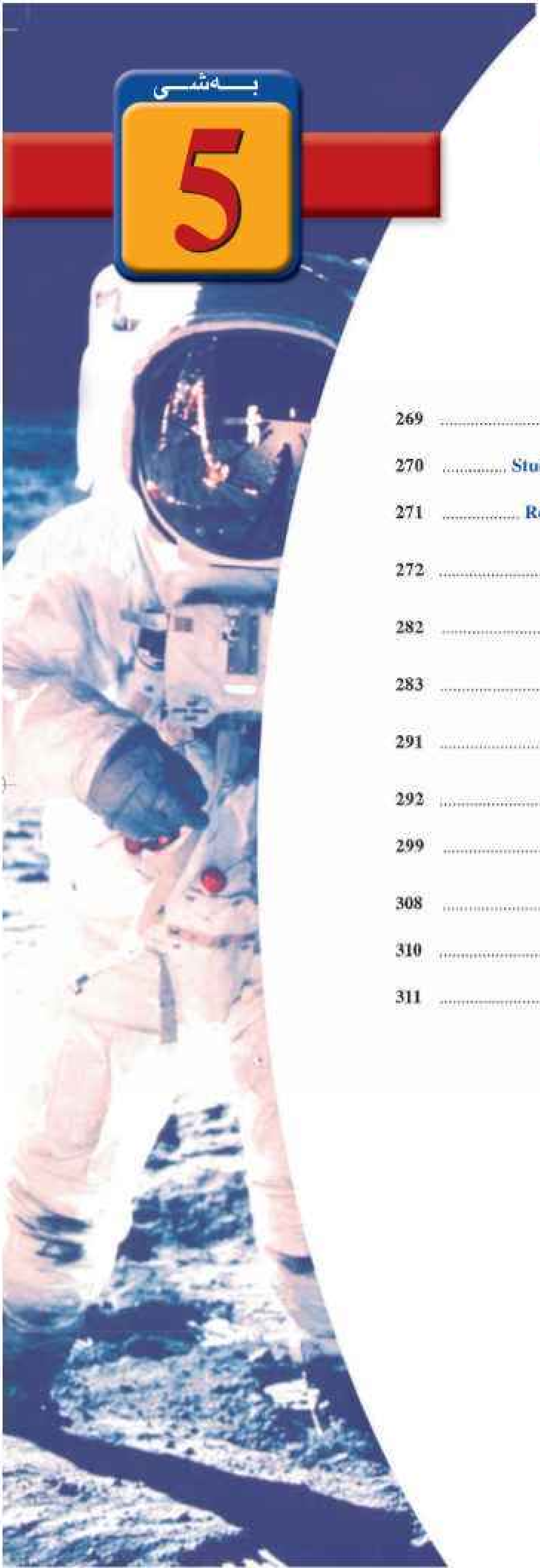
4–6 هاوکێشە و لاسەنگە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان
Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities 249

4–7 نموونە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان Exponential and Logarithmic Models 256

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە Study Guide: Review 263

تاقیکردنەوەی بەش Chapter Test 265

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو Cumulative Assessment 266



بەشی

5

سیفەتەکانی نەخشەکان

Properties of Functions

ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready? 269

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە Study Guide: Preview 270

بیرکاری بە خوێندنەوە و نووسین Reading and Writing Math 271

5–1 نەخشە ڕێسا پەلدارەکان Piecewise Functions 272

تەکنۆلۆژیا: دۆزینەوەی جیاوازییەکان و ڕێژەکان 282

5–2 جێگۆڕکێی نەخشەکان Transforming Functions 283

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکانی 1–2) Quiz 291

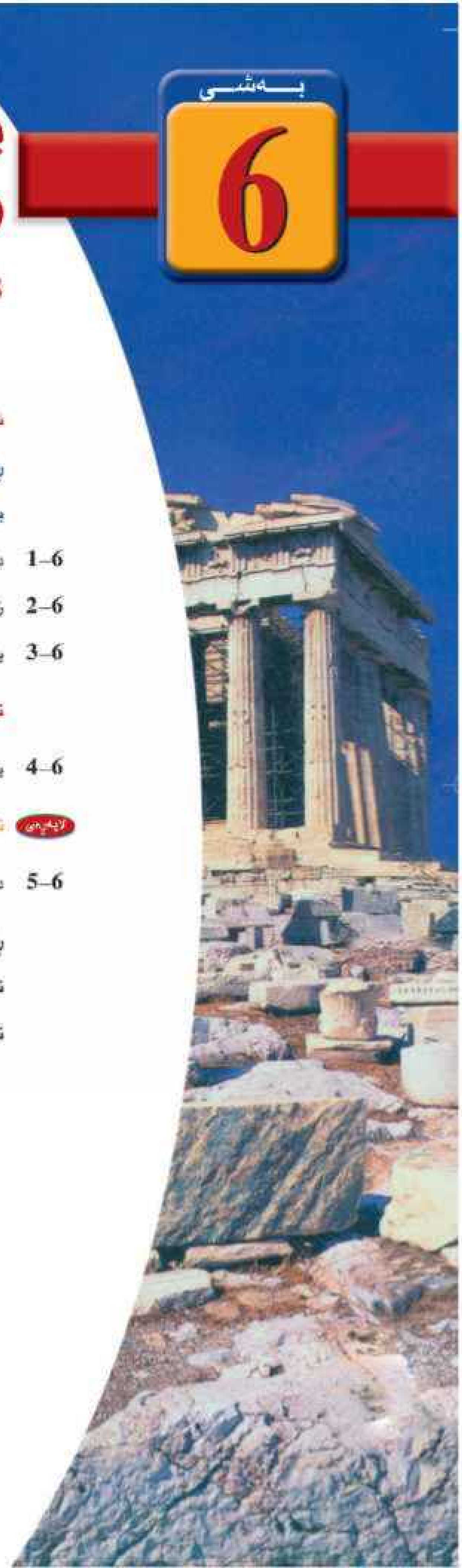
5–3 کردارەکان لەسەر نەخشەکان Operations with Functions 292

5–4 نموونە بیرکارییەکان Mathematical Models 299

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە Study Guide: Review 308

تاقیکردنەوەی بەش Chapter Test 310

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو Cumulative Assessment 311



یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرەکان

Sequences and Series

ئایا تۆ ئامادەیت؟ Are You Ready? 314

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە Study Guide: Preview 315

بیرکاری بە خوێندنەوە و نووسین Reading and Writing Math 316

6–1 دەروازەیەك بۆ یەکبەدوای یەکەکان Introduction to Sequences 317

6–2 زنجیرەکان Series 324

6–3 یەکبەدواییەك و زنجیرە ژمارەییەکان Arithmetic Sequences and Series 332

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکانی 1–3) Quiz 341

6–4 یەکبەدواییەك و زنجیرە ئەندازەییەکان Geometric Sequences and Series 342

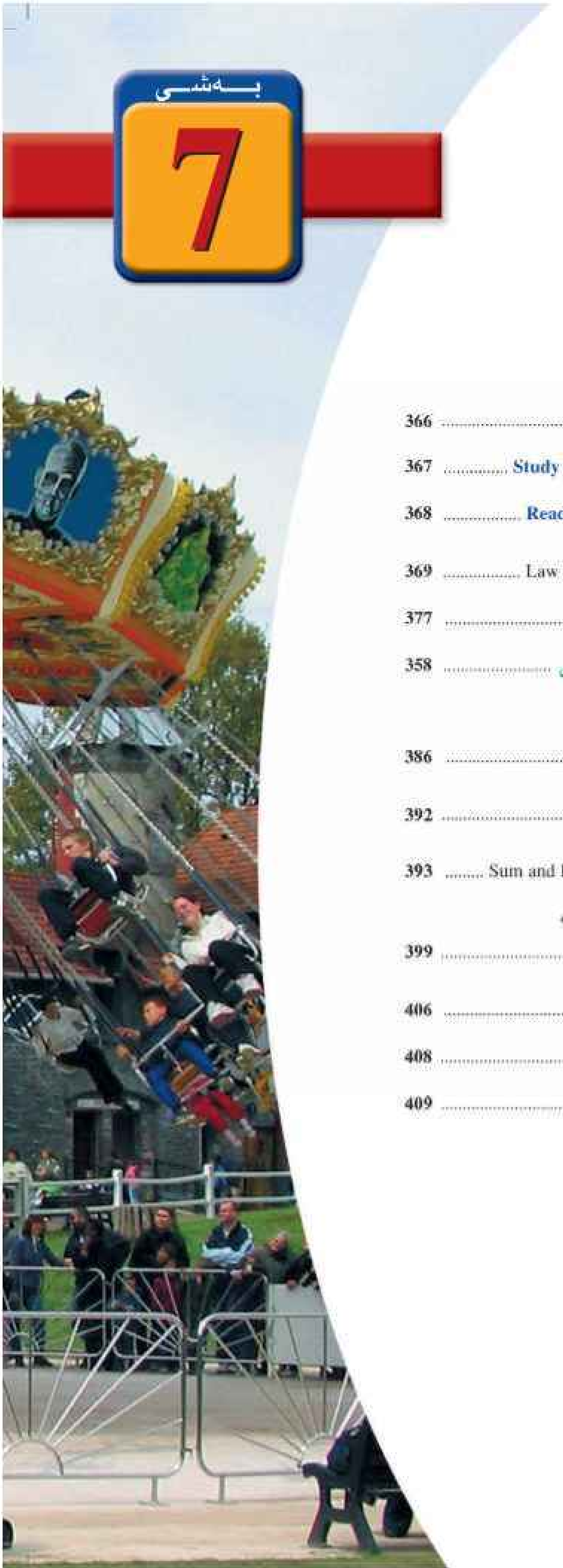
لایەنی تەکنۆلۆژیا: دۆزینەوەی زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان 351

6–5 دەرئەنجامی بیرکاری Mathematical Induction 352

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە Study Guide: Review 360

تاقیکردنەوەی بەش Chapter Test 362

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو Cumulative Assessment 363



بەشی 7

سێگۆشەزانی

Trigonometry

ئایا تۆ ئامادەیت؛ Are You Ready? 366

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە Study Guide: Preview 367

بیرکاری بە خوێندنەوە و نووسین Reading and Writing Math 368

7–1 یاسای ساین و یاسای کۆساین Law of Sine and Law of Cosine 369

7–2 نەخشە سێگۆشەییەکان Trigonometric Functions 377

تەکنۆلۆژیا: هاوتەنجامە سێگۆشەییەکان بە ڕوونکردنەوەیی 358

7–3 هاوتەنجامە سێگۆشەیيە بنەڕەتییەکان
Fundamental Trigonometric Identities 386

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش (وانەکانی 1–3) Quiz 392

7–4 هاوتەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی Sum and Difference Identities 393

7–5 هاوتەنجامەکانی دوو ئەوەندەی گۆشە و نیو ئەوەندەی گۆشە
Double-Angle and Half-Angle Identities 399

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە Study Guide: Review 406

تاقیکردنەوەی بەش Chapter Test 408

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو Cumulative Assessment 409

بەشی

1

ئەندازە

Geometry

بەشی یەکەم

وانەکان

1-1 بۆشایی پۆتانەکان

لاپەڕەی تەکنۆلۆژیا

2-1 چەندلایەکان

3-1 گەورەکردن و بچووکردنەوە

4-1 ناڕاستەبڕەکان

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

5-1 ڕووبەری بازنەو چەندلاڕێکەکان

6-1 هەندێك لە یاسایەکانی بۆشایی

7-1 گۆ

8-1 کەرتە بازنەییەکان

تەنە زێڕینەکان

وێنەکە ژمارەیەك چوارلای ڕوو لەناو یەکتر ڕووندەکاتەوە دەتوانیت ڕووەکان بەکاربهێنێت بۆ دروستکردنی نموونە چوارییەکان و تەنی ئەندازەیی تر.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

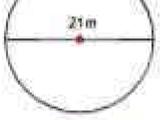
هەر زاراوەیەك بەپێی پێناسەکەی کەلەلای چەپدا هاتووە ببەستەوە.

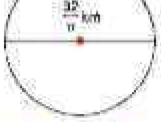
1	لاتەریب	آ	دووری دەوری بازنەکە.
2	نیوەتیرە	ب	ڕێژەی چێوەی بازنەکە بۆ تیرەکەی.
3	پای π	ج	هەموو لایەکانی جووتن.
4	چێوەی بازنە	د	دووری نێوان چەقی بازنەو ئەو خاڵەی دەکەوێتە سەری.
		هـ	چوارلایەکە هەرلایەك لە لایەکانی بەلای بەرامبەری تەریبە.

چێوە و ڕووبەری بازنە

ڕووبەرو چێوەی هەریەك لەم بازنانە بدۆزەوە.

5

6


7


هەژمارکردنی دووری و دیاریکردنی ناوەڕاستی پارچە ڕاستەهێڵ

درێژی $\overline{AB}$ و پۆوتانی ناوەڕاستەکەی بدۆزەوە.

8 $A(-3, 2)$ ، $B(5, 6)$

9 $A(-4, -4)$ ، $B(2, -3)$

10 $A(0, 1)$ ، $B(-3, 4)$

بازنە ڕوونکردنەوەییەکان

ئەم بازنە ڕوونکردنەوەیەی بەرامبەر بەپێی تەمەنی دانیشتوانی شارێك دەردەخات کە ژمارەیان ٤٠٠٠٠٠ کەسە.

11 ژمارەی ئەو دانیشتوانەی تەمەنیان لەنێوان ١٨و٢٤ساڵدایە چەندە؟

12 ژمارەی ئەو دانیشتوانەی تەمەنیان لە ١٨ساڵ کەمترە چەندە؟

13 ڕێژەی سەدی ئەو دانیشتوانەی تەمەنیان ٤٤ ساڵ زیاترە چەندە؟

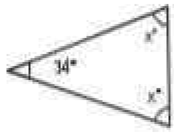
14 ژمارەی ئەو دانیشتوانەی تەمەنیان لە ٤٤ساڵ زیاترە چەندە؟

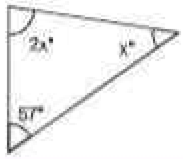
کۆی پێوانەی گۆشەکانی سێگۆشە

بەهای x بدۆزەوە.

15

16

17


18


بەشی 1

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

ئەمانەت خوێندووە

- ڕووتەختی پۆوتانەکان.
- سێگۆشەکان و گۆشەکانیان.
- جێگۆڕکێ ئەندازەییەکان وەك ڕاکێشان و خولانەوە.
- پارچە ڕاستەهێڵەکان.
- هەژمارکردنی ڕووبەر و چێوەی بازنە.
- یاسای دووری و پۆوتانی ناوەڕاست لە ڕووتەختی پۆوتاندا.
- بەکارهێنانی بازنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- بۆشایی پۆوتان.
- چەندلایەکان و گۆشەکانیان.
- ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییەی کە پێوانەکان دەگۆڕێت.
- پارچە ڕاستەهێڵە ئاڕاستەکراوەکان یان ئاڕاستەبڕەکان.
- چەند لاڕێکەکان و هەژمارکردنی ڕووبەرەکانیان.
- یاسای دووری و پۆوتانی ناوەڕاست لە بۆشایی پۆوتاندا.
- پارچەکان و کەرتە بازنەییەکان و هەژمارکردنی ڕووبەرەکانیان و درێژی کەوانە.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت بۆ:

- دامەزراندنی بنچینەیەکی بەهێز بۆ خوێندنی باڵا.
- توێژینەوەی ئەو کارانەی پەیوەندییان بەو بابەتانەوە هەیە کە فێریان دەبیت.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی پەیوەندییان بە ئەندازەی ناوەخۆ و تەلارسازییەوە هەیە.
- هەژمارکردنی دوورییەکان و شرۆڤەکردنی ئەو زانیارییانەی لەڕۆژنامە و گۆڤارەکاندا دێت.
- لەژیانی ڕۆژانەدا.

زاراوەکان	Vocabulary
بۆشایی پۆوتان	3D coordinate system
قۆقز	convex
قۆپاو	concave
چەند لای ڕێك	regular polygon
گەورەکردن	enlargement
بچووکردنەوە	compression
ئاڕاستە بڕ	vector
ئەستوندەگ	apothem
چەقی بازنە	center of the circle
چەقی چەندلایڕێك	center of a regular polygon
چەقەگۆشە	central angle
زۆر ڕوو	polyhedron
درێژی کەوانە	arc length
پارچە بازنەیی	segment
کەرتە بازنەیی	sector

ڕۆشنایییەك لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێك لەم زاراوانەدا ڕابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیڕەوبکە:

1. ڕووتەختی پۆوتانەکانت ناسی ئەم زانیارییە چۆن یارمەتیت دەدات بۆ ناسینەوەی **بۆشایی پۆوتان**.
2. وشەی ڕێك واتە پابەندبوون بەسیستەمەوە واتەی **چەندلای ڕێك** لای تۆ چی دەگەیێنێت؟
3. کاتێك پزیشك چاوت دەکاتەوە ئەوا گلێنەکەی گەورەتر دەبێت شێوەیەکی ئەندازەیی **گەورەکراوی** شێوەیەکی ئەندازیییە. مانای چییە؟
4. هەندێك ئاڕاستەبڕ بە پارچە ڕاستەهێڵێکی **ئاڕاستەکراو** دەناسرێت، ئەم پێناسەیە بۆ تێگەیشتنی واتای ئاڕاستەبڕ چۆن بەکاردەهێنیت؟
5. وشەی ئەستوندەگ بوونی ئەستون دەبەخشێت ئایا لە پێناسەی **ئەستوندەگدا** ئەوە دەبینیت؟
6. وشەی ڕووبەر چ دەگەیێنێت؟ بەڕای تۆ **ڕووبەری گۆ** چییە؟
7. کەباسی شتێك دەکرێت چەقییە واتە لە چەقەکەیدایە ئەوە چۆن یارمەتیت دەدات بۆ تێگەیشتن لە دەربڕینی **چەقەگۆشە** لەبازنەدا، لەچەندلایەکی ڕێکدا.

بەشی
1

بیرکاری
بە خوێندنەوە و نووسین

ستراتیژیەتی خوێندنەوە: خوێندنەوە بۆ شیکارکردنی پرسیار

کاتێک دەست بەخوێندنەوەی دەقی پرسیارێك دەکەیت بۆ شیکارکردنی، لەوانەیە هەست بە نائومێدییەك بکەیت بەرامبەر ئەوەی دەیخوێنیتەوە کاتێك بەشە جیاجیاکانی پرسیارەکە لێك جیادەکەیتەوە و دەیانخەیتە سەر زمانی بیرکاری بۆت دەردەکەوێت پرسیارەکە هاوشێوەی پرسیارەکانی پێشوترە کە شیکارت کردوون.

ڕێنمایییەکانی خوێندنەوە

- ✓ هەر ڕستەیەك بەهێواشی بخوێنەوە، مەبەستی وشەکان تۆماربکە و لە خوێندنەوەکەت بەردەوامبە.
- ✓ وشەکان و ڕستەکان بۆ زمانی بیرکاری بگۆڕە.
- ✓ هێڵێك بەژێر داواکراوە دیارەکاندا بهێنە.
- ✓ هێلکارییەك بکێشە، هێلکارییەکە ناوبنێ بۆ ئەوەی پێت ڕابگەیەنێت چی دەنوێنێت.
- ✓ دووبارە پرسیارەکە بخوێنەوە پێش ئەوەی دەست بەشیکارەکەی بکەیت.

ئەو ڕێنماییانەی سەرەوە بۆ تێگەیشتن لە پرسیارەکەی بەرامبەر بەکاربێنە.

> لەکۆتایی ڕۆژێکی سەیرانی سەر شاخێکدا تیمێکی سەیرانکەران چادرێکیان لەدووری 3 km خۆرهەڵاتی خاڵی دەرچوون و 7 km باکوور و لە بەرزایی 0.6 km هەڵدا دووری نێوان چادرگەکە و خاڵی دەرچوون بدۆزەوە.

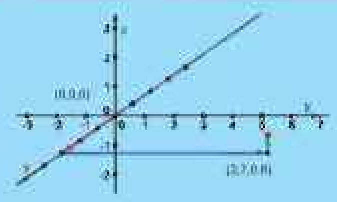
جیاکردنەوەی وشە کلیلیەکان

لە کۆتایی ڕۆژێکی سەیرانی سەر شاخێکدا تیمێکی سەیرانکەران چادرێکیان لە دووری 3 km خۆرهەڵاتی خاڵی دەرچوون 7 km باکور لە بەرزایی 0.6 km هەڵدا، دووری نێوان چادرگەکە و خاڵی دەرچوون بدۆزەوە.

وەرگێڕانی دەق بۆ بیرکاری

دەکرێت خاڵی دەرچون بەخاڵی بنەڕەت $(0,0,0)$ دابنرێت هەروەك دەکرێت چادرگەکە بەخاڵی $(3,7,0.6)$ بنوێنرێت دەتوانیت دوورییەکەی بەبەکارهێنانی یاسای دووری لە بۆشایی بۆوتاندا هەژماربکەیت.

هێلکاری



یاسای دووری لە بۆشایی بۆوتاندا بۆ هەژمارکردنی دووری نێوان چادرگەکە و خاڵی دەرچوون بەکاربێنە.

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(7-0)^2+(0.6-0)^2}\approx 7.6$$

دووری نێوان چادرگەکە و خاڵی دەرچوون بریتییە لە 7.6 km بەنزیکەیی.

هەوڵبدە

لەم پرسیارەی خوارەوەدا ڕێنمایییەکان بۆ خوێندنەوەی پرسیارەکە بەکاربهێنە شیکاری مەکە

- وشەکان دیاریبکە – کلیلەکان.
- هەر ڕستەیەك بۆ بیرکاری وەربگێڕە.
- هێلکارییەك بکێشە پرسیارەکە بنوێنێت.

1. بەرزی لولەکێك 4m و نیوەتیرەکەی 9m ، دووهێندکردنی هەریەك لەم پێوانانە چ کاریگەرییەکی لەسەر قەبارەی لولەکە دەبێت؟

1-1 بۆشایی پۆوتان

3D Coordinate system

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

لە پێشبڕکێیەکدا دەتوانیت گەنجینەیەکت دەستکەوێت، بەبەکارهێنانی سیستمی پۆوتانەکان لەسێ دووریدا، یارمەتیت دەدات ناشوێنی ئەو گەنجینەیە لەسەر زەوی دیاریبکەیت.

ئامانجەکان

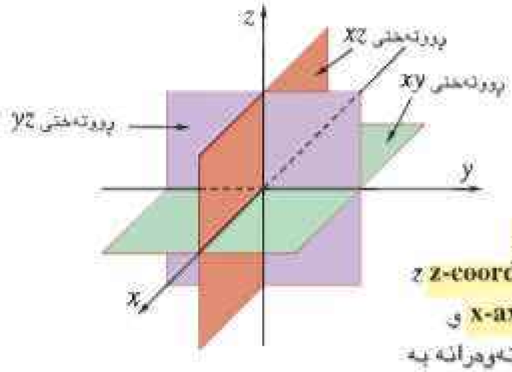
- خاڵەکان و هاوکێشە هێڵییەکان لە بۆشایی پۆوتاندا دەنوێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

بۆشایی پۆوتان
3D Coordinate system

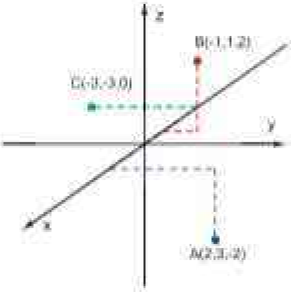
تەوەری سێیەم
z-axis

سستەمی GPS (سێ دووریەکان) بۆ دیاریکردنی شوێنەکان بەکاردێت لەرێی دیاریکردنی دوو هێڵی درێژی و پانی کە شوێنەکەی لێیە و دیاریکردنی بەرزییەکەی



هەروەک چۆن رووتەختی پۆوتان رووتەختێکی ناوەڵی سیستەمی پۆوتانە. شوێنی هەر خاڵێک بەدوو ژمارە، کە پۆوتانی یەکەمیان x و دووەمیان y دیاریدەکات. کەوابوو بۆشایی پۆوتان ئەو بۆشاییەیە کە ناوەڵی سیستمی پۆوتانەکانە و شوێنی هەرخاڵێک بەسێ ژمارە دیاریدەکرێت کە ئەمانەن **تەوەری یەکەم x-coordinate** x و **تەوەری دووەم y-coordinate** y و **تەوەری سێیەم z-coordinate** z دەبێت. بۆشایی پۆوتان 3 تەوەرەی تێدایە **تەوەری یەکەم x-axis** و **تەوەری دووەم y-axis** و **تەوەری سێیەم z-axis** دەبێت ئەم تەوەرانە بە رووتەختی پۆوتان دیاریدەکرێت **رووتەختی** xy و **رووتەختی** yz و **رووتەختی** zx.

نموونـــــە 1 دیاریکردنی خاڵەکان لە بۆشایی پۆوتاندا



هەریەک لەم خاڵانە لەبۆشایی پۆوتاندا دابنێ.

أ خاڵی $A(2, 3, -2)$

لەخاڵی بنەڕەتەوە دوویەکە بەرەوپێش لەسەر تەوەری یەکەم بجوڵێ پاشان 3 یەکە بۆلای راست بەئاراستەی تەریب بە تەوەری دووەم پاشان 2 یەکە بۆ خوارەوە بەئاراستەی تەریب بەتەوەری سێیەم.

ب خاڵی $B(-1, 1, 2)$

لەخاڵی بنەڕەتەوە یەك یەکە بۆ دواوە لەسەر تەوەری یەکەم بجوڵێ، پاشان بۆ لای راست بەئاراستەی موجەب تەریب بە تەوەری دووەم پاشان دوو یەکە بۆ سەرەوە تەریب بەتەوەری سێیەم.

ج خاڵی $B(-3, -3, 0)$

لەخاڵی بنەڕەتەوە 3 یەکە بۆ دواوە لەسەر تەوەری یەکەم بجوڵێ پاشان 3 یەکە بۆ لای چەپ بەئاراستەی تەریب بە تەوەری دووەم.

خاڵی چاوێری

1. ئەم خاڵانە دیاریبکە

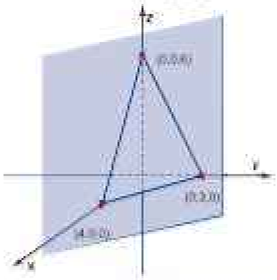
أ خاڵی $D(1, 3, -1)$ ب خاڵی $E(1, -3, 1)$ ج خاڵی $F(0, 0, 3)$

بیرت بێتەوە کە هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لە ڕووتەختی پۆوتاندا هاوکێشەیەکی هێڵییە وەک $ax+by+c=0$ بەدوو گۆڕاوی x و y هەموو خاڵەکانی (x, y) لە ڕووتەختی پۆوتاندا، پۆوتانەکانی پاسادانی ئەم هاوکێشە هێڵییە دەکەن. هەروەک چۆن هاوکێشەی ڕووتەخت لەبۆشایی پۆوتاندا هاوکێشەیەکی هێڵییە $ax+by+cz+d=0$ بە گۆڕاوەکانی z و y و x هەموو خاڵەکانی (x, y, z) لە بۆشایی پۆوتاندا پاسادانی ئەو هاوکێشە هێڵییە دەکات کە ڕووتەختەکە پێکدێنێت لەبەرئەوەی سێ خاڵ لەڕێکی یەکترنەبن بەسە بۆ پێکهێنانی ڕووتەخت لە بۆشاییدا ئەوا وێنەی یەکتربڕینەکانی ڕووتەختەکە خاوەنی هاوکێشەی $ax+by+cz+d=0$ لەگەڵ تەوەرەکانی سێ پۆوتانەکاندا بەسە بۆ نواندنی ئەو هاوکێشەیە لە بۆشایی پۆوتانەکاندا.

نموونە 2 نواندنی هاوکێشەی هێڵی لە بۆشایی پۆوتاندا

ئەم هاوکێشە هێڵییە لەبۆشایی پۆوتاندا بنوێنە $3x+4y+2z=12$

هەنگاوی 1 یەکتربڕینەکانی ڕووتەختەکە لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکاندا بدۆزەوە.



لەگەڵ تەوەرەی یەکەم: $3x+4\times0+2\times0=12 \quad x=4$

لەگەڵ تەوەرەی دووەم: $3\times0+4y+2\times0=12 \quad y=3$

لەگەڵ تەوەرەی سێیەم: $3\times0+4\times0+2z=12 \quad z=6$

هەنگاوی 2 وێنەی خاڵەکانی $(4, 0, 0)$ و $(0, 3, 0)$ و $(0, 0, 6)$ دیاریبکە پاشان ئەو ڕووتەختە بکێشە کە بەو خاڵانەدا دەڕوات.

یارمەتی

بۆ ئەوەی یەکتربڕینی ڕوتەختێک لەگەڵ یەکێک لە تەوەرەکاندا بدۆزیتەوە لەجیاتی پۆوتانی دوو تەوەرەکانی تر 5 دابنێ و هاوکێشەکە شیکاربکە.

خاڵی چاودێری

2. هاوکێشەی هێڵی $x-4y+2z=4$ لەبۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

نموونە 3 جێبەجێکردن لە تەکنەلۆجیا

لەیارییە باوەکانی بزمێر یاری نواندنی دەورەکانە (أدوار)، هەر یاریکەرێک تیایدا شارستانیەتێک دروست دەکات، لەسەرەتادا هەر یاریکەرێک 100 پارچە زێڕ بۆ کڕینی پێداویستییەکان دەدات لەدوایدا یاریکەرەکان پێشبڕکێ لەسەر هێشتنەوەی شارستانیەتییەکان بەزیندوویی دەکەن لە یاساکانی یارییەکەدا هاتووە، نرخی یەکەیەکی خواردن دوو پارچە زێڕە ونرخی یەکەیەکی تەختە 3 پارچە زێڕە و نرخی یەکەیەکی بەرد 5 پارچە زێڕە.

أ هاوکێشەیەکی هێڵی بە سێ گۆڕاو بنووسە بارەکە بنوێنێت.

هێمای f بۆ بڕی خواردن و w بۆ بڕی تەختە و s بۆ بڕی بەرد بەکاربێنە.

100 پارچە زێڕ	=	نرخی خواردن	+	نرخی تەختە	+	نرخی بەرد
100	=	$2f$	+	$3w$	+	$5s$

ب خشتەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی بڕی ئەو بەردەی کەهەر یاریکەرێک دەیکڕێت

یاریکەر	بڕی خواردن	بڕی تەختە	بڕی بەرد
دانا	20	10	■
زانا	15	15	■
خەسرەو	40	5	■
پێشرەو	25	10	■

دانا $2(20)+3(10)+5s=100 \quad s=6$

زانا $2(15)+3(15)+5s=100 \quad s=5$

خەسرەو $2(40)+3(5)+5s=100 \quad s=1$

پێشرەو $2(25)+3(10)+5s=100 \quad s=4$

دانا دەتوانێت 6 یەکە بەرد بکڕێت کەچی زانا دەتوانێت 5 یەکە و خەسرەو یەک یەکە و پێشرەو 4 یەکە بکڕێت.

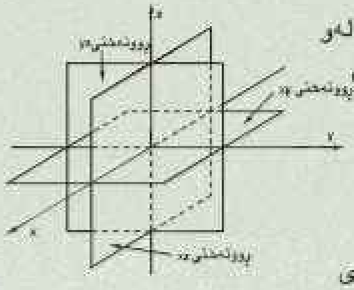
خاڵی جاوێری

ئازاد بڕیاریدا لەکۆتایی پشووی هەفتەدا گەشتێك بەپێ ئەنجام بدات لە خۆئامادەکردندا بۆ گەشتەکەی ئەم شتانەی کڕی، چرایەك بە 500 3 دینار و چەند کولێرەیەك نرخی هەریەکەیان 500 1 دیناربوو، چەند شووشە ئاوێك نرخی هەریەکەیان 750 دینار بوو. ئازاد 500 60 دیناری بۆ کڕینی ئەو شتانەدا.

أ هاوکێشەیەکی هێڵی بەسێ گۆڕاو بنووسە، بارەکە بنوێنێت.

ب ئازاد 4 چراو 24 شوشە ئاوی کڕی، چەند کولێرەی کڕیوە؟

بیربکەوە و ئاوتوێبکە



1. وای دابنێ کە خاڵی بنەڕەت لەبۆشایی پۆوتاندا لەبەردەمتدایە لەو شوێنەی تێیدا وەستاوی لەخوارووی گۆشەی لای چەپی ژووری پۆلەکەت. وای دابنێ درێژی یەکەی پێوانە لەسەر تەوەری پۆوتانەکان یەك پێیە. پۆوتانی جێگای سەرت بخەملێنە.
2. باسی ڕووتەختێك بکە تەنها دوویەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری پۆوتانەکاندا هەبێت.
3. ڕێکخەریە ئەم هێلکارییەی بەرامبەرت بنووسەوە پاشان تەواوی بکە هەریەکە لە تەوەر و ڕووتەخت و خاڵەکەی ناوبنێ.

فێربە

1-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** جیاوازی نێوان ڕووتەختی پۆوتان و بۆشایی پۆوتان ڕوونبکەوە.

بڕوانە نموونە 1

هەریەکە لەم خاڵانە لە بۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

2 $(-3, -2, 1)$　3 $(0, 0, 2)$　4 $(1, 4, 5)$　5 $(-1, 2, 4)$

بڕوانە نموونە 2

هەر هاوکێشەیەك لەبۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

6 $x+y+z=3$　7 $5x-2y-4z=10$　8 $1.5x+3y-2z=-6$

بڕوانە نموونە 3

9 **هەنگاوی جۆراوجۆر** گەورەترین باری بارهەڵگری کۆمپانیای دابەشکردنی نیشتمانی یەك تەنە کێشی بەستێنەرێك 75 kg و کێشی قاپشۆرێك 50 kg و کێشی کوورەیەك 100 kg .

أ هاوکێشەیەك بەسێ گۆڕاو بنووسە بارەکە بنوێنێت.

ب ئەو خشتەیە تەواوبکە ژمارەی هەرجۆرێك لەم سێ ئامێرانەی بارهەڵگرەکە دەیانگوێزێتەوە ڕووندەکاتەوە.

ج **خەملاندن** گەورەترین ژمارەی ئەو ئامێرانەی بارهەڵگرەکە دەیانگوێزێتەوە بخەملێنە.

جێبەجێکردنەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
شیکاری ڕاهێنان	ئەماشای نموونە
10–17	1
18–23	2
24	3

شوێنی هەرخاڵێك لە بۆشایی پۆوتاندا دیاریبکە.

10 $(2, -4, 3)$ **11** $(-1, 1, 4)$ **12** $(3, 0, 0)$ **13** $(1, -2, 0)$

14 $(-3, -3, -3)$ **15** $(5, 0, 2)$ **16** $(0, -3, 2)$ **17** $(-4, -1, 1)$

هەر هاوکێشەیەك لە بۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

18 $x+y-z=-1$ **19** $2x-y+2z=4$ **20** $x+\frac{1}{2}y+z=-2$

21 $5x+y-z=-5$ **22** $8x+6y+4z=24$ **23** $3x-3y+2.5z=7.5$

24 **گۆلە ماسییەکان** هەڤاڵ 80 000 دیناری هەیە ماسی پێدەکڕێت تا بیخاتە گۆلی ماسییەوە. نرخی سوورە ماسی 10 000 دینار و ڕەشەکەیان 15 000 دینار و خۆڵەمێشەکەی 2 500 دینارە.

سوور	ڕەش	خۆڵەمێشی
2	2	
	1	10
3		2
5	1	

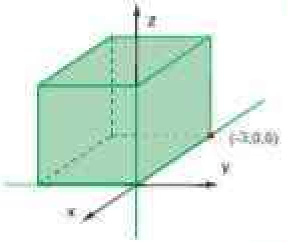
أ هاوکێشەیەك بەسێ گۆڕاو بنوسە بارەکە بنوێنێت.

ب ئەو خشتەیە تەواوبکە ژمارەی ئەو ماسییانە دەنوێنێت کە هەڤاڵ دەتوانێت بیانکڕێت.

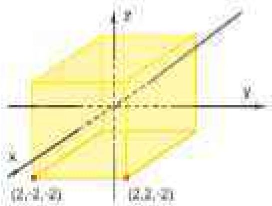
25 **وەرزش** بۆ یاریکەری تۆپی سەبەتە بەپێی سێ جۆر هەڵدان بۆ گۆڵکردن خاڵ تۆماردەکرێت، هەڵدان بەخاڵێك هەڵدانی سەربەخۆ و هەڵدان بە دوو خاڵ و هەڵدان بەسێ خاڵ، یەکێك لە یاریکەرەکان 60 خاڵی تۆمارکرد 20 لەوانەیە هەڵدانی یەك خاڵییە. ژمارەی هەڵدانەکان کە لەدوو جۆرەکەی تر دەگونجێت بدۆزەوە.

ئەندازە خاڵی سەرەکانی هەریەك لەم شەشپاڵوانە دیاریبکە.

26



27



28 **تەلارسازی** ئەندازیارێك 8 ملیۆن دیناری بۆ کاشیکردنی هۆڵێك تەرخانکرد کە 2 000 کاشی دەگرێت بڕیاریدا 3 جۆر کاشی تەختەو سیرامێك و بەرد تاقیبکاتەوە. 400 کاشی سیرامیکی کڕی، ئایا ئەندازیارەکە دەتوانێت ئەو زەویەی لە هۆڵەکە ماوەتەوە بەیەکسانی لەنێوان تەختەو بەردداپێی کاشی بکات؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

نرخی کاشییەکان (کرێ دەست)
مۆزاییك: 1 500 دینار
بەرد: 2 000 دینار
سیرامێك: 4 000 دینار
تەختە: 6 000 دینار

29 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا جوولەی سەر ڕاستەهێڵێك ڕۆیشتن و گەڕانەوە، جوولەی دووری دووانەیی دەنوێنێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

30 **بنووسە** هاوڕێیەکت بە تەلەفۆن پەیوەندی پێوەکردی داوای لێکردی چۆن بۆشایی پۆوتانەکان دەکێشرێت؟ چۆن ئەوەی بۆ باس دەکەیت؟

31 ئەندازیارەکان بۆشایی پۆوتان بۆ نەخشەکێشانی پرۆژەی ئەو بینایانەی دروستیدەکەن بەکاردێنن. ئەندازیارێك گڵۆپێکی لەخاڵی (7, 12, 10) دا دانا لەنەخشەکەدا زەوی تەلارەکە بە ڕووتەختی xy دەنوێنرێت، هەرچەندە یەکەی پێوانەی دوو تەوەری یەکەم و دووەم بەپێ دەنوێنرێت.

أ ئەندازیارەکە دوگڵۆپی تری هەڵواسی هەریەکەیان 4 پێ لە گڵۆپی یەکەم دووربێت یەکەمیان بەئاڕاستەی موجەبی تەوەری یەکەم و دووەمیان بەئاڕاستەی موجەبی تەوەری دووەم بێت. پۆوتانی خاڵی هەڵواسینی هەریەکە لەو دوو گڵۆپە چەندە؟

ب ئەگەر شوێنی هەریەکە لەو دوو گڵۆپە پێیەك و نیو لەژێر خاڵی جێگیربوونیدا بێت.

ج ئەندازیارەکە بڕیاریدا زەوی بیناکە 4 پێ بەرزبکاتەوە. پۆوتانی نوێی گڵۆپی یەکەمجار کامەیە؟

32 **هەڵە لە شیکاردا** لەخوارەوە دوو ڕێگا بۆ هەرژمارکردنی یەکتربڕینی ڕووتەختی $-5x+3z=15$ لەگەڵ تەوەری یەکەمدا هەیە، ڕێگای هەڵە دیاریبکە.

أ

$-5x+3z=15$

$-5x+3\times 0=15$

$-5x=15$

$x=-3$

ب

$-5x+3z=15$

$-5\times 0+3z=15$

$3z=15$

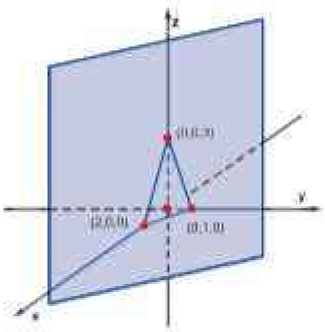
$z=5$

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

33 کام خاڵ بە 5 یەکە دەکەوێتە دوای خاڵی (1, 1, 4)ەوە؟

أ (−4, 1, 4)   ب (1, −4, 9)   ج (2, 3, 6)   د (6, 6, 9)

34 کام هاوکێشەیە وێنەی بەرامبەر دەنوێنێت؟



أ $x+2y+3z=6$

ب $2x+y+3z=6$

ج $3x+6y+2z=6$

د $6x+3y+2z=6$

35 کام خاڵ یەکتربڕینی ڕووتەختی $2x-4y+3z=-12$ لەگەڵ تەوەری دووەم پێکدەهێنێت؟

أ (0, −3, 0)

ب (0, 0, −3)

ج (0, 3, 0)

د (0, 0, 3)

36 یەکتربڕینی ڕووتەختی $5x-2y-4z=-3$ لەگەڵ تەوەری سێیەم بدۆزەوە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

کاتێک هاوکێشەی هێڵی تەنها دووگۆڕاوی تێدادەبێت لە تەوەری پۆوتانەکاندا ئەوا بە ڕووتەختێکی تەریب بەیەکێک لە تەوەری پۆوتانەکان دەنوێنرێت. هەریەکە لەم هاوکێشانە لە بۆشاییدا بنوێنە.

37 $x+y=2$ **38** $y-2z=4$ **39** $x+z=3$ **40** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=1$

هاوکێشەیەک بۆ ڕووتەختێک بنووسە بەزانینی یەکتربڕینەکانی لەگەڵ تەوەرکانی پۆوتان.

	لەگەڵ تەوەری یەکەم	لەگەڵ تەوەری دووەم	لەگەڵ تەوەری سێیەم
41	4	2	−1
42	25	50	10

پێداچوونەوەی لولپێچی

ناوی ئەو تەنە ئەندازەییە دیاریکە کە ژمارەی لایەکان و سەرەکانی زانراوە (پۆلەکانی پێشو)

43 5 سەرو 8 لا **44** 6سەرو 9 لا **45** بێ سەرو بێ لا

46 **کۆکردنەوەی بیتاک** یانەی هاوکاری گەشتێکی پاسکیل سواری ڕێکخست بەدرێژایی 1920 km . بەشداربووان ڕۆژی 120 km یان بری، گەشتەکەیان چەند ڕۆژی خایاند؟ (پۆلەکانی پێشو)

هەریەکە لەم سستمە هێڵییانە شیکاریکە (پۆلەکانی پێشوو)

47 $\begin{cases} 5y=x \\ \frac{2}{5}x+7y=18 \end{cases}$ **48** $\begin{cases} 6x-y=5 \\ 4y-3x=1 \end{cases}$ **49** $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$

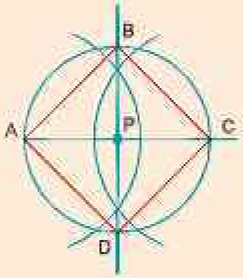
لاپەڕەی تەکنۆلۆژیا

دروستکردنی چەندلا ڕێکەکان

Constructing regular polygons

لەم چالاکیەدا فێری دروستکردنی چەندلا ڕێکەکان دەبێت بە بەکارهێنانی ئەو بازنەیەی دەوری داوە.

چالاکی 1

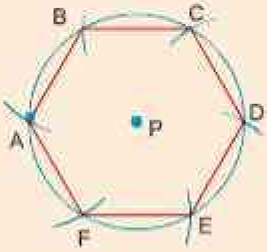


1. بازنەیەک بکێشە چەقەکەی P بێت پاشان تیرەی $\overline{AC}$ بکێشە.
2. تەوەرەی تیرەی بازنەکە $\overline{AC}$ دیاریبکە و خاڵەکانی یەکتربڕینی لەگەڵ بازنەکەدا بە B و D ناوبنێ.
3. هەریەکە لە $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{DA}$ بکێشە بەمەش چوارلایەکی یەکسانت دەستدەکەوێت گۆشەکانیشی یەکسان دەبن ئەوەش چەندلایەکی ڕێکە لە 4 لاپێکهاتووە (چوارگۆشەیە).

هەوڵبدە

1. ڕێگایەکی تر بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی چەندلایەکی ڕێک لە 4 لاپێکهاتبێت.
2. سەرەکانی چوارلای ڕێک دەکەونە سەر هەمان بازنە، پەیوەندی نێوان چوارلاو بازنە چییە؟
3. هەشتلای ڕێک ئەو هەشتلایە کە لایەکان و گۆشەکانی جووتن (یەکسانن) بەبەکارهێنانی لەتکەری گۆشەکانی ئەو چوارلایەی لە چالاکی 1 دا دروستت کرد هەشتلایەکی ڕێک بکێشە.

چالاکی 2



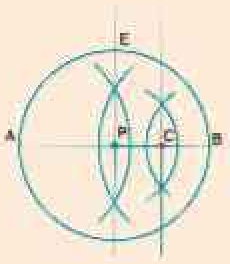
1. بازنەیەک بکێشە چەقەکەی P بێت، خاڵی A لەسەر چێوەکەی دیاریبکە.
2. پەرگالەکە بەکراوەیی بگرە، لەخاڵی A یەوە چەند خاڵێک کە لەدووریدا یەکسان بن لەسەر بازنەکە دیاریبکە خاڵەکان بە B و C و D و E و F ناوبنێ.
3. $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و$\overline{CD}$ و$\overline{DE}$ و $\overline{EF}$ و $\overline{FA}$ بکێشە شەشلایەکی لایەکسانت دەستدەکەوێت کە گۆشەکانیشی یەکسانن. ئەوە شەشلایەکی ڕێکە.

هەوڵبدە

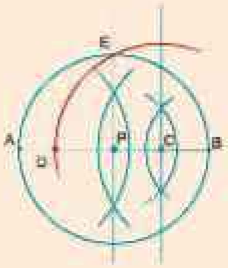
4. بەچیدا دەزانی $ABCDEF$ شەشلایەکی ڕێکە (ڕێنما: تیرەکانی$\overline{AD}$ و$\overline{BE}$ و$\overline{CF}$ بکێشە ئەو سێگۆشانەی بەدەستت هێناون چ جۆرێکن؟
5. **دوازدەلای ڕێک:** چەند لایەکە لە 12 لاو 12 گۆشەی یەکسان پێکدێت بۆ دروستکردنی دوازدەلای ڕێک شەشلایەکی ڕێک بەکاربێنە ڕێگاکەت ڕوونبکەوە.

چالاکی 3

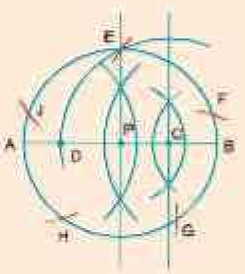
1. بازنەیەک بکێشە چەقەکەی P بێت پاشان تیرەی $\overline{AB}$ بکێشە.
2. تەوەری $\overline{AB}$ دیاریبکە ویەکێك لەدوو خاڵی یەکتربڕینی تەوەرەکە و بازنەکە ناوبنێ E.
3. ناوەڕاستی $\overline{PB}$ دیاریبکە و ناوبنێ C.
4. پرگالەکەت ئەوەندەی CE بکەوە سەری پرگالەکە لەسەر C دابنێ کەوانەیەک بکێشە $\overline{AB}$ لە خاڵێکدا دەبڕێت ناوی بنێ D.
5. پرگالەکەت ئەوەندەی ED بکەوە لەخاڵی E یەوە دەرچۆ و چەند خاڵێك دووری نێوانیان یەکسان بێت دیاریبکە خاڵەکان بە F و G و H و J ناوبنێ.
6. $\overline{EF}$ و $\overline{FG}$ و $\overline{GH}$ و $\overline{HJ}$ و $\overline{JE}$ بکێشە پێنجلا ڕێکێکت دەستدەکەوێت کە گۆشەکانیشی یەکسانن. ئەوەش پێنجلا ڕێکە.



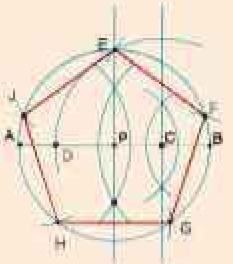
هەنگاوەکان 1 تا 3



هەنگاوی 4



هەنگاوی 5



هەنگاوی 6

هەوڵبدە

6 دەلای ڕێك: چەندلایەکە لە 10 لا و 10 گۆشەی یەکسان پێکدێت بەبەکارهێنانی پێنجلای ڕێك دەلایەکی ڕێك دروستبکە ڕێگاکەت ڕوونبکەوە.

7 پێوانەی هەموو گۆشەکانی ئەو چەندلا ڕێکانە هەژماربکە کە لە چالاکی 1 تا 3 دا دروستت کردوون پاشان ئەم خشتەیە تەواوبکە

چەندلا ڕێکەکان				
ژمارەی لایەکان	3	4	5	6
پێوانەی هەرگۆشەیەك	$60°$			
کۆی پێوانەی گۆشەکان	$180°$			

8 **دەستەواژەیەك بنووسە** ڕێسایەکی گشتی بۆ دۆزینەوەی کۆی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکی ڕێك ژمارەی لایەکانی n بێت.

9 **دەستەواژەیەك بنووسە** ڕێسایەکی گشتی بۆ دۆزینەوەی پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکی ڕێك ژمارەی لایەکانی n بێت.

2-1 چەندلایەکان

Polygons

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

روناکی لەمرچەی ئامێری وێنەگرتنەوە کە کۆمەڵە تیغێکی تێدایە لەهاوێنەکەیەوە دەچێتە ژوورەوە، بەجۆری کەشێوەی چەند لایەك وەردەگرێت (بڕوانە نموونە 5)

ئامانجەکان

- پۆلینکردنی چەندلایەکان بەپێی ژمارەی لایەکان و پێوانەی گۆشەکانی
- دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە و دەرەوەی چەندلایەکان و بەکارهێنانیان

زاراوەکان

Vocabulary

لای چەندلا
Side of a polygon

سەری چەندلا
Vertex of a polygon

تیرە
Diagonal

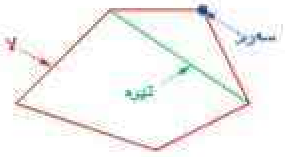
چەندلای رێك
Regular polygon

قۆپاو
Concave

قۆقز
Convex

لەبیرت بێت چەندلا شێوەیەکی ئەندازەیی داخراوە لە رووتەختێکدا، لە 3 پارچە راستەهێڵ یان زیاتر پێکدێت کە دوو پارچەیان لەرێکی یەکتری نەبن، بەجۆری کە هەر پارچە راستەهێڵێك لەگەڵ تەنها دوو پارچەی تردا یەکتر دەبڕن، یەك دانە لەهەریەك لە لایەکان هەر پارچە راستەهێڵێك لەوانە **لایەکی Side** چەندلایەکە. هەرسەرێکی هاوبەش لەنێوان دوولادا **سەرێکی Vertex** چەندلایەکە. ئەو پارچە راستەهێڵەی دووسەری ناهاوسێ لەسەرەکانی چەندلایەك بەیەك دەگەیێنێت **تیرەیە Diagonal**

ژمارەی لا	ناو
3	سێگۆشە
4	چوارلا
5	پێنجلا
6	شەشلا
7	حەوتلا
8	هەشتلا
9	نۆلا
10	دەلا
11	یازدەلا
12	دوازدەلا

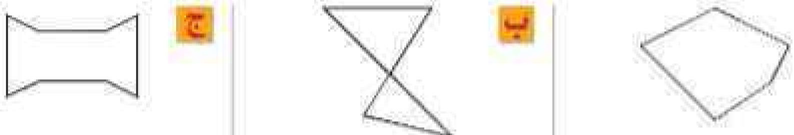


دەتوانین چەندلا بەپێی ژمارەی لایەکانی ناو بنێن. ئەو خشتەیە هەندێك لەو ناوانە روونەدەکاتەوە بۆیە چەندلای $ABCDE$ سەرەوە پێنجلایە.

نموونـــــە 1 جیاکردنەوەی چەندلایەکان

دیاریبکە ئەم شێوانەی خوارەوە چەندلان یان نا ئەگەر چەند لابوو ناوبنێ؟

أ ب ج



أ چەندلایە، پێنجلایە

ب چەندلانییە

ج چەندلایە، هەشتلایە

> **لەبیرت بێت**
>
> چەندلا شێوەیەکی ئەندازەیی داخراوە لە رووتەختدا لەسێ پارچە راستەهێڵ یان زیاتر پێکدێت کە تەنها لە سەرەکانیدا یەکتری دەبڕن.

خاڵی چاودێری

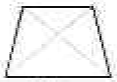
1. دیاریبکە ئەم شێوانە چەندلان یان نا، ئەگەر چەندلابوو ناوبنێ؟

أ ب ج

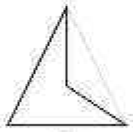
چەندلای رێك Regular polygon چەندلایەکە هەموو لایەکانی (لە درێژیدا یەکسانن) گۆشەکانیشی جووتن (هەمان پێوانەیان هەیە).

چەندلای قۆپاو Concave چەندلایەکە بەلایەنی کەمەوە تیرەیەکی هەیە کە هەندێك لەخاڵەکانی لەدەرەوەی چەندلایەکەدان.

چەندلای قۆقز Convex چەندلایەکە هەموو تیرەکانی لەناوچەندلایەکەدان چەند لای ڕێك هەمیشە قۆقزە.



چەندلای قۆقز

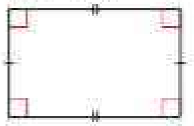


چەندلای قۆپاو

نموونـــــه 2 پۆلینکردنی چەندلایەکان

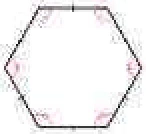
دیاریبکە ئەم چەندلایانە ڕێکن یان نا قۆقزن یان قۆپاون.

أ



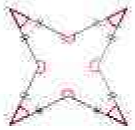
ناڕێکە، قۆقزە

ب



ڕێکە، قۆقزە

ج

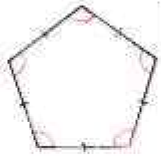


ناڕێکە، قۆپاوە

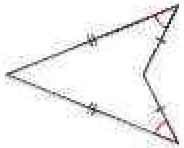
خاڵی چاودێری

2. دیاریبکە ئەم چەندلایانە ڕێکن یان نا، قۆقز یان قۆپاون.

أ



ب



بۆ ئەوەی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکی قۆقز بدۆزیتەوە هەموو تیرەکانی لەسەرێك لەسەرەکانیەوە بکێشە بەمەش ژمارەیەك سێگۆشەت دەستدەکەوێت، کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکە بریتییە لە کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی هەموو سێگۆشەکان.

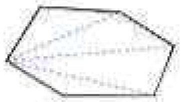
لەبیرت بێت

بەپێی سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی سێگۆشە ئەو سەرجەمە 180 پلەیە

سێگۆشە

چوارلا

پێنجلا



شەشلا

چەندلا	ژمارەی لایەکان	ژمارەی سێگۆشەکان	کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە
سێگۆشە	3	1	$(1)\times 180^\circ = 180^\circ$
چوارلا	4	2	$(2)\times 180^\circ = 360^\circ$
پێنجلا	5	3	$(3)\times 180^\circ = 540^\circ$
شەشلا	6	4	$(4)\times 180^\circ = 720^\circ$
چەندلای n لا	n	$n-2$	$(n-2)\times 180^\circ$

لەهەریەك لەو چەندلایانە دەردەکەوێت ژمارەی ئەو سێگۆشانەی لە کێشانی تیرەکان لەسەرێکی چەندلایەکەوە پەیدادەبێت 2 ی کەمترە لە ژمارەی لایەکان n لەمەشەوە دەردەکەوێت کە کۆی پێوانەی گۆشەکانی سێگۆشەکان بریتییە لە $(n-2)\times 180^\circ$

فێربە

سەلمێنراوی 1-1 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

کۆی پێوانەکانی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلای قۆقز کە n لای هەبێت بریتییە لە $(n-2)\times 180^\circ$

نموونــــــه 3 دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلاو دۆزینەوەی سەرجەمەکانیان

أ کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی هەشتلا بدۆزەوە.

$(n - 2) \times 180°$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

$(8 - 2) \times 180°$ لەجیاتی n بەهاکەی دادەنێین

$1080°$

ب پێوانەی هەریەك لەگۆشەکانی ناوەوەی نۆلایەکی رێك بدۆزەوە.

هەنگاوی 1 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی نۆلارێکەکە بدۆزەوە.

$(n - 2) \times 180°$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

$(9 - 2) \times 180° = 1260°$ لەجیاتی n بەهاکەی دەدەنێین

هەنگاوی 2 پێوانەی یەك گۆشەی ناوەوە بدۆزەوە.

$\frac{1260°}{9} = 140°$ کۆی پێوانەکان دابەشی 9 بکە چونکە هەموو گۆشەکان جووتن.

ج پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی چوارلای بەرامبەر بدۆزەوە.

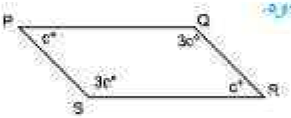
$(4-2) \times 180° = 360°$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

$m\hat{P} + m\hat{Q} + m\hat{R} + m\hat{S} = 360°$ لەجیاتی دابنێ.

$c + 3c + c + 3c = 360$ زاید لەیەکچووەکان کۆبکەوە.

$8c = 360$ هەردوولا دابەشی 8 بکە

$c = 45$



$m\hat{P} = m\hat{R} = 45°$

$m\hat{Q} = m\hat{S} = 3(45°) = 135°$

تێبینی *

مەبەست لە پیتی m لێرەدا بەمانای پێوانە دێت وەك بڵێین:

measure of angle $P = m\hat{P}$

پ جَ = پێوانەی گۆشە ج.

خاڵی جاودێری

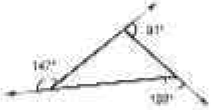
3. **أ** کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی 15 لایەك بدۆزەوە.

ب پێوانەی هەریەك لە گۆشەکانی ناوەوەی دەلایەکی رێك بدۆزەوە.

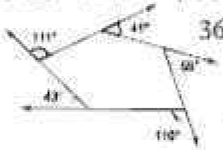
لەبیرت بێت

دەرگۆشەی سێگۆشە ئەو گۆشەیە دەکەوێتە نێوان یەکێك لە لایەکان و درێژکراوەی لا هاوسێیەکەی

هەریەك لە گۆشەکانی دەرەوەی ئەم دوو چەندلایەی خوارەوە پێوراوە. سەرنج بدە کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی هەریەکێکیان $360°$



$147° + 81° + 132° = 360°$



$43° + 111° + 41° + 55° + 110° = 360°$

فێربە

سەلمێنراوی 2-1 کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلا

کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلای قۆقز $360°$یە.

نموونــــــه 4 دۆزینەوەی کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلا و دۆزینەوەی سەرجەمەکانیان

أ پێوانەی هەریەکە لە گۆشەکانی دەرەوەی شەشلایەکی رێك بدۆزەوە.

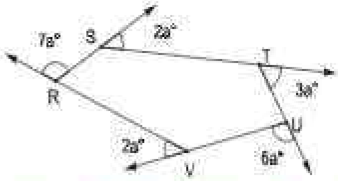
شەشلا 6 لاو 6 سەری هەیە.

کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوە $360°$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلا

پێوانەی هەر گۆشەیەکی دەرەوە $= \frac{360°}{6}$ یان $60°$ دابەشی 6 کراوە چونکە 6 گۆشەی دەرەوەی یەکسانی هەیە.

پێوانەی هەر گۆشەیەکی دەرەوەی شەشلا رێکەکە $60°$

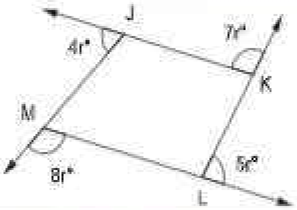
ب بەهای a لە پێنج لای بەرامبەردا بدۆزەوە.



$7a^\circ+2a^\circ+3a^\circ+6a^\circ+2a^\circ=360^\circ$ سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا

$20a=360$ راده لەیەکچووەکان کۆکراوەتەوە

$a=18$ هەردوو لا دابەشی 20 بکە.

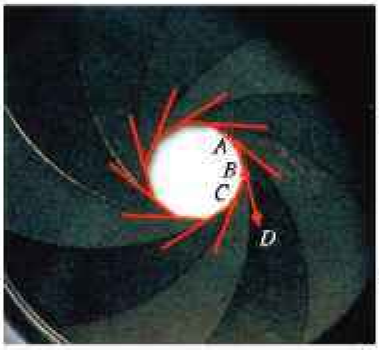


خاڵی چاودێری

4. أ پێوانەی هەریەکە لە گۆشەکانی دەرەوەی دوازدەلایەکی ڕێك چەندە؟

ب بەهای r لەچەندلای بەرامبەردا بدۆزەوە.

نموونە 5 جێبەجێکردن لە وێنەگرتندا



کراوەی ئامێری وێنەگرتن (کامێرا) لە 10 تیغ پێکهاتووە. تیغەکان بەشێوەیەك لەسەریەك دادەنرێت کە دەلایەکی ڕێك پێکبێنێت پیوانەی $\widehat{CBD}$ چەندە؟

$\widehat{CBD}$ گۆشەیەکی دەرەوەی دەلایەکی ڕێکە. کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلای ڕێك 360° بەپێی سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چەندلا کەواتە

$m\ \widehat{CBD}=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$ دەلای ڕێك 10 گۆشەی دەرەوەی یەکسانی هەیە بۆیە 360 دابەشی 10 بکە

خاڵی چاودێری

5. **چی دەبێت ئەگەر** وای دابنێ ژمارەی تیغەکان 8 بێت لەجیاتی 10 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی دەرەوەی چەند دەبێت؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. وێنەی پێنجلایەکی قۆقز و پێنجلایەکی قۆپاوبکە، جیاوازی نێوان هەردوو چەندلاکە ڕوونبکەوە.
2. چ هۆیەك ڕێگرە لە بەکارهێنانی $\frac{360^\circ}{n}$ بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەی دەرەوەی چەندلایەکی ناڕێك.
3. خشتەکەی خوارەوە دروستبکەوە و تەواوی بکە. لەهەر خانەیەك ڕێك بنووسە بۆ دۆزینەوەی بەهای دیاریکراوی چەندلایەك n لای هەبێت.

فێربە

	گۆشەکانی ناوەوە	گۆشەکانی دەرەوە
کۆی پێوانەی گۆشەکان		
پێوانەی هەر گۆشەیەك		

2-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ئایا یەکسانبوونی لایەکان بەسە بۆئەوەی چەندلایەك ڕێك بێت؟وەڵامەکەت ڕوونبکەوە بەنموونەیەك پاڵپشتی وەڵامەکەت بکە.

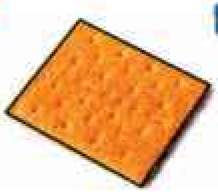
بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە هەر یەك لەم شێوانە چەندلان یان نا. شێوەکە ناوبنێ ئەگەر چەندلابوو.

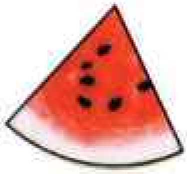
2

3

4



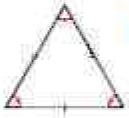
5



بڕوانە نموونە 2

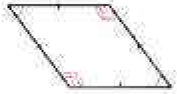
دیاریبکە ئەم چەندلایانە ڕێکن یان نا. قۆپاون یان قۆقزن.

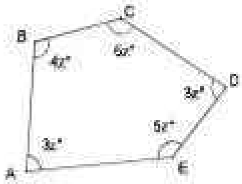
6



7

8



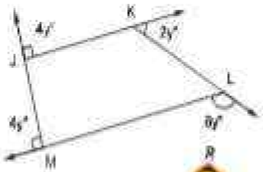


بڕوانە نموونە 3

9 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی پێنجلای بەرامبەر بدۆزەوە.

10 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی دوازدەلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

11 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی 20 لایەکی قۆقز بدۆزەوە.



بڕوانە نموونە 4

12 بەهای y لەچەندلای بەرامبەردا بدۆزەوە.

13 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی دەرەوەی پێنجلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

بڕوانە نموونە 5

بێوەبی بۆ هەمووان تابلۆی ڕێنمایی هاتوچۆی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ شیکاری پرسیاری 14 و 15.

14 ناوی چەندلایەکە بەپێی لایەکانی ناوبنێ.

15 هەریەکە لە پێوانەی $\hat{Q}$ و $\hat{S}$ بدۆزەوە ئەگەر بزانی $\hat{P}$ و $\hat{R}$ و $\hat{T}$ گۆشەی وەستاون و $\hat{Q} \cong \hat{S}$

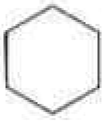
جێبەجێکردنەکان

بۆ شیکاری پرسیارەکان	تەماشای نموونە
18–16	1
21–19	2
24–22	3
26–25	4
28–27	5

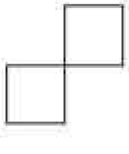
ڕاهێنانی ئازاد

دیاریبکە ئەم شێوە دروستکراوانە چەندلان یان نا. شێوەکە ناوبنێ ئەگەر چەندلابوو.

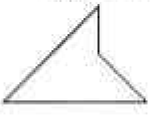
16



17



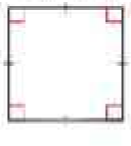
18



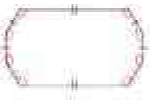
دیاریبکە ئەم چەندلایانە ڕێکن یان نا. قۆپاون یان قۆقزن.

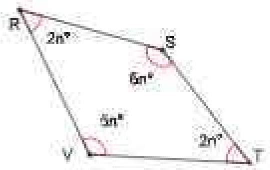
19

20



21





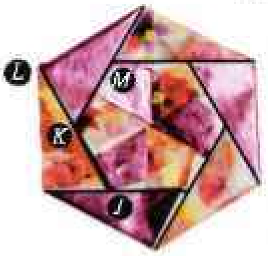
22 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی چەندلای بەرامبەر بدۆزەوە.

23 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی 18 لایەکی ڕێك بدۆزەوە.

24 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی حەوتلایەك بدۆزەوە.

25 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی دەرەوەی نۆلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

26 ئەگەر پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی پێنجلایەك $8a^\circ, 10a^\circ, 4a^\circ, 6a^\circ$ و $2a^\circ$ بێت، ئایا بەهای a چەندە؟



وێنەی بەرامبەر بۆ شیکاری پرسیارەکانی 27 و 28 بەکاربێنە

27 بەهای $m\,\widehat{JKM}$ بدۆزەوە.

28 بەهای $m\,\widehat{MKL}$ بدۆزەوە.

جەبر بەهای x لە هەریەك لەم شێوانەدا بدۆزەوە.

29

30

31

ژمارەی لایەکانی ئەو چەندلاڕێکە بدۆزەوە کە لەگەڵ باسەکەیدا گونجاوبێت.

32 پێوانەی هەرگۆشەیەکی ناوەوەی یەکسانە بەپێوانەی هەرگۆشەیەکی دەرەوەی.

33 پێوانەی هەرگۆشەیەکی ناوەوەی یەکسانە بە چوار ئەوەندەی پێوانەی هەر گۆشەیەکی دەرەوەی.

34 پێوانەی هەرگۆشەیەکی دەرەوەی یەکسانە بە $\frac{1}{8}$ پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوەی.

ناوی ئەو چەندلایە دیاریکە کەکۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی یەکسانە بە

35 540° **36** 900° **37** 1800° **38** 2520°

هەنگاوی جۆراوجۆر ژمارەی لایەکان و پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی ئەو چەندلاڕێکە چەندە؟ ئەگەر بزانیت پێوانەی گۆشەیەکی دەرەوەی یەکسانە بە:

39 120° **40** 72° **41** 36° **42** 24°

43 **هەڵە لە شیکاردا** کام دەرئەنجام هەڵەیە؟ هەڵەکە لەکوێدایە؟

أ) وێنەی بەرامبەر چەندلا دەنوێنێت

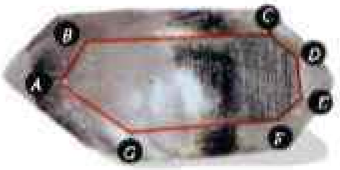
ب) وێنەی بەرامبەر چەندلا نانوێنێت

44 **خەمڵاندن** وێنەی ئەو چەندلایە بکێشە کە خاڵی سەرەکانی بریتیین لە $A(-2, -6)$ و $B(-4, -1)$ و $C(-1, 2)$ و $D(4, 0)$ و $E(3, -5)$ پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی ناوەوەی بخەمڵێنە چی دەربارەی گۆشەکانی ئەم چەندلایە دەڵێیت؟ گۆشە پێو بەکاربێنە بۆ پێوانی ئەم گۆشانە وەڵامەکەی پێشوت پاسادابنێکە.

45 ئەمانەی خوارەوە هەندێك پێدراون لەسەر پێوانەی گۆشەکانی ئەو پارچە کوارتزەی بەرامبەر

$m\,\hat{A} = 95^\circ$ ، $m\,\hat{B} = 125^\circ$ ، $m\,\hat{E} = m\,\hat{D} = 130^\circ$

$m\,\hat{C} = m\,\hat{D} = m\,\hat{G}$



أ) چەندلای $ABCDEFG$ ناوبنێ.

ب) کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکە چەندە؟

ج) $m\hat{F}$ بدۆزەوە.

46 ئەو چەندلارێکە ناوبنێ کە چێوەکەی 45 m و ـرێژی لایەک لە لایەکانی 7.5 m بێت.

وێنەی ئەمانە بکێشە

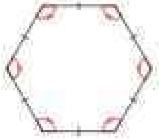
47 چوارلایەکی ڕێك

48 حەوتلایەکی قۆپاوی ناڕێك.

49 پێنجلایەکی قۆقزی ناڕێك

50 چەندلایەك لایەکانی یەکسان و گۆشەکانی جووتنین.

51 **بنووسە** زاراوەکانی وانەکە بەکاربێنە بۆ ناونانی چەندلای بەرامبەر کەهەموو سیفەتەکانی گرتبێتە بەر.



52 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بەزیادبوونی ژمارەی لایەکانی چەندلایەکی ڕێك چەندلایەکە لەکام شێوەی ئەندازەیی نزیکدەبێتەوە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

53 شێوەی بەرامبەر کام لەم سیفەتانە دەگرێتە خۆ

I چوارلا II قۆپاو III ڕێك

(أ) تەنها I (ب) تەنها II (ج) I و II (د) I و III

54 16 لای ڕێك کام یەکێك لەم سیفەتانەی تێدا نییە.

(أ) چەندلایەکی قۆقزە

(ب) هەموو لایەکانی جووتن

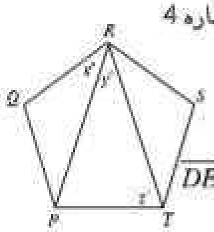
(ج) کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی 2 880°

(د) کۆی گۆشەکانی دەرەوەی 360°

55 لە چوارلای $ABCD$ دا $m\hat{C}$ چەندە؟ ئەگەر بزانیت $m\hat{A}=45°$ و $m\hat{B}=111°$ و $m\hat{C}=2m\hat{D}$

(أ) 24° (ب) 68° (ج) 102° (د) 136°

بەرەنگاری و فراوانکردن



56 پێوانە گۆشەکانی ناوەوەی پێنجلایەکی قۆقز چەندجارە یەکبەدوای یەکەکانی ژمارە 4 بێکدێنێت پێوانە گۆشەکانی پێنجلایەکە بدۆزەوە.

57 بەهای x و y و z لەو پێنجلارێکەی بەرامبەر بدۆزەوە.

58 **هەنگاوی جۆراوجۆر** چەندلای $ABCDEFGHJK$ دەلایەکی ڕێکە دوولای $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ درێژکرانەوە تا لە L دا و لەدەرەوەی چەندلایەکە پێکگەیشتن. $m\widehat{BLD}$ بدۆزەوە.

59 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا سەلمێنراوی کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا ڕاستە لەچەندلای قۆپاودا؟ بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت وێنەی شێوەیەك بکێشە.

پێداچوونەوەی لولپێچی

بەبەکارهێنانی شیتەڵ هەریەك لەم هاوکێشانە شیکاربکە (پۆلەکانی پێشوو)

60 $x^2+3x-10=0$ **61** $x^2-x-12=0$ **62** $x^2-12x=-35$

لە پرسیارەکانی 63 تا 65 دوولای سێگۆشەیەك دراوە، پێویستە لەسەرت دوو ڕادە بدۆزیتەوە درێژی لای سێیەم x یان لەنێواندا بێت (پۆلەکانی پێشوو)

63 4، 4 **64** 12، 6 **65** 7، 3

لەسێگۆشەی گۆشەوەستاوی 90 – 60 – 30 ئەمانە بدۆزەوە (پۆلەکانی پێشوو)

66 درێژی ژێیەکە، ئەگەر درێژی لا بچووکەکە 6 یەکەبێت.

67 درێژی لا گەورەکە، ئەگەر درێژی ژێیەکە 10 یەکە بێت.

3-1 هاوڕێژەی ئەندازەیی
Dilation

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

پرۆگرامسازی کۆمپیوتەر، پۆوتانەکان بۆ گەورەکردن و بچووککردنەوە بەکاردێنێت.

ئامانجەکان

- جێبەجێکردنی سیفەتەکانی هاوشێوەبوون لە ڕووتەختی پۆوتاندا
- سەلماندنی هاوشێوەبوونی دوشێوەی ئەندازەیی بەبەکارهێنانی پۆوتانەکان.

زاراوەکان
Vocabulary

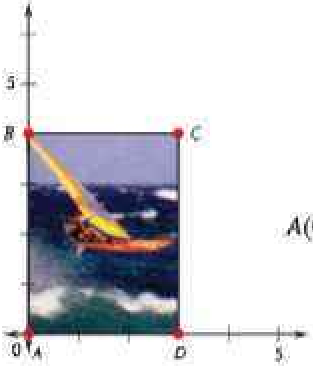
هاوڕێژەی ئەندازەیی
Dilation

ڕێژەی جێگۆڕکێ
Scale factor

زۆر لەو وێنانەی لەسەر تۆڕی ئەنتەرنێت دەبینرێن پشت بە شێوەی JPEG (format) دەبەسترێت چونکە گۆڕین وگواستنەوەی وێنەکان ئاسانەکات کاتێك بە ماوسەکە گۆشەیەکی وێنەکە رادەکێشێت لەشێوەی JPEG بە مەبەستی گەورەکردن یان بچووکردنەوەی بەرنامەکە، پێوانەکانی ئەو وێنەیەی دەستکەوتووە بە بەکارهێنانی پۆوتانەکان و هاوشێوەبوون ڕێکدەخات. **هاوڕێژەی ئەندازەیی Dilation**: جێگۆڕکێیەکی ئەندازەییە پێوانەکانی شێوە ئەندازەییەکە دەگۆڕێت لەگەڵ پارێزگاریکردنی شێوەکەی بنەڕەت و وێنەکەی لەم جێگۆڕکێیەدا دوو شێوەی هاوشێوەن ڕێژەی ئەم **جێگۆڕکێ ئەندازەییە Scale factor** ژمارەیەکی راستی موجەبە $k \neq 1$ رادەی گەورەکردن یان بچووکردنەوەی وێنەکە لەچاو بنچینەکەیدا نیشاندەدات. وێنەی خاڵی (x, y) بەهاوڕێژەی ئەندازەیی ڕێژەکەی k بێت بریتییە لە (kx, ky) ، ئەگەر $k > 1$ هاوڕێژە ئەندازەییەکە **گەورەکردن** و ئەگەر $k < 1$ ئەوا هاوڕێژە ئەندازەییەکە **بچووکردنەوە** دەبێت.

نموونـــــە 1

جێبەجێکردن لەسەر پرۆگرامسازی کۆمپیوتەر



وێنەی بەرامبەر شوێنی وێنەکە لەشێوازی JPEG دا ڕووندەکاتەوە سنووری وێنەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی وێنە بنچینەییەکە گەورەکراوە بەڕێژەی $\frac{3}{2}$ بکێشە.

هەنگاوی 1 پۆوتانی هەر سەرێك لەسەرە بنچینەییەکانی $A(0, 0)$ ، $B(0, 4)$ ، $C(3, 4)$ ، $D(3, 0)$ ، لێکدانی $\frac{3}{2}$ بکە.

لاکێشەی	لاکێشەی
$ABCD$	$A'B'C'D'$

$$A(0, 0) \rightarrow A'\left(0 \times \frac{3}{2}, 0 \times \frac{3}{2}\right) \rightarrow A'(0, 0)$$

$$B(0, 4) \rightarrow B'\left(0 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}\right) \rightarrow B'(0, 6)$$

$$C(3, 4) \rightarrow C'\left(3 \times \frac{3}{2}, 4 \times \frac{3}{2}\right) \rightarrow C'\left(\frac{9}{2}, 6\right)$$

$$D(3, 0) \rightarrow D'\left(3 \times \frac{3}{2}, 0 \times \frac{3}{2}\right) \rightarrow D'\left(\frac{9}{2}, 0\right)$$

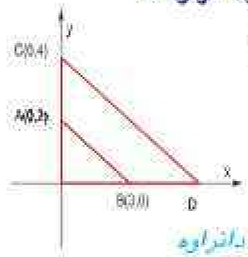
هەنگاوی 2 خاڵەکانی $A'(0, 0)$ ، $B'(0, 6)$ ، $C'(\frac{9}{2}, 6)$ ، $D'(\frac{9}{2}, 0)$ دیاریبکە پاشان وێنەی لاکێشەکە بکێشە.

خاڵی چاودێری

1. **چی دەبێت ئەگەر** سنووری وێنەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی وێنە بنچینەییەکە بە بچووکردنەوەیەك ڕێژەکەی $\frac{1}{2}$ بێت بکێشە.

نموونــــــه 2

دۆزینەوەی پۆوتانی شێوەیەکی ئەندازەیی هاوشێوەی شێوە دراوەکە



پۆوتانی خاڵی D وڕێژەی ئەو هاوڕێژە ئەندازەییەی جێگۆڕکێ بەخاڵی B بۆ خاڵی D دەکات و جۆرەکەشی بدۆزەوە ئەگەر بزانیت کە هەردوو سێگۆشەی AOB و COD هاوشێوەن.

لەبەرئەوەی دوو سێگۆشەکە هاوشێوەن واتە $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$

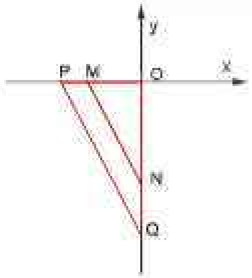
$\frac{2}{4}=\frac{3}{OD}$ بەهای هەر پێوانەیەك دانراوە

$2OD=12$ لێکدانی دوولاو دوو تێوان کراوە

$OD=6$ هەردوولا دابەشی دوو کراوە.

لەبەرئەوەی D لەسەر تەوەری xە، بۆیە y سفرە. و لەبەرئەوەی $OD=6$ ئەوا پۆی یەکەم یەکسانە بە 6 واتە $x=6$. کەواتە پۆوتانی D بریتییە لە $(6, 0)$. لەبەرئەوەی $(6, 0)=(3\times2, 0\times2)$ ئەوا ڕێژەی جێگۆڕکێیەکە بریتییە لە 2 گەورەکردن.

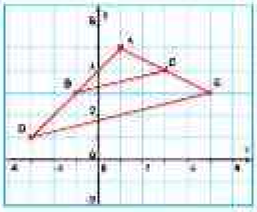
خاڵی چاوەدێری



2. دوو سێگۆشەی MON و POQ هاوشێوەن کاتێك $M(-10, 0)$ و$P(-15, 0)$ و $Q(0, -30)$ بێت.
پۆوتانی N و ڕێژە هاوڕێژەییەکەی بدۆزەوە پاشان جۆرەکەی دیاریبکە.

نموونــــــه 3

سەلماندنی هاوشێوەبوونی دوو سێگۆشە بەهۆی پۆوتانەوە.



دراو: $A(1, 5)$ ، $B(-1, 3)$ ، $C(3, 4)$ ، $D(-3, 1)$ ، $E(5, 3)$

داواکراو: بیسەلمێنە هەردوو سێگۆشەی ABC و ADE هاوشێوەن.

هەنگاوی 1: خاڵەکان دیاریبکە پاشان وێنەی دوو سێگۆشەکە بکێشە.

هەنگاوی 2: یاسای دووری بۆ هەژمارکردنی درێژی لایەکان بەکاربێنە.

$$AB=\sqrt{(-1-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(3-1)^2+(4-5)^2}=\sqrt{5}$$

$$AD=\sqrt{(-3-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$AE=\sqrt{(5-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

هەنگاوی 3: ڕێژەی هاوشێوەبوون بدۆزەوە.

$$\frac{AB}{AD}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{AC}{AE}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$$

لەبەرئەوەی $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$ و لەبەرئەوەی $\widehat{BAC}\cong\widehat{DAE}$ کەواتە دووسێگۆشەکە هاوشێوەن.

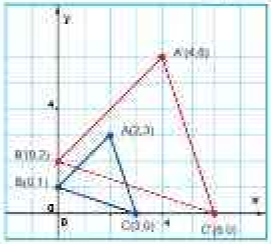
خاڵی چاوەدێری

3. دراو: $R(-2, 0)$ و $S(-3, 1)$ و$T(0, 1)$ و $U(-5, 3)$ و $V(4, 3)$.
داواکراو: بیسەلمێنە هەردوو سێگۆشەی RST و RUV هاوشێوەن.

نموونــــــه 4 بەکارهێنانی سیّ لا (لا، لا، لا) بۆ هاوشێوەبوونی سێگۆشەکان

سێگۆشەی ABC وێنەکەی $A'B'C'$ بەگەورەکردنێك ڕێژەکەی **2** بێت بکێشە،
پاسادانی هاوشێوەبوونی دوو سێگۆشەکە بکە.

هەنگاوی 1: بۆ دۆزینەوەی پۆوتانی سێگۆشەی $A'B'C'$ پۆوتانی هەر خاڵێك لێکدانی 2 بکە.



$$A(2,3) \to A'(2\times2, 3\times2) \to A'(4,6)$$
$$B(0,1) \to B'(0\times2, 1\times2) \to B'(0,2)$$
$$C(3,0) \to C'(3\times2, 0\times2) \to C'(6,0)$$

هەنگاوی 2: وێنەی سێگۆشەی $A'B'C'$ بکێشە.

هەنگاوی 3: یاسای دووری بۆ هەژمارکردنی درێژی لایەکان بەکاربێنە.

$$AB = \sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \qquad A'B' = \sqrt{(4-0)^2+(6-2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(3-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{10} \qquad B'C' = \sqrt{(6-0)^2+(0-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2+(0-3)^2} = \sqrt{10} \qquad A'C' = \sqrt{(6-4)^2+(0-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

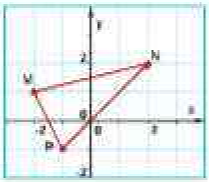
هەنگاوی 4: ڕێژەی هاوشێوەبوون بدۆزەوە.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2 \qquad \frac{B'C'}{BC} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 2 \qquad \frac{A'C'}{AC} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 2$$

لەبەرئەوەی $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$ مانای دوو سێگۆشەی $A'B'C'$ و ABC هاوشێوەن.

خاڵی جاودێری

4. وێنەی سێگۆشەی MNP بە گەورەکردنێك ڕێژەکەی 3 بێت بکێشە ساغبکەوە سێگۆشەکە و وێنە گەورەکراوەکەی هاوشێوەن.



بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. پۆوتانی سەرەکانی سێگۆشەی JKL بریتیین لە $J(0,0)$ و $K(0,2)$ و $L(3,0)$ پۆوتانی سەرەکانی وێنەی ئەم سێگۆشەیە بەهاوڕێژەی ئەندازەیی بریتیین لە $J'(0,0)$ و $K'(0,8)$ و $L'(12,0)$ چۆن هاوڕێژەی ئەندازەیی دەدۆزیتەوە؟ چۆن جۆرەکەی دیاریدەکەیت؟
2. ڕێکخەریە: خشتەکەی خوارەوە بنووسە و تەواوی بکە، لەهەر چوارچێوەیەکدا ئەوەی داواکراوە بینووسە.

فێربە

پێناســــە	سیفەت
گەورەکردن و بچووککردنەوە	
نموونــــە	دژە نموونــــە

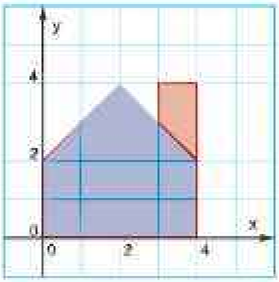
3-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ڕێژەی پێوانەکانی وێنەی شێوەیەکی ئەندازەیی بە گەورەکردن یان بچووکردنەوە بریتییە لە ___?___ (هاوڕێژەی ئەندازەیی، ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی).

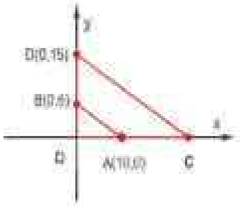
نموونە 1

2 **ئەخشەکێشانی ڕوونکردنەوەیی Graphic Design** یەکێك لە ئەندازیارەکان شێوەی بەرامبەری ئەخشەکێشا بۆ ئەوەی ببێتە دروشمی یەکێك لەدامەزراوەکان. بەڕێوەبەری دامەزراوەکە داوای لەئەندازیارەکە کرد ئەو دروشمە بەڕێژەی 2 گەورە بکات. وێنەی دروشمەکە دوای گەورەکردن بکێشە.

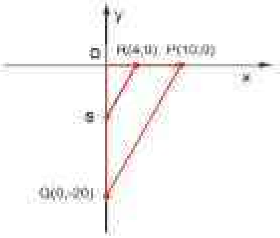


نموونە 2

3 دوو سێگۆشەی AOB و COD هاوشێوەن پۆوتانی C و ئەو ڕێژە هاوڕێژە ئەندازەییە بدۆزەوە کە سێگۆشەی AOB بۆ سێگۆشەی COD جێگۆڕکێ پێدەکات جۆری هاوڕێژە ئەندازەییەکە چییە؟



4 هەردوو سێگۆشەی ROS و POQ هاوشێوەن پۆوتانی S و ئەو ڕێژە هاوڕێژە ئەندازەییە بدۆزەوە کە سێگۆشەی POQ بۆ سێگۆشەی ROS جێگۆڕکێ پێدەکات جۆری هاوڕێژە ئەندازەییەکە چییە؟



نموونە 3

5 دراو: $A(0, 0)$ و $B(-1, 1)$ و $C(3, 2)$ و $D(-2, 2)$ و $E(6, 4)$.

داواکراو: بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی ABC و ADE هاوشێوەن.

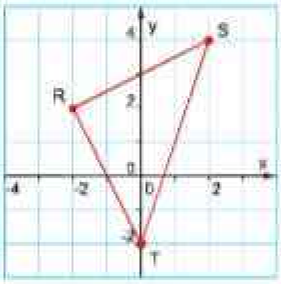
6 دراو: $J(-1, 0)$ و $K(-3, -4)$ و $L(3, -2)$ و $M(-4, -6)$ و $N(5, -3)$

داواکراو: بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی JKL و JMN هاوشێوەن.

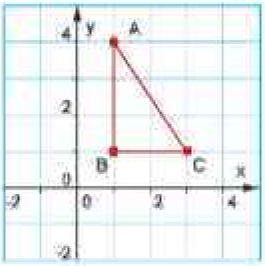
نموونە 4

هەنگاوی جۆراوجۆر وێنەی هەریەکە لەسێگۆشەکان بە گەورەکردنێك کە ڕێژەکەی دراوە بکێشە و پاشان پاسادانیکە لەوەی سێگۆشە بنچینەییەکە و وێنەکەی هاوشێوەن.

7 بەڕێژەی $\frac{3}{2}$



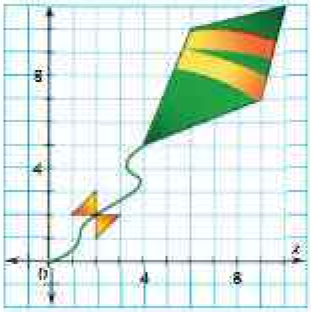
8 بەڕێژەی 2



ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

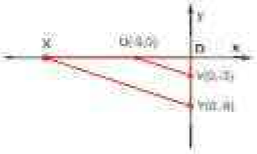
شیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە
10	1
12-11	2
14-13	3
16-15	4

(ڕاهێنانی ئازاد)

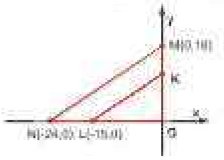


9 **ڕیکلامەکان** بریکارێکی بڵاوکردنەوەی ڕێکلام وێنەی بەرامبەری بۆ دروشمی مانگی کرین و فرۆشتن دروستکرد بریکارەکە دەیەوێت دروشمەکە بچووک بکاتەوە بەڕێژەی نیوە تا لەسەر کارت چاپی بکات. وێنەی دروشمەکە پاش بچووکردنەوە بکێشە.

10 دوو سێگۆشەی UOV و XOY هاوشێوەن پۆوتانی X و ئەو ڕێژە ئەندازەییە بدۆزەوە کە سێگۆشەی UOV بۆ سێگۆشەی XOY جێگۆڕکێ پێدەکات جۆری هاوڕێژە ئەندازەییەکە دیاریبکە.



11 دوو سێگۆشەی MON و KOL هاوشێوەن پۆوتانی K و ئەو ڕێژە هاوڕێژە ئەندازەییە بدۆزەوە کە سێگۆشەی MON بۆ سێگۆشەی KOL جێگۆڕکێ پێدەکات جۆری هاوڕێژە ئەندازەییەکە دیاریبکە.



12 دراو: $D(-1, 3)$ و $E(-3, -1)$ و $F(3, -1)$ و $G(-4, -3)$ و $H(5, -3)$
داواکراو: بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی DEF و DGH هاوشێوەن.

13 دراو: $M(0, 10)$ و $N(5, 0)$ و $P(15, 15)$ و $Q(10, -10)$ و $R(30, 20)$
داواکراو: بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی MNP و MQR هاوشێوەن.

هەنگاوی جۆراوجۆر وێنەی هەریەکە لە سێگۆشەکان دوای جێگۆڕکێ پێکردنیان بکێشە بە گەورەکردنێک یان بچووکردنێک بەڕێژەی k . پاشان پاساداییکە لەوەی سێگۆشە بنچینەییەکە وێنەکەی هاوشێوەن.

14 $J(-2, 0)$ ، $K(-1, -1)$ ، $L(-3, -2)$ ؛ $k = 3$.

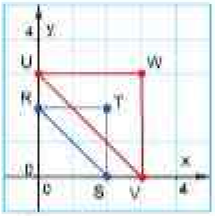
15 $M(0, 4)$ ، $N(4, 2)$ ، $P(2, -2)$ ؛ $k = \frac{1}{2}$.

16 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگر** ئایا ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییەی خاڵی (x, y) بۆ خاڵی $(2x, 4y)$ جێگۆڕکێ پێدەکات، هاوڕێژەیەکی ئەندازەییە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

17 **هەڵە لە شیکردنەوەدا** لە خوارەوە دوو شیکار بۆ دۆزینەوەی ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیی کە سێگۆشەی RST بۆ سێگۆشەی UVW جێگۆڕکێ پێدەکات کامیان هەڵەیە؟ وەڵامەکەت ڕوون بکەوە

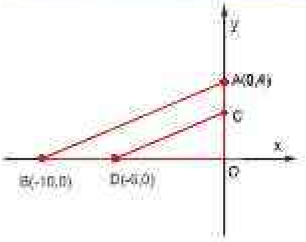
أ
بۆ جێگۆڕکێ پێکردنی سێگۆشەی RST بۆ سێگۆشەی WVU پۆوتانی هەر خاڵێک لە $\frac{3}{2}$ دراوە
ڕێژەی هاوڕێژە ئەندازەییەکە $= \frac{3}{2}$

ب
ڕێژەی هاوڕێژە ئەندازەییەکە بریتییەلە ڕێژەی نێوان لایەکانی سێگۆشەکە لەبەرئەوەی $\frac{RT}{UW} = \frac{3}{2}$ واتە ڕێژەکە $\frac{2}{3}$



18 **بنووسە** سێگۆشەی $A'B'C'$ وێنەی سێگۆشەی ABC بەهاوڕێژەیەکی ئەندازەیی، پەیوەندی لە نێوان ڕێژەی هاوڕێژە ئەندازەییەکە و ڕێژەی هاوشێوە بوونەکە لە نێوان دوو سێگۆشەکەدا چییە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

19 پۆوتانی J و L چییە، ئەگەر وادانا کە هەریەک یەکە لەسەر دوو تەوەری پۆوتانەکان $60\ cm$ بێت وێنەی سێگۆشەکە و گەورەکردنەکەی لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بە ڕێژەی 3 بکێشە.



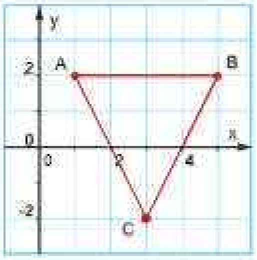
20 کام پۆوتان بۆ خاڵی C هەڵدەبژێری تا هەردوو سێگۆشەی COD و AOB هاوشێوەبن.

ⓐ $(0, 2.4)$ ⓙ $(0, 3)$

ⓑ $(0, 2.5)$ ⓓ $(0, 3.6)$

21 سێگۆشەی $A'B'C'$ گەورەکراوی سێگۆشەی ABC بەڕێژەی 2. ئەگەر چێوەی ABC 60 یەکە بێت ئایا چێوەی $A'B'C'$ چەندە؟

ⓐ 30 یەکە ⓑ 60 یەکە ⓙ 120 یەکە ⓓ 240 یەکە



22 کام سێگۆشەی DEF هاوشێوەی سێگۆشەی ABC دەبێت.

ⓐ $F(2, 0)$ ، $E(3, 2)$ ، $D(1, 2)$

ⓑ $F(1, -5)$ ، $E(2, -2)$ ، $D(-1, -2)$

ⓙ $F(3, 0)$ ، $E(5, 2)$ ، $D(1, 2)$

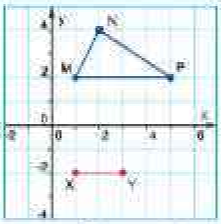
ⓓ $F(-1, 0)$ ، $E(0, 2)$ ، $D(-2, -2)$

23 **کورتە وەڵام** $\overline{AB}$ بەڕێژەی 3 گەورەکرا کاتێك $A(3, 2)$ و $B(7, 5)$ بێت درێژی $\overline{A'B'}$ چەندە؟

بەرەنگاری و فراوانکردن

24 چەند سێگۆشە یەکێك لەلایەکانی $\overline{XY}$ بێت هاوشێوەی سێگۆشەی MNP دەبن؟

25 پۆوتانی Z بدۆزەوە کاتێك سێگۆشەی XYZ هاوشێوەی سێگۆشەی MPN بێت.

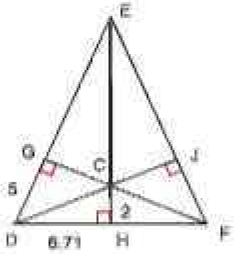


26 دولای لاکێشەیەك لەسەر تەوەری پۆوتانەکانە، ئەگەر یەکێك لەسەرەکانی بکەوێتە سەر خاڵی بنەڕەت و سەرەکەی تری بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y = 2x$ بیسەلمێنە هەردوو لاکێشەکە مەرجەکانی پێشوو پاسادان دەکەن هاوشێوەدەبن.

27 سەرەکانی سێگۆشەی ABC بریتیین لە $A(0, 1)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, 3)$ دوو شوێن بۆ سەری F بدۆزەوە ئەگەر $D(1, -1)$ و $E(7, -1)$ بن بۆ ئەوەی دوو سێگۆشەکە هاوشێوەبن.

پێداچوونەوەی لولپێچی

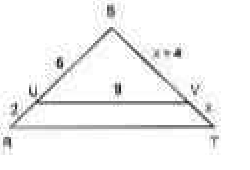
لاسەنگەیەك بۆ نواندنی بارەکە بنووسە (پۆلەکانی پێشوو)



28 بەرزکەرەوەیەك (کرێن) بەلایەنی کەمەوە 250kg هەڵدەگرێت. دووتەن کێشی هەریەکەیان 50kg بە هەردوو لای تولێکەوە کە بارستاییەکەی 5kg جێگیرکرا هێمای گۆڕاوی x بۆ ئەو بارستاییە دابنێ کە بۆ تولەکە زیادکرا لاسەنگەیەك بنوسە x پاسادانی بکات.

درێژی هەر پارچە ڕاستەهێڵێك بدۆزەوە ئەگەر بزانی $\overline{DE} \cong \overline{FE}$

29 $\overline{HF}$ **30** $\overline{JF}$ **31** $\overline{CD}$



درێژی هەر پارچە ڕاستەهێڵێك بدۆزەوە ئەگەر بزانی دوو سێگۆشەی RST و USV هاوشێوەبن.

32 $\overline{RT}$ **33** $\overline{VT}$ **34** $\overline{ST}$

4-1 ئاڕاستەبڕەکان

Vectors

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەوانەی پێشبڕکێی بەلەمەکانیان لە ڕووبارەکاندا کردۆتە پیشەی خۆیان، ئاڕاستەبڕەکان بەکاردێنن بۆ ئەوەی ئاڕاستەی ڕێڕەوی ئاو لەبەر چاوبگرێ کاتێك پێشبڕکێیەکە ئەنجام دەدەن. (نموونە ٥)

ئامانجەکان

- دۆزینەوەی درێژی ئاڕاستەبڕ و ئاڕاستەی ئاڕاستەبڕەکان و کۆکردنەوەیان بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە بەکاردێن.

زاراوەکان Vocabulary

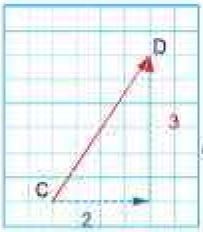
ئاڕاستەبڕ Vector

پێکنەری ئاڕاستەبڕ Component

درێژی ئاڕاستەبڕ Magnitude

ئاڕاستەی ئاڕاستەبڕ Direction

دەتوانیت ئاڕاستەبڕەکان بۆ نواندنی خێرایی و ئاڕاستەی جوڵەی تەنێکی جوڵاو بەکاربهێنێت **ئاڕاستەبڕ Vector** بڕێکە بە درێژی و ئاڕاستە دیاری دەکرێت دەتوانی ئاڕاستەبڕێك بەپارچە ڕاستەهێڵێکی ئاڕاستەکراو وێنە بکەی بۆ ناونانی ئاڕاستەبڕی خوارەوە $\overrightarrow{AB}$ یان $\vec{u}$ بنووسە

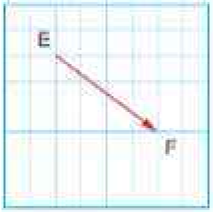


هەروەها دەتوانیت ئاڕاستەبڕ بە بەکارهێنانی دوو پێکنەرەکەی ناوبنێی **دوپێکنەری ئاڕاستەبڕەکە Components** دوو ژمارەن یەکەمیان لەمەودای **جوولەی ئاسۆیی** و دووەمیان لەمەودای **جوڵەی ستونیدایە** هەردووکیان پێویستە لەخاڵی سەرەتای ئاڕاستەبڕەکەوە بۆ خاڵی کۆتایی بچن بەو شێوەیەی کە پێکنەری یەکەمی x و پێکنەری دووەمی y بێت و بە $\langle x, y\rangle$ دەنوسرێت بۆ نموونە دەنووسرێت $\langle 2, 3\rangle$ کە ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{CD}$ دەگەیێنێت.

نموونە 1 نووسینی ئاڕاستەبڕ بە دوو پێکنەرەکانی

هەریەکە لەم ئاڕاستەبڕانە بە دوو پێکنەرەکەی بنووسە.

أ ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{EF}$



بۆ گواستنەوەی لە خاڵی Eەوە بۆ خاڵی F، 4 یەکە بۆ لای ڕاست و 3 یەکە بۆ خوارەوە بجوڵێت، پێکنەری یەکەم 4+ و پێکنەری دووەم 3− دەبێت، کەواتە ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{EF}$ بریتییە لە ئاڕاستەبڕی $\langle 4, -3\rangle$

ب ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{PQ}$ کاتێك $P(7, -5)$ و $Q(4, 3)$

$\overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1\rangle$ پۆتانی خاڵی سەرەتا لە پۆتانی خاڵی کۆتایی

$\overrightarrow{PQ} = \langle 4-7 , 3-(-5)\rangle$ دەربکە لەجیاتی هەر پۆتانێك بەهاکەی دابنێ

$\overrightarrow{PQ} = \langle -3 , 8\rangle$ سادەبکە

خاڵی چاودێری

1. هەر ئاڕاستەبڕێك بەدوو پێکنەرەکەی بنووسە.

أ $\vec{u}$

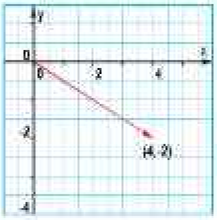
ب $\overrightarrow{AB}$ کاتێك $A(-1, 1)$ ، $B(6, 2)$

دریژی ئاراستەبڕ **Magnitude** بریتییە لەو دوورییەی دەکەوێتە نێوان خاڵی سەرەتاو خاڵی کۆتایی ئەم ژمارەیە لەئاراستەبڕدا بەشێوەی $|\overrightarrow{AB}|$ یان $|\vec{v}|$ دەنوسرێت.

کاتێك ئاراستەبڕ بۆ نواندنی خێرایی شتێکی جوڵاو بەئاراستەیەکی دیاریکراو بەکاردێت، ئەوا دریژی ئاراستەبڕەکە یەکسانە بەخێرایی تەنەجوڵاوەکە بەمەش دریژی ئەو ئاراستەبڕەی جوڵەی بەلەمی رووبارەکە دەنوێنێت بریتییە لە خێرایی بەلەمەکە.

نموونـــــه 2 دۆزینەوەی دریژی ئاراستەبڕ

وێنەی ئاراستەبڕی$\langle 4, -2\rangle$لە رووتەختی پۆوتاندا بکێشە درێژییەکەی هەژماربکە و وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.



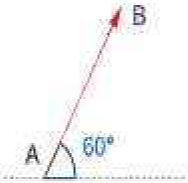
هەنگاوی 1: وێنەی ئاراستەبڕەکە بەبەکارهێنانی خاڵی بنەڕەت وەك خاڵی سەرەتا بکێشە خاڵی کۆتایی بریتییە لە$(4, -2)$

هەنگاوی 2: دریژ ئاراستەبڕەکە بەبەکارهێنانی یاسای دووری هەژماربکە

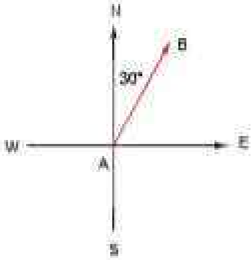
$$|\langle 4, -2\rangle| = \sqrt{(4-0)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{20} \approx 4.5$$

خاڵی جاودێری

2. وێنەی ئاراستەبڕی$\langle -3, 1\rangle$ لە رووتەختی پۆوتاندا بکێشە درێژییەکەی هەژماربکە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.



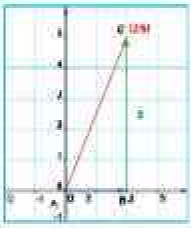
ئاراستەی ئاراستەبڕ **Direction** ئەو گۆشەیە کە لەگەڵ ڕاستەهێڵی ئاسۆدا دروستی دەکات و ئەو گۆشەیە بە ئاراستەی پێچەوانەی میلی کاتژمێر دەپێورێت کە لەبەشی موجەبی تەوەرەی یەکەمەوە دەرچوو بێت.



هەروەها دەگونجێت ئاراستەی ئاراستەبڕ بە دیاریکردنی ئەو گۆشەیەی لەگەڵ یەکێك لە چوار ئاراستەکان خۆرهەلات، خۆرئاوا، باکوور، باشووردا پێکدێت دیاری بکرێت ئاراستەی ئاراستەبڕی بەرامبەر $\overrightarrow{AB}$ بریتییە لە باکوور $-30°-$ خۆرهەلات.

نموونـــــه 3 دۆزینەوەی ئاراستەی ئاراستەبڕ

ئاراستەبڕی$\langle 2, 5\rangle$ ئاراستەی باو خێراییەکەی دەنوێنێت. وێنەی ئاراستەبڕەکە لەرووتەختی پۆوتانەکاندا بکێشە، ئاراستەکەی بدۆزەوە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.



هەنگاوی 1: وێنەی ئاراستەبڕەکە لە رووتەختی پۆوتانەکاندا بەدیاریکردنی خاڵی بنەڕەت وەك خاڵی سەرەتا بکێشە خاڵی کۆتایی خاڵی$(2, 5)$ دەبێت.

هەنگاوی 2: ئاراستەکە بدۆزەوە سێگۆشە وەستاوی ABC بکێشە ئەو گۆشەیەی ئاراستەبڕەکە لەگەڵ بەشی موجەبی تەوەرەی یەکەم دروستی دەکات بریتییە لە $\hat{A}$

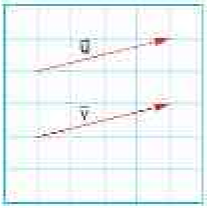
$\tan \hat{A} = \frac{5}{2}$ لەمەوە دەردەچێت کە $m\hat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \approx 60°$

خاڵی جاودێری

3. ئاراستەبڕی$\langle 3, 7\rangle$ هێزی ڕاکێشانی ڕاکێشەرێکی دەریاییە، کە کەشتی بارهەڵگری خراپ بووی پێ ڕادەکێشرێت دەنوێنێت وێنەی ئاراستەبڕەکە لە رووتەختی پۆوتانەکاندا بکێشە ئاراستەکەی بەنزیککراوەیی بۆ نزیکترین پلە بدۆزەوە.

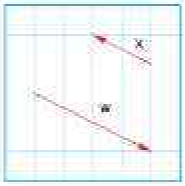
ئاگاداربە!

سەرنج بدە $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ چونکە ئاراستەی یەکەم لە ئاراستەی دووەم جیاوزە.



دوو ئاڕاستەبڕ **یەکسان** دەبن ئەگەر هەمان درێژی و هەمان ئاڕاستەیان هەبێت بۆ نموونە $\vec{u}=\vec{v}$ بۆ دوو ئاڕاستەبڕی یەکسان پێویست نییە کە هەمان خاڵی سەرەتاو خاڵی کۆتاییان هەبێت.

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2\sqrt{5}$$



دوو ئاڕاستەبڕ **تەریب** دەبن ئەگەر ڕاستەهێڵەکانیان بەیەکتری تەریب بن، ئەگونجێ دووئاڕاستەبڕی تەریب لەدرێژیدا جیاوازبن بۆ نموونە: دوو ئاڕاستەبڕی $\vec{x}$ و $\vec{w}$ تەریبن

ئەگەر دوو ئاڕاستەبڕ یەکسان بن بەیەکتری تەریب دەبن.

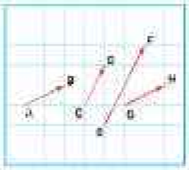
$$|\vec{w}| = 2\sqrt{5}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{5}$$

نموونە 4

جیاکردنەوەی ئاڕاستەبڕە یەکسانەکان و ئاڕاستەبڕە تەرەیبەکان

لەوێنەی بەرامبەردا ئەمانە جیابکەوە.



أ ئاڕاستەبڕە یەکسانەکان

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GH}$

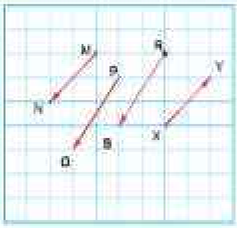
ئەو ئاڕاستەبڕانەی هەمان درێژی و هەمان ئاڕاستەیان هەیە جیایان بکەوە.

ب ئاڕاستەبڕە تەریبەکان

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{EF}$

ئەو ئاڕاستەبڕانەی هەمان ئاڕاستەیان هەیە یان ئەوانەی ئاراستەی پێچەوانە یان هەیە جیایان بکەوە

خاڵی چاوێڕی



4. لەوێنەی بەرامبەردا ئەمانە جیابکەوە

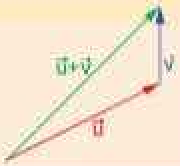
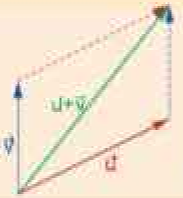
أ ئاڕاستەبڕە یەکسانەکان.

ب ئاڕاستەبڕە تەریبەکان.

بەرەنجام Resultant ی دوو ئاڕاستەبڕ ئەو ئاڕاستەبڕەیە کە سەرجەمیان دەنوێنێت. بۆ کۆکردنەوەی دوو ئاڕاستەبڕ بە ئەندازەیی دەتوانی ڕێگای لەسەرەوە بۆ کلك یان ڕێگای لاتەریب بەکاربهێنێت.

فێربە

کۆکردنەوەی ئاڕاستەبڕەکان

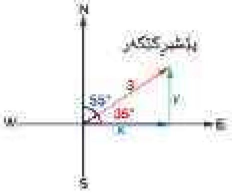
ڕێگاکە	نموونە
ڕێگای لەسەرەوە بۆ کلك خاڵی سەرەتای **ئاڕاستەبڕی دووەم** لەسەر خاڵی کۆتایی **ئاڕاستەبڕی یەکەم** دابنێ. **بەرەنجامەکە** بریتییە لەو ئاڕاستەبڕەی خاڵی سەرەتاکەی خاڵی سەرەتای ئاڕاستەبڕی یەکەمە و خاڵی کۆتاییەکەشی خاڵی کۆتایی **ئاڕاستەبڕی دووەمە**	
ڕێگای لاتەریب خاڵێك وەك خاڵی سەرەتای دوو ئاڕاستەبڕەکە بەکاربێنە. لاتەریبەکە تەواوبکە بەزیادکردنی دانەیەك لەهەر ئاڕاستە بڕێك لەو خاڵە کۆتاییەدا کە خاڵی کۆتایی ئاڕاستەبڕێکی ترە. **بەرەنجامەکە** بریتییە لەو ئاڕاستەبڕەی کە خاڵی سەرەتاکەی خاڵی هاوبەشی دوو ئاڕاستەبڕەکەیە و خاڵی کۆتاییەکەشی لایەکەی تری تیرەکەیە.	

بۆئەوەی دوو ئاڕاستەبڕ بەجەبری کۆبکەیتەوە دوو پێکنەرەکەی کۆبکەوە ئەگەر $\vec{u}=\langle x_1, y_1 \rangle$ و $\vec{v}=\langle x_2, y_2 \rangle$ ئەوا $\vec{u}+\vec{v}=\langle x_1+x_2, y_1+y_2 \rangle$

نموونـــــە 5 جێبەجێکردن لەسەر وەرزش

بەلەمێك بەخێرایی 3 km/h بە ئاڕاستەی باکور ـ °55 ـ خۆرهەڵات. کەوتە ڕێ خێرایی تەوژمی ئاوەکە یەك کیلۆمەترلەهەر کاتژمێرێکدا بەئاڕاستەی خۆرهەڵات. خێرایی بەلەمەکە دەبێتە چەندە و ئاڕاستەکەی چۆنە؟ خێراییەکەی بۆ نزیکترین دەو ئاڕاستەکەی بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

هەنگاوی 1: ئەو دوو ئاڕاستەبڕە بکێشە کە جووڵەی بەلەمەوانەکە و جووڵەی تەوژمی ئاوەکە دەنوێنن.



هەنگاوی 2: ئاڕاستەبڕی جووڵەی بەلەمەوانەکە بەهەردوو پێکنەرەکانییەوە بنووسە. درێژی ئەو ئاڕاستەبڕەی جووڵەی بەلەمەوانەکە دەنوێنێ بریتییە لە 3 km/h کە گۆشەیەك پێکدێنێ پێوانەکەی °35 لەگەڵ ئاڕاستەی موجەبی تەوەری یەکەم.

$\cos 35° = \frac{x}{3}$ لەمەوە دەست دەکەوێت کە $x = 3\cos 35° \approx 2.5$

$\sin 35° = \frac{y}{3}$ لەمەوە دەست دەکەوێت کە $y = 3\sin 35° \approx 1.7$

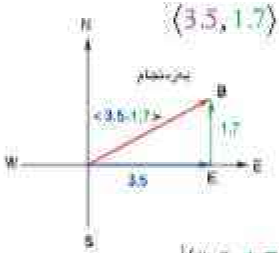
ئەو ئاڕاستەبڕەی جوڵەی بەلەمەوانەکە دەنوێنێت بریتییە لە $\langle 2.5, 1.7 \rangle$

هەنگاوی 3: ئاڕاستەبڕی جوڵەی تەوژمەکە بەهەردوو پێکنەرەکانییەوە بنووسە. لەبەرئەوەی تەوژمەکە بەخێرایی یەك کیلۆمەتر بە ئاڕاستەی خۆرهەڵات دەجوڵێت ئەوا پێکنەری یەکەم یەکسانە بە 1 و پێکنەری دووەم یەکسانە بە 0 ئەو ئاڕاستەبڕەی جوڵەی تەوژمەکە دەنوێنێت بریتییە لە $\langle 1, 0 \rangle$

هەنگاوی 4: بەرەنجامی دوو ئاڕاستەبڕەکە بدۆزەوە وێنەی بکێشە دوو پێکنەری ئاڕاستەبڕی یەکەم لەگەڵ دوو پێکنەری ئاڕاستەبڕی دووەم کۆبکەوە

$$\langle 2.5, 1.7 \rangle + \langle 1, 0 \rangle = \langle 3.5, 1.7 \rangle$$

بەرەنجامی دوو ئاڕاستەبڕەکە بریتییە لە ئاڕاستەبڕی $\langle 3.5, 1.7 \rangle$



هەنگاوی 5: درێژی بەرەنجامەکە و ئاڕاستەکەی بدۆزەوە.

درێژی بەرەنجامەکە بریتییە لە خێرایی ڕاستینەی بەلەمەوە ئەکاتە $|\langle 3.5, 1.7 \rangle| = \sqrt{(3.5-0)^2+(1.7-0)^2} \approx 3.9$

خێرایی ڕاستینەی بەلەماوانەکە بریتییە لە 3.9 km/h بەنزیکەیی ئاڕاستەی بەرەنجامەکە بەو گۆشەیەی لەگەڵ بەشی موجەبی تەوەری یەکەم دروستی دەکات دیاری دەکرێت.

$\tan \hat{A} = \frac{1.7}{3.5}$ لەمەوە دەستدەکەوێت کە $m\hat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{1.7}{3.5}\right) \approx 26°$ ئاڕاستەی بەرەنجامەکە بریتییە لە باکوور °64 خۆرهەڵات بەنزیکەیی لەبەرئەوەی $90° - 26° = 64°$

لەبیرت بێت

نوسینی ئاڕاستەبڕ بەپێکنەرەکانی یارمەتیت دەدات بۆ دیاریکردنی جوڵانی ستوونی و ئاسۆیی لە گواستنەوە لە خاڵی سەرەتاوە بۆ خاڵی کۆتایی.

خاڵی چاودێری 5. **چی دەبێت ئەگەر ...؟** گریمان بەلەماوانەکە بەخێرایی 4 km/h بەئاڕاستەی باکور -55°- خۆرهەڵات جووڵانەوەی خێرایی ڕاستینەی بەلەمەوانەکە چەندە؟ و ئاڕاستەی جووڵەکەی چەندە؟ خێراییەکەی بۆ نزیکترین دە و ئاڕاستەکەی بۆ نزیکترین پلە بدۆزەوە

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونیبکەوە هۆی چییە ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی دوو سەرەکانی$(0, 0)$ و$(1, 4)$ نابێتە ئاڕاستەبڕ.
2. گریمان دوو پێکنەری ئاڕاستەبڕێك دەزانیت بەبێ بەکارهێنانی یاسای دووری چۆن درێژییەکەی دەدۆزیتەوە؟
3. ڕوونیبکەوە چۆن دوو ئاڕاستەبڕ جەبریانە کۆدەکەیتەوە؟
4. ڕێکخەریە ئەم هێلکارییە دروستبکەوە پاشان تەواوی بکە.

پێناسە	ناوەکان
نموونەکان	دژە نموونەکان

(ناوەڕاست: ئاڕاستەبڕ)

فێربە

4-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

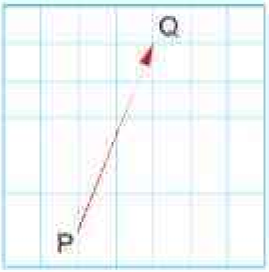
زاراوەکان زاراوەکانی وانەکە بۆ وەڵامدانەوەی هەریەکە لەم پرسیارانە بەکاربێنە.

1. ئەگەر دوو ئاڕاستەبڕ هەمان درێژی و هەمان ئاڕاستەیان هەبێت ___؟___ (یەکسانن، تەریبن).
2. ئەگەر دوو ئاڕاستەبڕ هەمان ئاڕاستەیان هەبێت یان لە ئاڕاستەدا پێچەوانەبن___؟___ (یەکسانن، تەریبن).
3. ___؟___ ئاڕاستەبڕ نیشانەی گەورەییەتی (درێژی ، ئاڕاستەی).

بڕوانە نموونە 1

هەر ئاڕاستەبڕێك بەدوو پێکنەرەکەی بنووسە.

4. $\overrightarrow{AC}$ کاتێك $A(1, 2)$و$C(6, 5)$
5. ئەو ئاڕاستەبڕەی خاڵی سەرەتای$M(-4, 5)$ وخاڵی کۆتایی$N(4, -3)$
6. ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{PQ}$ ی بەرامبەر.



بڕوانە نموونە 2

هەر ئاڕاستەبڕێك لە ڕوونەختی بۆوتانەکاندا بکێشە درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیی بدۆزەوە.

7. $\langle 1, 4\rangle$
8. $\langle -3, -2\rangle$
9. $\langle 5, -3\rangle$

بڕوانە نموونە 3

هەر ئاڕاستەبڕێك لە ڕوونەختی بۆوتانەکاندا بکێشە ئاڕاستەکەی بۆ نزیکترین پلە بدۆزەوە.

10. ئاڕاستەبڕی$\langle 4, 6\rangle$ تەوژمی ئاوی ڕووبارێك دەنوێنێت.
11. ئاڕاستەبڕی $\langle 5, 1\rangle$ جووڵەی فڕۆکەیەك دەنوێنێت.
12. ئاڕاستەبڕی$\langle 3, 6\rangle$ جووڵەی تیرێك دەنوێنێت.

بڕوانە نموونە 4

هەریەک لەمانەی خوارەوە جیابکەوە.

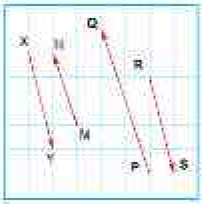
13 ئاڕاستەبڕە یەکسانەکان لەوێنەی 1 دا.

14 ئاڕاستەبڕە تەریبەکان لەوێنەی 1 دا.

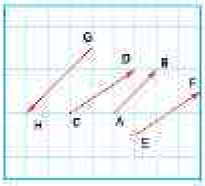
15 ئاڕاستەبڕە یەکسانەکان لەوێنەی 2 دا.

16 ئاڕاستەبڕە تەریبەکان لەوێنەی 2 دا.

وێنەی 1



وێنەی 2



ڕاهێنان و جێبەجێکردنەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونەی
19–17	1
22–20	2
25–23	3
29–26	4
30	5

هەر ئاڕاستەبڕێک بەدوو پێکنەرەکەی بنووسە

17 $\overrightarrow{JK}$ کاتێک $J(-6, -7)$ و $K(3, -5)$

18 $\overrightarrow{EF}$ کاتێک $E(1.5, -3)$ و $F(-2, 2.5)$

19 $\overrightarrow{W}$ (لەوێنەی بەرامبەر)

وێنەی هەر ئاڕاستەبڕێک لە ڕووتەختی پۆوتاندا بکێشە درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەک نزیکبکەرەوە.

20 $\langle -2, 0\rangle$ **21** $\langle 1.5, 1.5\rangle$ **22** $\langle 2.5, -3.5\rangle$

وێنەی هەر ئاڕاستەبڕێک لە ڕووتەختی پۆوتاندا بکێشە ئاڕاستەکەی بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

23 ئاڕاستەبڕی $\langle 4, 1.5\rangle$ جوولەی پاپۆڕێک دەنوێنێت.

24 ئاڕاستەبڕی $\langle 3.5, 2.5\rangle$ جوولەی ژێردەریاییەک دەنوێنێت.

25 ئاڕاستەبڕی $\langle 2, 5\rangle$ جوولەی موشەکێک دەنوێنێت.

هەریەک لەمانەی خوارەوە جیابکەوە.

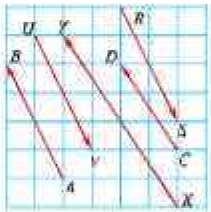
26 ئاڕاستەبڕە یەکسانەکان لەوێنەی 1 دا.

27 ئاڕاستەبڕە تەریبەکان لەوێنەی 1 دا.

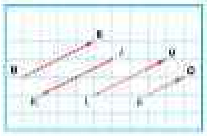
28 ئاڕاستەبڕە یەکسانەکان لەوێنەی 2 دا.

29 ئاڕاستەبڕە تەریبەکان لەوێنەی 2 دا.

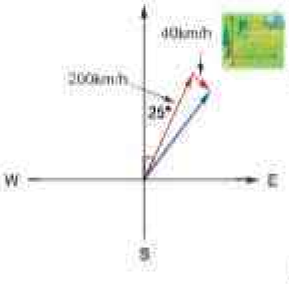
وێنەی 1



وێنەی 2



30 **فڕین** فڕۆکەوانێک فڕۆکە تایبەتییەکەی بەخێراییەکی نەگۆڕی 200 km/h بەئاڕاستەی باکوور - °25 - ڕۆژهەڵات لێدەخوڕێ، فڕۆکەکە ڕووبەڕووی بایەک دەبێتەوە کە خێراییەکەی 40 km/h بەئاڕاستەی باشوور - °45 - ڕۆژهەڵات. خێرایی ڕاستینەی فڕۆکەکە چەندە؟ ئاڕاستە ڕاستینەکەی چەندە؟



هەردوو ئاڕاستە بڕ کۆبکەوە.

31 $\langle 1, 2\rangle + \langle 0, 6\rangle$ **32** $\langle -3, 4\rangle + \langle 5, -2\rangle$

33 $\langle 0, 1\rangle + \langle 7, 0\rangle$ **34** $\langle 8, 3\rangle + \langle -2, -1\rangle$

35 **بیری ڕەخنەگر** ئایا کۆکردنەوە لە ئاڕاستەبڕەکاندا ئاڵوگۆڕە؟ واتە ئایا ئاڕاستەبڕەکانی $\vec{u} + \vec{v}$ و $\vec{v} + \vec{u}$ یەکسانن؟ ڕێگای لەسەرەوە بۆ کلک بەکاربێنە بۆ کۆکردنەوەی ئاڕاستەبڕەکان بەسەبەستی ڕوونکردنەوەی وەڵامەکان.

هەر ئاڕاستەبڕێک بەدوو پێکنەرەکەی بنووسە. بۆ نزیکترین دەیەک نزیکرابێتەوە.

36 درێژی 15 ئاڕاستە 42° **37** درێژی 7.2 ئاڕاستە 9°

38 درێژی 12.1 ئاڕاستەی باکور 57°ـ خۆرهەلات **39** درێژی 5.8 ئاڕاستەی باکوور 22°ـ خۆرهەلات.

40 **فیزیا** ژووری پۆلێك پەنجەرەیەکی تێدایە لە بنمیچەکەوە نزیکە بۆ داخستنی داردەستێك بەکاردێت.

أ هۆزین دارەکەی بەئاڕاستەیەك گرتووە 45°لەگەڵ زەوی ژوورەکەدا دروستدەکات. بەهێزێك بڕەکەی44 نیوتن(N) بوو، پاڵی بەلێواری سەرەوەی پەنجەرەکەوە نا. ئەو پێکنەرە ستونییەی ئاڕاستەبڕەکە بدۆزەوە کە هێزی پاڵنانی سەرپەنجەرەکە دەنوێنێت. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

ب ئەشمیل دارەکەی بەئاڕاستەی 75°لەگەڵ ڕووی زەوی ژوورەکە گرت و بەهێزێك بڕەکەی 44 نیوتن(N)بوو پاڵی بەلێواری سەرەوەی پەنجەرەکەوە نا ئەو پێکنەرە ئەستونییەی ئاڕاستەبڕەکە بدۆزەوە کە هێزی پاڵنانی سەر پەنجەرەکە دەنوێنێت. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

ج بۆ داخستنی پەنجەرەکە، کام لەم دوو خوێندکارە ڕووبەڕووی دژواری کەمتر دەبێتەوە؟ کام لەو دوو پێکنەرە ئەستونییە هێزی پاڵپێوەنانیان گەورەترە؟

41 **ئەگەر** دڵسۆز ژمارەکانی 1 و 2 و 3 و 4 لەسەر چەند پارچە کاغەزێك نووسی و لەناو تووڕەکەیەکدا دایناٍ، بە هەڕەمەکی پارچە کاغەزێکی ڕاکێشا وای دانا کە ئەمە پێکنەری ئاسۆیی دەنوێنێ، پاشان کاغەزێکی تری ڕاکێشا بێ ئەوەی کاغەزی یەکەم بگەڕێنێتەوە بۆ ناو تورەگەکە وای دانا کە ئەوەیان پێکنەری ستونی دەنوێنێت بۆ هەمان ئاڕاستەبڕ.

أ ئەگەری ئەوەی ئاڕاستەبڕەکە$\langle 1,2\rangle$ بێت چەندە؟

ب ئەگەری ئەوەی ئاڕاستەبڕەکە تەریب بێت بە ئاڕاستەبڕی$\langle 1,2\rangle$ چەندە؟

42 **خەملاندن** ئاڕاستەبڕی$\langle 4,6\rangle$بۆ تەواوکردنی هەریەك لەمانەی خوارەوە بەکاربێنە.

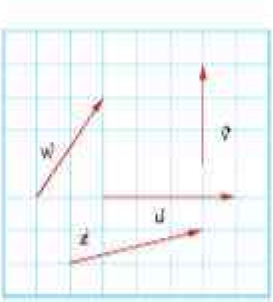
أ وێنەی ئاڕاستەبڕەکە لەسەر کاغەزی ڕوونکردنەوەیی بکێشە.

ب خەملاندنی ئاڕاستەی ئاڕاستەبڕەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکرابێتەوە.

ج پێوانەی ئەو گۆشەیەی ئاڕاستەبڕەکە لەگەڵ ڕاستەهێڵی ئاسۆیدا دروستیدەکات بە بەکارهێنانی گۆشەپێو.

د هەژمارکردنی ئاڕاستەی ئاڕاستەبڕەکە بەبەکارهێنانی پێکنەرەکانی.

هـ بەراوردبکە لەنێوان ئەو خەملاندنەی نێوان لقی (ب)دا و ئەو پێوانەیەی لە لقی (ج)دا کردووتە، و ئەو هەژمارەی لە لقی (د)دا ئەنجامتداوە.



هەنگاوی جۆراوجۆر درێژی هەریەکە لەم ئاڕاستەبڕانە بدۆزەوە ئاڕاستەکەی دیارییبکە. درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەك و ئاڕاستەکەی بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

43 $\vec{u}$ **44** $\vec{v}$

45 $\vec{w}$ **46** $\vec{z}$

بۆ هەر ئاڕاستەبڕێك ئاڕاستەبڕێكی تر بدۆزەوە كەهەمان درێژی هەبێت بەڵام ئاڕاستەكەی جیاوازبێت پاشان ئاڕاستەبڕێك بدۆزەوە كە هەمان ئاڕاستەی هەبێت بەڵام لەدرێژیدا جیاوازبن.

47 $\langle 2, 0 \rangle$ **48** $\langle -3, 6 \rangle$

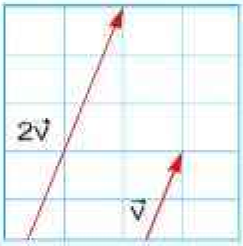
49 $\langle 12, 5 \rangle$ **50** $\langle 8, -11 \rangle$

هەنگاوی جۆراوجۆر دوو ئاڕاستەبڕەكە كۆبكەوە پاشان درێژی بەرەنجام و ئاڕاستەكەی بدۆزەوە درێژییەكەی بۆ نزیكترین دە و ئاڕاستەكەی بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

51 $\vec{u}=\langle 1, 2 \rangle$ و $\vec{v}=\langle 2.5, -1 \rangle$ **52** $\vec{u}=\langle -2, 7 \rangle$ و $\vec{v}=\langle 4.8, -3.1 \rangle$

53 $\vec{u}=\langle 6, 0 \rangle$ و $\vec{v}=\langle -2, 4 \rangle$ **54** $\vec{u}=\langle -1.2, 8 \rangle$ و $\vec{v}=\langle 5.2, -2.1 \rangle$

55 **مێژووی بیركاری** ئۆگەست موبیوس August Möbius لە ساڵی 1827 كتێبێكی بڵاوكردەوە تیایدا باسی پارچە ڕاستەهێڵە ئاڕاستەكراوەكان دەكات ئەوەی ئەمڕۆ بە ئاڕاستەبڕەكان دەناسرێت ئەو زانایە لە كتێبەكەیدا باسی كردووە چۆن ئاڕاستەبڕێك لێكدانی ژمارەیەكی ڕاستی دەكرێت بۆ نموونە: ئەگەر ئاڕاستەبڕی $\vec{v}$ جوولەی ئوتومبیلێك بنوێنێت ئەوا ئاڕاستەبڕی $2\vec{v}$ جوولەی ئاڕاستەبڕی دووەم دەنوێنێت كە بەهەمان ئاڕاستە دەڕوات و خێراییەكەی دوو ئەوەندەی خێرایی یەكەمە



أ پێكنەری هەریەك لەدوو ئاڕاستەبڕی $\vec{v}$ و $2\vec{v}$ بنووسە.

ب درێژی هەریەكە لەو دوو ئاڕاستەبڕە بدۆزەوە و بەراورد لەنێوان درێژییەكانیدا بكە.

ج ئاڕاستەی هەریەك لەم ئاڕاستەبڕە بدۆزەوەو بەراورد لەنێوان ئاڕاستەكانیدا بكە.

د ڕوونیبكەوە چۆن دوو پێكنەرەكەی ئاڕاستەبڕی $\overline{kv}$ دەدۆزیەوە كاتێك k ژمارەیەكی ڕاستی بێت و دوو پێكنەرەكەی $\vec{v}$ زانراوبێت.

هـ ئاڕاستەبڕەكە لێكدانی $k = -1$ بكە بۆ نووسینی دژی $\vec{v}$ بە دوو پێكنەرەكەیەوە.

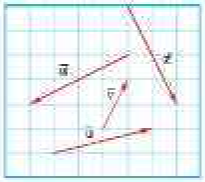
پەرواژەیەك

لەسەر مێژووی بیركاری

موبیوس بەو پەتەی لەوێنەكەدا دیارە ناوبانگی دەركرد كە بریتییە لە شێوەیەكی ئەندازەیی سێ دووری یەك ڕوو و یەك لای هەیە

56 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئاڕاستەبڕی $\vec{u}$ كە درێژییەكەی u بەئاڕاستەی خۆرئاوایە كەچی ئاڕاستەبڕی $\vec{v}$ كە درێژییەكەی v ڕووە و خۆرهەڵاتە
باسی هەرسێ ئەنجامی كۆكردنەوەی ئەم دوو ئاڕاستەبڕە بكە.

57 **بنووسە** بەراوردبكە لەنێوان پارچە ڕاستەهێڵ و تیشك و ئاڕاستەبڕدا.



58 کام لەم ئاڕاستەبڕانە بە ئاڕاستەبڕی $\langle 2, 1 \rangle$ تەریبە؟

أ) $\vec{u}$ ج) $\vec{w}$

ب) $\vec{v}$ د) $\vec{z}$

59 ئاڕاستەبڕی $\langle 7, 9 \rangle$ جوولەی هەلیکۆپتەرێک دەنوێنێت ئاڕاستەی ئەو ئاڕاستەبڕە بۆ نزیکترین پلە چەندە؟

أ) $38°$ ب) $52°$ ج) $128°$ د) $142°$

60 ئاڕاستەبڕی $\langle 5, 11 \rangle$ جوولەی کەشتیەک دەنوێنێت درێژی ئاڕاستەبڕەکە بۆ نزیکترین یەکە نزیکبکەوە.

أ) 6 ب) 8 ج) 12 د) 16

61 **تەنها وەلام** $(-3, 6)$ خاڵی سەرەتای ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{AB}$ و $(-5, -2)$ خاڵی کۆتاییەکەیەتی، درێژی $\overrightarrow{AB}$ بۆ نزیکترین دەیەک بدۆزەوە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

بیرت بێتەوە ئەو گۆشەیەی ئاڕاستەی ئاڕاستەبڕ دیاریدەکات لەبەشی موجەبی تەوەرەی یەکەمەوە دەردەچێت بە ئاڕاستەی پێچەوانەی میلی کاتژمێر دەپێورێت. ئاڕاستەی هەریەک لەم ئاڕاستەبڕانە بدۆزەوە بۆ نزیکترین پلە نزیکیبکەوە.

62 $\langle -2, 3 \rangle$ **63** $\langle -4, 0 \rangle$ **64** $\langle -5, -3 \rangle$

65 **دەریاوانی** فەرمانەوەی پاپۆڕێک پلاندادەنێت بۆ ئەوەی لەناوچەیەکدا کە تەوژمی ئاوی دەریا بەئاڕاستەی خۆرهەڵات بەخێرایی 4 km/h دەڕوات دەریاوانی بکات. ئاڕاستەی جولەی پاپۆڕەکە و خێراییەکەی بدۆزەوە بۆئەوەی خێرایی ڕاستییەکەی بکاتە 10 km/h و ئاڕاستە ڕاستییەکەی باکور $75°$ خۆرهەڵات بێت (تەوژمی ئاوی دەریاکە بەهەند وەرگیراوە) خێراییەکەی بۆ نزیکترین دەیەک و ئاڕاستەکەی بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

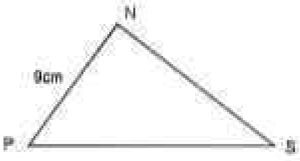
66 بۆ گەیشتن بەباخی گشتی، شوان دووری 3 km بەئاڕاستەی باکور $30°$ خۆرهەڵات پاشان 6 km بەئاڕاستەی خۆرهەڵات پاشان 4 km بەئاڕاستەی باکور $80°$ خۆرهەڵات ڕۆیشت. درێژی ئەو ئاڕاستەبڕە چەندە کە ڕۆیشتنی شوان لەماڵەکەیەوە بۆ باخی گشتی دەنوێنێت؟ئاڕاستەکەی چەندە؟ درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەک و ئاڕاستەی بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

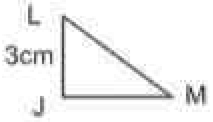
پێداچوونەوەی لولپێچی

هەریەکە لەم سستەمی هاوکێشە هێڵییانە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە (پۆلەکانی پێشوو)

67 $\begin{cases} x - y = -5 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$ **68** $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2y + x = 8 \end{cases}$ **69** $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3y + 15 = 2x \end{cases}$

دوو سێگۆشەی JLM و NPS هاوشێوەن، چێوەی سێگۆشەی JLM 12cm و ڕووبەرەکەی $6\ cm^2$ پێوانەی داواکراو بدۆزەوە (پۆلەکانی پێشوو)





70 چێوەی سێگۆشەی NPS **71** ڕووبەری سێگۆشەی NPS

بەشی 1

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

تاقیکردنەوەی بەش وانەکان 1-1 تا 4-1.

1-1 بۆشایی پۆوتان

هەریەکە لەم خاڵانەی خوارەوە لە بۆشایی پۆوتاندا بنوێنە.

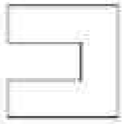
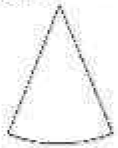
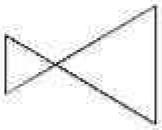
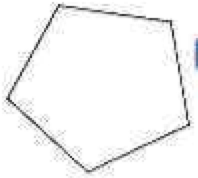
1 $(-3, 2, 1)$ 2 $(2, -3, -2)$ 3 $(3, 1, -3)$

لەبۆشایی پۆوتاندا وێنەی هەریەک لەم هاوکێشە هێڵییانە (رووتەختانە)ی خوارەوە بە ڕوونکردنەوەیی بکێشە.

4 $2x-2y+4z=8$ 5 $2x+y-2z=-4.5$ 6 $x+5y+3z=15$

2-1 چەندلایەکان

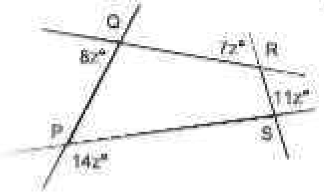
ئەگەر شێوەکە چەندلایە دیاریبکە. ئەگەر وابوو ناوی بنێ.

7 
8 
9 
10 

11 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکی قۆقزی 16 لا بدۆزەوە.

12 ستونێك بنکەکەی شەشلایەکی ڕێکە پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوەی چەندە؟

13 وێنەی بەرامبەر هێلکاری باخێکی بەرزین کراو پیشاندەدات پێوانەی هەریەکە لە دەرە گۆشەکانی بدۆزەوە.



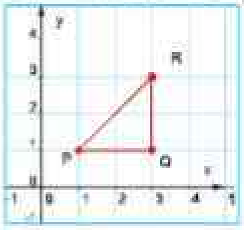
14 پێوانەی هەریەکە لەگۆشەکانی دەرەوەی دەلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

3-1 هاوڕێژەی ئەندازەیی

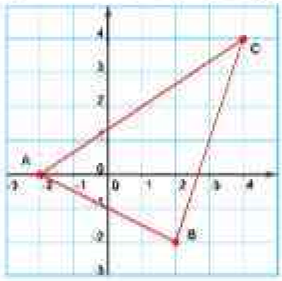
15 بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی ABC و ADE کاتێك $A(-1, 2)$، $B(-3, -2)$، $C(3, 0)$، $D(-2, 0)$، $E(1, 1)$ هاوشێوەن

وێنەی هەر سێگۆشەیەك بەو هاوڕێژە ئەندازەییەی ڕێژەکەی دیاریکراوە بکێشە. ساغبکەوە سێگۆشە بنەڕەتییەکە و وێنەکەی هاوشێوەن.

16 ڕێژەی گەورەکردنەکە 3 بێت.



17 ڕێژەی گەورەکردنەکە 1.5 بێت.



4-1 ناڕاستەبڕەکان

وێنەی هەریەك لەم ناڕاستەبڕانە لە ڕووتەختی پۆوتاندا بکێشە. درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەك هەژماربکە.

18 $\langle 3, 1\rangle$ 19 $\langle -2, -4\rangle$ 20 $\langle 0, 5\rangle$

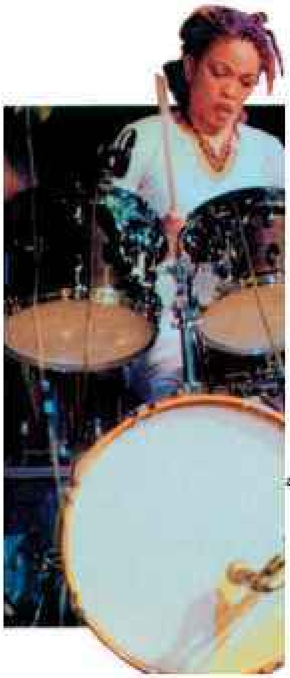
وێنەی هەریەك لەم ناڕاستەبڕانە لە ڕووتەختی پۆوتاندا بکێشە. لارییەکەی بۆ نزیکترین پلە هەژماربکە.

21 خێرایی با بە ناڕاستەبڕی $\langle 2, 1\rangle$ نوێنراوە.

22 تەوژمی ئاوی ڕووبارێك بەناڕاستەبڕی $\langle 5, 3\rangle$ نوێنراوە.

23 هێزی سپرینگ بەناڕاستەبڕی $\langle 4, 4\rangle$ نوێنراوە.

5-1 ڕووبەری بازنە و چەندلاڕێکەکان
Area of circles and regular polygons



ئامانجەکان

- دۆزینەوەی یاسایەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری بازنەو یاسایەك بۆ هەژمارکردنی چێوەکەی و بەکارهێنانیان
- دۆزینەوەی یاسایەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری چەندلاڕێکەکان و بەکارهێنانی.

زاراوەکان Vocabulary

بازنە
Circle

چەقی بازنە
Center of a circle

نیوەتیرەی بازنە
Radius of a circle

تیرەی بازنە
Diameter of a circle

چەقی چەندلای ڕێك
Center of a regular polygon

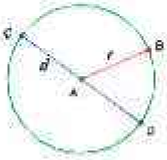
ئەستونەگی چەندلای ڕێك
Apothem of regular polygon

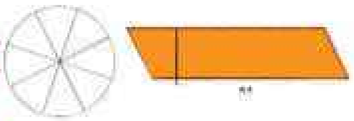
چەقەگۆشە لەچەندلای ڕێك
Central angle of a regular polygon

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

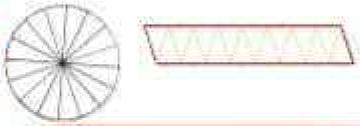
تەپڵ ژەنەکان بۆ دەستکەوتنی دەنگە دیاریکراوەکان تەپڵی پێوانە جیاواز بەکاردێنن، ئەو دەنگانەی تەپڵەکان دەریدەکەن بەندە بە ڕووبەری ڕووە بازنەییەکەیەوە. (نموونەی 2).

بازنە Circle کۆمەڵە خاڵێکە لە ڕووتەختدا دووری هەریەکیان لەخاڵێکی زانراوەوە کە پێی دەوترێت **چەقی بازنە** یەکسانە بە **نیوەتیرەی بازنە** (درێژی **تیرەی بازنە** دوو ئەوەندەی نیوەتیرەکەیەتی، (ئەو پارچە . لەوێنەی بەرامبەردا، A چەقی بازنەکەیە و نیوەتیرەکەی بریتییە لە $r = AB$ و تیرەکەی بریتییە لە $d = CD$.
ڕێژەی چێوەی بازنەی C بۆ درێژی تیرەکەی d ژمارەیەکی نەگۆڕە و ناگۆڕێت بەگۆڕانی نیوەتیرەکەی ئەو ڕێژەیەش ژمارەیەکی نارێژەییە π بە پای دەخوێنرێتەوە بەجۆرێك دەتوانیت بنووسیت $\pi = \frac{C}{d}$. ئەگەر C مان بەپێی d هەژمارکرد ئەوا ڕێسای چێوەی بازنەمان دەستدەکەوێت $C = \pi d$ یان $C = 2\pi r$ لەبەرئەوەی $d = 2r$ دەتوانین چێوەی بازنە بەکاربێنین بۆ دۆزینەوەی ڕووبەرەکەی. بازنەکە دابەشبکە وپارچەکان ڕێکبخە بەجۆرێك شێوەیەکت بۆ دەربچێت هاوشێوەی لاتەریبێك بێت وەك لە شێوەکەدا دیارە.



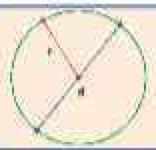


بنکەی لاتەریبەکە یەکسانە بەنیوەی چێوەی بازنەکە بەنزیکەیی یان πr . بەرزییەکەشی نیوەتیرەی بازنەکەیە بەنزیکەیی لەمەشەوە دەستدەکەوێت ڕووبەری بازنەکە بەنزیکەیی $A = \pi r \times r = \pi r^2$



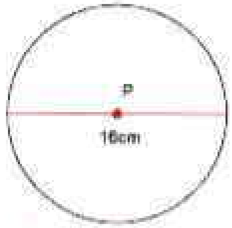
هەرکاتێك ژمارەی پارچەکان زیاتربێت، ڕووبەری لاتەریبەکە لە ڕووبەری بازنەکە نزیکدەبێتەوە. بەمەش بەها نزیکەییەکەی لەبەها ڕاستییەکەی نزیکتردەبێتەوە.

چێوە و ڕووبەری بازنە



کاتێك بازنەیەك نیوەتیرەکەی r و تیرەکەی d بێت چێوەکەی c بەیاسای $C = \pi d$ یان $C = 2\pi r$ و ڕووبەرەکەی بە یاسای $A = \pi r^2$ هەژماردەکرێت.

نموونە 1 هەژمارکردنی چێوە و ڕووبەری بازنە



داواکراو هەژماربکە

أ ڕووبەری بازنەی بەرامبەر

$A = \pi r^2$ یاسای ڕووبەری بازنە.

$A = \pi (8)^2$ تیرە دابەش 2 بکە بۆ دۆزینەوەی نیوەتیرە، پاشان لەجیاتی نیوەتیرەکە

$A = 64\pi$ بەهاکەی دابنێ ئینجا سادەی بکە.

ڕووبەری بازنەکە $A = 64\pi \text{ cm}^2$

ب نیوەتیرەی بازنەیەک چێوەکەی 24π m بێت.

$C = 2\pi r$	یاسای چێوەی بازنە
$24\pi = 2\pi r$	لەجیاتی چێوە بەهاکەی دابنێ.
$24 = 2r$	هەردوولا دابەشی π بکە.
$r = 12$	هەردوو لا دابەشی 2 بکە.

ج چێوەی بازنەیەک ڕووبەرەکەی $9x^2\pi$ بێت بەپێی π و x ەوە.

هەنگاوی 1: نیوەتیرە r بەپێی x هەژماربکە.

$A = \pi r^2$	یاسای ڕووبەر
$9x^2\pi = \pi r^2$	لەجیاتی A بەهاکەی دابنێ
$9x^2 = r^2$	هەردوولا دابەشی π بکە
$3x = r$	ڕەگی دووجای هەردوولا وەربگرە.

هەنگاوی 2: چێوەی بازنەکە هەژماربکە بەکارهێنانی بەهای نیوەتیرەکە.

$C = 2\pi r$	یاسای چێوە
$C = 2\pi(3x)$	بەهای نیوەتیرەکە لەجیاتی دابنێ
$C = 6x\pi$	کورتی بکەوە.

خاڵی جاودێری

1. ڕووبەری بازنەیەک بەپێی π هەژماربکە کە چێوەکەی $(4x-6)\pi$ cm بێت.

نموونــــە 2 جێبەجێکردن لە میوزیک

جاز لەسێ تەپڵ کە تیرەکانیان لە 10ئنچ، 12ئنچ، 14ئنچ، پێکدێت ڕووبەری هەر تەپڵێک بدۆزەوە و وەڵامەکەت لە نزیکترین دەیەک نزیکبکەوە.

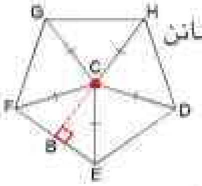
تیرە 10ئنچ	تیرە 12ئنچ	تیرە 14ئنچ
$r = \frac{10}{2} = 5$ $A = \pi(5)^2$	$r = \frac{12}{2} = 6$ $A = \pi(6)^2$	$r = \frac{14}{2} = 7$ $A = \pi(7)^2$
$A \approx 78.5$	$A \approx 113.1$	$A \approx 153.9$
ڕووبەر ن78.5 ئنچ دووجایە.	ڕووبەر 113.1 ئنچ دووجایە	ڕووبەر 153.9 ئنچ دووجایە.

لەبیرت بێت

کلیلی π لە ژمێری ڕونکردنەوەدا باشترین نزیکەرەوەیە بۆ بەهای π چاوەڕوان بە تا لە هەژمارکردنی تەواودەبێت پێش ئەوەی نزیکیبکەیت.

خاڵی جاودێری

2. چێوەی هەر تەپڵێکی نمونەی 2 هەژماربکە.



چەقی Center چەندلای ڕێک خاڵێکی ناوەوەیەتی، دووریيەکەی لەسەرەکانییەوە یەکسانن **ئەستوندەکی Apothem** چەندلای ڕێک دووری نێوان چەق و یەکێك لەلایەکانییەتی، ئەو گۆشەیەی سەرەکی چەقی چەندلاڕێکەکە بێت و لایەکانی بەدوو سەری هاوسێی یەکتریدا بڕۆن **چەقەگۆشەی Central angle** چەندلاڕێکەکەیە.

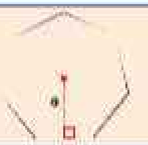
هەموو چەقەگۆشەکانی چەندلای ڕێك لە پێوانەدا یەکسانن. پێوانەی هەریەکێکیان $\frac{360°}{n}$ کاتێك n ژمارەی لایەکانی چەندلاڕێکەکە بێت.

بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری چەندلای ڕێك کەژمارەی لایەکانی n و ئەستوندەکەی a و درێژی لایەکی s بێت چەندلایەکە دابەش بکە بە n سێگۆشەی دوولایەکسان ڕووبەری هەرسێگۆشەیەك دەکاتە $\frac{1}{2}as$.

ڕووبەری چەندلایەکە $A = n\left(\frac{1}{2}as\right) = \frac{1}{2}a(ns)$ یان $A = \frac{1}{2}ap$ $p = ns$ هێمایەکە بۆ چێوەی چەندلاڕێکەکە.

فێربە

ڕووبەری چەندلای ڕێك

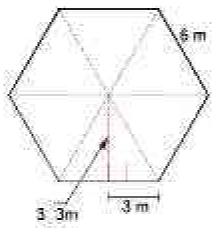


ڕووبەری چەندلایەکی ڕێك کە چێوەکەی p و ئەستوندەکەی (بەرزییەکەی) a بێت، بەیاسای $A = \frac{1}{2}ap$ هەژماردەکرێت.

نموونـــــه 3 دۆزینەوەی ڕووبەری چەندلای ڕێك

ڕووبەری هەریەکە لەم چەندلاڕێکانە بدۆزەوە وەڵامەکەت نزیکبکەرەوە بۆ نزیکترین دەیەك.

أ شەشلایەکی ڕێك درێژی لایەکەی **6 m** بێت.

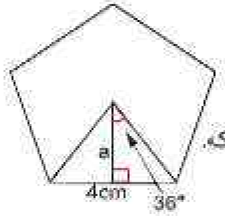


چێوەی چەندلایەکە دەکاتەm 36 (6×6) شەشلای ڕێك دابەش دەبێت بۆ 6 سێگۆشەی ڕێك درێژی بنکەکەیm 6 . لەوەشەوە دەردەچێت کە ئەستوندەکی شەشلاڕێکەکە بریتییە لە $3\sqrt{3}$

$A=\frac{1}{2}ap$	یاسای ڕووبەری چەندلا.
$A=\frac{1}{2}3\sqrt{3}\times 36$	لەجیاتی دابنێ.
$A=54\sqrt{3}\approx 93.5$	سادەبکە ونزیکیبکەوە بۆ نزیکترین دەیەك.

ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك بەنزیکەیی دەکاتە $93.5\ m^2$

ب پێنجلایەکی ڕێك درێژی لایەکی **8 cm** بێت.



هەنگاوی 1 وێنەی پێنجلایەك بکێشە، سێگۆشەیەکی دوولایەکسان بکێشە سەرەکەی چەقی چەندلایەکە بێت و بنکەکەی یەکێ لەلایەکانی پێنجلایەکە بێت. پێوانەی چەقەگۆشەی چەندلایەکە $\frac{360°}{5}=72°$. لەتکەری چەقەگۆشەکە بکێشە تا سێگۆشەیەکی گۆشەوەستاوت دەستبکەوێت.

هەنگاوی 2 ڕێژەی سێگۆشەیی tan بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی ئەستوندەك a.

$\tan 36° = \frac{4}{a}$	پێناسەی ڕێژەی سێگۆشەیی tan)
$a=\frac{4}{\tan 36°}$	بەهای a هەژماربکە.

هەنگاوی 3 ئەستوندەك و درێژی لایەکی بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری 5 لاڕێکەکە.

$A=\frac{1}{2}ap$	یاسای ڕووبەری چەندلا.
$A=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\tan 36°}\right)(5\times 8)$	لەجیاتی دابنێ.
$A\approx 110.1$	سادەبکە ونزیکیبکەوە بۆ نزیکترین دەیەك

ڕووبەری 5 لایەکە بەنزیکەیی دەکاتە $110.1\ cm^2$

لەبیرت بێت

لە سێگۆشەی گۆشە وەستاودا تانجنتی گۆشە $=\frac{\text{لای بەرامبەر}}{\text{لای تەنیشت}}$

حاڵی جاوبێزی

3. ڕووبەری هەشتلایەکی ڕێك هەژماربکە کە درێژی لایەکیm 4 بێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. پەیوەندی نێوان π وچێوەی بازنە ڕوونبکەوە.
2. باسی چۆنیەتی هەژمارکردنی چەقەگۆشەی چەندلایەکی ڕێك بکە کە لە n لا پێکهاتبێت.
3. ڕێکخەریە ئەم خشتەیە دروست بکەو و تەواوی بکە.

فێربە

چەندلای ڕێك درێژی لایەکەی 1 بێت					
چەندلا	ژمارەی لایەکان	چێوەکەی	پێوانەی چەقەگۆشەی	ئەستوندەك	ڕووبەر
سێگۆشە					
چوارگۆشە					
شەشلا					

5-1 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

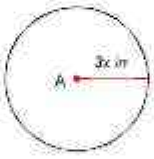
1 **زاراوەکان** چۆن ئەستوندەکی چوارگۆشەیەک دەدۆزیتەوە درێژی لایەکی 5 یەکە بێت؟

بڕوانە نموونە 1

بدۆزەوە.

2 چێوەی ئەم بازنەیەی خوارەوە.

3 ڕووبەری ئەم بازنەیەی خوارەوە



4 چێوەی بازنەیەک ڕووبەرەکەی $36\pi\ m^2$

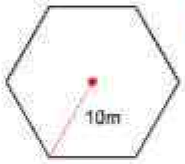
بڕوانە نموونە 2

5 **خواردن** چێشتخانەی پیتزای فورات سێ قەبارەی جیاواز لە پیتزا پێشکەش دەکات کەتیرەکانی یەک لەدوایەک 15 cm و 25 cm و 40 cm ڕووبەری هەر پیتزایەک هەژماربکە و نزیکیبکەوە بۆ نزیکترین دەیەک

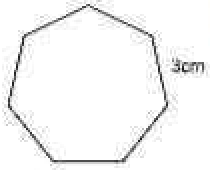
بڕوانە نموونە 3

ڕووبەری هەریەک لەم چەندلاڕێکانە بدۆزەوە و نزیککرابێتەوە بۆ نزیکترین دەیەک

6



7



8 سێگۆشەیەکی ڕێک ئەستوندەکەی 2 cm بێت.

9 بازنەیەک چێوەکەی 5m بێت.

ڕاهێنان و جێبەجێکردنەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان	سەیری نموونەی
10–12	1
13	2
14–17	3

بەپێ ی π ئەو ئەنجامانەی خوارەوە بدۆزەوە.

10 ڕووبەری ئەم بازنەیە

11 چێوەی ئەم بازنەیە

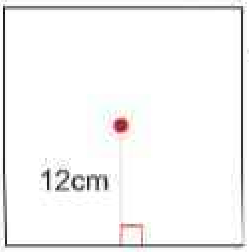
12 تیرەی بازنەیەک چێوەکەی 10 m بێت.

13 **وەرزش** ڕاهێنەرێکی ئەسپ سێ حەلەبەی جیاواز بەکاردەهێنێت کەیەک لەدوای یەک تیرەکانیان 7 m و 10 m و 13 m . ڕووبەری هەریەکە لە حەلەبەکان بدۆزەوە و نزیکیبکەوە بۆ نزیکترین دەیەک.

ڕووبەری هەریەک لەم چەندلاڕێکانە بدۆزەوە نزیکیبکەرەوە بۆ نزیکترین دەیەک.

14

15



16 نۆلایەکی ڕێک چێوەکەی 144 m بێت.

17 پێنجلایەکی ڕێک ئەستوندەکەی 2 km

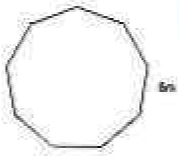
چەقەگۆشەی هەریەک لەم چەندلا ڕێکانەی خوارەوە بدۆزەوە.

18 سێگۆشەیەکی ڕێک **19** چوارگۆشە **20** پێنجلا **21** شەشلا

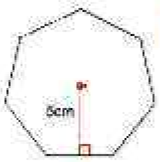
22 حەوتلا **23** هەشتلا **24** نۆلا **25** دەلا.

ڕووبەری هەریەک لەم چەندلا ڕێکانە بۆ نزیکترین دەیەک بدۆزەوە.

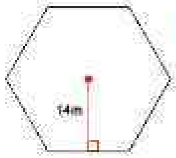
26



27

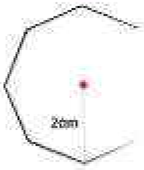


28

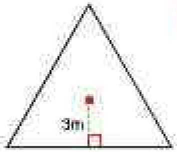


29

30



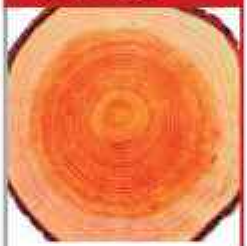
31



32 **زیندەزانی** دەتوانرێت تەمەنی درەختێک بخەملێنرێت بەبەکارهێنانی یاسای $a = \frac{r}{w}$ کاتێک r هێمای نیوەتیرەی درەختەکە بێتوێکڵەکەی بێت و w هێمای ناوەندە ژمێرەیی ئەستووری ئەڵقەکانی درەختەکەبێت. تەمەنی داری (سندیان) بە ڕوویەک بخەملێنە کە چێوەکەی cm 150 و ئەستووری توێکڵەکەی 0.2 cm وپانی ئەڵقەکانی 0.5 cm بێت.

دەروازەیەک

لەسەر زیندەزانی



زاناکانی ڕووەک ناسی لێکۆڵینەوە لەسەر ئەڵقەکانی درەختەکان دەکەن بۆ دەرئەنجامهێنانی ئەو گۆڕانانەی کە لە شێوازەکانی نموونەکانیان ڕوویانداوە

33 **هەڵە لە شیکردنەوەدا** دوو خوێندکار ڕووبەری بازنەیەکیان بەو دوو شێوەیەی خوارەوە دۆزییەوە کامیان توشی هەڵەبوون؟ لەکوێ؟

أ

نیوەتیرەی بازنەکە 2m لەبەر
ئەوەی چێوەکەی $2\pi m$ ڕووبەرەکەی
$A = \pi(2^2) = 4\pi$ مەتر دووجا

ب

نیوەتیرەی بازنەکە یەک مەترە لەبەر
ئەوەی چێوەکەی $2\pi m$ ڕووبەرەکەی
$A = \pi(1^2) = 4\pi$ مەتر دووجا

پێوانە نادیارەکان بەپێ ی π بدۆزەوە.

	تیرە	نیوەتیرە	ڕووبەر	چێوە
34	6	■	■	■
35	■	■	100	■
36	■	17	■	■
37	■	■	■	36π

38 **هەنگاوی جۆراوجۆر** سالار نەخشە بۆ باخچەیەک دەکێشێت بەدەوری گۆمێک ئاو کە لەشێوەی شەشلایەکی ڕێک دابێت درێژی لایەکی 60 m بێت. ئەگەر باخچەکە لەشێوەی بازنەیەک دابێت و 10 m دووربێت لە هەرسەرێک لەسەرەکانی گۆمەکە ڕووبەری باخچەکە چەندە؟ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەک نزیکبکەوە.

39 بۆ هێمای وەستان لەیاسای هاتوچۆدا شێوەی هەشتلایەکی ڕێک بەدو جۆر پێوانە هەیە 30 cm و 36 cm

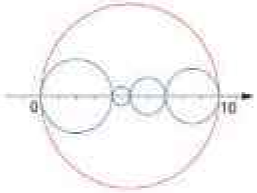
أ ڕووبەری هێمای یەکەم بۆ نزیکترین دەیەک بدۆزەوە.

ب ڕووبەری هێمای دووەم بۆ نزیکترین دەیەک بدۆزەوە.

ج ڕێژەی سەدی بۆ ڕووبەری زیادکراو لە کانزای پێویست بۆ دروستکردنی جۆری دووەم لەباتی جۆری یەکەم چەندە؟

40 **پێوانە** هەندێک لەئەندازیاران ڕەوڕەوەیەک بەکاردەهێنن کە بە دەوری تەوەرەیەکدا دەخولێتەوە بۆ پێوانی دوورییەکان بەخولانەوەی ڕەوڕەوەکە و ژماردنی جاری خولانەوەکەی تیرەی ئەو ڕەوڕەوەیە بدۆزەوە ئەگەر بزانیت چێوەکەی یەک مەترە.

41 **بیری ڕەخنەگر** کام یەکێك لەم دوو مێزە زۆرترین خەڵك دەگرن مێزێکی لاکێشەیی درێژییەکەی 6 m وپانییەکەی 4 m بێت یان مێزێکی خڕ تیرەکەی 6 m بێت؟ بەنزیکەیی چەند کەس لەسەر مێزەکان دادەنیشن؟ بیرۆکەکان ڕوونبکەوە.



42 **بنووسە** چەقی هەر بازنەیەك لە وێنەی بەرامبەر دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی ژمارەکان. پەیوەندی نێوان چێوەی بازنە گەورەکە و چێوەی هەریەك لە بازنەکانی تر ڕوونبکەوە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

43 چێوەی هەشتلایەکی ڕێکی بەرامبەر بۆ نزیکترین سانتیمەتر چەندە؟

أ 5 ب 40 ج 20 د 68

44 کام لەم ڕێژانەی خوارەوە π دەنوێنێت کاتێك C چێوەی بازنەکە و d تیرەکەی بێت.

أ $\frac{C}{d}$ ب $\frac{4C}{d^2}$ ج $\frac{d}{C}$ د $\frac{d}{2C}$

45 ئاراس مێزێکی بازنەیی هەیە تیرەکەی 2 m ، دەیەوێت لەسەر ڕووەکەی وێنەی لاکێشەیەك کە درێژییەکەی 2 m وپانییەکەی 1 m بێت و 4 گۆشە کە درێژی هەرلایەکی $\frac{1}{2}$m بێت بکێشێت. کام یەکێك لەمانە ئەستەمی ویستی ئاراس دەردەبڕێت.

أ) دوای کێشانی وێنەی لاکێشەکە هیچ جێگایەك نامێنێتەوە.

ب) ئاراس ناتوانێت لاکێشەیەك لەسەر ڕووی مێزەکە بکێشێت درێژیەکەی 2 m بێت.

ج) ناتوانرێت وێنەی چوارگۆشەکان بکێشرێت.

د) هیچ جێگایەك لەسەر ڕووی مێزەکە نامێنێتەوە بۆ کێشانی 4 چوارگۆشەکە درێژی لای هەریەکەیان $\frac{1}{2}$ m بێت

بەرەنگاری و فراوانکردن

46 وێنەی بەرامبەر دوو بازنە دەنوێنێت کە هەمان چەقیان هەیە نیوەتیرەی گەورەکە5 cmی زیاترە لەنیوەتیرەی بچوکەکە جیاوازی نێوان چێوەی هەردوو بازنەکە بەپێی π بدۆزەوە.

47 **جەبر** یاسایەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری بازنە بەپێی چێوەکەی بنووسە.

48 **بیری ڕەخنەگر** ڕوونبکەوە کە ڕووبەری ئەو چەندلا ڕێکەی ژمارەی لایەکانی n لە ڕووبەری بازنەیەك نزیکدەبێتەوە هەتا ژمارەی n زیادبکات.

پێداچونەوەی لولپێچی

ئەو ئەخشە هێڵییە بنووسە کە هەر خشتەیەك دەینوێنێت. (پۆلەکانی پێشوو)

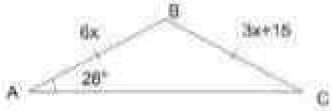
49

x	−2	0	5	10
y	−19	−13	2	17

50

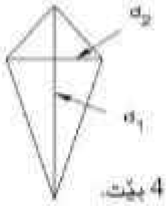
x	−3	0	4	9
y	2	−1	−5	−10

ئەمانە بدۆزەوە. (پۆلەکانی پێشوو)



51 $m\hat{B}$ 52 AB

ئەمانە بدۆزەوە. (پۆلەکانی پێشوو)



53 d_2 ئەگەر بزانیت $d_1 = 20$ و ڕووبەرەکەی $A = 14$ یەکەی ڕووبەر

54 ڕووبەری نیمچەلاتەریبەکە بنکەکانی یەك لەدوای یەك 3 m و 6 m و بەرزییەکەی 4 m بێت.

6-1 هەندێك لە یاساكانی بۆشایی

Formulas in 3 dimensions

كێ ئەمە بەكاردەهێنێت؟

مەلەوانەكانی ژێرئاو پێوتانەكانی بۆشایی بەكاردەهێنن بۆ دۆزینەوەی دووری نێوان دوخالی ژێرئاو (نمونە 5)

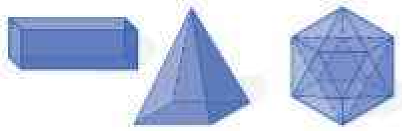
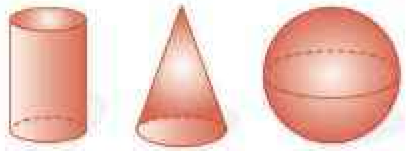
ئامانجەكان

- یاسای ئۆلەر بۆ دۆزینەوەی ژمارەی سەرولایەكان و ڕووەكانی چەندڕوو بەكاردەهێنێت.
- یاسای دووری پەرمێدەدات لە بۆشاییدا و بەكاریدەهێنێت.
- یاسای پێوتانی ناوەڕاستی پارچە ڕاستەهێڵ لەبۆشاییدا پەرەپێدەدات و بەكاری دەهێنێت.

زاراوەكان
Vocabulary

چەندڕوو
Polyhedron

چەندڕوو **Polyhedron** لەچوار ڕوو یان زیاتر پێكدێت كە تەنها لە لایەكانیدا یەكتری دەبڕن. پوازك و هەرەم چەندڕوون بەڵام لوولەك و قوچەك بەچەند ڕوودا دانانرێت.

ئەم شێوە ئەندازەییانە چەندڕوون	ئەم شێوە ئەندازەییانە چەندڕوو نین
	

پەیوەندییەك هەیە كە ژمارەی سەرەكان و ژمارەی لایەكان و ژمارەی ڕووەكان لەچەند ڕوودا بەیەكەوە دەبەستێت.

یاسای ئۆلەر Euler's formula

ئەگەر V ژمارەی سەرو E ژمارەی لایەكانی و F ژمارەی ڕووەكانی چەندڕوویەك بن ئەوا.

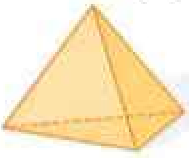
$$V - E + F = 2$$

نموونـــە 1

بەكارهێنانی یاسای ئۆلەر

ژمارەی سەرەكان ولایەكان و ڕووەكانی بدۆزەوە و بەكاریان بێنە بۆ پاسادان لەڕاستی یاسای ئۆلەر.

أ

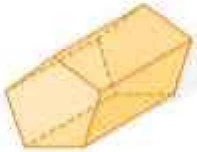


$V = 4 \quad E = 6 \quad F = 4$

$4 - 6 + 4 \stackrel{?}{=} 2$ یاسای ئۆلەر بەكاربێنە

$2 = 2$ ✓ سادەبكە.

ب



$V = 10 \quad E = 15 \quad F = 7$

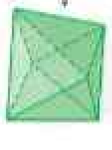
$10 - 15 + 7 \stackrel{?}{=} 2$ یاسای ئۆلەر بەكاربێنە

$2 = 2$ ✓ سادەبكە.

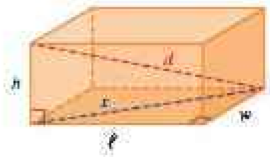
خاڵی چاودێری

1. ژمارەی سەرەكان ولایەكان و ڕووەكانی بدۆزەوە و بەكاریان بهێنە بۆ پاسادان لە ڕاستی یاسای ئۆلەر.

أ



ب



تیرەی چەندڕوو ئەو پارچە راستەهێڵەیە دوو سەر بەیەک دەگەیەنێت و ناکەوێتە هیچ ڕوویەک لە ڕووەکانی. وێنەی بەرامبەر یەکێک لەتیرەکانی d لاکێشە تەریبەکە ڕووندەکاتەوە بۆ ئەوەی درێژی تیرەکە هەژماربکەیت دووجار سەلمێنراوی فیثاگۆرس بەکاربێنە.
$d^2 = h^2 + x^2$ و $x^2 = \ell^2 + w^2$ پاش لەجیاتی دانانی x^2 بە بەهاکەی دەردەچێت کە $d^2 = h^2 + \ell^2 + w^2$

تیرەی لاکێشە تەریب

درێژی تیرەی لاکێشە تەریبێک کە درێژییەکەی ℓ وپانییەکەی w و بەرزییەکەی h بێت بریتییە لە

$$d = \sqrt{h^2 + \ell^2 + w^2}$$

نموونـــــە 2 بەکارهێنانی سەلمێنراوی فیساگۆرس لە بۆشاییدا بدۆزەوە

ئەمانە بدۆزەوە.

أ درێژی تیرەی ئەولاکێشە تەریبە بدۆزەوە کەدرێژی **3 cm** وپانی **4 cm** بەرزی **5 cm**

$d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}$ بەهای ℓ و w و h لەجیاتی بکە

$= \sqrt{9 + 16 + 25}$ سادەبکە

$= \sqrt{50} \approx 7.1$

درێژی تیرەکە بەنزیکەیی 7.1 cm

ب بەرزی لاکێشە تەریبێک کە درێژی **12 m** وپانی **8 m** و درێژی تیرەکەی **18 m** بێت.

$18 = \sqrt{8^2 + 12^2 + h^2}$ بەهای ℓ و w و h لەجیاتی بکە.

$(18)^2 = 8^2 + 12^2 + h^2$ هەردولا دوجابکە.

$324 = 64 + 144 + h^2$ سادەبکە

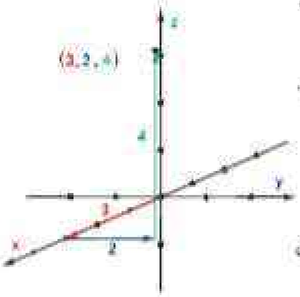
$h^2 = 116$ بەهای h^2 هەژماربکە.

$h = \sqrt{116} \approx 10.8$ رەگی دوجای هەردولا وەربگرە.

بەرزی لاکێشە تەریبەکە بەنزیکەیی 10.8 m

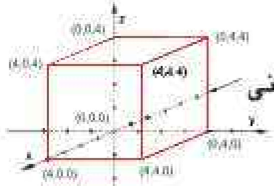
خاڵی چاودێری

2. درێژی تیرەی خشتەکێک بدۆزەوە کەدرێژی لایەکی 5 cm بێت.



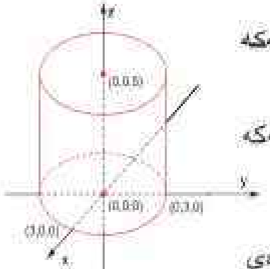
لەبیرت بێت بۆ دیاریکردنی شوێنی خاڵێک لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان پێویستت بە پۆتانەکەی هەیە و بۆ دیاریکردنی خاڵێک لە بۆشاییدا 3 جێکەوتت پێویستە. هەروەها لەبیرت بێت تەوەری بۆشایی پێویستی بە 3 تەوەرە هەیە وەک لەوێنەی بەرامبەردا دیارە. هەموو سیانە ڕێکخراوێک (x, y, z) تەنها خاڵێک دیاریدەکات لەتەوەری بۆشاییدا. هەروەها هەموو خاڵێک سیانە ڕێکخراوێک دیاریدەکات. بۆ دیاریکردنی خاڵی $(2, 3, 4)$ لەخاڵی بنەڕەتەوە $(0, 0, 0)$ دوو یەکە بجوڵێ بۆ پێشەوە لەسەر تەوەری یەکەم، پاشان سێ یەکە بۆ لای ڕاست تەریب بەتەوەری دووەم پاشان 4 یەکە بۆ سەرەوە تەریب بەتەوەری سێیەم.

نموونــــه 3 وێنەکێشانی تەنێک لەبۆشایی پۆوتاندا.



أ خشتەکێك بکێشە درێژی لایەکەی 4 یەکەو پۆوتانی سەرەکانی سالب نەبن، یەکێك لەسەرەکانی خاڵی بنەڕەت بێت.

خشتەك 8 سەری هەیە کە بریتیین لە خاڵەکانی $(0, 0, 0)$،
$(0, 4, 0)$ ،$(0, 0, 4)$ ،$(4, 0, 0)$ ،$(4, 4, 0)$ ،$(4, 0, 4)$ ،$(0, 4, 4)$ ،$(4, 4, 4)$

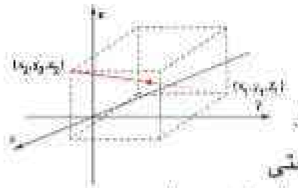


ب لوولەکێك بکێشە بەرزیەکەی 5 یەکەو نیوەتیرەی بنکەکەی 3 یەکە بێت و چەقی بنکەی خوارەوەی خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت

چەقی بنکەی خوارەوە $(0, 0, 0)$ دیاریبکە لەبەرئەوەی بەرزی لولەکەکە 5 یەکەیە، ئەوا چەقی بنکەی سەرەوەی لەسەر خاڵی $(0, 0, 5)$ ە خاڵەکە دیاریبکە لەلایەکی تریشەوە نیوەتیرەی بنکەکەی 3 یەکەیە ئەوەش واتا بنکەی خوارەوە تەوەری دووەم لەخاڵی$(0, 3, 0)$ وتەوەرەی یەکەم لەخاڵی $(3, 0, 0)$دەبڕێت. نکەی خوارەوە بکێشە پاشان بنکەی سەرەوە تەریب بە بنکەی خوارەوە بکێشە بنکەکانی بەیەك بگەیەنە

خاڵی جاوبێری

3. وێنەی قوچەکێکی بازنەیی وەستاو بکێشە کە بەرزییەکەی 7 یەکە و نیوەتیرەی بنکەکەی 5 یەکەو چەقەکەی خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت.



بۆ ئەوەی دووری نێوان دوخاڵی$A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ لەبۆشاییدا بدۆزێتەوە وێنەی لاکێشە تەریبێك بکێشە یەکێك لەتیرەکانی $\overline{AB}$ بێت. یاسای هەژمارکردنی درێژی تیرە بەکاربهێنە. هەروەها دەتوانیت یاسایەکی هاوشێوەی یاسای دووری لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بەکاربێنیت هەروەها بۆ هەژمارکردنی پۆوتانەکانی ناوەڕاستی پارچە ڕاستەهێڵ یاسایەکی هاوشێوەی یاسای پۆوتانی خاڵی ناوەڕاستی پارچە ڕاستەهێل لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بەکاربهێنێت.

هێربە

یاسای دووری و پۆوتانی ناوەراست لەبۆشایی پۆوتاندا

یاسای $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ بەکاربێتە بۆ هەژمارکردنی دووری نێوان دوو خاڵی $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$.

ناوەراستی ئەو پارچە راستەهێڵەی سەرەکانی دووخاڵی $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ بریتییەلە $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

نموونــــه 4 هەژمارکردنی دووری و پۆوتانی ناوەراست لە بۆشایی پۆوتاندا

دووری نێوان دووخاڵیA و B و پۆوتانی ناوەراستی $\overline{AB}$ بدۆزەوە، وەڵامەکەت لە نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

أ $A(0, 0, 0)$، $B(3, 4, 12)$

دووری

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2+(12-0)^2}$$
$$=\sqrt{9+16+144}$$
$$=\sqrt{169}=13$$

پۆوتانی ناوەراست

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+12}{2}\right)$$
$$M(1.5, 2, 6)$$

ب $B(7, 12, 15)$ ، $A(3, 8, 10)$

دووری

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(7-3)^2+(12-8)^2+(15-10)^2}$$
$$=\sqrt{16+16+25}$$
$$=\sqrt{57}\approx 7.5$$

پۆوتانی ناوەراست

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{3+7}{2},\frac{8+12}{2},\frac{10+15}{2}\right)$$
$$M(5, 10, 12.5)$$

خاڵی چاودێری

4. دووری نێوان دوو خاڵی A و B و پۆوتانی ناوەراستی $\overline{AB}$ بدۆزەوە وەڵامەکەت لەنزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

أ $B(6, 0, 12)$ ، $A(0, 9, 5)$

ب $B(12, 16, 20)$ ، $A(5, 8, 16)$

نموونــــــه 5 جێبەجێکردن

دوو مەلەوانی ژێرئاو چوونە دوو شوێن وەك لەوێنەی بەرامبەردا دیارە دووری نێوانیان چەندە؟

وای دادەنێین شوێنی بەلەمەکەیان خاڵی بنەرەتە $(0, 0, 0)$، شوێنی دوو مەلەوانەکە دوو خاڵی $(18, 9, -8)$ و $(-15, -6, -12)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(-15-18)^2+(-6-9)^2+(-12+8)^2}$$
$$=\sqrt{1330}\approx 36.5$$

دووری نێوان دوو مەلەوانەکە نزیکەی 36.5 m

خاڵی چاودێری

5. چی دەبێت ئەگەر دوو مەلەوانەکە بەرێکی سەرکەوتنە سەرئاوەکە دووری نێوانیان چەند دەبێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. چۆن دووری نێوان دوو خاڵ لەبۆشایی پۆوتانەکاندا هەژماردەکەیت.

2. رێکخەرێە ئەم خشتەیە دروستبکە و پاشان تەواوی بکە.

ڤێربە

	بوازکێکی وەستاوی بنکە لاکێشە	هەرەمێکی وەستاوی بنکە لاکێشە
ژمارەی سەرەکان		
ژمارەی لایەکان		
ژمارەی رووەکان		
$V-E+F$		

6-1 ڕاهێنانەکان

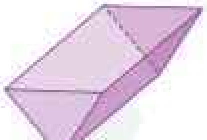
ڕاهێنانی ناڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ڕوونبکەوە بۆچی لولەک بەچەند ڕوو دانانرێت.

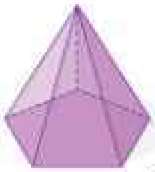
بڕوانە نموونە 1

ژمارەی سەرەکان و لایەکان و ڕووەکان بدۆزەوە و بەکاریانبێنە بۆ پاسادان لەڕاستی یاسای ئۆلەر

2



3



4

بڕوانە نموونە 2

پێوانەی ئەمانە بۆ نزیکترین دەیەک بدۆزەوە.

5 تیرەی لاکێشە تەریبێک درێژی 8 cm وپانی 4 cm و بەرزی 12 cm بێت.

6 بەرزی لاکێشە تەریبێک درێژی 10 cm و پانی 6 cm وتیرەکەی 13 cm بێت.

7 تیرەی پوازکێکی وەستاوی بنکە چوارگۆشەیی درێژی لایەکی بنکەکەی 12 cm و بەرزییەکەی 10 cm بێت.

بڕوانە نموونە 3

وێنەی ئەمانە بکێشە.

8 قوچەکێک بەرزییەکەی 4 یەکە و نیوەتیرەی بنکەکەی 8 یەکە و چەقی بنکەکە خاڵی $(0, 0, 0)$ بێت.

9 لولەکێک بەرزییەکەی 4 یەکەو نیوەتیرەی هەردوو بنکەکەی 3 یەکە و چەقی بنکەی خوارەوەی خاڵی $(0, 0, 0)$ بێت.

10 خشتەکێک درێژی لایەکی 7 یەکەو یەکێک لەسەرەکانی خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت.

بڕوانە نموونە 4

دووری نێوان هەردوو خاڵی A و B و پۆتانی ناوەراستی $\overline{AB}$ بدۆزەوە وەڵامەکەت لە نزیکترین دەیەک نزیکبکەوە.

11 $B(9, 5, 10)$ ، $A(0, 0, 0)$

12 $B(7, 0, 14)$ ، $A(0, 3, 8)$

13 $B(9, 12, 15)$ ، $A(4, 6, 10)$

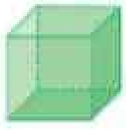
بڕوانە نموونە 5

14 **بۆخۆشی** دوای ڕۆژێک لەئەنجامدانی وەرزشی ڕێرۆشتن لەشاخەکاندا تیمەکە خێوەتگەیەکیان بۆ پشووەهەڵدا کە 3 km ڕووەو ڕۆژهەڵات و 7 km ڕووەو باکوری خاڵی جولان دووربێت و بکەوێتە سەر بەرزاییەک کە 0.6 km بەرزتربێت لە خاڵی جوولانەوە دووری نێوان خاڵی جولان و خێوەتگەکە چەندە؟

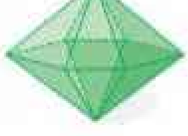
جێبەجێکردنەکان

ژمارەی سەرەکان ولایەکان و ڕووەکان بدۆزەوەو بەکاریان بێنە بۆ پاسادانی لەڕاستی یاسای ئۆلەر

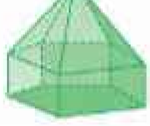
15



16



17



پێوانەی ئەمانە بۆ نزیکترین دەیەک بدۆزەوە.

18 تیرەی لاکێشە تەریبێک درێژییەکەی 7 cm وپانییەکەی 8 cm و بەرزییەکەی 16 cm بێت.

19 بەرزی لاکێشە تەریبێک درێژییەکەی 15 cm وپانییەکەی 6 cm وتیرەکەی 17 cm بێت.

20 درێژی لایەکی خشتەکێک تیرەکەی 8 cm بێت.

ڕاهێنانی ئازاد

بۆ شیکاری پرسیارەکان	سەیری نموونەی
17-15	1
20-18	2
23-21	3
26-24	4
27	5

وێنەی ئەمانە بکێشە.

21 لولەکێك بەرزییەکەی 3 یەکەو نیوەتیرەی بنکە بازنەییەکانی 5 یەکەبێت و چەقی بنکەی خوارەوەی خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت.

22 قوچەکێك بەرزییەکەی 4 یەکە و نیوەتیرەی بنکە بازنەییەکەی 2 یەکە و چەقی بنکەی خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت.

23 پوازکێکی وەستاوی بنکە چوارگۆشەیی یەکێك لەسەرەکانی خاڵی بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بێت درێژی لایەکی بنکەی 5 یەکەو بەرزی 3 یەکە بێت.

دووری نێوان هەردوو خاڵی A و B و پۆتانی ناوەراستی $\overline{AB}$ بدۆزەوە وەڵامەکەت لە نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

24 $B(4, 4, 4)$ ، $A(0, 0, 0)$

25 $B(9, 10, 10)$ ، $A(2, 3, 7)$

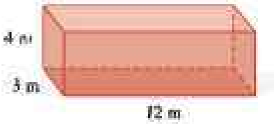
26 $B(8, 8, 10)$ ، $A(2, 5, 3)$

دەروازەیەک

لەسەر سەفا

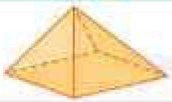
کێشی هەندێ پەڵەهەوری ڕەش دەگاتە نزیکەی 635 هەزار تەن کە لە کێشی 100 هەزار فیل زیاترە.

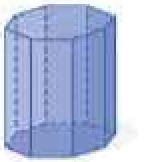
27 **باری کەش و هەوا** بەرزی هەورێك 6500 پێیە. ئەو بارانەی هەورەکە دەیبارێنێت 700 پێیە بەئاراستەی باشور و 500 پێ بەئاراستەی ڕۆژهەڵات بادەیجولێنێت پێش ئەوەی بکەوێتە سەرزەوی. ئەو دوورییەی بارانەکە لە هەورەکەوە بۆ زەوی دەیبڕێت چەندە؟



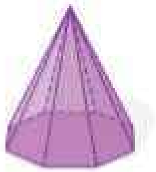
28 **هەنگاوی جۆراوجۆر** درێژی تیرەی لاکێشەتەریبی بەرامبەر بدۆزەوە دەرئەنجامی دوو ئەوەندەکردنی درێژی وپانی و بەرزی لاکێشە تەریبەکە لەسەر درێژی تیرەکە چییە؟

نادیار بدۆزەوە و وێنەی ئەو شێوە ئەندازەییە بکێشە کە ئەو سەرو لاو ڕووانەی هەبێت.

	چەندڕووەکە	ژمارەی ڕووەکان	ژمارەی لایەکان	ژمارەی سەرەکان
		5	8	5
29	■	■	12	8
30	■	5	9	■
31	■	7	■	7

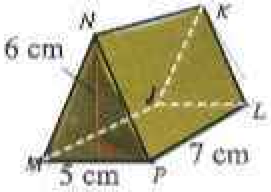


32 **جەبر** هەر بنکەیەك لەدوو بنکەی پوازکی بەرامبەر چەندلایەکە n لای هەیە بەهێ ی n ئەو برانە بنووسە کەژمارەی سەرەکانی پوازکەکە وژمارەی لایەکانی وژمارەی ڕووەکانی بنوێنێت. ئەو ئەنجامانەی بەدەستت هێناوە بەکاربهێنە بۆ پاسادانی ڕاستی پاسای ئۆلەر.



33 **جەبر** بنکەی هەرەمی بەرامبەر چەندلایەکە n لای هەیە بەهێی n ئەو برانە دەرببڕە کە ژمارەی سەرەکانی هەرەمەکە و ژمارەی لایەکانی و ژمارەی ڕووەکانی بنوێنێت. ئەو ئەنجامانەی بەدەستت هێناوە بەکاربهێنە بۆ پاسادانی ڕاستی پاسای ئۆلەر.

34 دەوارەکەی بەرامبەر پوازکێکە بنکەی سێگۆشەیەکی وەستاو بەجۆری $\overline{KJ} \cong \overline{KL} \cong \overline{MN} \cong \overline{NP}$



أ دەوارەکە بەشێوەیەك هەڵدرا کەسەری J خاڵی بنەرەت $(0, 0, 0)$ بێت و سەری M خاڵی $(7, 0, 0)$ بێت پۆتانی سەرەکانی تری بدۆزەوە.

ب پیشەوەری دەوارەکە حەزدەکات دووری نێوان K و P بزانێت تا تولێك زیادبکات بۆ پاڵپشتی دەوارەکە. KP بدۆزەوە وەڵامەکەت لەنزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

پێوانەی نادیاری هەریەک لەلاکێشەتەریبەکان بدۆزەوە وەڵامەکەت بەشێوەی ڕەگێکی سادە بنووسە

	درێژی ℓ	پانی w	بەرزی h	تیرە d
35	6	6	6	■
36	24	■	60	65
37	12	18	■	24
38	■	2	3	4

وێنەی ئەمانە بکێشە

39 لولەکێك بەرزی 5 یەکەو چەقی بنکە بازنەی خوارەوە$(1, 2, 5)$ ونیوەتیرەکەی 4 یەکەبێت.

40 قوچەکێك بەرزییەکەی 7 یەکەو چەقی بنکەکەی$(3, 3, 6)$ ونیوەتیرەکەی 3 یەکەبێت.

41 خشتەکێك درێژی لایەکی 6 یەکەو چەقەکەی خاڵی$(3, 2, 4)$ بێت.

42 لاکێشە تەریبێك سەرەکانی$(4, 2, 5)$ ، $(4, 6, 5)$ ، $(4, 6, 8)$ ، $(8, 6, 5)$ ، $(8, 2, 5)$ ، $(8, 6, 8)$ $(4, 2, 8)$ $(8, 2, 8)$

43 قوچەکێك سەرەکەی $(4, 7, 8)$ و بنکەکەی بازنەیە چەقەکەی $(4, 7, 1)$ ونیوەتیرەکەی 4 یەکەبێت.

44 لولەکێك نیوەتیرەی بنکە بازنەیەکانی 5 یەکە و چەقی بنکەکانی دووخاڵی $(2, 3, 7)$ و$(2, 3, 15)$ بێت

$\overline{AB}$ بکێشە پاشان درێژی وپۆتانی ناوەڕاستی بدۆزەوە وەڵامەکەت بونزیکترین دەیەك نزیکبکەوە

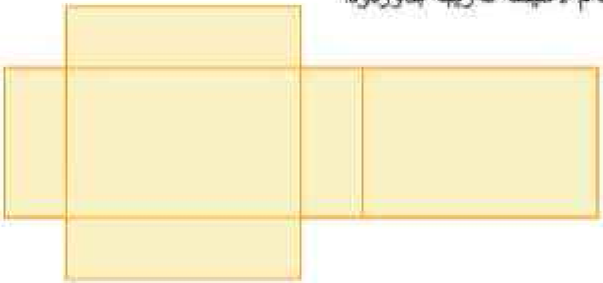
45 $A(1, 2, 3)$ ، $B(3, 2, 1)$ 46 $A(4, 3, 3)$ ، $B(7, 4, 4)$ 47 $A(4, 7, 8)$ ، $B(3, 1, 5)$

48 $A(0, 0, 0)$ ، $B(8, 3, 6)$ 49 $A(6, 1, 8)$ ، $B(2, 2, 6)$ 50 $A(2, 8, 5)$ ، $B(3, 6, 3)$

51 **هەنگاوی جۆراوجۆر**
بەهای z بدۆزەوە ئەگەر بزانیت دووری نێوان $R(6, -1, -3)$ و $S(3, 2, z)$ بکاتە 13 یەکە.

52 وێنەی شێوەیەکی ئەندازەیی بکێشە کە 6 سەرو 6 ڕووی هەبێت.

53 **خەمڵاندن** دووریەکانی ڕووی ئەم لاکێشە تەریبە بدۆزەوە.



54 **دەستەواژەیەك دابڕێژە** بەرای تۆ کام پارچە ڕاستەهێڵ لەوانەی سەرەکانی دەکەونە سەرلاکێشە تەریبێك درێژترە؟ پاسادانی ڕاستی وتەکەت بکە بەبەکارهێنانی بەلایەنی کەمەوە 3 پارچە ڕاستەهێڵ کە سەرەکانی بکەونە سەر لاکێشە تەریبی $ABCDEFGH$ کاتێك $A(0, 0, 0)$ و $B(1, 0, 0)$ و $C(1, 2, 0)$ و $D(0, 2, 0)$ و $E(0, 0, 2)$ و $F(1, 0, 2)$ و $G(1, 2, 2)$ و $H(0, 2, 2)$

55 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** خاڵەکانی $A(3, 2, -3)$ و $B(5, 8, 6)$ و $C(-3, -5, 3)$ سێگۆشەیەك دەنوێنن جۆری سێگۆشەکە بەهۆی لا وگۆشەکانییەوە پۆلێنبکە.

56 **بنوسە** نیوەتیرەی لولەکێك 4 cm و بەرزییەکەی 6 cm درێژی درێژترین پارچە ڕاستەهێڵ چەندە؟ کەسەرەکانی لەسەر لولەکەکەبن؟ شوێنی هەردوو سەری ئەو پارچە ڕاستەهێڵە دیاریبکە. ئەو هۆکارە دیاربکە کە وای لێدەکات درێژترین بێت.

57 ژمارەی سەرەکان و لایەکان و ڕووەکانی هەرەمێکی بنکە شەشلایی چەندە؟

(أ) 6 ڕوو، 10 لا، 6 سەر. (ج) 7 ڕوو، 10 لا، 7 سەر.

(ب) 7 ڕوو، 12 لا، 7 سەر. (د) 8 ڕوو، 18 لا، 12 سەر.

58 کام یەکێك لەمانە نزیکترن لەتیرەی ئەو لاکێشە تەریبەی درێژییەکەی 12 m و پانییەکەی 8 m و بەرزییەکەی 6 m.

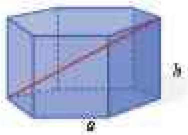
(أ) 6.6 m (ب) 44 m (ج) 15.6 m (د) 244.0 m

(9, 3, 12) (7, 14, 8)

59 دووری نێوان دووخاڵی A (7 ,14 ,8) و B (9 ,3 ,12) چەندە؟ وەڵامەکە لەنزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

(أ) 10.9 (ب) 11.9 (ج) 119.0 (د) 141.0

بەرەنگاری و فراوانکردن



60 **هەنگاوی جۆراوجۆر** بنکەکانی پوازکی بەرامبەر شەشلایەکی ڕێکە درێژی لایەکی a یەکە درێژی تیرە سوورەکە بەپێی درێژی لای a وبەرزی h بدۆزەوە.

61 ئایا خاڵەکانی $A(-1, 2, 4)$ و $B(1, -2, 6)$ و $C(3, -6, 8)$ لە ڕێکی یەکترن.

62 **جەبر** پۆوتانەکان وپاسای دووری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی یاسای پۆوتانی ناوەڕاست.

دراو: خاڵەکانی $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ و $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

داواکراو: سێ خاڵەکە دەکەونە سەر یەك ڕاستەهێڵ و AM: MB

63 **جەبر** پۆوتانەکان بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی ئەوەی تیرەکانی لاکێشەتەریب جووتن و یەکتری لەتدەکەن لە ناوەڕاستیاندا.

دراو: پوازکێکی وەستاوی بنکە لاکێشەیی سەرەکانی $A(0, 0, 0)$ و $B(a, 0, 0)$ و $C(a, b, 0)$ و $D(0, b, 0)$ و $E(0, 0, c)$ $F(a, 0, c)$ و $G(a, b, c)$ و $H(0, b, c)$.

داواکراو: $\overline{AG}$ و $\overline{BH}$ جووتن ویەکتری لەتدەکەن.

پێداچوونەوەی لولپێچی

وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر ژمارەی ئەو کەسانە دەنوێنێت کەسەردانی مۆزەخانەی نیشتیمانیان کردوە بەپێی تەمەنیان. ئەمانە بدۆزەوە (پۆلەکانی پێشوو)

64 ژمارەی ئەو کەسانەی سەردانی مۆزەخانەیان کردوە تەمەنیان لەنێوان 10 ساڵ و 29 ساڵدایە. 55

65 چەشنی ئەو تەمەنانەی کە زۆرترین سەردانکەری تیابوو. 9-0

یاسایەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری هەرشێوەیەکی ئەندازەیی بنووسە دوای گۆڕانی دیاریکراو (پۆلەکانی پێشوو)

66 لاتەریبێك درێژی بنکەکەی b وبەرزییەکەی h بێت دوای دووئەوەندەکردنی بەرزییەکەی. $A=2bh$

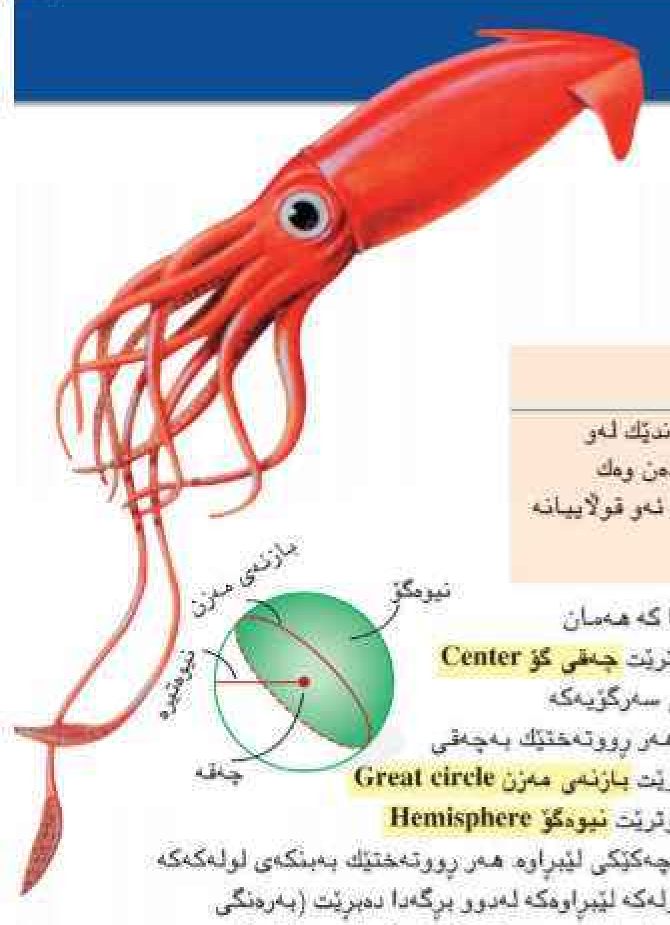
67 نیمچەلا تەریبێك بەرزییەکەی h وبنکەکانی b_1 و b_2 بێت، دوای لێکدانی b_1 لە $\frac{1}{2}$ ، $A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}b_1+b_2\right)h$

68 بازنەیەك نیوەتیرەکەی r بێت دوای سێ جار دووئەوەندەکردنی نیوەتیرە. $A=9\pi r^2$

وێنەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 69 تا 71 (وانەی 1-2)

69 هێڵەکە پۆلێنبکە. 70 لایەکانی ناوبنێ. 71 بنکەکەی ناوبنێ.

قوچەکی بێ لا بازنە کە چەقەکەی c بە



7-1 گـــــۆ

Sphere

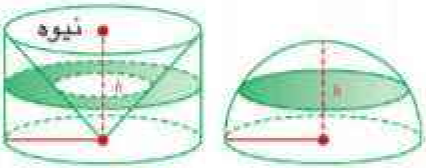
ئامانجەکان
- بیرهێنانەوەی یاسای قەبارەی گۆ و بەکارهێنانی
- بیرهێنانەوەی یاسای رووبەری گۆ و بەکارهێنانی

زاراوەکان Vocabulary
گۆ
Sphere
چەقی گۆ
Center of a sphere
نیوەتیرەی گۆ
Radius of a sphere
نیوەگۆ
Hemisphere
بازنەی مەزن
Great circle
قەبارە
Volume (v)
لوولەک
Cylinder
قوچەک
Cone

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟
زانایانی زیندەزانی توێژینەوە لەسەر چاوی هەندێک لەو گیاندارانەی لەقوڵایی دەریادا دەژین ئەنجامدەدەن وەک مەرەکەبەی زەبەلاح بۆ ئەوەی زانیاریان لەسەر ئەو قوڵاییانە دەسکەوێت. (نموونە 2)

گۆ Sphere بریتییە لە کۆمەڵە خاڵێك لەبۆشاییدا کە هەمان دووریان لەخاڵێکی دیاریکراوەوە هەیە، پێی دەوترێت **چەقی گۆ Center** هەر پارچە ڕاستەهێڵێك چەقی گۆیەکە بەخاڵێکی سەرگۆیەکە بگەیەنێت پێی دەوترێت **نیوەتیرەی گۆ Radius** . هەر ڕووتەختێك بەچەقی گۆیەکەدا بڕوات لەبازنەیەکدا دەیبڕێت پێی دەوترێت **بازنەی مەزن Great circle** دابەشی دەکات بە دوویەشەوە بەهەریەکەیان دەوترێت **نیوەگۆ Hemisphere**

ئەم وێنەیەی خوارەوە نیوەگۆیەکە و لولەکێکە قوچەکێکی لێبڕاوە. هەر ڕووتەختێك بەبنکەی لولەکەکە و بازنەی مەزنی گۆیەکە تەریب بێت گۆیەکە و لولەکە لێبڕاوەکە لەدوو بڕگەدا دەبڕێت (بەرەنگی سەوز دیاریکراون) کە ڕووبەرەکانیان یەکسان دەبێت. لەمەوە دەستدەکەوێت کە تیرەی گۆیەکە و ئەو لولەکەی قوچەکەی لێبڕاوە لەقەبارەدا یەکسان دەبن. پاڵپشت بە ڕێسای کاڤالیرا Cavalier's Principle . یەکسانبوونی دوو ڕووبەرەکە دەسەلمێنرێت لەپرسیاری 39 دا.



بەرزی لولەکەکە یەکسانە بە نیوەتیرەی گۆیەکە

V (Hemisphere) = V (Cylinder) - V (Cone)

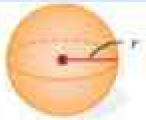
V (نیوەگۆ) = V (لوولەك) − V (قوچەك)

$$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$= \frac{2}{3}\pi r^2 h$$
$$= \frac{2}{3}\pi r^2 (r) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

لەمەوە دەستدەکەوێت، قەبارەی گۆیەك نیوەتیرەکەی r بێت بریتییە لە $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ چونکە قەبارەی گۆیەکە یەکسانە بەدووئەوەندەی قەبارەی نیوە گۆیەکە.

هێربە

قەبارەی گۆ



قەبارەی گۆیەك نیوەتیرەکەی r بێت بەیاسای $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ هەژماردەکرێت

نموونــــە 1 دۆزینەوەی قەبارەی گۆ

بەپێی π بدۆزەوە.

أ قەبارەی گۆی بەرامبەر

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3}\pi (9)^3 = 972\pi$

$V = 972\pi$

بەهای نیوەتیرەکە دابنێ وپاشان سادەی بکە.

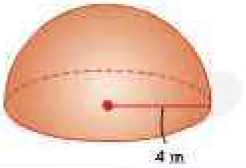
قەبارەی ئەو گۆیە دەکاتە $972\pi\ cm^3$

ب **تیرەی گۆیەك قەبارەكەی $972\pi\ cm^3$**

$972\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$	بەهای r لە $\frac{4}{3}\pi r^3 = r$ دا لەجیاتی بكە
$729 = r^3$	هەردوو لا دابەشی $\frac{4}{3}\pi$ بكە
$r = 9$	رەگی سێجای هەردوو لا وەربگرە

$d = 2 \times r = 2 \times 9 = 18$

تیرەی ئەو گۆیە دەكاتە 18 m



ج **قەبارەی نیوەگۆی بەرامبەر**

$V = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi(4)^3 = \frac{128\pi}{3}$

قەبارەی نیوەگۆیەكە بریتییە لە $\frac{128\pi}{3}\ m^3$

خاڵی چاودێری

1. نیوەتیرەی گۆیەك بدۆزەوە قەبارەكەی $2304\pi\ cm^3$ بێت.

نموونە 2 جێبەجێكردن لەسەر زیندەزانی

مەرەكەبە گیانداریكی دەریاییە و لەقوڵایی دەریادا دەژی، مەرەكەبە پێویستە چاوی فراوان بێت تابەتاسانی بتوانێت لە رووناكییەكی متدا كە بەسەر قوڵایی دەریادا دەكشێت نێچیرەكەی ببینێ تیرەی گۆی چاوی مەرەكەبەی زەبەلاح دەگاتە 25 cm ئەوە لەكاتێكدا تیرەی گۆی چاوی مرۆڤ 2.5 cm بەنزیكەیی ئایا قەبارەی گۆی چاوی مەرەكەبەی زەبەلاح چەندنەوەندەی قەبارەی گۆی چاوی مرۆڤە؟

قەبارەی گۆی چاوی مرۆڤ	قەبارەی گۆی چاوی مەرەكەبەی زەبەلاح
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$V = \frac{4}{3}\pi(1.25)^3$	$V = \frac{4}{3}\pi(12.5)^3$

قەبارەی گۆی چاوی مرۆڤ

$8.18\ cm^3$ بەنزیكەیی.

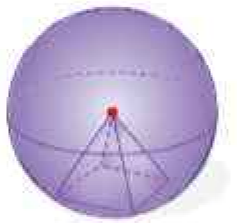
قەبارەی گۆی چاوی مەرەكەبەی زەبەلاح

$8181.23\ cm^3$ بەنزیكەیی.

پێوانەی قەبارەی چاوی مەرەكەبەی زەبەلاح 1000 ئەوەندەی قەبارەی چاوی مرۆڤە.

خاڵی چاودێری

2. تیرەی گۆی چاوی باڵندەی طنان 0.6 cm بەنزیكی. قەبارەی گۆی چاوی مرۆڤ چەند ئەوەندەی قەبارەی گۆی چاوی ئەو باڵندەیە؟



لە وێنەكەی بەرامبەردا سەری هەرەمەكە دەكەوێتە چەقی گۆیەكەوە، بەرزی هەرەمەكە یەكسانە بە نیوەتیرەی گۆیەكە بەنزیكەیی. وای دابنێ گۆیەكە بە n هەرەم پڕكرا، رووبەری بنكەی هەر یەكێكیان B و بەرزییەكەی r بێت.

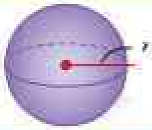
$V(\text{Sphere}) = \frac{1}{3}Br + \frac{1}{3}Br + \ldots + \frac{1}{3}Br$	قەبارەی گۆیەكە یەكسانە بە سەرجەمی قەبارەی هەرەمەكان بەنزیكەیی.
$\frac{4}{3}\pi r^3 = n\left(\frac{1}{3}Br\right)$	
$4\pi r^2 = nB$	هەردوولا دابەشی $\frac{1}{3}r$ بكە.

ئەگەر هەرەمەكان گۆیەكەیان پڕكردەوە ئەوا سەرجەمی رووبەری بنكەكانیان یەكسانە بە رووبەری گۆیەكە بەنزیكەیی واتە $S = 4\pi r^2$ تا ژمارەی هەرەمەكان زیاتربێت كۆی رووبەری بنكەكان لە رووبەری گۆیەكە نزیكتردەبێتەوە.

فێربە

ڕووە ڕووبەری گۆ

ڕووبەری ڕووی گۆیەك نیوەتیرەكەی r بێت بەپیاسای $S=4\pi r^2$ هەژماردەكرێت.



نموونـــــە 3 دۆزینەوەی ڕووبەری ڕووی گۆ

بەپێی π ئەمانە بدۆزەوە.

أ ڕووبەری ڕووی گۆیەك تیرەكەی **10 cm** بێت.

$$S=4\pi r^2=4\pi(5)^2=100\pi$$

ڕووبەری ڕووی گۆیەكە دەكاتە $100\pi\ cm^2$

ب قەبارەی گۆیەك ڕووبەری ڕووەكەی **$144\pi\ cm^2$**

$$S=4\pi r^2$$
$$144\pi=4\pi r^2$$
$$6=r$$
$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6)^3=288\pi$$

قەبارەی گۆیەكە دەكاتە $288\ cm^3$

ج ڕووبەری ڕووی گۆیەك ڕووبەری بازنە مەزنەكەی **$4\pi\ cm^2$** بێت.

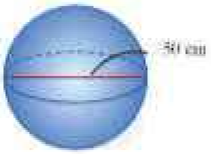
$$\pi r^2=4\pi$$

$$r=2$$
$$S=4\pi r^2=4\pi(2)^2=16\pi$$

ڕووبەری ڕووی گۆیەكە دەكاتە $16\pi\ cm^2$

خاڵی جاوێتری

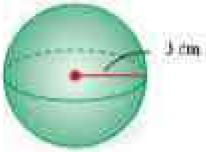
3. ڕووبەری ڕووی گۆی بەرامبەر بدۆزەوە.



نموونـــــە 4 دەرخستنی كاریگەری گۆڕانی پێوانەكان لەسەر قەبارەو ڕووبەری ڕووی گۆ.

نیوەتیرەی گۆیەك لە 3 درا. كاریگەری ئەوە لەسەر قەبارەكەی باسبكە.

گۆیە بنەڕەتییەكە	گۆیەكە دوای گەورەكردنی نیوەتیرەكەی
$V=\frac{4}{3}\pi r^3$	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$
$=\frac{4}{3}\pi(3)^3$	$=\frac{4}{3}\pi(9)^3$
$=36\pi$	$=972\pi$



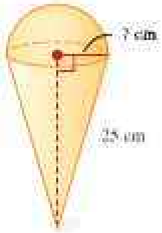
سەرنجبدە كە $972\pi=27(36\pi)$ واتە كاتێك نیوەتیرەكە لە 3 دەدرێت ئەوا قەبارەكەی لە 27 دەدرێت. [تێبینی بكە 27 سێجای 3 ە]

خاڵی جاوێتری

4. چۆن قەبارەی گۆیەك دەگۆڕێت ئەگەر نیوەتیرەكەی دابەشی 3 بكرێت؟

نموونــــە 5 دۆزینەوەی قەبارە و ڕووبەری ڕووی تەنە ئاوێتەکان (پێکهاتووەکان)

ڕووبەری ڕوو و قەبارەی تەنی بەرامبەر بەپێی π بدۆزەوە.



ڕووبەری ڕووی ئەم تەنە ئاوێتەیە بریتییە لە سەرجەمی ڕووبەری نیوەگۆیەکە و تەنیشتەڕووی قوچەکەکە.

$S(\text{نیوەگۆ}) = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi(7)^2 = 98\pi \text{ cm}^2$

$S(\text{قوچەک}) = \pi r G = \pi(7)(25) = 175\pi \text{ cm}^2$

$S(\text{تەنە ئاوێتەکە}) = 98\pi + 175\pi = 273\pi \text{ cm}^2$

ڕووبەری ڕووی تەنە ئاوێتەکە دەکاتە $273\pi \text{ cm}^2$

دەستپێبکە بە دۆزینەوەی بەرزی قوچەکەکە.

$$h = \sqrt{25^2 - 7^2}$$

$$h = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

قەبارەی ئەم تەنە ئاوێتەیە دەکاتە کۆی هەردوو قەبارەی نیوەگۆ و قوچەکەکە

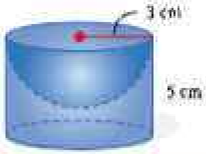
$V(\text{نیوەگۆ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi(7)^3 = \frac{686\pi}{3} \text{ cm}^3$

$V(\text{قوچەک}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(7)^2(24) = 392\pi \text{ cm}^3$

$V(\text{تەنە ئاوێتەکە}) = \frac{686\pi}{3} + 392\pi = \frac{1862\pi}{3} \text{ cm}^3$

قەبارەی تەنە ئاوێتەکە دەکاتە $\frac{1862\pi}{3} \text{ cm}^3$.

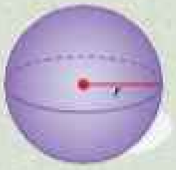
خاڵی چاودێری

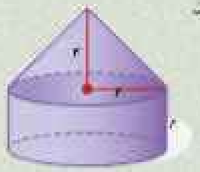


5. ڕووبەری ڕوو وقەبارەی ئەم تەنە ئاوێتەی بەرامبەر بدۆزەوە.

بیربکەوە و ئاوتوێبکە

1. چۆن ڕووبەری ڕووی گۆیەک هەژماردەکەیت ئەگەر ڕووبەری بازنە مەزنەکەی بزانیت؟
2. بەراوردبکە لەنێوان قەبارەی گۆی بەرامبەرو قەبارەی تەنە ئاوێتەکەی تەنیشتی.





فێربە

3. ڕێکخەرە ئەم هێڵکارییە دروستبکە وتەواوی بکە.

ئەگەر نیوەتیرەی گۆیەکە r بێت کەواتە

قەبارەی گۆیەکە دەکاتە	ڕووبەری ڕووی گۆ دەکاتە	ڕووبەری بازنە مەزنەکە دەکاتە ......

7-1 ڕاهێنانەکان

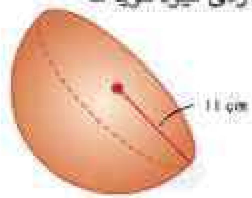
ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** باسی نیوەتیرەی بازنە و هەردوو سەرەکانی بکە.

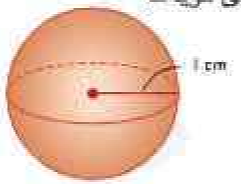
بڕوانە نموونە 1

بەپێی ی π بدۆزەوە.

2 قەبارەی نیوە گۆیەکە



3 قەبارەی گۆیەکە



4 نیوەتیرەی گۆیەک قەبارەکەی $288\pi\ cm^3$ بێت.

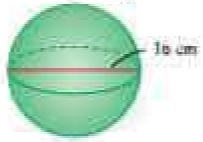
بڕوانە نموونە 2

5 **خواردن** چەندجار قەبارەی نیوە لیمۆیەک دەکاتە قەبارەی نیوە پرتەقاڵەکە؟

بڕوانە نموونە 3

بەپێی π بدۆزەوە.

6 ڕووبەری ڕووی گۆیەکە



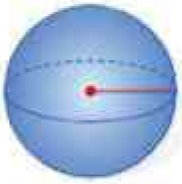
7 ڕووبەری ڕووی گۆیەکە.

8 قەبارەی گۆیەک کە ڕووبەری ڕووەکەی $6724\pi\ m^2$

بڕوانە نموونە 4

کاریگەری هەر گۆڕانێک لەسەر پێوانەی دراو باسبکە.

9 ڕووبەری ڕووی گۆیەک دوای دوو ئەوەندەکردنی نیوەتیرەکەی.

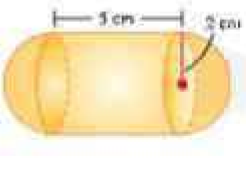


10 قەبارەی گۆیەکە دوای بچووکردنەوەی تیرەکەی بۆ چارەکێك.

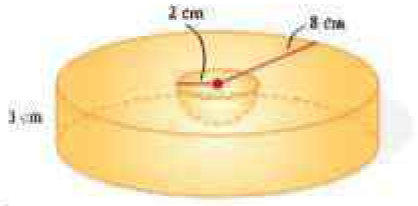
بڕوانە نموونە 5

ڕووبەری ڕوو و قەبارەی هەریەکە لەم تەنە ئاوێتانە بدۆزەوە.

11



12



جێبەجێکردنەکان

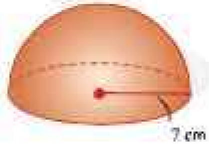
بۆ شیکارکردنی تەماشای نموونەی	پرسیارەکان
1	15–13
2	16
3	19–17
4	21–20
5	23–22

راهێنانی ئازاد

بەپێی π بدۆزەوە.

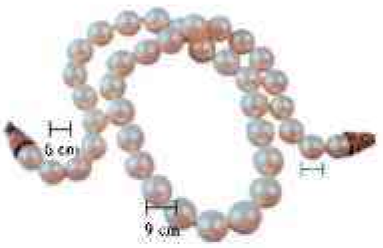
13 قەبارەی گۆ

14 قەبارەی نیوەگۆکە



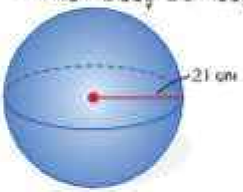
15 تیرەی گۆیەک قەبارەکەی $7776\pi\,cm^3$ بێت.

16 **خشڵ** پێوانەی مرواری بەدرێژی تیرەکەی بە میلیمەتر دیاریدەکرێت. قەبارەی مروارییەک تیرەکەی 9 mm بێت چەند جارگەورەترە لە قەبارەی مروارییەک تیرەکەی 6 mm بێت.

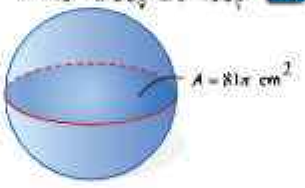


بەپێی π بدۆزەوە.

17 ڕووبەری ڕووی گۆیەکە



18 ڕووبەری ڕووی گۆیەکە



19 قەبارەی گۆیەک ڕووبەرەکەی $625\pi\,m^2$ بێت.

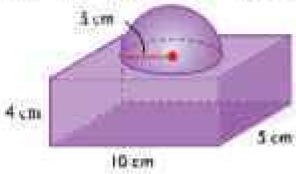
کاریگەری هەر گۆڕانێک لەسەر پێوانەی دراو باسبکە.

20 کاریگەری لێکدانی نیوەتیرە لە $\frac{1}{5}$ لەسەر ڕووبەری ڕووەکەی چەندە؟

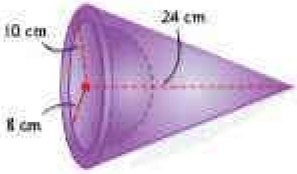
21 کاریگەری لێکدانی تیرە لە 6 لەسەر قەبارەکەی.

قەبارەو ڕووبەری هەرتەنێکی ناوێتە بدۆزەوە.

22



23



24 نیوەتیرەی نیوەگۆیەک بدۆزەوە قەبارەکەی $144\pi\ cm^3$ بێت.

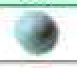
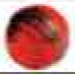
25 چێوەی بازنەی مەزنی گۆیەک بدۆزەوە کەڕووبەری ڕووەکەی $60\pi\ cm^2$ بێت.

26 قەبارەی گۆیەک بدۆزەوە کە چێوەی بازنەی مەزنەکەی 36π cm بێت.

27 ڕووبەری ڕوو و قەبارەی ئەو گۆیە بدۆزەوە کەچەقەکەی دەکەوێتە سەرخاڵی بنەڕەت (0, 0, 0) لەبۆشایی پۆوتاندا و بەخاڵی(2, 3, 6) دا دەڕوات.

28 **خەملاندن** مروارییەکی گۆیی تیرەکەی 8 mm بەچاڵکردنی بە لولەکێکی بازنەیی تیرەکەی 2 mm بوو لەناوەوە کونکرا. ڕووبەری ڕوو و قەبارەی مرواریە کونکراوەکە بخەملێنە.

وەرزش پێوەرەنادیارەکانی هەر تۆپێك لەتۆپەکانی هەندێك لە یارییە وەرزشەییەکان بدۆزەوە.

	وەرزش	تۆپ	تیرە	چێوەی بازنەی مەزن	ڕووبەر	قەبارە
29	گۆلف		4.27 cm	■	■	■
30	کریکت		■	22.86 cm	■	■
31	تێنس		6.35 cm	■	■	■
32	بۆلینگ		74 mm	■	■	■

33 **زیندەزانی** ژێردەریای باتسفیر یەکەم ژێردەریای توێژینەوەکانی ئاوی بوو. لەسەر شێوەی گۆیەك لەساڵی 1930 دروستکرا، تیرەی ناوەوەی ئەم ژێردەریاییە نزیکەی 137 cm بوو، ئەستووری ئەو پۆلایەی کەپێی دروستکرابوو 3.8 cm بوو، ئەم ژێردەریایە 3 پەنجەرەی بازنەیی هەبوو کەتیرەی هەر یەکێکیان نزیکەی 30 cm بوو. قەبارەی ئەو پۆلایەی کەبەکارهێنراوە بۆ دروستکردنی ئەم ژێردەریایە بخەمڵێنە.

زانستی زیندەی ئاوی

ژێردەریای باتسفیر لەساڵی 1934 گەیشتە قوڵایی 923 m پەستانی ئاوەکە لەسەری گەیشتە 34 یەکەی پەستانی کەش.

34 **جوگرافیا** نیوەتیرەی گۆی زەوی دەگاتە 6437 km بەنزیکەیی. $\frac{2}{3}$ی ڕووی زەوی بەئاو داپۆشراوە ڕووبەری وشکانییەکە بخەمڵێنە.

گەردون ئەم خشتەیە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 35 تا 38

هەسارە	تیرە بە میل
عەتارد	3032
زوهرە	7521
زەوی	7926
مەریخ	4222
مشتەری	88846
زوحەل	74898
ئورانوس	31763
نیتون	30775
بلوتو	1485

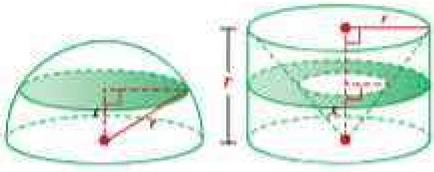
35 قەبارەی مشتەری چەند ئەوەندەی قەبارەی زەوییە؟

36 کام هەسارە قەبارەکەی بەنزیکەیی دەگاتە سەرجەمی هەردوو قەبارەی زوهرەو مەریخ؟

37 کامیان گەورەترە ڕووبەری زوحەل یان سەرجەمی هەردوو ڕووبەری ئورانوس و نیتون؟

38 ڕووبەری عەتارد چەند ئەوەندەی ڕووبەری بلوتۆیە؟

39 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** نیوەگۆکە و لولەکەکە هەمان نیوەتیرەیان هەیە لەوێنەی بەرامبەر. ڕوونیبکەوە دووبڕگە ڕەنگکراوەکە هەمان ڕووبەریان هەیە.



40 **بنووسە** وایدابنێ گۆیەك و خشتەکێك هەمان ڕووبەری ڕوویان هەیە هاوکێشەیەك بنووسە پەیوەندی نێوان نیوەتیرەی گۆیەکە r و درێژی لایەکی خشتەکەکە s پیشان بدات.

41 کارگەیەکی شەربەتی پرتەقاڵ دەفری گۆیی شێوە پرتەقاڵی بەکاردەهێنا لەپڕکردنەوەی بەرهەمەکەی ڕووبەری ڕووی دەفرە گۆییەکە $324.5\ cm^2$ بەنزیکەیی.

أ قەبارەی ئەو دەفرە گۆییە چەندە؟ وەڵامەکەت نزیکبکەوە لە نزیکترین دەیەك.

ب کارگەکە بڕیاریدا نیوەتیرەی دەفرە گۆیەکە بەڕێژەی 10% زیادبکات. قەبارەی دەفرە تازەکە چەندە؟

42 گۆیەک نیوەتیرەکەی 8 cm بەخشتەکێک دەوردراوە ڕێژەی قەبارەی خشتەکە بۆ گۆیەکە چەندە؟

(أ) $2:\frac{1}{3}\pi$ (ب) $2:3\pi$ (ج) $1:\frac{4}{3}\pi$ (د) $1:\frac{2}{3}\pi$

43 ڕووبەری ڕووی گۆیەک چەندە؟ قەبارەکەی $10\frac{2}{3}\pi\ cm^3$ بێت

(أ) $8\pi\ cm^2$ (ب) $10\frac{2}{3}\pi\ cm^2$ (ج) $16\pi\ cm^2$ (د) $32\pi\ cm^2$

44 کام بڕەیە قەبارەی تەنی ئاوێتەی بەرامبەر کە لەنیوە گۆیەک نیوەتیرەکەی r وخشتەکێک درێژی لایەکی $2r$ پێکدێت دەنوێنێت.

(أ) $\left(\frac{2}{3}\pi+8\right)r^3$ (ج) $2(2\pi+12)r^2$

(ب) $\frac{4}{3}\pi r^3+2r^3$ (د) $\frac{4}{3}\pi r^3+8r^3$

بەرەنگاری و فراوانکردن

45 **خواردن** ئامێری بەشینەوەی بنیشتی گۆیی، لەگۆیەک پێکدێت تیرەکەی 18 cm ئامێرەکە 1 300 بنیشتی گۆیی تێدایە 57% قەبارەکەی دەگرێتەوە. تیرەی هەر بنیشتێکی گۆیی بخەملێنە.

46 دەتوانرێت ڕووبەری ڕووی گۆ بۆ دۆزینەوەی قەبارەکەی بەکاربهێنرێت.

أ) یاسای ڕووبەری ڕووی گۆ بۆ هەژمارکردنی نیوەتیرەکەی r بەپێی ڕووبەری S بەکاربهێنە

ب) لەیاسای قەبارەی گۆدا لەجیاتی r ئەو بەهایە دابنێ کە لە پرسیاری پێشودا دۆزیتەوە

ج) وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەو نەخشەیە بکێشە کە قەبارەی گۆیەکە بەپێی ڕووبەری ڕووی گۆیەکەی دەردەبڕێت باسی ڕوونکردنەوەی وێنەکە بکە.

وێنەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی هەردوو پرسیاری 47 و 48 .

47 پەیوەندی لەنێوان قەبارەی گۆو قەبارەی لولەک چییە؟

48 پەیوەندی نێوان ڕووبەری ڕووی گۆیەکەو تەنیشتە ڕووبەری لولەکەکە چییە؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

نەخشەیەک بنووسە کە وێنە ڕوون کردنەوەییەکەی بەم خاڵانەی خوارەوەدا بڕوات. (پۆلەکانی پێشوو)

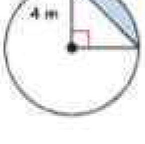
> **بۆ لێدوان**
>
> ئایا ئەتوانیت نەخشە دابنێین ئەگەر خاڵەکانمان زانی.

49 $\{(0,1),(1,2),(-1,2),(2,5),(-2,5)\}$

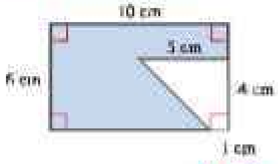
50 $\{(-1,9),(0,10),(1,11),(2,12),(3,13)\}$

ڕووبەری بەشە ڕەنگکراوەکە بدۆزەوە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەک نزیکبکەوە. (پۆلەکانی پێشوو)

51



52



کاریگەری هەر گۆڕانێک لەسەر قەبارە باسبکە. (پۆلەکانی پێشوو)

53 قەبارەی خشتەکێک دوای لێکدانی لایەکی لە $\frac{3}{4}$

54 قەبارەی پوازکێک دوای لێکدانی هەریەکە لەبەرزی و ڕووبەری بنکەکەی لە 5.

8-1 کەرتە بازنەییەکان و کەوانەکان

Sector and arcs

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت

جوتیارەکان نیوەتیرەی بازنە بەکاردەهێنن بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری ئەو ناوچەیەی کە ئاودێری دەیانگرێتەوە. (نموونە 3)

ئامانجەکان

- ڕووبەری کەرتی بازنەیی هەژماردەکات.
- درێژی کەوانە هەژماردەکات.

زاراوەکان
Vocabulary

کەرتە بازنە
Sector of a circle

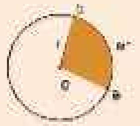
پارچە بازنەیی
Segment of a circle

درێژی کەوانە
Arc length

ڕووبەری کەرتە بازنەیی بەشێکە لە ڕووبەری ئەو بازنەیەی کە تیایەتی بۆ ئەوەی ڕووبەری کەرتە بازنەیەک کە گۆشەکەی m° یە هەژماربکەیت ڕووبەری بازنەکە لە $\frac{m^\circ}{360^\circ}$ بدە.

فێربە

کەرتە بازنەیی

پێناسە	ناولێنان	وێنە	ڕووبەر
کەرتە بازنەیی **Sector of a circle** بەشێکی دیاریکراوە لەبازنەکە بە دوو نیوەتیرە ئەو کەوانەیەی پێیان سنووردراوە دیاری دەکرێت.	کەرتی BCD		$A=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

نموونە 1

دۆزینەوەی ڕووبەری کەرتە بازنەیی

ڕووبەری هەریەکە لەم کەرتە بازنەییانە بەپێی π بدۆزەوە و ئەنجامەکە بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

أ کەرتی MPN

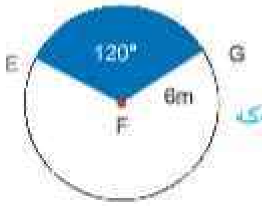
پاسای ڕووبەری کەرتە بازنەیی. $A=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

لەجیاتی هەریەکە لە نیوەتیرە وپێوانەی گۆشەکە بەهاکەی دابنێ. $A=\pi(3)^2\left(\frac{80^\circ}{360^\circ}\right)$

سادەبکە. $A=2\pi$

ڕووبەری ئەو کەرتە $2\pi\ m^2 \approx 6.28\ m^2$

ب کەرتی GFE



پاسای ڕووبەری کەرتە بازنەیی. $A=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

لەجیاتی هەریەکە لە نیوەتیرە وپێوانەی گۆشەکە بەهاکەی دابنێ. $A=\pi(6)^2\left(\frac{120^\circ}{360^\circ}\right)$

سادەبکە. $A=12\pi\ cm^2$

ڕووبەری ئەو کەرتە دەکاتە $12\pi\ cm^2 \approx 37.70\ cm^2$

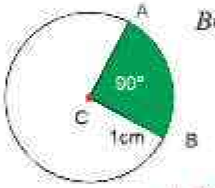
ئاگاداربە!

هێمای پلە لەدوای m لە پاساکەدا بنووسە بۆ ئەوەی بیرتبێتەوە کەپێوانەی کەوانەکەت بەکارهێناوە نەک درێژییەکەی.

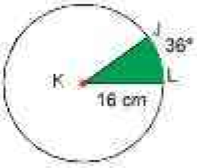
خاڵی چاودێری

1. ڕووبەری ئەم کەرتە بازنەییانە بدۆزەوە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکیبکە

أ کەرتی BCA



ب کەرتی JKL



نموونە 2 جێبەجێکردن لە کشتوکاڵدا

تیرەی بازنەی ئاودێری دەگاتە $120m$ ڕووبەری ئەو کەرتە بازنەییەی ئامێرە ئاودێرییەکە ئاوی دەدات کاتێک $50°$ دەسوڕێ هەژماربکە و وەڵامەکە بەنزیکترین مەتر دووجا بدۆزەوە.

$A=\pi r^2\left(\frac{m°}{360°}\right)$ پاسای ڕووبەری کەرتە بازنەیی

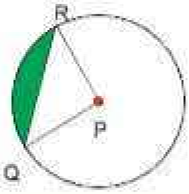
$A=\pi(60)^2\left(\frac{50°}{360°}\right)$ $r=360$ cm

$A=500\pi$ سادەبکە

ڕووبەری کەرتە دەکاتە $1\,571\ m^2$ بەنزیکەیی.

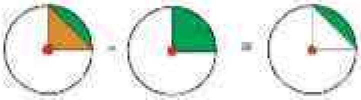
خاڵی چاودێری

2. ئەو ڕووبەرە چەندە کاتێک ئامێرەکە نیوخول بسوڕێتەوە؟



پارچەی بازنەیی **segment of a Circle** بریتییە لە ناوچەیەکی دیاریکراو لەبازنەکە بەژێی و ئەو کەوانەیی کەهەردوو سەری ژێیەکەی گەیاندووە دیاریدەکرێت.

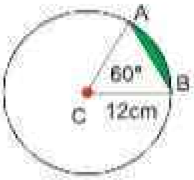
ڕووبەری پارچە بازنەیی



ڕووبەری پارچە بازنەیی = ڕووبەری کەرتی بازنەیی − ڕووبەری سێگۆشە

نموونە 3 دۆزینەوەی ڕووبەری پارچەی بازنەیی

ڕووبەری پارچەی بازنەیی ACB بدۆزەوە، بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیککرابێتەوە.

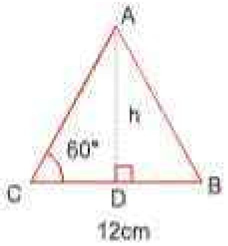


هەنگاوی 1 ڕووبەری کەرتی بازنەیی ACB بدۆزەوە.

$A_1=\pi r^2\left(\frac{m°}{360°}\right)$ پاسای ڕووبەری کەرتە بازنەیی

$A_1=\pi(12)^2\left(\frac{60°}{360°}\right)$

$=24\pi\ cm^2$ سادەبکە



هەنگاوی 2 ڕووبەری سێگۆشەی ACB بدۆزەوە

بەرزی $\overline{AD}$ بکێشە.

$A_2=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(12)(6\sqrt{3}$

$A_2=36\sqrt{3}\ cm^2$

لەبیرت بێت

لەسێگۆشە وەستاوی $90-60-30$ دا درێژی لای بەرامبەر گۆشەی $60°$ لە لاکانی لای تەنیشتی لە $\sqrt{3}$ پەیدابووە

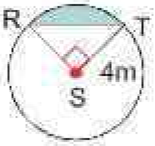
هەنگاوی 3 ڕووبەری پارچەکە = ڕووبەری کەرتەکە − ڕووبەری سێگۆشە

$$A = 24\pi - 36\sqrt{3} \approx 13.04$$

ڕووبەری کەرتەکە $13.04\ cm^2$ بەنزیکەیی.

خاڵی چاودێری

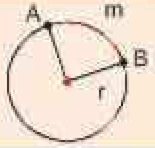
3. ڕووبەری پارچە بازنەیەکە بۆ نزیکترین بەش لەسەد بدۆزەوە.



هەروەك چۆن كەرتی بازنەیی بەشێکە لە ڕووبەری بازنەکە، هەروەها درێژی کەوانەکەشی بەشێکە لەچێوەکەی.

فێربە

درێژی کەوانە

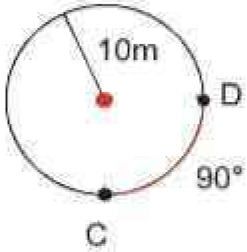
پێناسە	وێنە	درێژی
درێژی کەوانە **Arc length** بریتییە لە درێژی ئەو داوە دەزوەی نوساوە بەکەوانەکەوە و هەردوو لاکەی دەگەیەنێت.		$L = 2\pi r\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

* تێبینی ئەوە بکە درێژی کەوانە و نیوەتیرەی بازنە هەمان یەکەی درێژییان هەیە.

نموونە 4 دۆزینەوەی درێژی کەوانە

درێژی هەر کەوانەیەك بەپێی π بدۆزەوە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکیبکەوە.

أ $\widehat{CD}$



$$L = 2\pi r\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$$

$$L = 2\pi(10)\left(\frac{90^\circ}{360^\circ}\right)$$

$$L = 5\pi \approx 15.71$$

درێژی کەوانەکە $15.71\ m$ بەنزیکەیی.

ب لەبازنەیەکدا نیوەتیرەکەی $3\ m$ و پێوانەی کەوانەکەی 35° یە

$$L = 2\pi r\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$$

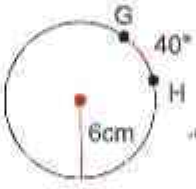
$$L = 2\pi(3)\left(\frac{35^\circ}{360^\circ}\right)$$

$$L = \frac{7}{12}\pi \approx 1.83$$

درێژی کەوانەکە دەگاتە $1.83\ m$ بەنزیکەیی.

خاڵی چاودێری

4. درێژی هەر کەوانەیەك بەپێی π بدۆزەوە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکیبکەوە.



أ لەبازنەیەکدا پێوانەی کەوانەکەی 40° و نیوەتیرەکەی $6\ cm$ بێت.

ب لە بازنەیەکدا پێوانەی کەوانەکەی 135° و نیوەتیرەکەی $4\ cm$ بێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. جیاوازی لەنێوان درێژی کەوانە وپێوانەکەیدا چییە؟
2. کاتێك پیتزایەك بۆ چەند کەرتێکی بازنەیی یەکسان دابەشدەکەی هەریەکەیان کەرتێکی بازنەیی دەبێت. ئەو زانیارییانە کامانەن کەپێویستە بۆ دۆزینەوەی پارچەیەك لەپارچەکانی پیتزاکە؟
3. ڕێکخەریە ئەم خشتەیەی خوارەوە بنووسە و تەواویبکە.

	پاساکەی	وێنەکەی
ڕووبەری کەرتی بازنەیی		
ڕووبەری پارچەی بازنەیی		
درێژی کەوانە		

8–1 ڕاهێنانەکان

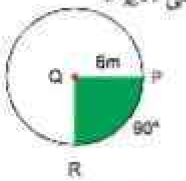
ڕاهێنانی ناڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ئەو ناوچەیەی بەدوو نیوەتیرە لەنیوەتیرەکانی بازنەیەك و ئەو کەوانەیەی سنوریان دەدات بریتییە لە ___?___ (کەرتی بازنەیی یان پارچەی بازنەیی).

بڕوانە نموونە 1

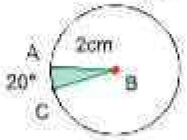
ڕووبەری هەرکەرتێکی بازنەیی بەپێی π بدۆزەوە، پاشان بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

2 کەرتی PQR



3 کەرتی JKL

4 کەرتی ABC



بڕوانە نموونە 2

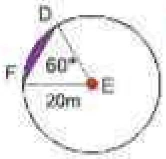
5 **دەریاوانی** تیشکی منارەیەك بەگۆشەیەك پێوانەکەی $150°$ دەسووڕێتەوە. تیشکەکەی تا دووری 3 km دەگات، ئەو ڕووبەرەی تیشکەکە بەسەریدا دەڕوات هەژماربکە بۆ نزیکترین کیلۆمەتر دووجا نزیککرابێتەوە.

بڕوانە نموونە 3

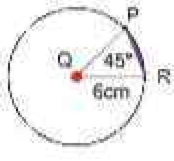
هەنگاوی جۆراوجۆر ڕووبەری هەرپارچە بازنەیەك بدۆزەوە بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیککرابێتەوە.

6

7



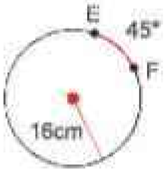
8



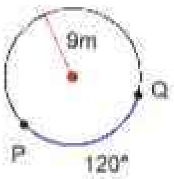
بڕوانە نموونە 4

درێژی هەر کەوانەیەك بەپێی π بدۆزەوە و بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیککرابێتەوە.

9 $\widehat{EF}$



10 $\widehat{PQ}$



11 درێژی کەوانەیەك پێوانەکەی $20°$ بێت، لەو بازنەیەدا نیوەتیرەکەی 6 m بێت.

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

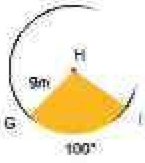
ڕاهێنانی ئازاد

بۆ شیکاری پرسیارەکان	تەماشای نموونە
14–12	1
15	2
18–16	3
21–19	4

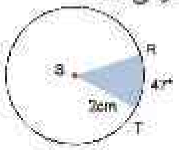
ڕووبەری هەر کەرتە بازنەییەک بەپێی π بدۆزەوە و بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

12 کەرتی DEF

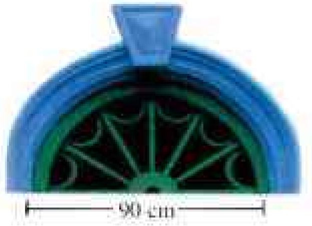
13 کەرتی GHJ



14 کەرتی RST

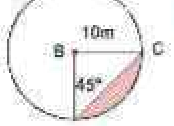


15 **تەلارسازی** تاقی (قمرە) سەر پەنجەرەیەک لەشێوەی نیوبازنەدایە، هەروەک چۆن لەسەر دەرگای مالان هەیە، ڕووبەری ئەو تاقە هەژماربکە بۆ نزیکترین سانتیمەتر دووجا نزیککرابێتەوە.

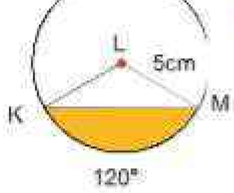


هەنگاوی جۆراوجۆر ڕووبەری هەرپارچە بازنەیەک بدۆزەوە و بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

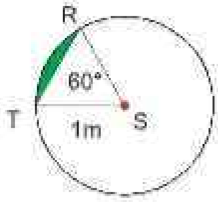
16



17

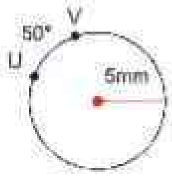


18

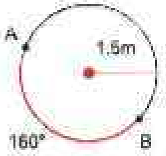


درێژی هەر کەوانەیەک بەپێی π بدۆزەوە و بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

19 $\widehat{UV}$

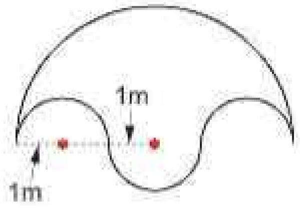


20 $\widehat{AB}$



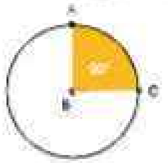
21 لەبازنەیەکدا پێوانەی کەوانەکەی $9°$ وتیرەکەی 6 m بێت.

22 **مێژووی بیرکاری** زانایانی بیرکاری گریکییەکان لەشێوەی بەرامبەر کەناویان ناوە سالینۆن کۆڵیوتەتەوە چێوەی سالینۆنی بەرامبەر هەژماربکە نزیکیبکەوە لەنزیکترین دەیەک.

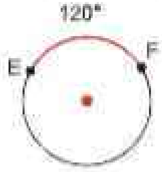


نیوەتیرەی هەر بازنەیەک بدۆزەوە.

23 ڕووبەری کەرتی ABC یەکسانەبە 9π یەکە دووجا



24 درێژی کەوانەی EF یەکسانەبە $8\pi m$

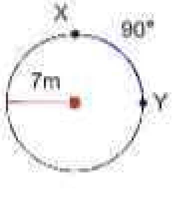


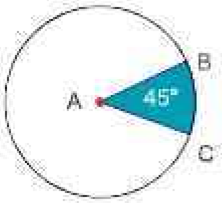
25 **خەملاندن** کەرتی $\frac{22}{7}$ بەهای نزیکەیی ژمارە π یە.

أ ئەو بەهایە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای نزیکەیی درێژی کەوانەی $\widehat{XY}$

ب کلیلی بژمێر بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی کەوانەی $\widehat{XY}$ لەگەڵ وەرگرتنی 8 ڕەنووس دوای فاریزەکە.

ج ئایا ئەوبەها نزیکەییەی لەلقی أ دا دۆزیتەوە گەورەترە لەوەی لە لقی ب دا دۆزینەوە یان بچووکترە؟

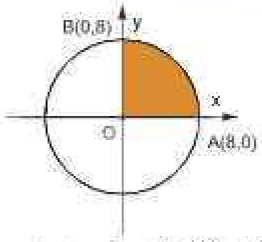




26 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** نیوەتیرەی بازنەیەك بدۆزەوە ئەگەر بزانی ڕووبەرەکەی $24\ cm^2$ پاشان کاتێك ڕووبەری کەرتە سەوزەکە $3\ m^2$ بێت.

27 **بنووسە** چۆن نیوەتیرەی بازنەیەك هەژمارەکەی ئەگەر درێژی کەوانەو پێوانەکەی بزانیت؟

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە



28 ڕووبەری کەرتی AOB چەندە؟

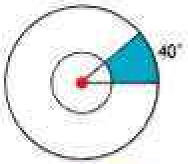
(أ) 4π (ب) 16π (ج) 32π (د) 64π

29 درێژی کەوانەی AB چەندە؟

(أ) 2π (ب) 4π (ج) 8π (د) 16π

30 **کورتە وەڵام** ڕووبەری کەرتێکی بازنەیی چەندە کە بەکەوانەیەك پیوانەکەی $38°$ بێت سنووردراوە لەو بازنەیەدا نیوەتیرەکەی $12\ cm$ بێت؟

بەرەنگاری و فراوانکردن



31 ڕووبەری بەشە شینەکە چەندە؟ ئەگەر بزانی نیوەتیرەی بازنە گەورەکە $5\ cm$ ونیوەتیرەی بچووکەکە $2\ cm$ ؟

32 پارچە پەنیری بەرامبەر کەرتێکە لەلولەك.

[أ] قەبارەی ئەو پارچەیە چەندە؟ بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

[ب] ڕووبەری ڕووی سەرەوەی بدۆزەوە بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

33 **ئەگەر** پێوانەی هەر چەقەگۆشەیەکی لە وێنەی بەرامبەر $45°$ یە، نیوەتیرەی بازنە بچووکەکە یەك گرێیە نیوەتیرەی گەورەکە دوو گرێیە ئەگەری ئەوەی تیرەکە یەکێك لەو ناوچانەی خوارەوە بپێکی چەندە؟

[أ] ناوچەی سوور [ب] ناوچەی شین [ج] ناوچەی سوور یان شین؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

دیاریبکە ئایا هەریەك لەم ڕاستەهێڵانە تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y=4x-5$ یان ئەستوونە یان هیچیان نییە. (پۆلەکانی پێشوو)

34 $8x-2y=6$.

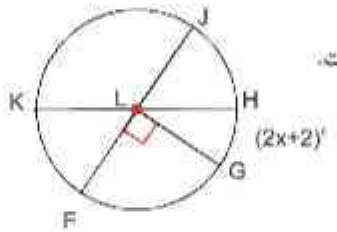
35 ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی $\left(\frac{1}{2},0\right)$ و $\left(1\frac{1}{2},2\right)$ دا دەڕوات.

36 ئەو ڕاستەهێڵەی تەوەری یەکەم لە (4) دا تەوەری دووەم لە (1) دا دەبڕێت.

بەپێی π بدۆزەوە (وانەی 1-7)

37 قەبارەی گۆیەك نیوەتیرەکەی $3\ cm$ بێت.

38 چێوەی (بازنەی مەزن)ی گۆیەك ڕووبەری ڕووەکەی $4\pi\ m^2$ بێت.



هەژماربکە (پۆلەکانی پێشوو)

39 $m\ \widehat{KLJ}$ **40** $m\ \widehat{KJ}$ **41** $m\ \widehat{JFH}$

بەشی

1

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

شوێنی هەرخاڵێك لەبۆشایی بۆوتاندا دیاریبکە.

1 $(-1, 0, 3)$ **2** $(2, -2, 1)$

3 $(0, -1, 1)$ **4** $(3, 1, 0)$

وێنەی هەر ڕووتەختێك لەبۆشایی بۆوتاندا بکێشە.

5 $x-3y+2z=6$ **6** $2x-4y-2z=4$

7 $-x+y-5z=5$ **8** $3x+2y+z=-6$

9 **ئابوری بەکاربەر** ڕوناك 35 000 دیناری پێیە دەیەوێت ساردەمەنی وپیتزاو شیرینی بکڕێت نرخی قوتویەك ساردەمەنی 2 000 دینارو کولێرەیەکی پیتزا 9 000 دینار وپاکەتێك شیرینی 4 000 دینارە هاوکێشەیەك بەسێ نەزانراو بۆ دەربەڕینی ئەوەی سەرەوە بنووسە.

ئەگەر ئەم شێوانە چەندلابوون بەپێی ژمارەی لایەکانی ناویان بنێ.

10

11

12

ئەگەر چەندلاکە ڕێکە یان نارێکە قۆپاوە یان قۆقزە دیاریبکە.

13

14

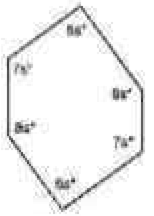
15

بدۆزەوە.

16 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی دوازدەلایەك.

17 پێوانەی هەرگۆشەیەکی ناوەوە لەچەندلایەکی ڕێکدا 20 لای هەبێت.

18 پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوەی چەندلای بەرامبەر.

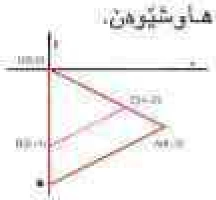


19 پێوانەی گۆشەکانی دەرەوەی چوارلایەکی ڕێك.

20 بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی RST و RUV هاوشێوەن کاتێك $R(1, -3)$ و $S(-1, -1)$ و $T(2, 0)$ و $U(-3,1)$ و $V(3,3)$.

21 بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی JKL و JMN هاوشێوەن کاتێك $J(4, 4)$ و $K(2, 3)$ و $L(4,2)$ و $M(-4, 0)$ و $N(4, -4)$.

22 $O(0, 0)$ و $A(6, -3)$ و $C(4, -2)$ و $D(0, -4)$ بۆوتانی خاڵی B بدۆزەوە ئەگەر بزانیت دوو سێگۆشەی AOB و COD هاوشێوەن.



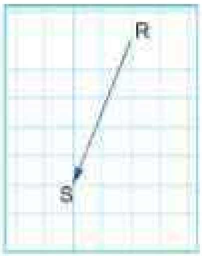
23 وێنەی سێگۆشەی KLM کاتێك $K(0, 3)$ و $L(0, 0)$ و $M(4, 0)$ بێت. پاشان وێنە گەورەکراوەکەی بەرێژەی 3 بکێشە ڕوونیبکەوە دوو سێگۆشەکە هاوشێوەن.

هەر ناڕاستەبڕێك بە دوو پێکنەرەکەی بنووسە.

24 $\overrightarrow{AB}$ کاتێك $A(5, 1)$ و $B(2, 3)$.

25 $\overrightarrow{MN}$ کاتێك $M(2, 4)$ و $N(1, 2)$.

26 $\overrightarrow{RS}$



وێنەی هەر ناڕاستەبڕێك لە ڕووتەختی بۆوتاندا بکێشە ودرێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

27 $\langle -5, -3 \rangle$ **28** $\langle -2, 0 \rangle$

29 $\langle 4, -4 \rangle$ **30** $\langle 4, 4 \rangle$

وێنەی هەر ناڕاستەبڕێك لە ڕووتەختی پۆوتاندا بكێشە لارییەكەی بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

31 خێرایی كۆیتەرێك بەناڕاستەبڕی $\langle 5, 4 \rangle$ نوێنرابێت.

32 فڕۆكەیەك بەخێرایی $600\ km/h$ بەناڕاستەی باكوور $55°$ خۆرهەلات دەفڕێت، ئەمە لە كاتێكدا خێرایی بایەك $50\ km/h$ بەناڕاستەی خۆرهەڵات بێت خێرایی ڕاستینەی فڕۆكەكە چەندە؟ لارییە ڕاستینەكەی چەندە؟ خێراییەكە بۆ نزیكترین دەیەك ولارییەكەی بۆ نزیكترین پلە نزیكبكەوە.

هەر پێوانەیەك بدۆزەوە. لەكاتی پێویستدا وەڵامەكەت بۆ نزیكترین دەیەك نزیكبكەوە.

33 چێوەی بازنەی بەرامبەر.

34 ڕووبەری بازنەیەك چێوەی $14\pi\ m$

35 تیرەی بازنەیەك ڕووبەری $64x^2\pi\ cm^2$ بێت.

36 ڕووبەری پێنجلایەكی ڕێك درێژی لایەكی $4\ cm$ بێت.

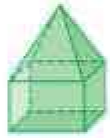
37 ڕووبەری سێگۆشەیەكی ڕێك لایەكی $4\ km$ بێت.

38 ڕووبەری هەشتلایەكی ڕێك لایەكی $8\ cm$ بێت.

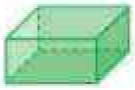
39 ڕووبەری چوارگۆشەیەك تیرەكەی $12\ mm$.

ژمارەی ڕووەكان ولایەكان و سەرەكان لەهەر چەند ڕوویەكدا بدۆزەوە پاسادانی یاسای ئۆلەر بكە

40



41



دووری نێوان هەردوو خاڵەكەو پۆوتانی ناوەڕاستی ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی دووخاڵەكە سنووریداوە بدۆزەوە بۆ نزیكترین دەیەك نزیكبكەوە.

42 $(7, 1, 1), (2, 6, 4)$

43 $(5, 7, 8), (0, 3, 0)$

44 $(9, 1, 5), (7, 2, 6)$

45 $(2, 7, 4), (6, 2, 8)$

بەپێی π ئەمانە بدۆزەوە.

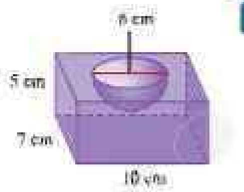
46 قەبارەی گۆیەك ڕووبەری ڕووەكەی $100\pi\ cm^2$ بێت.

47 ڕووبەری گۆیەك قەبارەكەی $288\pi\ cm^3$ بێت.

48 تیرەی گۆیەك ڕووبەرەكەی $256\pi\ cm^2$ بێت.

ڕووبەری ڕوو و قەبارەی هەریەك لەم تەنە ناوێتانە بدۆزەوە.

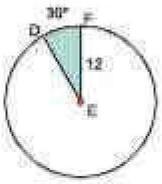
49



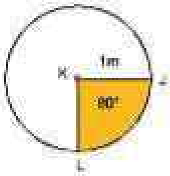
50

ڕووبەری هەر كەرتێكی بازنەیی بەپێی π بدۆزەوە پاشان بۆ نزیكترین بەش لەسەد نزیكبكەوە.

51 كەرتی DEF

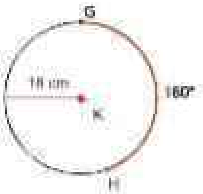


52 كەرتی LKJ

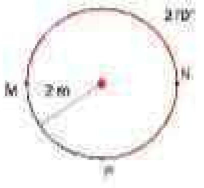


درێژی هەر كەوانەیەك بەپێی π بدۆزەوە پاشان بۆ نزیكترین بەش لەسەد نزیكبكەوە.

53 $\widehat{GH}$



54 $\widehat{MNP}$



بەشی
1

تاقیکردنەوەی بەش

شوێنی هەرخاڵێك لەبۆشایی بۆوتاندا دیاریبکە.

1 $(2, -1, 3)$ **2** $(0, -1, 3)$

3 $(-2, 1, -1)$

شێوەکە چەندلایە یان نا. ئەگەر وایە بەپێی ژمارەی لایەکان ناوی بنێ.

4

5

6 گۆمەتاوێك لەشێوەی چوارلادایە هەروەك لەوێنەی بەرامبەر دیارە پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوەی هەژماربکە.

7 کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی نۆلایەکی قۆقز بدۆزەوە.

8 پێوانەی گۆشەی دەرەوەی چەندلایەکی رێك ژمارەی لایەکانی 15 بێت بدۆزەوە.

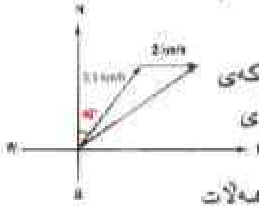
وێنەی هەر ئاراستەبرێك لە رووتەختی بۆوتانەکاندا بکێشە و درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەك هەژماربکە.

9 $\langle 1, 3\rangle$ **10** $\langle -4, 1\rangle$ **11** $\langle 2, -3\rangle$

وێنەی هەر ئاراستەبرێك لە رووتەختی بۆوتانەکاندا بکێشەو درێژییەکەی بۆ نزیکترین پلە هەژماربکە.

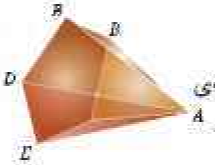
12 خێرایی فرۆکەیەك بەئاراستەبری $\langle 3, 1\rangle$ نوێنراوە.

13 خێرایی با بەئاراستەبری $\langle 1, 4\rangle$ نوێنراوە.



14 سەرجۆن بەسوار پایسکیلەکەی بە خێراییەکی نەگۆڕ برەکەی 3.5 km/h بە ئاراستەی باکوور $40°$ خۆرهەلات کەوتەرێ لەوکاتەدا خێرایی با 2 km/h بە ئاراستەی خۆرهەلات بوو، خێرایی راستینەی سەرجۆن بۆ نزیکترین دەیەك و ئاراستەکەی بۆ نزیکترین پلە نزیککرابێتەوە چەندە؟

15 چێوە و رووبەری ئەو بازنەیەی تیرەکەی $12m$ بەپێی π بدۆزەوە.



16 ژمارەی رووەکان ولایەکان وسەرەکان لەم تەنە ئەندازەییەی بەرامبەر چەندە؟ یاسای ئۆلەر پاسادان بکە؟

دووری نێوان دووخاڵ وپۆوتانی خاڵی ناودراستی ئەو پارچە راستەهێلەی بە دوو خاڵەکە سنووردراوە بدۆزەوە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

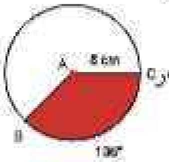
17 $(0, 0, 0)$ $(5, 5, 5)$ **18** $(6, 0, 9)$ ، $(7, 1, 4)$

19 $(-1, 4, 3)$ ، $(2, -5, 7)$

20 رووبەری گۆی بەرامبەر بدۆزەوە بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

21 قەبارەی گۆ بەرامبەر بدۆزەوە بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

22 رووبەری شەشلایەکی رێك درێژی لایەکی 4 m بێت بۆ نزیکترین دەیەك نزیککرابێتەوە.

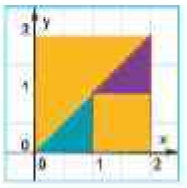


23 رووبەری کەرتی بازنەیی بەرامبەر بەپێی π بدۆزەوەو بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکە.

24 درێژی کەوانەی BC بەپێی π بدۆزەوە و نزیکبکەوە بۆ نزیکترین بەش لەسەد.

25 خەسرەو درێژی سێبەری خۆی و درەختێکی پێوا بۆ ئەوەی بەرزی درەختەکە بدۆزێتەوە بەرزی درەختەکە چەندە؟ ئەگەر بزانیت درێژی خەسرەو 175 cm

26 بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی ABC و ADE هاوشێوەن کاتێك $A (6, 5)$ و $B (3, 4)$ ، $C (6, 3)$ و $D (-3, 2)$ و $E (6, -1)$.



27 وێنەی دروشمی بەرامبەر دروستبکە دوای گەورەکردنی بەرێژەی $\frac{3}{2}$.

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

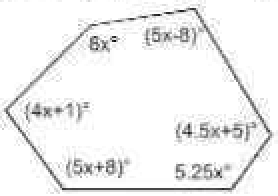
هەڵبژاردن لە وەڵامی جۆراوجۆر

1 کام لەمانەی خوارەوە یەکتربڕینەکانی ڕووتەختی $2x+y-5z=20$ دەنوێنێت.

(أ) $x=0, y=0, z=0$ (ج) $x=10, y=20, z=-4$

(ب) $x=2, y=1, z=-5$ (د) $x=10, y=20, z=4$

2 بەهای x لەم چەندلایەی خوارەوەدا چەندە؟



(أ) 12 (ج) 24

(ب) 18 (د) 36

3 پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوەی دوازدە لایەکی ڕێك چەندە؟

(أ) 30° (ج) 150°

(ب) 144° (د) 162°

4 کام لەم ئاراستەبڕانەی خوارەوە یەکسانە بە ئاراستەبڕی $\overrightarrow{AB}$ کاتێك A(2, −1) و B(−2, 4) بێت؟

(أ) $\langle -4, -5\rangle$ (ج) $\langle 5, -4\rangle$

(ب) $\langle -4, 5\rangle$ (د) $\langle 5, 4\rangle$

5 پێنجلایەکی قۆقزە $ABCDE$ ، $\hat{A}\cong\hat{B}\cong\hat{C}$ ، $\hat{D}\cong\hat{E}$ ، $m\hat{A}=2m\hat{D}$ پێوانەی C چەندە؟

(أ) 67.5° (ج) 154.2°

(ب) 135° (د) 225°

6 جۆری ئەو سێگۆشەیە چییە پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی $(2x)°$ و $(3x-9)°$ و $(x+27)°$ بێت.

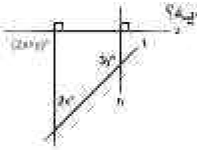
(أ) دوولایەکسانی گۆشە تیژە.

(ب) دوولایەکسانی وەستاوە.

(ج) جیالای گۆشە تیژە.

(د) جیالای گۆشەیەکی کراوەیە.

7 بەهای x لەوێنەی بەرامبەردا کامەیە؟



(أ) 22.5° (ج) 90°

(ب) 45° (د) 135°

8 شارەوانی باخچەیەکی لەسەرشێوەی شەشلایەك بۆ چاندنی گوڵ تەرخانکرد، ڕووبەری ئەو شوێنە بۆ نزیکترین دەیەك نزیکرابێتەوە چەندە ئەگەر بزانی درێژی لایەکی شەشلاکە 5 m بێت.

(أ) $32.5\ m^2$ (ج) $75.0\ m^2$

(ب) $65.0\ m^2$ (د) $129.9\ m^2$

9 چۆن ڕێژەی قەبارەی گۆیەك بۆ ڕووبەرەکەی دەگۆڕێت ئەگەر نیوەتیرەکەی دووهێندکرا.

(أ) ڕێژەکە ناگۆڕێت. (ج) لە 4 دەدرێت.

(ب) دوو هێندە دەبێت. (د) لە 8 دەدرێت.

10 $M(2, -6, 3)$ ناوەراستی $\overline{AB}$ کاتێك $A(x, y, z)$ و B(−2, 6, 13) پۆتانی خاڵی A چەندە؟

(أ) A(−6, 18, 23) (ج) A(2, −6, 19)

(ب) A(0, 0, 8) (د) A(6, −18, −7)

11 قەبارەی گۆیە گەورەکە چەندە؟ ئەگەر قەبارەی بچووکەکە $288\ cm^3$ بێت.

(أ) $864\ cm^3$ (ج) $7776\ cm^3$

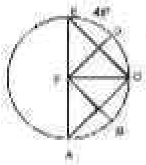
(ب) $2827\ cm^3$ (د) $23\ 328\ cm^3$

12 کام لەم ئاراستەبڕانەی خوارەوە درێژییەکەی یەکسانە بە $3\sqrt{5}$

(أ) $\langle -4, -5\rangle$ (ج) $\langle 5, -4\rangle$

(ب) $\langle -3, 6\rangle$ (د) $\langle 5, 5\rangle$

13 ڕووبەری کەرتە بازنەیی EFD چەندە؟ ئەگەر پێوانەی $\widehat{BC}$ 6π cm بێت؟

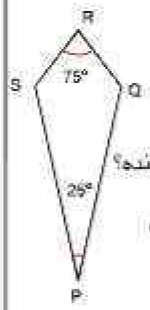


(أ) $20\pi\ cm^2$ (ج) $120\pi\ cm^2$

(ب) $72\pi\ cm^2$ (د) $240\pi\ cm^2$

تەنیا وەڵام

14 ژمارەی لایەکانی چەندلایەکی قۆقز چەندە ئەگەر سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی $1260°$ بێت؟



15 پێوانەی $\widehat{PQR}$ لەچەندلای بەرامبەردا چەندە؟

16 درێژی لاوێن 1.6 m وەدرێژی سێبەرەکەی 3.5 m بەرزی درەختێك چەندە؟ ئەگەر سێبەرەکەی 17.5 m درێژبوویێتەوە.

17 ژمارەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵانەی لەئەنجامی گەیاندنی دووخاڵ لەنێوان 6 خاڵدا لە ڕووتەختێکدا پەیدادەبن چەندە؟ ئەگەر زانیت هیچ سێ خاڵێکیان لەڕێکی یەکتری نەبن.

18 نیوەتیرەی بازنەیەك چەندە؟ ئەگەر ڕێژەی ڕووبەرەکەی بۆ چێوەکەی یەکسان بێت بە 2.5

19 درێژی بەرەنجامی دوو ئاڕاستەبڕی $\overrightarrow{u} = \langle 3, -7 \rangle$ و $\overrightarrow{v} = \langle -6, 5 \rangle$ چەندە؟ وەڵام بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە

20 ژمارەی لایەکانی زۆر ڕوو چەندە؟ کە 12سەر و 8 ڕووی هەبێت؟

21 ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك کە درێژی لایەکی 2 cm بێت چەندە؟ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

22 درێژی ئەو کەوانەیەی نیوە بازنەیەك لە بازنەیەکدا نیوەتیرەکەیmm 5بێت دروستی دەکات چەندە؟

کورتە وەڵام

23 بیسەلمێنە دوو سێگۆشەی ABC و DEC هاوشێوەن کاتێك $A(-2, 0)$ و $B(2, 2)$ و $C(2, -2)$ و $D(0, -1)$ و $E(2, 0)$بێت.

24 نیوەتیرەی گۆیەك چەندە؟ ئەگەر ڕێژەی ڕووبەری بۆ چێوەکەی یەکسان بێت بەڕێژەی 2.5 بۆ 1 یەکەی درێژی.

25 وێنەی سێگۆشەی ABC بکێشە کاتێك $A(1, -2)$ و$B(-2, -3)$ و$C(-2, 2)$ بێت.

أ وێنەی$A'B'C'$ بۆ سێگۆشەی نموونەی پێشوو بە گەورەکردنێك ڕێژەکەی $\frac{3}{2}$ بێت بکێشە.

ب بیسەلمێنە ڕێژەکانی $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ و $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$ و $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$ یەکسانن بە بەکارهێنانی لاری.

26 سەرەکانی سێگۆشەیەك بریتیین لە$A(1, -2)$ و$B(-2, -3)$، $C(-2, 2)$سێگۆشەی$A'B'C'$بریتییە لە وێنەی سێگۆشەی ABC بەهاوڕێژەیەکی ئەندازەیی ڕێژەکەی$\frac{3}{2}$ بێت.

أ لەهەمان ڕووتەختی پۆوتاندا وێنەی دوو سێگۆشەیABCو$A'B'C'$ بکێشە

ب ڕوونیبکەرەوە $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ و $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ یەکسانن بۆ پشتیوانیکردنی وەڵامەکەت لاری بەکاربێنە.

27 دوو وێستگەی سووتەمەنی لەسەر ڕێگایەکی خێران دووری نێوانیان 8 km بەهۆی تەواوبوونی سوتەمەنی ئۆتۆمبیلێك لەنێوان دوو وێستگەکەدا وەستا ئەگەری ئەوەی ئەو خاڵەی ئۆتۆمبیلەکەتیدا وەستاوە بەلایەنی کەمەوە دوورییەکەی لە 2 km کەمتر نەبێت لەهەردوو وێستگەکەوە چەندە؟ هێلکارییەك بکێشە باسی ئەوە بکە چۆن وەڵامەکەت دۆزیەوە.

درێژە وەڵام

28 ئەوزاد وسالار پێکەوە دەژین بڕیاریاندا لەگەڵ سامانی ئامۆزایاندا سەردانی ناوچەیەکی گەشتیاری بکەن. ئەوزاد ڕاستەوخۆ چوو بۆ ناوچە گەشتیاریەکە بەڵام سالار چوو بۆ ماڵی ئامۆزاکەی تا لەگەڵ خۆی بیبات. سالار 90 km بەئاڕاستەی باکور $25°$- خۆرهەلات بۆ ماڵی سامان بڕی پاشان لەگەڵ کورەمامەکەیدا 50 km بەئاڕاستەی خۆرهەلات بڕی تا گەیشتە ناوچە گەشتیارەکە.

أ ئەو دوو ئاڕاستەبڕە بەپێکنەرەکانییەوە بنووسە کە گەشتەکەی ئەوزاد و سالار لە ماڵی خۆیانەوە بۆ ماڵی سامان وە لەماڵی سامانەوە بۆ ناوچە گەشتیاریەکە دەنوێنێت.

ب لاری ئەو ئاڕاستەبڕەی گەشتەکەی سالار لە ماڵەکەیەوە بۆ ناوچەی گەشتیاریەکە دەنوێنێت چەندە؟ درێژییەکەی چەندە؟

ج ئەوزاد و سالار لەهەمان کاتدا ماڵیان بەجێهێشت لەهەمان کاتدا گەیشتنە ناوچە گەشتیارییەکە ئەوزاد بەخێراییەکی نەگۆڕ 50 km/hدەڕۆیشت خێرایی سالار چەندبووە؟

بەشی

2

سیستمی هاوکێشەکان و لاسەنگە هێڵییەکان

Systems of Linear Equations and Inequalities

بەشی دووەم

وانەکان

1-2 لاسەنگە هێڵیە دوو نەزانراو

2-2 نموونە (سامپڵە) هێڵییەکان

3-2 سیستمەکانی لاسەنگە هێڵییەکان

4-2 پرۆگرامی هێڵی.

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

5-2 شیکاری ئەوسیستمە هێڵییانەی سێ نەزانراویان هەیە

6-2 پێوانیە ئامارییەکان.

لاپەڕەی تەکنۆلۆژیا

7-2 بەشینەوەی دووانی (گراوەی دوو ڕاەدار)

دەنگت بەرزبکەوە

دەتوانیت سیستمەکانی هاوکێشە هێڵییەکان بەمەبەستی پلاندان بۆ کۆکردنەوەی پارەیەکی ئەوتۆ بۆ پارێزگاریکردن لەو باڵندانەی مەترسی لە ناوچوونیان هەیە بەکاربێنیت ئەویش لەڕێگای فرۆشتنی ساڵنامەوە کە وێنە جوانەکانی ئەو باڵندانەیان لەسەر بێت.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

هەر زاراوەیەک بەپێی پێناسەکەی کە لەلای چەپدا هاتووە ببەستەوە.

1 هاوکێشە
2 لاسەنگە
3 کۆمەڵەی شیکار
4 لاری
5 خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان

أ هاوکێشەی دوو نەزانراو، ئەو خاڵانەی شیکارەکە دەنوێنن ڕاستەهێڵێک پێکدێنن
ب لێژی ڕاستەهێڵ بریتییە لە ڕێژەی لای بەرامبەر بۆ بەردەمەکەی
ج نووسینی دوو بڕی جەبری کە یەکێک لە هێمایەکانی نایەکسانی پێکەوەیان دەبەستێتەوە
د نووسینی دوو بڕی جەبری کە هێمای یەکسانی پێکەوەیان دەبەستێتەوە
هـ کۆمەڵە بەهایەکن، هاوکێشەکە یان لاسەنگەکە ڕاستەدان دەکەن.
و کۆمەڵە خاڵێکن لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا پەیوەندی لە نێوان دوو کۆمەڵە پێدراودا دەنوێنێت.

بچووکترین چەند جارەی هاوبەش

بۆ هەر جووتێک لەم ژمارانە بچووکترین چەند جارەی هاوبەش بدۆزەوە.

6 3 و 18 **7** 28 و 8 **8** 8 و 36 **9** 15 و 27

لارییەکانی ئەو ڕاستەهێڵانەی بەیەکتری تەریبن ولەسەر یەکتری ئەستوونن

ئەم دوو ڕاستەهێڵانە تەریبن یان ئەستوون یان پەیوەندیەکی ترە.

10 $\begin{cases} y=5x-4 \\ y=-\frac{1}{5}x-4 \end{cases}$ **11** $\begin{cases} 5x-10y=3 \\ y=\frac{1}{2}x-6 \end{cases}$ **12** $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-4 \end{cases}$ **13** $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 3y-x=5 \end{cases}$

هەژمارکردنی بەهاکانی بڕە جەبرییەکان بە لەجیاتیدانان.

بە دانانی بەهای هەر گۆڕاوێک بڕەکە هەژمار بکە

14 $y=14 ,\ x=8 :\ 1.5x+3y$ **15** $y=-4 ,\ x=6 :\ 5x-\frac{3}{4}y$

16 $y=\sqrt{2} ,\ x=0.25 :\ 4x-\sqrt{2}y$ **17** $y=\frac{1}{3} ,\ x=1 :\ -\frac{75x}{3y}$

شیکارکردنی هاوکێشە فرە هەنگاوەکان

هەریەک لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

18 $8x+19=-5$ **19** $5x+4=25-2x$ **20** $9x-(x+12)=-13$ **21** $-3(4x-5)-1=20$

شیکارکردنی ئەو هاوکێشانەی کەرتیان تێدایە

هەریەک لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

22 $\frac{1}{4}x+\frac{2}{3}x=8$ **23** $\frac{2}{5}x+\frac{1}{6}=-4$ **24** $x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}$ **25** $-\frac{1}{2}=3x-\frac{1}{3}x$

بەشی

2

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

ئەمانەت خوویندووە

- نەخشە هێڵییەکانت بە ڕوونکردنەوەیی نواند.
- لاسەنگە هێڵییە یەك نەزانراوەکانت بە ڕوونکردنەوەیی شیکارکرد.
- سیستمە هێڵییەکانی 2×2ت شیکارکرد.
- تەنە ئەندازەییەکانی وەك شەشپاڵو و پوازکت خوێندووە.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- لاسەنگەی هێڵی بە دوو نەزانراو بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکەیت.
- سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بەڕوونکردنەوەیی شیکاربکەیت .
- پرسیاری پرۆگرامی هێڵی شیکاربکەیت.
- سیستمی هاوکێشە هێڵییەکانی 3×3شیکاربکەیت
- نموونە هێڵییەکان بۆ نواندنی کۆمەڵەی پێدراوەکان.
- پێوانە ئامارییەکان بۆ کۆمەڵەی پێدراوەکان
- بەشینەوە ئامارییە دووانییەکان

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت بۆ

- شیکارکردنی سیستمی ئەو هاوکێشانەی ئاڵۆزیان زۆرترە.
- تیگەیشتنی نموونە هێڵییەکان لە بابەتەکانی تردا، وەك: کیمیا و فیزیا و ئابووری.
- پلاندانی کردارەکان لە ژیانی ڕۆژانەدا، وەك کۆکردنەوەی پارە و ماڵ یان هەڵسان بەگشتوگوزار یان کەمکردنەوەی خەرجییەکان.

زاراوەکان

Vocabulary	زاراوەکان
Constraint	مەرج
Elimination	لابردن
Feasible region	ناوچەی بەسوود (ناوچەی گونجاو)
Linear programming	پرۆگرامی هێڵی
Linear system	سیستەمی هێڵی
Substitution	لەجیاتیدانان
System of equations	سیستەمی هاوکێشەکان
System of linear inequalities	سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان
Correlation	پەیوەستی
Line of best fit	ڕاستەهێڵی باشترین نواندن
Regrssion	لێژبوونەوە (دابەزین)

دەروازەیەك لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێك لەم زاراوانەدا رابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیڕەوبکە:

1. وشەی گەڕانەوە واتای گەڕانەوە بۆ دواوەیە، چۆن واتای ئەم وشەیە بۆ تێگەیشتنی واتای **لێژبوونەوە** لە بیرکاریدا بەکاردێنیت؟
2. وشەی لابردن چی دەگەیەنێت؟ کاریگەری کرداری **لابردن** لە شیکارکردنی هاوکێشە بیرکارییەکاندا چییە؟
3. وشەی **مەرج** ئاماژەیە بۆ کورتکردنەوە یان دیاریکردنی سنووردارکردن، ڕۆڵی کورتکردنەوەکان لە بیرکاریدا چییە؟ بە نموونە ڕوونییبکەوە.
4. وشەی بەسوود مانای بوونی شتێکی بەسوود دەگەیەنێت، نموونە لە سەرەتای ڕستەدا بهێنەوە کە ئەم وشەی تێدابێت، دوای ئەوەی **گفتوگۆ** لەسەر ئەوەی کە ناوچەی بەسوود ئاماژەی بۆ دەکات دیاریکە.

بەشی

2

بیرکاری

بە خوێندنەوە و نووسین

ستراتیژیەتی وانە: نووسینی ڕۆژانەی بیرکاری

نووسینی ڕۆژانەی بیرکاری یارمەتیدەرە بۆ چاککردنی کارامەییەکانی نووسین و دەرەنجامهێنانی. کاتێك بە نووسین ڕۆژانەیەك دەردەبڕێت، بۆت دەردەکەوێت کە هەندێك بابەت هەیە لە بیرکاری باش نایزانی، یان بەلاتەوە شاراوەن دەتوانیت ئەو ڕۆژانەیە بۆ ڕەنگدانەوەی ئەو وانانەی لە بیرکاریدا فێریان بووی بەکاربێنیت. خاڵەکانی ئەو وانەیەی ئاستەنگت بۆ دروست دەکات، کورتکراوەی ئەو چەمك و زاراوانەیە، دەربڕینی ڕایەکەت پەیوەندی بەوانەکەوەیە و ئەوەی لەوەش گرنگترە لە ڕۆژانەی بیرکاریدا، ڕەنگدانەوەی لەسەر پێشکەوتنت لە فێربوونی بیرکاریدا دەبێت.

لاپەڕەیەك لە ڕۆژانەکانی خوێندکار: ئەم لاپەڕەیە لە خوارەوە هاتووە لە ڕۆژانەکانی خوێندکارێکە، بیخوێنەوە.

ڕۆژانەکە

بەروار: 22 تشرینی یەکەم

ڕووبەڕووی ئاستەنگ دەبمەوە بەتایبەتی لەوانەی2-1 هەمیشە ئەوەم لە بیر دەچۆوەکە هێمای لاسەنگە پێچەوانەبکەمەوە کاتێك هەردوو لای لاسەنگەکەم لە ژمارەیەکی سالب دەدا، یان دابەشی ژمارەیەکی 1- سالبم دەکرد بەڕای من ئەوە دەگەڕێتەوە بۆ ئەوەی کە باش لە هۆی ئەمە تێنەگەیشتبووم پرسیارم لە مامۆستا کرد بەم شێوەیە بۆی ڕوونکردمەوە بیر لە لاسەنگەی 4<3 بکەوە. ئەگەر هەردوو لای لاسەنگەکەت لێکدانی ژمارە 1- کرد بێنەوەی هێمای لاسەنگەکە بگۆڕێت 4- >3- ت دەستدەکەوێت ئەمەش هەڵەیە ئەگەر هێمای لاسەنگەکەت هەڵگێڕایەوە 4- <3- دەستدەکەوێت کە ئەمە ڕاستییەکەیەتی ئەمە بەسەر ئەم لاسەنگانەشدا جێبەجێ دەکرێت کە نەزانراویان تێدایە. لەمەودا ئاگام لەوە دەبێت کە ئەم هەڵەیە نەکەمەوە.

هەوڵبدە

بە نووسینی ڕۆژانەکانی بیرکاری دەستپێکە، ئەو بیرۆکانەی لە خوارەوە هاتوون بۆ نووسینی ڕۆژانەکانت بەکاربێنە، لەم هەفتەیەوە ڕۆژ دوای ڕۆژ ڕۆژانەکانت بنووسەوە، دڵنیابە لەنووسینی بەروار و لاپەڕە و ژمارەکەی.

- ئەوەی لەوانەی ئەمڕۆ دەمزانی.
- ئەوەی نا دڵنیابوونم لە تێگەیشتنی وانەی ئەمڕۆ
- بۆ کۆتایی پێهێنانی وانەی ئەمڕۆ پێویستم بەم کارامەییانەی خوارەوەیە.

(1) ئەو ئاستەنگانەی هاتوونەتە ڕێگام چین؟ چۆن دەتوانم بەسەریاندا زاڵبم؟

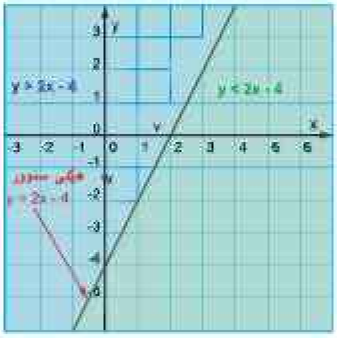
(2) چی لەوانەی ئەمڕۆ سەرەنجی ڕاکێشام؟ چیم بەلاوە پەسەند نەبوو؟

1–2 لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوەکان
Linear inqualities in two unknowns

ئامانجەکان
- شیکارکردنی لاسەنگەی هێڵی دوونەزانراو بەڕوونکردنەوەی
- پرسیارەکان بە بەکارهێنانی لاسەنگە هێڵییەکان کە دوو نەزانراویان تێدایە شیکاردەکات.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟
بەڕێوبەرانی ناوەندەکانی شانۆ لاسەنگە هێڵییەکان بۆ دیاریکردنی ژمارەی بلیتەکانی چوونەژوورەوە کە بەنرخی جیاجیا دەیانفرۆشن بۆ دەستکەوتنی قازانج بەکاردێنن (نموونەی 3)

نەخشە هێڵییەکان بنچینەی لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوەکان پێکدێنن. **لاسەنگەی هێڵی دوو نەزانراو** پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو دەردەبڕێت کە هێمایەك لە هێمایەکانی لاسەنگەی تێدایە وەك $y > 2x - 4$ کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی هێڵی دوو نەزانراو لە هەموو ئەو جووتە ڕێکخراوانەی(x, y) پێکدێن کە پاسادانی لاسەنگەکە دەکەن. و ئەو خاڵانەی شیکارە جیاجیاکانی لاسەنگە کە دەنوێنن بەشێکن لە ڕووتەختی پۆتانەکان ئەویش ڕاستەهێڵێکە و ڕووتەختەکە دەکات بە دوو بەشەوە بۆ نموونە ڕاستە هێڵی $y = 2x - 4$ ڕووتەختی پۆتانەکان دەکات بە دوو بەشەوە.



هەروەك لەوێنەی بەرامبەردا دیارە. پۆوتانەکانی خاڵەکانی یەکێك لەبەشەکان پاسادانی لاسەنگەی$y > 2x - 4$ دەکات. لەهەمان کاتدا پۆوتانەکانی خاڵەکانی بەشەکەی تر پاسادانی لاسەنگەی $y < 2x - 4$ دەکات. بەشی یەکەم کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $y > 2x - 4$ بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت ئەویش ناوچەی شیکاری ئەم لاسەنگەیە. ڕاستەهێڵی $y = 2x - 4$ هێڵی سنووریی **ناوچەی شیکار** پێکدێنێت. وێنەی هێڵە سنوورییەکە بە خاڵخاڵ بکێشە. ئەویش مانای وایە خاڵەکان ناکەونە ناوچەی شیکارەوە.

بۆ شیکاری لاسەنگەی $y > 2x - 4$ هێڵی سنوور بەخاڵخاڵ بکێشە و ناوچەی سەرەوەی ڕەنگ بکە.

زاراوەکان
Vocabulary

لاسەنگە هێڵییەکان
Linear inequality

هێڵی سنوور
Boundary line

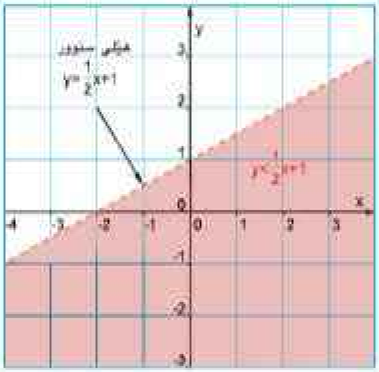
ڕۆشنایی
بیرت بێتەوە کە ئەو هێڵەی دەکەوێتە ژێر هەریەك لە دوو هێمای $\geqslant$ و $\leqslant$ نیشانەی ئەوەیە کە هێڵی سنوور هێڵێکی ئەپساوەیە و خاڵخاڵ نییە.

نموونە 1 شیکارکردنی لاسەنگە هێڵییەکانی دوو نەزانراو بە ڕوونکردنەوەیی.

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە.

أ $y < \frac{1}{2}x + 1$.

هێڵی سنوور بریتییە لە$y = \frac{1}{2}x + 1$ کە لارییەکەی $\frac{1}{2}$ و تەوەرەی y لە 1 دادەبڕێت. هێڵی سنوور بە خاڵخاڵ بکێشە، چونکە ناکەوێتە ناوچەی شیکارەوە. ناوچەی ژێر هێڵەی سنوور ڕەنگ بکە.



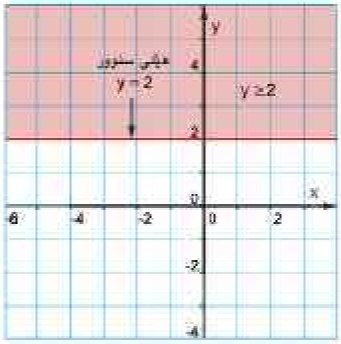
ساغکردنەوە خاڵێك لە ناوچەی شیکار هەڵبژێرە، بۆ نموونە (0,0) تاقیبکەوە، ئایا شیکاری لاسەنگەکە دەنوێنێت.

$y < \frac{1}{2}x + 1$

$0 \overset{?}{<} \frac{1}{2}0 + 1$ لەبەر ئەوەی خاڵی تاقیکردنەوە پاسەدانی لاسەنگەکە دەکات ئەوا ناوچەڕەنگ کراوەکە شیکارە.

$0 \overset{?}{<} 1$ ✓

ب $y \geq 2$.



بیرت بێتەوە کە ڕاستەهێڵی $y=2$ ڕاستەهێڵێکی ئاسۆییە

هەنگاوی 1 ڕاستەهێڵێك بکێشە بەبەکارهێنانی هێڵێکی تەپساوە چونکە هێڵی سنوور بەشێکە لە ناوچەی شیکار.

هەنگاوی 2 ناوچەی سەروو هێڵی سنوور ڕەنگ بکە بۆ دیارکردنی خاڵەکان کاتێك $y > 2$.

ساغکردنەوە خاڵی (0,4) دەکەوێتە ناوچەی شیکارەوە چونکە $4 \geq 2$ ،سەرنج بدە هەر خاڵێك بکەوێتە سەرهێڵی سنوور یان سەرەوەی شیکاری لاسەنگەکە دەنوێنێت، بەهای x هەرچەندبێت.

خاڵی جاودێری

1. هەر لاسەنگەیەك بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

أ $y \geq 3x-2$ ب $y < -3$

ئەگەر هاوکێشەی هێڵی سنوور بە شێوەی لاری – یەکتربڕین نەنوسرابوو، دەتوانیت خاڵێك هەڵبژێری نەکەوێتە سەر هێڵی سنوور بۆ دیاریکردنی هەر ناوچەیەك کەدەبێ ڕەنگی بکەیت. ئەگەر خاڵەکە پاسەدانی لاسەنگەکەی کرد، ئەو ناوچەیەی خاڵەکەی تێدەکەوێت ڕەنگی بکە، ئەگەر نا، ناوچەکەی تر ڕەنگ بکە.

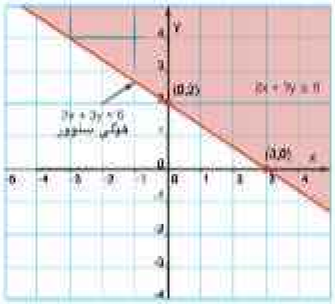
نموونــــە 2 شیکارکردنی لاسەنگە هێڵییەکان بە دوو نەزانراو بە ڕوونکردنەوەیی بەبەکارهێنانی یەکتربڕینەکان لەگەڵ دوو تەوەرەی پۆتانەکان.

لاسەنگەی $2x+3y \geq 6$ بە بەکارهێنانی یەکتربڕینی لەگەڵ هەریەك لە دوو تەوەرەی پۆتانەکان شیکار بکە.

هەنگاوی 1 دوو یەکتربڕینەکان بدۆزەوە .

بۆ دۆزینەوەی یەکتربڕینی هێڵی سنوور لەگەڵ هەریەك لە دوو تەوەری پۆتانەکان، لە جیاتی x سفردا بنێ، پاشان لە جیاتی y سفر دابنێ

یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری دووەم (ستوونی) y	**یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری یەکەم (ئاسۆیی) x**
$2x+3y=6$	$2x+3y=6$
$2\times 0+3y=6$	$2x+3\times 0=6$
$3y=6$	$2x=6$
$y=2$	$x=3$



هەنگاوی 2 هێڵی سنووری بکێشە

هێڵی سنوور ئەو ڕاستەهێڵەیە بە دووخاڵی (0,2) و (3,0) دائەڕوات، ئەم ڕاستەهێڵە بە هێڵێکی تەپساو بکێشە، چونکە بەشێکە لە ناوچەی شیکار.

هەنگاوی 3 ئەم ناوچەیە دیاربکە کە پێویستە ڕەنگی بکەیت. خاڵی(0,0) لە لاسەنگەکەدا دابنێوە. لەبەر ئەوەی لاسەنگە $0+0 \geq 6$ هەڵەیە، واتە خاڵەکە ناکەوێتە ناوچەی شیکارەوە، بۆیە دەبێت ئەو ناوچەیەی دەکەوێتە سەرووی هێڵی سنوور ڕەنگ بکەیت.

ڕۆشنایی

(0,0) وەك خاڵی تاقیکردنەوە بەکاربێنە، تەنها ئەو کاتەنەبێت کە دەکەوێتە سەر هێڵی سنوور.

خاڵی جاودێری

2. لاسەنگەی $3x-4y>12$ بەبەکارهێنانی دوو یەکتربڕەکانی (ئاسۆیی و ستوونی) بەڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

نموونـــــە 3 جێبەجێکردنی بازرگانی

لە شانۆگەریەکدا بلیتی چوونە ژوورەوەی گەورەکان بە 8000 دینارە و بلیتی منداڵان 5000 دینارە بەڕێوەبەری شانۆگەریەکە هەموو جارێ لەهەر ئاهەنگێکدا 000 240 دینار خەرجەدەکات، دەبێ بەڕێوەبەر چەند بلیتی چوونە ژوورەوە لەهەرجۆرێک بفرۆشێت تا قازانج بکات؛ بەڕێوەبەرەکە 20 بلیتی منداڵانەی فرۆشت، دەبێت چەند بلیتی گەورەکان بفرۆشێت تا قازانج بکات؛

1 لە پرسیارەکە تێبگە

شیکارکردنی ئەم پرسیارە لە دوو بەش پێکدێت: 1 . نووسینی لاسەنگەکەو شیکارکردنی بەرونکردنەوەیی وەڵامی پرسیاری یەکەمە. 2 . دۆزینەوەی ژمارەی بلیتەکانی گەورەکان کە دەبێ بفرۆشرێن، کاتێک 20 بلیت لە بلیتی منداڵان فرۆشراوە.

پێدراوە گرنگەکان بنووسە:

- **دوو جۆرە بلیت هەیە**: بلیتی گەورەکان بە 8000 دینارە و بلیتی منداڵان بە 5000 دینارە.
- پێویستە نرخی بلیتە فرۆشراوەکان لە 000 240 دینار کەمتر نەبێت.

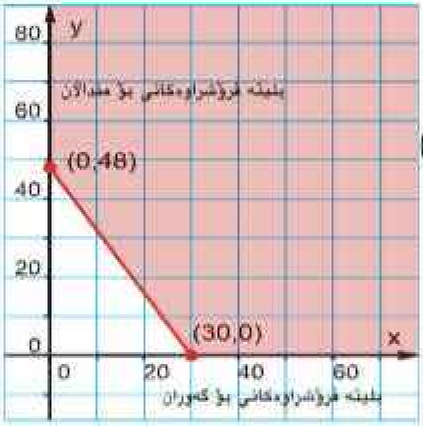
2 پلاندانێ

هێمای x بۆ ژمارەی بلیتی گەورەکان و y بۆ ژمارەی بلیتی منداڵان بەکاربێنە، لاسەنگەیەک بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت.

سەرجەم	≥	ژمارەی بلیتەکانی منداڵان	×	نرخی بلیتی منداڵان	+	ژمارەی بلیتەکانی گەورەکان	×	نرخی بلیتی گەورەکان
240 000	≥	**y**	×	**5000**	+	***x***	×	**8000**

دەتوانین پرسیارەکە بە لاسەنگە $8000x+5000y \ge 240\,000$ یان $8x+5y \geqslant 240$ بنوینین.

3 شیکاری بکە



یەکتر بڕینەکانی هێڵی سنوور لەگەڵ هەردووتەوەرەکان دیاربکە.

$$8\times 0+5y=240 \qquad 8x+5\times 0=240$$

$$y=48 \qquad x=30$$

هێڵی سنوور بکێشە ئەو ڕاستەهێڵە کە بە دوو خاڵی $(0,48)$ و $(30,0)$ دا دەڕوات، ئەو ناوچەیەی هەموو ئەو خاڵانەی تێدایە دەکەوێتە چارەکی یەکەم و سەرووی هێڵی سنوور دەنوێنن ڕەنگ بکە، لەبەرئەوەی ژمارەی بلیتەکان سالب نییە.

ژمارەی بلیتەکانی منداڵان کە فرۆشراوە 20 ـە بۆیە:

$8x+5\times 20 \ge 240$ لەجیاتی دانان

$8x+100 \ge 240$ سادەبکە

$8x \ge 140$ و لەدوایدا $x \ge 17.\bar{5}$ پێویستە ژمارەی بلیتەکان ژمارەی تەواوبن.

دەبێ ژمارەی بلیتەکانی فرۆشراو بۆ گەورەکان لە 18 کەمتر نەبێت.

4 ساغبکەوە

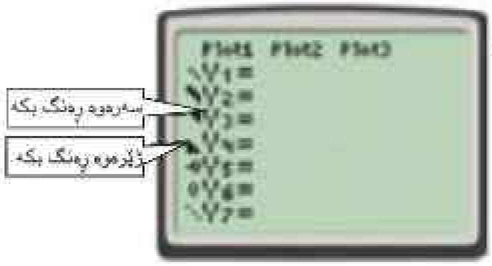
$$18\times 8000+20\times 5000=244000$$

ئاگاداربە!

بیرت نەچێتە هێمای هەر نەزانراوێک چیدەگەیەنێت

خاڵی جاودێری

3. بەڕێوەبەری مەڵبەندی ڕۆشنبیری بڕیاریدا دوو جۆر دیاری بەسەر ئەندامەکانیدا دابەشبکات. نرخی هەردیارییەك لە جۆری یەکەم 125 000 دینارە و نرخەکەی لە جۆری دووەم 40 000 دینارە، بەڕێوەبەرەکە 1 500 000 دیناری لەبەردەستایە. چەند دیاری لە هەر جۆرێك دەتوانێت پێشکەش بکات؟ ئەگەر 4 دیاری لە جۆری یەکەم بێت، لە جۆری دووەم دەتوانێت چەند دیاری پێشکەش بکات؟

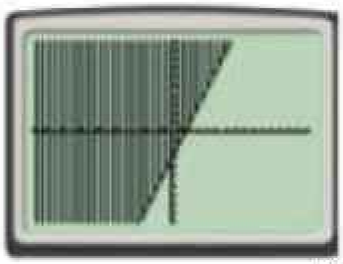


دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ شیکارکردنی لاسەنگەی هێڵی دوو نەزانراو بە ڕوونکردنەوەیی بەکاربێنیت. Y1 دابگرە، و بەهۆی دووگمەی جوڵان بۆ ئەو پەڕی لای چەپ بجولێت ENTER دابگرە لە لای چەپ جۆرێك لە جۆرەکانی و وێنە دەبینی. هەروەك لە وێنەکەدا ڕوونکراوەتەوە.

نموونـــــە 4

شیکارکردنی لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوەکان بەڕوونکردنەوەیی بەبەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی

لەلاسەنگەی $\frac{2}{3}(2x-y)<2$ بۆ y بە پێی x بنووسە ولاسەنگە دەستکەوتووەکە بە ڕوونکردنەوەی شیکاربکە.



$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x-y)<\frac{3}{2}\cdot 2$	هەردوو لا لێکدانی $\frac{3}{2}$ بکە
$2x-y<3$	$2x$ لە هەر لایەك دەربکە
$-y<-2x+3$	هەردوو لای لێکدانی -1 بکە و
$y>2x-3$	هێمای لاسەنگەکە هەڵبگێڕەوە

Y1 دابگرە 2x-3 بنووسە، بە هۆی دوگمەی جوڵان بۆ لای چەپ برۆ ENTER دابگرە وێنەیەك لەلای چەپ ◥ دەردەکەوێت GRAPH دابگرە وێنەی بەرامبەرت دەست دەکەوێت

(تێبینی: نموونەکە بەبێ بژمێری ڕوونکردنەوەیی شیکاری بکە).

ڕۆشنایی

بیرت بێتەوە کە لێکدانی لاسەنگە لە ژمارەی سالب، یان دابەشکردن بەسەریدا هێمای لاسەنگەکە هەڵدەگێڕێتەوە

خاڵی جاودێری

4. بەڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی $2(3x-4y)<24$ شیکاربکە بەبەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی یان بە ڕێگای ئاسایی.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بەراوردبکە لە نێوان دوو بازنەی داخراووکراوە. لە شیکاری لاسەنگەی هێڵی یەك نەزانراو بە ڕوونکردنەوەیی وە لە نێوان دوو هێڵی سنووری خاڵخاڵ و نەپساوە لە شیکاری لاسنگەی هێڵی دوو نەزانراو بە ڕوونکردنەوەیی بکە.
2. ناوچەی شیکار بۆ لاسەنگە $x\geq 4$ باس بکە.
3. ڕوونیبکەوە ئایا دەتوانیت خاڵی $(0,0)$ وەك خاڵی تاقیکردنەوە بۆ دیاریکردنی ناوچەی پێویست بۆ ڕەنگکردن لە کاتی شیکاری لاسەنگە $3x+5y\leq 0$ بەکار بێنێت.
4. ڕێکخەر بە خشتەکەی خوارەوە بنووسەوە و تەواوی بکە. لە هەر چوارچێوەیەك نموونەیەك لەسەر دوولاسەنگە بنووسە کە ناوچەی شیکاری لە سەرووی سنوورەکە پاسکرابێ: یەکەمیان بە شێوەی ...$y>$، کاتێك > هێمایەك بێت لە هێماکانی بەراوردکردن، و دووەمیان لە شێوازێکی تری جیاوازدا بێت.

فێربە

هێڵی سنووری خاڵخاڵ ڕەنگەکە لەسەر هێڵەکەیە	هێڵی سنووری خاڵخاڵ ڕەنگەکە لەژێر هێڵەکەیە	هێڵی سنووری نەپساو ڕەنگەکە لەسەر هێڵەکەیە	هێڵی سنووری نەپساو ڕەنگەکە لەژێر هێڵەکەیە

1-2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ڕوونیبکەوە چۆن لە توانادایە ڕاستەهێڵی $y = 3x - 4$ ببێتە هێڵی سنوور.

بڕوانە نموونە 1

هەریەک لەم لاسەنگە بەڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

2 $y > -4$ **3** $y \leq 2$ **4** $y \geq x - 3$ **5** $y < -\frac{1}{3}x + 2$

بڕوانە نموونە 2

هەریەک لەم لاسەنگانە بە بەکارهێنانی یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی و ستوونی شیکار بکە.

6 $3x + 2y > 12$ **7** $5x - 2y \leq 20$ **8** $-4x + 5y < -20$

بڕوانە نموونە 3

9 **بەکاربردن** ڤیان 17 000 دیناری پێیە. دەیەوێت دووجۆر لە قاوەی ئەهاڕاوە (دەنك) کە ئامادە کردنەکەی ئاسانە بکڕێت. دەنکۆڵەکانی جۆری یەکەم ڕەقن و نرخی هەر پاکەتێك 2290 دینارە و دەنکۆڵەکانی جۆری دووەم ئاسکترن و نرخی هەرپاکەتێکی 3750 دینارە.

أ هێمای x بۆ جۆری یەکەم و y بۆ جۆری دووەم دابنێ. لاسەنگەیەك بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت، و بەڕوونکردنەوەی شیکاریبکە، بۆ دیاریکردنی ژمارەی ئەو پاکەتانەی کە ڤیان لە هەرجۆرێك بیان کڕێت.

ب چەند دانە لە جۆری یەکەم دەتوانێت بکڕێت ئەگەر بزانیت کە 3 پاکەتی لە جۆری دووەم کڕیوە؟

10 **خوێندکاکان** خوێندکارانی پۆلی پانزەهەم دوو جۆر لە تابلۆ هونەریەکانیان دەفرۆشن بۆ کۆکردنەوەی بڕێك پارە لە 280 000 دینار کەمتر نەبێت. کاری یەکەمیان بری 1750 دینار قازانج دابیندەکات دەکات لەکاتێکدا کاری دووەمیان بری 1250 دینار قازانج دابیندەکات.

أ هێمای x بۆ کارەکانی جۆری یەکەم و هێمای y بۆ کارەکانی جۆری دووەم دابنێ. لاسەنگەیەك بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت، و ڕوونکردنەوەیی شیکاری بکە بۆ دیارکردنی ژمارەی ئەو کارتانەی کە خوێندکارەکان پێویستە لەهەر جۆرێك بیفرۆشن.

ب خوێندکارەکان 100 کاریان لە جۆری دووەم و 50 کاریان لە جۆری یەکەم فرۆشت. ئایا خوێندکارەکان ئامانجەکەیان پێکاوە؟

بڕوانە نموونە 4

هەریەك لەم لاسەنگانە بەپێی y شیکار بکە پاشان بە ڕوونکردنەوەیی شیکاریبکە.

11 $\frac{1}{2}(6x - 2y) \geq 4$ **12** $-\frac{3}{5}x + y \geq 2$ **13** $3(3x - y) > -12$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

بۆ شیکاری ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
ڕاهێنانی ئازاد	
14-16	1
17-18	2
19-21	3
22-24	4

هەریەك لەم لاسەنگانە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

14 $y \geq 6$ **15** $y < x + 4$ **16** $y > -\frac{2}{5}x - 3$

هەریەك لەم لاسەنگانە بەبەکارهێنانی دوو یەکتربڕەکان ئاسۆیی و ستوونی شیکاربکە.

17 $4x + 2y \geq 8$ **18** $3x - 6y < 12$

19 **بازار** تێچوونی ڕیکلام لە ڕۆژنامەیەکی ناوخۆ لە ڕۆژێکدا 20 000 دینارە، و تێچوونی لە ئیستگەیەکی ناوخۆ لە هەر خولەکێکدا 50 000 دینارە، بوجەی تەرخانکراو بۆ ڕیکلام، لە یەکێك لە دامەزراوەکاندا یەك ملیۆن دینارە. هێمای نەزانراوی x بۆ ژمارەی ڕۆژانی ڕیکلام لە ڕۆژنامەکەدا و هێمای نەزانراوی y بۆ ژمارەی خولەکانی ڕیکلام لە ئیستگەکەدا دابنێ. لاسەنگەیەکی هێڵی بۆ نواندنی پرسیارەکە بنووسە، پاشان لاسەنگەکە بەڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

20 **گەردوون** ئەو ڕۆکێتەی شاخی هەستیار بۆ مەریخ هەڵدەگرێت پێویستی بە ئۆکسجینە بۆ ئەوەی لە هێزی کێشکردن دەربچێت، وای دابنێ ئەو شاخە هەستیارە 0.78L لە ئۆکسجین بۆ هەر کیلۆگرامێك لە ئاو، و 0.32L لە ئۆکسجین بۆ هەر کیلۆگرامێك لە دووەم ئۆکسیدی کاربۆن بەرهەمدێنێت، بەلایەنیکەمەوە شاخە هەستیارەکە پێویستی بە $56L$ ئۆکسجینە. هێمای نەزانراوی x بۆ ژمارەی کیلۆگرامە ئاوەکان و نەزانراوی y بۆ ژمارەی کیلۆ گرامەکانی دووەم ئۆکسیدی کاربۆن کە لەبەردەستایە دابنێ.

أ لاسەنگەیەکی هێڵی بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت، و لاسەنگەکە بە ڕوونکردنەوەی شیکاریبکە.

ب شاخە هەستیارەکە $36kg$ لە ئاو $88kg$ دووەم ئۆکسیدی کاربۆنی کۆ کردەوە. ئایا بەم کارە گەشتە کە دەکرێت؟

21 **مۆبایل** مەریوان دوو جۆر لە کارتی تەلەفۆن، کارتی 8000 دیناری و کارتی 12 000 دیناری دەفرۆشێت. ئەو کارتانەی لایەتی بەهاکەی 200 000 دینارە.

هێمای x بۆ ژمارەی کارتەکانی جۆری یەکەم وهێمای y بۆ ژمارەی کارتەکانی جۆری دووەم دابنێ.

أ لاسەنگەیەکی هێڵی بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت، پاشان لاسەنگەکە بەڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

ب مەریوان 10کارتی لە جۆری 8000 دیناری فرۆشت، چەند کارت لەجۆری دووەم دەتوانێت بفرۆشێت.

x بە پێی y هەژماربکە، پاشان لاسەنگەکە بەڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

22 $-4y<4(3x-5)$ **23** $-3(-10x+2y)\geq 24$ **24** $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y\leq -1$

هەر یەك لەم لاسەنگەکە بە ڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

25 $-4y>10x-20$ **26** $y-5\geq 4(x-2)$ **27** $6x+3y<0$

28 $y+\frac{3}{4}\leq\frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ **29** $\frac{9-3y}{2}\geq 6x$ **30** $x\leq 4$

31 $4x-5y<7x-3y$ **32** $2x-5y\leq -4x+15$ **33** $x>-2$

34 **خوێندنگاکان** یانەی بیرکاری لە ئامادەیی کوردستان ئاهەنگێکی گۆرانی سازکرد بۆ کۆکردنەوەی کەمترنەبێت لە بڕی 600 000 دینار، بۆ ئەوەی کۆمپیوتەرێکی بۆ یانەکە پێ بکرێت. سەرۆکی یانەکە بڕیاریدا، نرخی بلیتی چوونە ژوورەوە 5000 دینار بێت ئەگەر ڕۆژێك پێش ئاهەنگەکە کڕابێت و 6000 دینار بێت ئەگەر لەبەر دەرگا کڕابێت.

أ هێمای x بۆ ژمارەی بلیتە فرۆشراوەکانی ڕۆژی پێش ئاهەنگە کەو، y بۆ ژمارەی بلیتە فرۆشراوەکانی بەردەرگا دابنێ. لاسەنگەیەکی هێڵی بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت. پاشان ئەو لاسەنگەیە بە ڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

ب ئەگەر ژمارەی بلیتە فرۆشراوەکانی پێش ئاهانگەکە 30 بلیت بێت، چەند بلیت پێویستە لە بەردەرگا بفرۆشرێت تا یانەکە ئامانجەکەی بپێکێت؟

35 **بیتاك (کۆکردنەوەی پارە)** خوێندکارانی پۆلی یازدەهەم لەکاتی یاری تۆپی سەبەتەدا کولێرەی پیتزا و ساردی دەفرۆشن بۆ ئەوەی بڕێك پارە کۆبکەنەوە لە 000 150 دینار کەمتر نەبێت، ئەویش بۆ کڕینی دیاریەکی جوان تابە بۆنەی کۆتایی ساڵەوە پێشکەشی مامۆستای بیرکاریان بکەن. لە فرۆشتنی هەر کولێرەیەکی پیتزا 1250 دینار و لە هەر قووتوویەکی ساردی 500 دیناریان قازانج کرد.

أ هێمای x بۆ ژمارەی کولێرە و پیتزاکان و y بۆ ژمارەی قووتووە ساردیەکان دابنێ. لاسەنگەیەکی هێڵی بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت.

ب خوێندکارەکان 75 کولێرە پیتزا و 150 قووتو ساردیان فرۆشت. ئایا دەتوانن دیاریەکە بکڕن؟

36 **بیرکردنەوەی رەخنەگرانە** بلیتی چوونە ژووری باخچەی ئاژەڵان بۆ گەورە بە 5000 دینار و بۆ منداڵان بە 2000 دینارە، نرخی بلیتە فرۆشراوەکان لە یەکێك لە ڕۆژەکانی هەفتەدا لە 000 300 دینار پتر بوو، بۆ نواندنی پرسیارەکە و شیکارکردنی بە ڕوونکردنەوەی، هەریەك لە دڵشاد و کاوە لاسەنگەیەکی هێڵیان نووسی، دڵشاد هێمای x ی بۆ ژمارەی بلیتەکانی گەورەکان دانا، کەچی کاوە هێمای x ی بۆ ژمارەی بلیتەکانی منداڵان دانا. ئایا دوو وێنەی ڕوونکردنەوەییەکەی دوو خوێندکارەکە دروستیان کردوون لە چیدا جیاوازن؟ ئایا یەکێکیان هەڵەی کردووە؟ ئەگەر وەڵامەکەت بەڵێ یە، کامەیانە؟

37 پاپۆڕێك 500 میلی دەریای لە بەندەرێکەوە دوورە. پاپۆڕەکە بە خێرایی یەك لە 27 گرێ (یان میلێکی دەریای لە کاتژمێرێکدا، میلێکی دەریایی 1852 مەترە) کەمترنەبێت کەوتەڕێ.

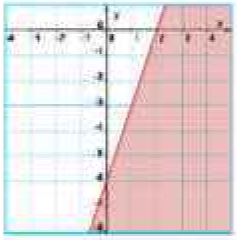
أ پاپۆڕەکە چەند کاتی پێویستە تا دەگاتە بەندەرەکە؟

ب وێنەیەکی ڕوونکردنەوەی بکێشە کە تیایدا گۆڕانی دووری نێوان پاپۆڕ و بەندەرەکەی بە تێپەڕبوونی کات ڕوونکرابێتەوە. ئەو حاڵەتەیی دەکەوێتە سەر هێڵی سنوور چی دەنوێنێت؟

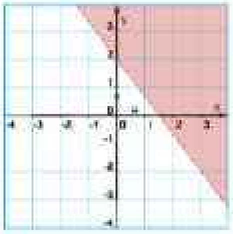
ج **چی دەبێت ئەگەر ...** وای دابنێ خێرایی پاپۆڕەکە لەماوەی گەشتەکەدا لە 10 گرێ کەمتر نەبێت. دووری پاپۆڕەکە لە بەندەرەکەوە دوای تێپەڕبوونی 12 کاتژمێر لە دەرچوونی چەندە؟

لاسەنگەیەکی هێڵی دووندزانراو بنووسە، بەمەرجێك وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی شیکارەکە بنوێنێت.

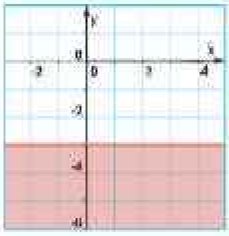
38



39



40



41 **بیرکردنەوەی رەخنەگرانە** بەراوردی لەنێوان شیکاری ڕوونکردنەوەیی بۆ لاسەنگەی $x+90<30y$ و شیکاری ڕوونکردنەوەیی بۆ لاسەنگەی $x+30y<90$ بکە لەچیدا هاوشێوەن و لەچیدا جیاوازن؟

42 **ماڵداری** دڵسۆز بادەم و مێوژ بۆ دروستکردنی تێکەڵەیەکی پڕ لە ڕیشاڵ بەکاردێنێت، هەر گرامێك لەبادەم $0.115g$ ڕیشاڵی و هەر گرامێك لە مێوژ $0.095g$ ی تێدایە. دڵسۆز دەیەوێت تێکەڵەیەکی $5g$ ی لە ڕیشاڵ بەلایەنی کەمەوە دروستبکات.

أ هێمای x بۆ ژمارەی گرامەکانی بادەم، و y بۆ ژمارەی گرامەکانی مێووژ دابنێ. لاسەنگەیەکی هێڵی بۆ نواندنی پرسیارەکە بنووسە، پاشان لاسەنگەکە بەڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

ب ئەگەر دڵسۆز 15g بادەم بەکاربهێنێت پێویستە چەند گرام لە مێوژ بەکاربهێنێت بۆ ئەوەی ئامانجەکەی بپێکێت؟

ج **چی دەبێت ئەگەر...** وا دابنێ دڵسۆز 60g بادامی بەکارهێنا. لە لاسەنگەکەدا چی لەبارەی بەهای y دەستمانکەوێت؟ لەم پرسیارەدا ئەمە چی دەگەیەنێت؟

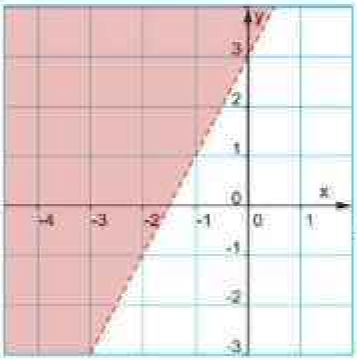
43 یانەی هاوکاری نێوارە ئاهەنگێکی ساڵانەی لە هۆڵی ئاهەنگەکان ڕێکخست، بەڕێوەبەرانی یانەکە چەند مێزێکی بازنەیی و ئەوانی تریان لاکێشەیی بن. لە توانادایە 8 کورسی لە دەوری هەرمێزێکی بازنەیی و 6 کورسی لە دەوری مێزێکی لاکێشەیی دابنرێت.
هێمای x بۆ ژمارەی مێزە بازنەییەکان و y بۆ ژمارەی مێزە لاکێشەییەکان دابنێ.

أ لاسەنگەیەکی هێڵی بۆ نواندنی پرسیارەکە بنووسە، ئەگەر ژمارەی کورسییە داوا کراوەکان لە 220 کورسی کەمتر نەبێت، پاشان ئەم لاسەنگەیە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

ب بارودۆخی هێمنی وا دەخوازێت کە ژمارەی کورسییەکان لە 300 کورسی زیاتر نەبێت. لاسەنگەیەک بۆ نواندنی ئەو مەرجە بنووسە و لە دوایدا بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

ج بەراورد لە نێوان دوو وێنە ڕوونکردنەوەکانیاندا بکە. لە چیدا جیاوازن؟

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە



44 کام لاسەنگە وێنەی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر دەنوێنێت؟

أ $y < 2x + 3$ ج $y \geq 2x + 3$

ب $4x - 2y < -6$ د $4x + 2y > 6$

45 کام خاڵ ناکەوێتە ناوچەی شیکاری لاسەنگەی $5x - 3y < 30$

أ $(0,0)$ ج $(-5,3)$

ب $(3,-5)$ د $(-3,5)$

46 کام لاسەنگە هاوتای لاسەنگە $7x - 3y \geq 4$ دەبێت؟ (واتا هەمان ناوچە شیکاریان هەبێت)

أ $y \leq \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}$ ج $y \geq -\frac{7}{3}x - \frac{4}{3}$

ب $y \leq -\frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$ د $y \geq \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$

47 کام دوو خاڵ خاڵی یەکتربڕینی ئاسۆیی و ستوونی هێڵی سنووری لاسەنگە $y \leq 3x - 9$ دەنوێنێت؟

أ $(0,9)$ و $(3,0)$ ج $(0,9)$ و $(-3,0)$

ب $(0,3)$ و $(-9,0)$ د $(0,-9)$ و $(3,0)$

48 بۆ وەستاندنی ئۆتۆمبێل لە شوێنی تایبەت بۆ ماوەی 8 خولەک پێویستی بە 250 دیناری و بۆ ماوەی 20 خولەک پێویستی بە 500 دیناری هەیە. زۆرترین ماوە بۆ وەستاندنی ئۆتۆمبێل 3 کاتژمێرە. شوان ئۆتۆمبێلەکەی وەستاندوە سەیری کرد ژمێرکاری وەستگەکە 37 خولەک بە خۆڕاییە. دەبێ چەند جۆر لە دوو پارچە پارەکە بەکاربهێنێت بۆ وەستاندنی ئۆتۆمبێلەکە بۆ ماوەی 3 کاتژمێر؟

أ 3 پارچەی 250 دیناری و 9 پارچەی 500 دیناری.

ب 13 پارچەی 250 دیناری و دوو پارچەی 500 دیناری.

ج 8 پارچەی 250 دیناری و 4 پارچەی 500 دیناری.

د 5 پارچەی 250 دیناری و 5 پارچەی 500 دیناری.

49 **کورتە وەڵام** پارێك باسبکە لاسەنگە هێڵیەکانی تێدابێت، و تیایدا بەها سالبەکان بۆ نەزانراوی x یان نەزانراوی y مانای هەبێت.

بەرەنگاری و فراوانکردن

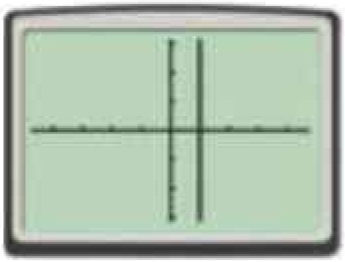
بەڕوونکردنەوەی هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە.

50 $4(4x-3y)<5(2+3x)-10y$

51 $\frac{4+3y-2x}{6} \geq \frac{3x-2-3y}{-4}$

52 **چی دەبێت ئەگەر ...** وایدابنێ لاسەنگەیەکی هێڵیت بەبەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی شیکارکردووە. شاشەیەکی تەواو سێبەرت دەسکەوتووە. ئەمە لەبارەی لاسەنگەکەوە چی دەنوێنێت؟ چی دەکەیت بۆ ڕوونکردنەوەی ناوچەی شیکار؟

53 دوای دروستکردنی ڕوونکردنەوەی ڕاستەهێڵی $y=500(x-1)$ بە بەکارهێنانی پەنجەرەیZdecimal وێنەی بەرامبەر لە شاشەی بژمێرە ڕوونکردنەوەیەکە دەردەکەوێت.



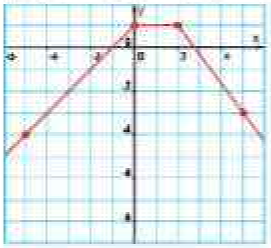
أ ئایا ڕاستە هێڵەکە لە ڕاستیدا ئەستوونە؟ ڕوونیبکەرەوە.

ب کام لایەی ڕاستەهێڵەکە ڕەنگ دەکرێت بۆ ئەوەی بە ڕوونکردنەوەی لاسەنگەی $y \leq 500(x-1)$ شیکار بکەیت، بەڵگەی وەڵامەکەت دیاریکە.

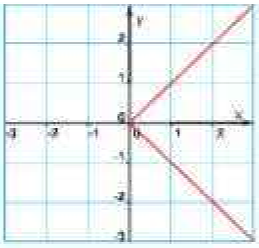
پێداچوونەوەی لولپێچی

تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ستوونی بەکاربێنە بۆ بڕیاردان لەسەر ئەوەی ڕوونکردنەوەکە نەخشە دەنوێنێت یان نا. (پۆلەکانی پێشوو)

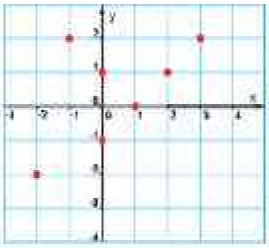
54



55



56



پۆتانی وێنەی خاڵی$(-4,3)$ بەهەموو جێگۆڕکێکانی خوارەوە بنووسە.

57 ڕاکێشانی ئاسۆیی یەك یەکە بۆ لای چەپ.

58 وێنەدانەوە لە دەوری تەوەرەی دووەم.

59 ڕاکێشانی ستوونی 3 یەکە بۆ سەرەوە.

60 $(x+7, y-5)$

شێوەی لاری - یەکتربڕین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە بەخاڵی $(1,-7)$ دا دەڕوات و.

61 بەخاڵی$(1,3)$ دا دەڕوات.

62 بە ڕاستەهێڵ $y=\frac{1}{2}x-5$ تەرییە.

63 لارییەکەی دەکاتە 0.25

64 لەگەڵ ڕاستەهێڵ $3x-y=-4$ ئەستوون دەبێت.

2–2 مۆدیلە هێڵییەکان

Linear models

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

زاناکانی ڕەگەزە مرۆییەکان نموونە هێڵی بۆ خەملاندنی درێژییەکانی تاکەکانی گەلانی دێرین بەکاردێنن، ئەویش بە هۆی ئەو پەیکەرە ئێسکیانەی دەیاندۆزنەوە.

ئامانجەکان

- دۆزینەوەی نموونەی هێڵی بۆ نواندنی پێدراوەکان بە بەکارهێنانی تەکنەلۆجیا یان بەبێ بەکارهێنانی
- سامپلە هێڵییەکان بۆ ئەنجامدانای پێشبینییەکان

زاراوەکان
Vocabulary

لێژبوونەوە
Regression

پەیوەستبوون
Correlation

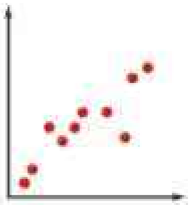
هێڵی زۆرترین نواندن
Line of best fit

هاوکۆلکەی پەیوەست
Correlation coefficient

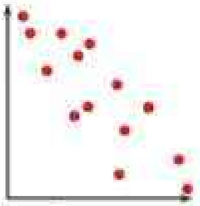
بە زۆری زانایانی ڕەگەزە مرۆییەکان گرنگی بەو پەیوەندییانە دەدەن کە دووجۆر پێوانە بەیەکەوە دەبەستێت، ئامارکارەکان لە توێژینەوە و ئامارەکانیاندا و لە پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاودا، بە لێژبوونەوە **Regression** ناوی دەبەن.

خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان Scatter plot بۆ هەوڵدان لە تێگەیشتن و شێوەی پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو و ئاڕاستەیان و مەودای هێزیان بەکاردێنن.

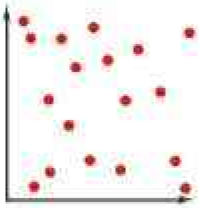
پەیوەست بوون **Correlation** بریتییە لە هێزی پەیوەندی هێڵی نێوان دوو گۆڕاو و ئاڕاستەکەیان.



پەیوەستی موجەب
لاری موجەب



پەیوەستی سالیب
لاری سالیب



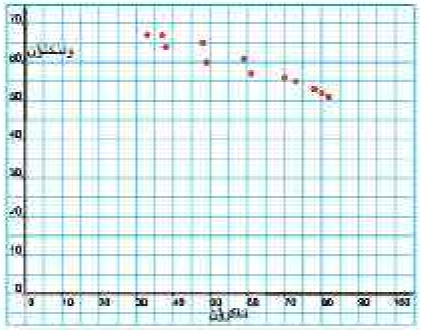
پەیوەستی نییە

ئەگەر دوو گۆڕاو بە پەیوەندییەکی هێڵی بەهێز پێکەوە بەسترابنەوە، دەگونجێت بۆ ئەنجامدانی پێشبینییەکان ڕاستەهێڵی باشترین نواندن **Line of best fit** بەکاربێنێت.

نموونـــــە 1 جێبەجێکردن لەسەر زەپۆش (الاحوال الجوية)

شاری ئاکرۆن لە ئەمریکا و شاری لنکتۆن لە نیوزلەندا دەکەونە سەر هەمان دووری لە هێڵی یەکسان (خط الاستواء)؛ یەکەمیان لە نیوەی باکوری گۆی زەوی، و دووەمیان لە نیوەی باشووری. ئەم خشتەیەی خوارەوە ناوەندە ژمێری پلەی گەرما لە دوو شاری ناوبراودا لە ماوەی 12 مانگدا دەنوێنێت. خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، پەیوەستبوونی نێوان ئەو دوو کۆمەڵە پێدراوە دیاریبکە، ڕاستە هێڵی باشترین نواندن بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە.

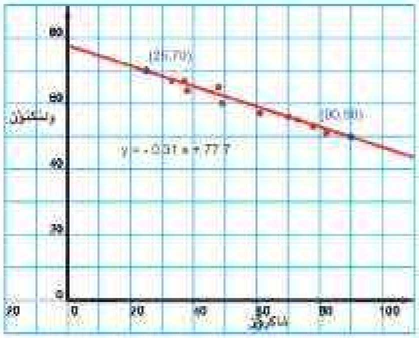
ناوەندە ژمێرياریيەکانی بەرزترین پلەکانی گەرما (بە پلەی فهرنهایت)												
مانگ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ئاکرۆن	33	37	48	59	70	78	82	80	73	61	49	38
ولنگتۆن	67	67	65	61	56	53	51	52	55	57	60	64



هەنگاوی 1 پێدراوەکانی خشتەکە بە خاڵە ڕوونکراوەییەکان بنوێنە.

هەنگاوی 2 بەدوای پەیوەستی دا بگەڕێ.
سەرەنج لەبوونی پەیوەست بوونی سالب لە نێوان دوو کۆمەڵە پێدراوەکەدا بدە. کاتێك پلەی گەرما لە ئاكرۆن بەرزبێتەوە لە ولنكتۆن نزمدەبێتەوە.

هەنگاوی 3 ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بکێشە ڕاستەهێڵێك خاڵەکان بەیەکسانی لە سەرەوە و خوارەوە دابەشبکات.



هەنگاوی 4 دووخاڵ بدۆزەوە کەوتبێتە سەر ئەو ڕاستەهێڵە، دەتوانیت دوو خاڵی (70 ،25) و (50 ،90) هەڵبژێریت.

هەنگاوی 5 لاری ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە

$$m = \frac{70-50}{25-90} = \frac{20}{-65} \approx -0.31$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 70 = -0.31(x - 25)$$

$$y = -0.31x + 77.7$$

هاوکێشەی نموونەی هێڵی بۆ پەیوەستبوونی نێوان ئەو دوو کۆمەڵە پێدراوە بریتییە لە $y = -0.31x + 77.7$

ڕۆشنایی

هەوڵبدە با ژمارەی ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر ڕاستەهێڵی باشترین نواندن یەکسان بێتە ژمارەی ئەوانەی دەکەونە ژێرەوە.

خاڵی چاودێری

1. **تۆپی سەبەتە** بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان دابنێ. پەیوەستی نێوان ئەو دوو کۆمەڵە پێدراوە دیاریبکە ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە.

ئەنجامەکانی دە یاری										
ماوە (m)	28	35	8	20	39	23	19	27	15	30
خاڵەکان	16	13	2	12	31	10	9	15	4	19

هاوکۆڵکەی پەیوەست Correlation coefficient بریتییە لە ژمارە r کە مەودای ووردبینی نواندنی نموونەی هێڵی کۆمەڵە پێدراوەکان دەپێوێت.

فێربە

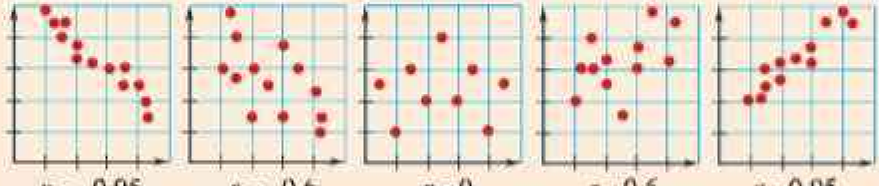
سیفەتەکانی هاوکۆڵکەی پەیوەست

هاوکۆڵکەی پەیوەست ژمارەیەکە سەر بەماوەی $[-1,1]$ دەبێت، واتە $-1 \le r \le 1$

ئەگەر $r = 1$ ، ئەوا ئەو خاڵە ڕوونکردنەوەییانەی کۆمەڵەی پێدراوەکان دەنوێنێت، ڕاستەهێڵێکی لاری موجەب دروستدەکات.

ئەگەر $r = 0$، ئەوا هیچ پەیوەستێك لە نێوان دوو گۆڕاوەکەدا نییە.

ئەگەر $r = -1$ ئەوا ئەو خاڵە ڕوونکردنەوەییانە کۆمەڵەی پێدراوەکان دەنوێنێت ڕاستەهێڵێکی لاری سالب دروستدەکات.



$r = -0.95$ $r = -0.6$ $r = 0$ $r = 0.6$ $r = 0.95$

ئاگاداربە!

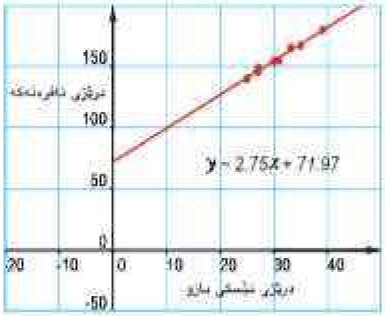
لاری و بەهای r تێکەڵ مەکە. دەگونجێت لاری ڕاستەهێڵ 10 یان $\frac{1}{10}$ بێت دەگونجێت $r = 1$ لە کاتێکدا لاری و بەهای r هەمان نیشانەیان هەبێت.

دەتوانیت بۆ دۆزینەوەی ڕاستەهێڵی باشترین تواندن و دۆزینەوەی هاوکۆلکەی پەیوەست بژمێری ڕوونکردنەوەی بەکاربێنیت. بۆ ئەوەی هاوکۆلکەی پەیوەست دەستەکەویت پێویستە بژمێرەکە لە باری ئاساندنەوەدا دابنێی، بۆ گەیشتن بەم بارە، 2nd دابگرە پاشان 0 (CATALOG) ئینجا **DiagnosticOn** هەڵبژێرە.

نموونــــە 2 جێبەجێکردن لەسەر زانستی ڕەگەزە مرۆییەکان

زانایانی ڕەگەزە مرۆییەکان درێژی ئێسکی بازوو کە شان بە ئەنیشکەوە دەبەستێتەوە بەکاردێنن لە ئافرەتدا بۆ دیاریکردنی درێژییەکەی. خشتەکەی خوارەوە هەندێک نموونە دەردەخات

درێژی ئێسکی بازوو لە ئافرەتدا								
31	27	39	25	33	30	27	35	درێژی ئێسکی بازو (cm)
155	149	180	140	165	154	146	167	درێژی ئافرەتەکە (cm)



أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ تواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، ئێسکی بازوو وەک گۆڕاوی ئازاد (متغیر حر) بەکاربێنە

ب هاوکۆلکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستە هێڵی باشترین تواندن بدۆزەوە، بە پێی پێدراوەکانی پرسیارەکە لاری ئەو ڕاستەهێڵە چی دەگەیەنێت؟

بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربێنە، پێدراوەکانی درێژی ئێسکی بازوو لە لیستی $L1$ دا دابەزێنە، پاشان پێدراوەکانی درێژی ژنەکە لە لیستی $L2$ دابەزێنە.
سیفەتی لێژبوونەوەی هێڵی لە بژمێردا بەکاربێنە بەداگرتنی STAT ئینجا بۆ **CALC** لە دوای دا **4:LinReg** هەڵدەبژێری، بژمێرەکە هاوکێشەی $y = 2.75x + 71.97$ دەداتێ
لاری ڕاستەهێڵی باشترین تواندن بریتی دەبێت لە 2.75 بە نزیکەی، ئەو لارییەش ئەمەی خوارەوە دەگەیەنێت: هەر زیادەیەك بڕەکەی $1cm$ لە درێژی ئیسکی بازوو بەرامبەر دەبێت بە $2.75cm$ لە درێژی ژنەکە. هەروەها بژمێرەکە هاوکۆلکەی پەیوەست دەداتێ، کە بریتییە لە $r = 0.991$ بەنزیکەی، ئەمەش ئاماژەیە بۆ پەیوەستی موجەبی بە هێز.

ڕۆشنایی

بۆ دابەزاندنی پێدراوەکان بۆ بژمێری ڕوونکردنەوەیی Stat دابگرە و 1:Edit هەڵبژێرە بەهایەکانی x لە ستونی $L1$ بەهایەکانی y لەستوونی $L2$ دا دابەزێنە

ج لە گۆڕێکی بە کۆمەڵی کوردە ئەنفال کراوەکانی عێراقدا، زانایەکی ڕەگەزە مرۆییەکان ئێسکێکی بازووی دۆزیەوە درێژییەکەی $32cm$. درێژی خاوەنەکەی بەچەند دەخەمڵێنرێت؟
هاوکێشەی زۆرترین تواندن ڕێگە بە خەمڵاندنی درێژی خاوەن ئێسکەکە دەدات.

$$y = 2.75x + 71.97$$

$$y = 2.75 \times 32 + 71.97$$

$$y = 159.97$$

درێژی ئەو ئافرەتە $160cm$ بەنزیکەیی

خاڵی چاودێری

2. خشتەکە پێدراوی ئەو ئۆتۆمبێلانەی بە غاز کاردەکەن بەهەرەمەکی هەڵبژێراون. خشتەکە هێزی هەر ئۆتۆمبێلێک بە (ئەسپ) و ئەو دووریەی بەهەر لیترێک لە غاز دەیبڕێت نیشاندەدات.

هێزی ئۆتۆمبێلەکان و ئەو دووریەی بەهەر لیترێک دەیبڕێت										
هێز (بەئەسپ)	175	255	140	165	115	120	190	180	110	125
دووری براو بەهەر لیترێک (کم / ل)	3.61	2.13	4.1	2.95	5.25	4.6	2.46	3.45	5.75	4.92

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، بەکاربردن وەک گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنێت.

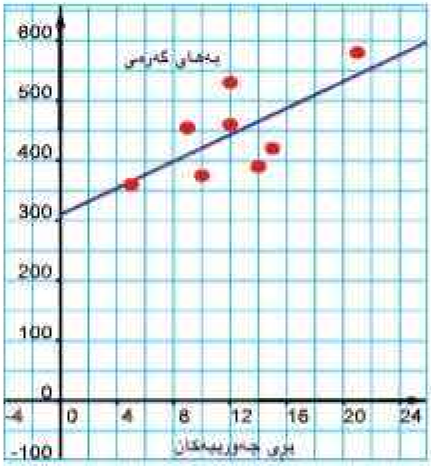
ب هاوکۆلکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە. ئەم ڕاستەهێڵە چی دەگەیەنێت؟

ج ئۆتۆمبێلێک هێزی بزوێنەرەکەی 210 ئەسپە، ئەو دوورییە بەهەر لیترێک دەیبڕێت دیاریبکە.

نموونــــە 3 جێبەجێکردن لەسەر خواردن

خشتەکەی خوارەوە پێدراوەکان لە بڕی ئەو چەورییەی یەکێک لە جۆرەکانی باپۆڵە تێیدایە و بەها گەرمییەکەی نیشان ئەدات.

پێدراوە خۆراکییەکان بۆ هەندێک لە جۆرەکانی باپۆڵە								
بڕی چەورییەکان (g)	5	9	12	15	12	10	21	14
بەهای گەرمی (بە گەرمۆکە)	360	455	460	420	530	375	580	390



أ هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی ئەخشەکە دابنێ. بڕی چەورییەکە وەک گۆڕاوی سەربەخۆ بەکاربێنە.

ب هاوکۆلکەی پەیوەست و هاوکێشەی باشترین نواندن بدۆزەوە. وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە.
هاوکۆلکەی پەیوەست بریتییە لە $r = 0.682$ بە نزیکەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بریتییە لە $y = 11.1x + 309.8$
گۆڕاوی پەیوەستی (متغیر تابع) ژمارەی گەرمۆکە.

ج بڕی چەورییەکان لەو باپۆڵەیەکدا کە بڕە گەرمیەکەی 500 گەرمۆکەیە بخەمڵێنە ووردبینی خەملاندنەکەت چەندە؟

$500 = 11.1x + 309.8$

$190.2 = 11.1x \Rightarrow x \approx 17.1$

سوود لە ڕاستەهێڵی باشترین نواندن وەرئەگرێت بەوەی بڕی چەورییەکان لەو باپۆڵەیەدا کە بڕەگەرمییەکەی 500 گەرمۆکەیە بریتییە لە 17.1 g بەنزیکەیی. خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان و بەهای هاوکۆلکەی پەیوەستی وای دەردەخەن کە بڕی چەورییەکان لە ژمارەی گەرمۆکە لەم جۆرە باپۆلانەدا نیشاندەرێکی باشی نییە.

ڕۆشنایی

هەندێ جار بە ڕاستەهێڵی باشترین نواندن دەگوترێ هێڵی ڕووناکردن

خاڵی چاودێری

3. چی دەبێت ئەگەر...؟ هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بۆ خەملاندنی بڕی چەورییەکان لە باپۆڵەیەکدا بڕە گەرمییەکەی 420 گەرمۆکە بێت بەکاربێنە. ئەو بەهایەی لە وەڵامەکەتدا دەستتکەوتووە چەند لە و بەهایەی کە بەرامبەر 420 گەرمۆکە لە خشتەکەدایە دوورە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونیبکەوە کەی هاوکۆلکەی پەیوەست (معامل الارتباط) لە نێوان دوو گۆڕاودا موجەب یان سالب دەبێت ئەگەر بزانیت هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بریتییە لە$y=3.2x-12.5$.
2. ئەمەی خوارەوە ڕوونبکەوە: کام لەم دوو هاوکۆلکە پەیوەستە$r=0.65$: $r=-0.75$ بەهێزترین پەیوەستی لە نێوان دوو گوڕاودا دەگەیەنێت؟ بەڵگە بۆ وەلامەکەت بێنەوە.
3. ڕێکخەریە ئەم خشتەیەی خوارەوە بنووسەوە و تەواوی بکە. خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ هەر جۆرە پەیوەستێك دابنێ و بەهای هاوکۆلکەی پەیوەستی r بخەملێنە.

پەیوەست بوون	خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان	بەهای پێشبینکراوی هاوکۆلکەی پەیوەستبوون
بەهێزی موجەب		
لاوازی موجەب		
بوونی نییە		
لاوازی سالب		
بەهێزی سالب		

2-2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ناڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** هەریەك لە هاوکۆلکەی پەیوەست لە نێوان دوو کۆمەڵەی پێدراودا چ دەگەیەنێت ڕوونیبکەوە.

أ $r=0.4$ ب $r=-0.96$ ج $r=-0.02$

2 **ئۆتۆمبێلەکان** خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، ژمارەی گالۆنەکان وەك گۆڕاوی سەربەخۆ بەکاربێنە. بەدوای پەیوەستی بگەڕێ. وێنەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە.

بڕوانە نموونە 1

دووری بڕاو							
ژمارەی گالۆنەکان	11.2	9.8	10.6	10.1	12.3	8.7	10.1
دووری بڕاو (km)	338	296	332	324	368	263	305

3 **ماڵداری** ئەم خشتەیەی خوارەوە پێدراوەکان لە ناوەندە ژمێرەیی پلەی گەرما لە ماوەی حەوت مانگدا و پسولەی نرخی فێنك کردنەوە لە ماڵی ئالان دا نیشان دەدات.

بڕوانە نموونە 2

فێنککەرەوە لە ماڵی ئالان							
ناوەندە ژمێری پلەی گەرما	38	42	44	36	42	49	38
پسوولەی نرخ	93 000	79 000	75 000	83 000	74 000	67 000	86 000

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوی خشتەکە دابنێ، ناوەندی ژمێرەی پلەی گەرما بەگۆڕاوی ئازاد دابنێ.

ب هاوکۆلکەی پەیوەست و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە، وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە.

ج پسولەی نرخی فێنککەرەوە بۆ ئەو مانگەی ناوەندە ژمێرەی پلەی گەرما تیایدا 40 پلەیە بخەملێنە. ووردبینی ئەو خەملاندنە چەندە؟

بڕوانە نموونە 3

4 **خوێندنگاکان** خشتەکە پێدراوەکان لە ژمارەی مامۆستایەکان و ژمارەی خوێندکارەکان لە نموونەی هەڕەمەکی خوێندگاکان نیشاندەدات.

ژمارەی مامۆستایەکان و ژمارەی خوێندکاران								
ژمارەی مامۆستاکان	92	52	114	49	110	62	76	84
ژمارەی خوێندکاران	1050	653	753	381	1312	813	496	910

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکانی خشتەکە دابنێ، ژمارەی مامۆستاکان وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربهێنە.

ب هاوکۆلکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە، وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە.

ج ژمارەی مامۆستایەکان لە خوێندنگایەکدا بە 600 خوێندکاری تێدابێت خەملێندرا. ووردبینی ئەو خەملاندنە چەندە؟

ڕاهێنانی و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکاری ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
5	1
6	2
7	3

5 **کیمیا** خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکان خشتەکەی خوارەوە بەکاربێنە. گەردیلە ژمارە وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە.

هەندێك توخمی کیمیایی														
گەردیلە ژمارە	89	13	95	51	18	33	85	56	97	4	83	107	5	35
بارستایی گەردیلە	227	27	243	122	40	75	210	137	247	9	209	264	11	80

6 **زیندەزانی** تێکڕایی لێکدانی باڵەکانی باڵندەی لەرزە (الطنان) لە چاو تێکڕایی لێکدانی باڵەکانی باڵندەی تردا زیاترە. خشتەکەی خوارەوە پێداراوەکان لەو تێکڕایانە و بارستایی لە ژمارەیەك باڵندە لەم جۆرەدا نیشاندەدات.

لێکدانی باڵی باڵندە الطنان							
بارستەی (g)	3.1	2.0	3.2	4.0	3.7	1.9	4.5
تێکڕایی لێکدانەکان (بەچرکە)	60	85	50	45	55	90	40

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکان نەخشەکە دابنێ. بارستایی وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە.

ب هاوکۆلکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە، ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە.

ج تیکڕای لێکدانەکانی باڵی باڵندەیەك لەم جۆرە کە بارستاییەکەی 19 g بێت بخەملێنە. وردبینی خەملاندنەکەت چەندە؟

7 **نرخاندنی بلیتەکان** بەڕێوەبەری یەکێك لە تیمە میوزیکییەکان نرخی بلیتەکانی چوونە ژوورەوەی بۆ ئاهەنگەکەو ژمارەی ئامادەبونی تۆمارکرد.

ئامادەبوون بە پێی نرخەکانی بلیتەکانی چوونە ژوورەوە									
نرخ	6000	5000	8500	8000	10000	5500	7000	7500	8000
ئامادەبوون	213	256	155	194	160	267	258	210	235

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، نرخ وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە

ب هاوکۆلکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە.

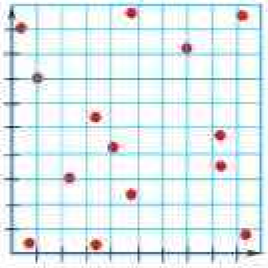
ج ژمارەی ئامادەبوونی ئاهەنگێك نرخی بلیتی چوونە ژوورەوەکەی 9000 دینار بێت بخەملێنە. ووردبینی خەملاندنەکە چەندە؟

x	2	8	15	21	24	30	33	37
y	71	63	64	194	160	267	258	210

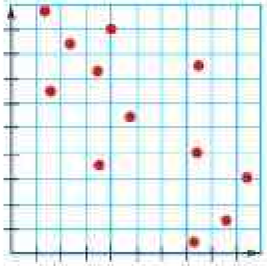
8 خاڵە ڕوونکردنەوەییەکانی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بخەمڵێنە.

خەملاندن هاوکۆلکەی پەیوەستی لە هەربارێکدا بخەمڵێنە.

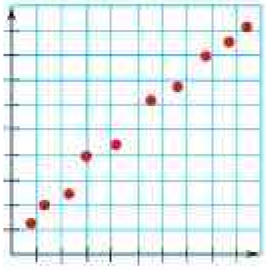
9



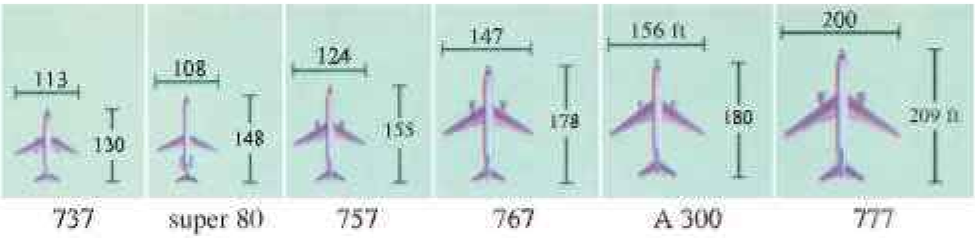
10



11



12 **فڕین** خشتەکەی خوارەوە درێژی ژمارەیەک لە فڕۆکە وپانی باڵەکانیان نیشاندەدات. خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ، درێژی وەک گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە وێنەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە.



نمرەکانی یەکەمەکان لە بیرکاری			
بنکە	نمرە	بنکە	نمرە
1	95	6	90
2	93	7	89
3	92	8	87
4	91	9	86
5	90	10	85

13 خشتەی بەرامبەر نمرەی دەیەکەمەکان لە تاقیکردنەوەی بیرکاری نیشاندەدات.

أ کام هاوکێشە بۆ دۆزینەوەی نمرە بەزانینی بنکە بەکاردێت.

ب وای دابنێ مامۆستای بیرکاری بۆ هەر نمرەیەک 5 نمرەی زیادکرد؟کاریگەری ئەمە لەسەر هاوکێشەکەو ڕوونکردنەوەییەکانی چییە؟

14 **وەرزش** خشتەی خوارەوە پێدراوەکان لەسەر خێرایی ژمارەیەک لە پێشبڕکێ گەرانی ڕاکردن و ژمارەی هەنگاوەکانیان لە چرکەیەکدا نیشاندەدات.

ژمارەی هەنگاوەکان لە چرکەیەکدا و خێرایی							
خێرایی (پێ / چر)	15.86	16.88	17.5	18.62	19.97	21.06	22.11
ژمارەی هەنگاوەکان لەچرکەیەکدا	3.05	3.12	3.17	3.25	3.36	3.46	3.55

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان دیاریبکە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بەبەکارهێنانی خێرایی وەک گۆڕاوی ئازاد، باشترین نواندن بدۆزەوە و پاشان وێنەکەی بکێشە ب هاوکۆلکەی پەیوەستی و هاوکێشە و وێنەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بکێشە. ج هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی هەنگاوەکان لە چرکەیەکدا بۆ ڕاکەرێک خێراییەکەی 18 پێیە لە چرکەیەکدا ووردبینی ئەو خەملاندنە چەندە؟ ڕوونیبکەوە

15 **بەردین زاتی گیاندارو** (زانستێکە لە شێوەکانی ژیان دەکۆڵێتەوە وەك بوون بە بەرد گیاندارو ڕووەکەکان) خشتەکەی خوارەوە درێژی ئێسکی ڕان و درێژی ئێسکی بازووی تێدایە کە لە پێنج نموونەی بەبەردبوون لە ئەرکیو پیتریکس، کە گیانلەبەرێکە و لەناوچووە، ڕواڵەتی خشۆك و تایبەتمەندییەکانی ئەوی هەیە زاناکان وای بۆ دەچن لە ئالقەکانی یەکەم بێت و باڵندەی لێپەیدابووە.

درێژییەکانی ئێسکی ڕان ئێسکی بازوو					
درێژی ئێسکی ڕان (cm)	38	56	59	64	74
درێژی ئێسکی بازوو (cm)	41	63	70	72	84

أ خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە دابنێ درێژی ئێسکی ڕان وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە. هاوکۆڵکەی پەیوەستبوون و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە و وێنە بۆ ڕاستەهێڵەکە بکێشە

ب لاری ئەو ڕاستەهێڵە تایبەتە بە گیاندارەکە چی دەگەیەنێت؟

ج ئەو هاوکێشەیەی دۆزیتەوە بۆ خەملاندنی درێژی ئێسکی ڕان بۆ خەملاندنی درێژی ئێسکی ڕانی گیانداری ئەو جۆرە بەکاری بێنە کە درێژی ئێسکی بازووەکەی $50cm$ بێت. ووردبینی خەملاندنە چەندە؟

16 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** دوو گۆڕاو بەهاکانی یەکێکیان بەهاکانی ئەوەی تریان دیاری دەکات، ئایا مانای وایە کە پەیوەستیەکی بە هێز لە نێوان ئەو دوو گۆڕاوە دا هەیە؟ (بۆ نموونە: ئایا زیاد بوونی پێوەدانی هەنگ دەبێتە هۆی زێدە فرۆشی بەستەنییەکان)؟ ڕوونیبکەوە

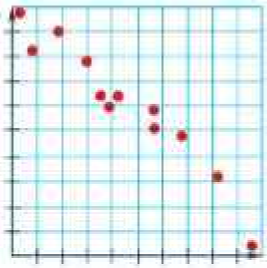
17 **بنووسە** کرداری دۆزینەوەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بە درێژی باسبکە؟

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

18 هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بۆ کۆمەڵەی پێدراوەکان بریتییە لە $y=1.05x-1.3$ ، کام لە مانەی خوارەوە دەبێتە هاوکۆڵکەی پەیوەست r ؟

أ $r=-1.3$ ب $r=-0.7$ ج $r=0.8$ د $r=1.05$

19 کام لەمانەی خوارەوە ئەو پەیوەستبوونەی خاڵە ڕوونکردنەوەییە بەرامبەرەکان نیشان دەدەن باسدەکات.



أ بەهێزی موجەب ج بە هێزی سالب

ب لاوازی موجەب د لاوازی سالب

20 کام لەم پەیوەندییانەی خوارەوە هاوکۆڵکەی پەیوەستی لاوازی تایبەت بە ئۆتۆمبێلی هەیە؟

أ تەمەنی ئۆتۆمبێل و ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی بڕیوەیەتی.

ب تەمەنی ئۆتۆمبێل و نرخەکانی لەکاتی فرۆشتنی وا کە بەکارهاتبێت.

ج درێژی ئۆتۆمبێل و پانییەکەی.

د ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی لە ناو شارو ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی لە سەر ڕێگای خێرا بڕیویەتی.

بەرەنگاری و فراوانکردن

لە خشتەی پێدراوەکاندا، ئایا پێدراوەکان پەیوەندییەکەیان هێڵییە؟ ئایا پێدراوەکان پێکەوە بەستراون؟ ڕوونیبکەوە.

21

x	2	7	13	15	22
y	4	4	4	4	4

22

x	35	45	55	65	75
y	30	34	36	34	30

23 ئەم دوو خشتەیەی خوارەوە ئەو پێدراوانەی یەکێك لە ئامارکارەکان توسیوویانە نیشاندەدات، بۆ هەر خشتەیەك خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان دابنێ کە دەینوێنێت و هاوکۆڵکەی پەیوەست و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین تواندن بدۆزەوە، چی گرنگی بە تواندنی پێدراوکان بە ڕوونکردنەوەی دەدات پێش ئەوەی نموونەی هێڵی بۆ ئەنجامدانی پێشبینییەکانی بەکاربێنێت؟

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	9.14	8.14	8.74	8.77	9.29	8.1	6.13	3.1	9.13	7.26	4.74

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	7.46	6.77	12.74	7.11	7.81	8.84	6.08	5.39	8.15	6.42	5.73

پێداچوونەوەی لولپێچی

هەر بڕەیەك بەسادەترین شێوە بنووسە (پۆلەکانی پێشو)

24 $3\left(x^2-2\right)+4xy-10x^2y+5x^2$

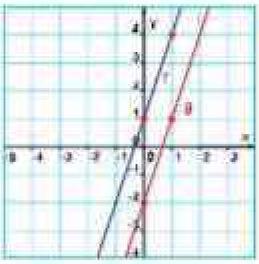
25 $-a^4+3ab+\left(2a^2\right)^2$

26 $-3g^2+3(g-4)-2\left(g-g^2\right)$

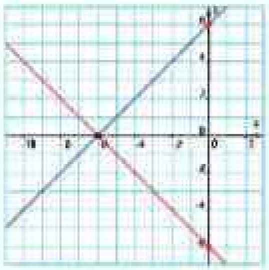
27 $n\left(4t^2-t\right)-10nt^2+nt$

هاوکێشەی هەریەك لەم ئەخشانە کە بەڕوونکردنەوەی نوێنراون بنووسە ئەو جێگۆڕکێیانەی $f(x)$ بۆ $g(x)$ دەگۆڕن چین؟ (پۆلەکانی پێشو)

28



29



هەریەکە لەم لاسەنگانە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاریکە (پۆلەکانی پێشو)

30 $3x<x-12$

31 $44+6x>-5x$

32 $-2(q-4)+3q\le 1+q$

3-2 سیستەمەکانی لاسەنگە هێڵییەکان

System of Linear Inequalities

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

دۆزەرەوانی جەمسەری باکوور سیستەمەکانی لاسەنگە هێڵییەکان بۆ دیاریکردنی ئەو خێراییەی کە پێویستە پێی برۆن بەکاردەهێنن ئەگەر نا ڕووبەڕووی کەش و هەوایەکی بێزارکەر دەبنەوە (نموونەی 2).

ئامانجەکان

شیکارکردنی سیستەمەکانی لاسەنگە هێڵییەکان بەڕوونکردنەوەیی.

زاراوەکان
Vocabulary

سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان
System of linear inequalities

کاتێک لە پرسیارێکدا دەربڕینێک وەک «گەورەتر لە» یان «پترتییە لە» بەکاردێنێت دەتوانیت ئەو بارە بە بەکارهێنانی لاسەنگە یان سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان بنوێنیت.

سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان System of linear inequalities بریتییە لە کۆمەڵەی دوو لاسەنگەی هێڵی یان زیاتر، کە هەمان نەزانراویان تێدایە. بە زۆری کۆمەڵە شیکاری سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان لە ژمارەیەکی ناکۆتا خاڵ پێکدێت کە دەتوانرێت بەڕوونکردنەوەی بە ڕەنگکردنی ناوچەکە لە ڕووتەختی ڕوونکردنەوەدا بنوێنرێت. کاتێک هەردوو لاسەنگە هێڵییەکە، لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا دنوێنرێت، ناوچە ڕەنگ کراوەکان یەکتر دەبڕن و ناوچەیەکی هاوبەش دروستدەکەن، ناوچەی شیکاری سیستەمەکە ئەو ناوچە هاوبەشەیە.

نموونە 1 شیکارکردنی سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەی

بەڕوونکردنەوەی سیستەمی ئەم دوو لاسەنگە هێڵییە شیکاربکە.

أ

$$\begin{cases} y \le -2x+4 \\ y > x-3 \end{cases}$$

لە لاسەنگەی یەکەمدا، وێنەی ڕاستەهێڵ $y=-2x+4$ بە هێڵێکی نەپساو بکێشە، و ناوچەی ژێری ڕەنگبکە. و لە لاسەنگەی دووەمدا وێنەی ڕاستەهێڵ $y=x-3$ بە هێڵێکی خاڵخاڵ بکێشە، و ناوچەکەی سەرەوەی ڕەنگ بکە. یەکتر بڕی دوو ناوچە ڕەنگ کراوەکە ناوچەی شیکاری سیستەمی دوو لاسەنگە هێڵییەکە دەبێت.

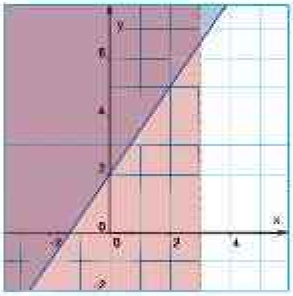
بیرەهێنان

ئەگەر دڵنیانیت لەو ناوچەیەی کە دەبێ سێبەری بکەی، خاڵی (0 ، 0) وەک خاڵی تاقیکردنەوە بەکاربێنە.

ساغکردنەوە: خاڵێک لە خاڵەکانی هەر ناوچەیەک لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکە تاقیبکەوە.

ناوچە	خاڵ	$y \le -2x+4$	$y > x-4$
چەپ	(0,0)	$0 \overset{?}{\le} -2(0)+4$ $0 \overset{?}{\le} 4$ ✓	$0 \overset{?}{>} 0-3$ $0 \overset{?}{>} -3$ ✓
ڕاست	(4,0)	$0 \overset{?}{\le} -2(4)+4$ $0 \overset{?}{\le} -4$ ✗	$0 \overset{?}{>} 4-3$ $0 \overset{?}{>} 1$ ✗
سەرەوە	(2,2)	$2 \overset{?}{\le} -2(2)+4$ $2 \overset{?}{\le} 0$ ✗	$2 \overset{?}{>} 2-3$ $2 \overset{?}{>} -1$ ✓
خوارەوە	(2,-2)	$-2 \overset{?}{\le} -2(2)+4$ $-2 \overset{?}{\le} 0$ ✓	$-2 \overset{?}{>} 2-3$ $-2 \overset{?}{>} -1$ ✗

خاڵی یەکەم تاکە خاڵ بوو لە نێوان ئەو خاڵانەدا کە پۆتانەکانی سیستەمی دوو لاسەنگەکەیان شیکارکرد.



بەڕوونکردنەوەی سیستمی ئەم دوو لاسەنگە هێڵییە شیکاریکە.

ب $\begin{cases} y \ge \frac{3}{2}x+2 \\ x<3 \end{cases}$

لە لاسەنگەی یەکەمدا، وێنەی ڕاستەهێڵ $y=\frac{3}{2}x+2$ بە هێڵی ئەپساو بکێشە و ناوچەکەی سەرەوەی ڕەنگ بکە. و لە لاسەنگەی دووەمدا، وێنەی ڕاستەهێڵ $x=3$ بە هێڵی خاڵخاڵ بکێشە و ئەو ناوچەی دەکەوێتە لای چەپیەوە رەنگ بکە. یەکتربڕی دوو ناوچە ڕەنگ کراوەکە ناوچەی شیکاری سیستمی دوولاسەنگە هێڵییەکە دەنوێنێت.

$x<3 \qquad y \ge \frac{3}{2}x+2$

$-4<3$ ✓ $\quad 0 \ge \frac{3}{2}(-4)+2$

$0 \ge -4$ ✓

ساغکردنەوە خاڵێك لە خاڵەکانی ناوچە یەکتربڕەکە تاقیبکەوە، بۆ نموونە $(0\ ,\ -4)$ تاقیبکەرەوە بۆ ئەوەی دەربکەوێت پۆوتانی ئەو خاڵە شیکارە بۆ سیستمەکە لەبەرئەوەی خاڵەکە سەربەو ناوچە شیکارەیە کە ناوچەی شیکاری سیستمی دوو لاسەنگەکەیە. ئەوا ناوچەی یەکتربڕین ناوچەی شیکارە.

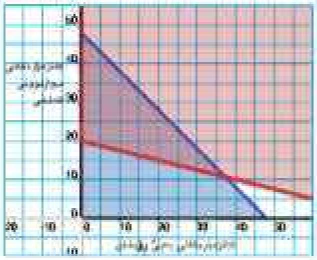
خاڵی چاودێری

1. بەڕوونکردنەوەیی هەریەك لەم سیستمی لاسەنگە هێڵییانە شیکاریکە.

أ $\begin{cases} x-3y<6 \\ 2x+y>1.5 \end{cases}$ $\qquad$ ب $\begin{cases} y \le 4 \\ 2x+y<1 \end{cases}$

نموونە 2 جێبەجێکردن لەسەر هەڵمەتەکانی دۆزینەوە

هەڵمەتی دۆزینەوەی جەمسەرکە لە دووری 240 km لە بنکەکەیەوە بوو و پێشبینی دەکرا لەماوەی 48 کاتژمێردا با هۆزی بەفر هەڵبکات. دەستەی هەڵمەتەکە پێویستە لەسەریان بەخێرایی سواری پاپۆڕە سەهۆڵ بڕەکە ببن و بجولێن پاشان بەپێ بڕۆن تابگەنەوە بنکەکەیان. ئەویەری خێرایی پاپۆڕەکە 12 km/h یە. بەڵام ئەویەڕی خێرایی بە پێ ڕۆیشتن و ڕاکێشانی کەلوپەلەکانیان لە 3 km/h تێنایەڕێت. سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاریان بکە بۆ ئەوەی ماوەی سواربوونی پاپۆڕەکە و ماوەی بەپێ ڕۆیشتن پێش گەیشتن بە بنکەکە دیاری بکەیت.



x بۆ ژمارەی کاتژمێرەکانی بەپێی ڕۆیشتن، y بۆ ژمارەی کاتژمێرەکانی سواربوونی کەشتیەکە بەکاربێنە. پێویستە سەرجەمی دوو نەزانراوەکە لە 48 کاتژمێر کەمتربێت. ئەمەش لاسەنگە $x+y \le 48$ مان دەداتێ. لە لایەکی ترەوە، پێویستە ئەو دوورییە هەڵمەتەکە دەیبڕێت لە 240 km کەمترنەبێت، ئەمەش لاسەنگەی دووەممان دەداتێ $3x+12y \ge 240$. سیستمی دوو لاسەنگەکە بریتییە لە

$$\begin{cases} x+y \le 48 \\ 3x+12y \ge 240 \end{cases}$$

وێنەی ڕاستەهێڵ $3x+12y=240$ بە هێڵی ئەپساو بکێشە و ناوچەکەی سەرەوە ڕەنگبکە پاشان وێنەی ڕاستەهێل $x+y=48$ بەهێڵی ئەپساو بکێشە و ناوچەکەی ژێرەوەی ڕەنگ بکە. ناوچەی شیکاری سیستمەکە ئەوەیە ناوچەی یەکتربڕینی ڕەنگکراوەکان.

ساغبیکەوە: خاڵی $(15, 25)$ لە ناوچەی یەکتربڕین هەڵبژێرە.
پۆوتانی ئەم خاڵە شیکاری هەردوو لاسەنگەکە و سیستمەکە دەکات.

$x+y \le 48 \qquad 3x+12y \ge 240$

$15+25 \le 48 \qquad 3(15)+12(25) \ge 240$

$40 \le 48$ ✓ $\qquad 345 \ge 240$ ✓

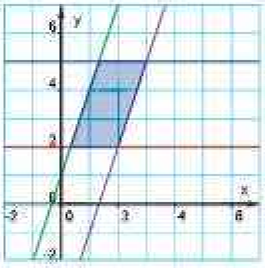
خاڵی چاودێری

2. سۆلاف پاپۆڵەی گۆشت و پاپۆڵەی مریشك دەفرۆشێ. 40 نانی پێیە واتە ناتوانێت لە 40 پاپۆڵە زیاتر لە هەردوو جۆرەکە پێکەوە بفرۆشێت. لە پاپۆڵەیەکی گۆشت 2 000 دینار قازانج دەکات، و لەپاپۆڵەیەکی مریشك 2500 دینار قازانج دەکات، ئەو دەیەوێت 90 000 دینار قازانج بکات. سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بۆ نواندنی پرسیارەکە بنوسە، پاشان بە ڕوونکردنەوەی شیکاریبکە.

دەگونجێت سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان لە دوو لاسەنگەی زیاتر تێدابێت.

نموونـــــه 3 جیبەجێکردنی ئەندازەی

سیستمی ئەم لاسەنگە هێڵییانە بەڕوونکردنەوەیی شیکاربکە و جۆری ناوچە شیکارەکە دیاربکە



$$\begin{cases} y \le 5 \\ y \ge 2 \\ y \le 3x+1 \\ y \ge 3x-4 \end{cases}$$

بە هێڵی ئەپساو وێنەی ڕاستەهێڵ $y=5$ و ڕاستەهێڵ $y=3x-4$ بکێشە، ئەو ناوچەیەی دەکەوێتە ژێر هەریەکەیان ڕەنگی بکە.

بەهێڵی ئەپساو وێنەی ڕاستەهێڵ $y=2$ و ڕاستەهێڵ $y=3x+1$ بکێشە، و ئەو ناوچەیەی دەکەوێتە سەر هەریەکەیان ڕەنگی بکە. ناوچەی شیکاری سیستمەکەناوچە یەکتربڕەکەیە. ناوچەی شیکار شێوە چوارلایە، تێبینی ئەوەبکە کە دووڕاستەهێڵ $y=5$ ، $y=2$ بەیەکتری تەریبن لەبەر ئەوەی دوو ڕاستەهێڵی ئاسۆیین ، و دوو ڕاستەهێڵ $y=3x+1$ ، $y=3x-4$ بەیەکتری تەریبین چونکە هەمان لاریان هەیە.

ناوچەی شیکار چوارلایە تیایدا دوولای بەرامبەر بە یەکتری تەریبن. بەمەش چوارلاکە تەریبە.

خاڵی چاودێری

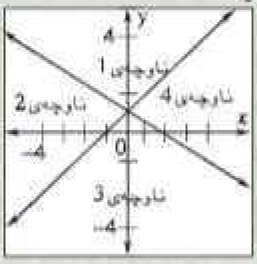
3. بەڕوونکردنەوەی سیستمی دوولاسەنگە هێڵییەکە شیکاربکە، و جۆری ناوچەی شیکار دیاری بکە.

أ
$$\begin{cases} x \le 6 \\ y \le \frac{1}{2}x+1 \\ y \ge -2x+4 \end{cases}$$

ب
$$\begin{cases} y \le 4 \\ y \ge -1 \\ y \le -x+8 \\ y \le 2x+2 \end{cases}$$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونبکەوە چۆن ناوچەی شیکار بۆ سیستمی دوو لاسەنگە هێڵییەکان دەدۆزیتەوە.
2. کەمترین ژمارەی لاسەنگەکان دەبێت چەندبێت، تا ناوچەی شیکار سێگۆشە؟ چوارگۆشە؟ بێت. نموونە بۆ وەڵامەکەت بێنەوە.
3. ڕێکخەر بە هێڵکارییەکە بنووسەوە و تەواوی بکە، بۆ هەر ناوچەیەك سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بنوسە کە شیکارەکەی، ناوچەی شیکار لە ڕووتەختی پۆتانەکەدا بنوێنێت.



هێربە

3-2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** بەراورد لە نێوان سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان و سیستمی هاوکێشە هێڵییەکاندا بکە.

بڕوانە نموونە 1

بە ڕوونکردنەوەی هەریەک لەم لاسەنگە هێڵییانە شیکاربکە.

2 $\begin{cases} y \geq 4x-4 \\ y \geq 3x-3 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} x+y>5 \\ x-y<-3 \end{cases}$ **4** $\begin{cases} 7x<y-16 \\ y \leq -5x-2 \end{cases}$ **5** $\begin{cases} 2x+2y \leq 4 \\ 3x-y>1 \end{cases}$

بڕوانە نموونە 2

6 **کۆکردنەوەی پیتاک** یەکێک لە کۆمەڵەکانی خێرخوازی پیتاکی کۆکردەوە بە فرۆشتنی کراسی لۆکە. نرخی کراسی گەورە 15 000 دینار و منداڵان 10 000 دینارە. ژمارەی کراسەکان 250 کراسە لە دوو جۆر. کۆمەڵەکە پێی وابوو بەلانی کەمەوە 3 ملیۆن دیناری دەستدەکەوێت. سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بۆ نواندنی بارەکە بنووسە، پاشان بەڕوونکردنەوەیی شیکاری بکە بۆ دیاریکردنی ژمارەی کراسەکان کە لەهەر جۆرێک پێویستە بفرۆشرێن.

بڕوانە نموونە 3

بەڕوونکردنەوەیی هەریەک لە سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان شیکاربکە و جۆری ناوچەی شیکارکە دیاریبکە.

7 $\begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq -18 \\ x \leq 13 \\ y \leq -4 \end{cases}$ **8** $\begin{cases} y \leq 7 \\ 2x-y \leq 3 \\ x+2y \geq -6 \end{cases}$ **9** $\begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq 3x+2 \\ y \geq -3x-10 \end{cases}$ **10** $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq x+6 \\ x \leq 6 \\ x \geq -2 \end{cases}$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد

بۆ شیکاری ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
14 -11	1
15	2
19 -16	3

بەڕوونکردنەوەیی هەریەک لەم لاسەنگە هێڵییانە شیکاربکە.

11 $\begin{cases} 5x-y>0 \\ y<x \end{cases}$ **12** $\begin{cases} 3y \geq 2x-3 \\ y \geq 3x+8 \end{cases}$ **13** $\begin{cases} x+y>5 \\ -2x+y \leq 2 \end{cases}$ **14** $\begin{cases} y>4 \\ x+4y \geq 8 \end{cases}$

15 **میوزیک** کۆمپانیایەک دەیەوێت 10 000 پەیکی پەستینراو بۆ کۆمەڵە گۆرانییەک بەرهەم بهێنێت. ژمارەیەک لەم پەیکانەی تەرخان کرد بۆ ئەوەی بە خۆڕایی دابەشی بکات بەسەر ئێسگەکانی ڕادیۆو تەلەفزیۆن، ژمارەیەکی تر بۆ فرۆشتن. بەمەرجێک ژمارەی ئەو پەیکانەی دەیبەخشێت لە ڕێژەی 20% تێپەڕ نەکات لە کۆی گشتی. سیستەمی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە، کە ئەم بارە بنوێنێت لەگەڵ دیاریکردنی ئەو ژمارانەی کە لە توانادایە بۆ پەیکە بەخشراوەکان و پەیکانەی ئامادەکراوە بۆ فرۆشتن.

بە ڕوونکردنەوەی هەریەک لەم سیستەمی لاسەنگە هێڵییانە شیکاربکە. جۆری ناوچە شیکارەکە دیاریبکە.

16 $\begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x+y \geq -4 \\ \frac{1}{3}x+y \leq -1 \end{cases}$ **17** $\begin{cases} y \leq 2.5 \\ y \geq -0.5 \\ y \leq -x+8 \\ y \leq 2x+4 \end{cases}$ **18** $\begin{cases} y \leq x+6 \\ y \geq x+1 \\ y \leq -x+6 \\ y \geq -x-1 \end{cases}$ **19** $\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x+2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

20 **مۆبایل** ژمارەی قسەکردنە تەلەفۆنییەکانی هەژار لە مانگی ڕابردوودا گەیشتە 2370 قسەکردن، 1645 لە کەسانی ترەوە بۆی هاتبوون، لە کاتێکدا ژمارەی قسەکردنەکانی هۆزان لە ژمارەی قسەکردنەکانی هەژار کەمترە، بەڵام ژمارەی ئەو قسەکردنە تەلەفۆنیانەی هۆزان بۆی هاتوون، لە ژمارەی ئەوانەی هەژار بۆی هاتوون زیاترە. سیستەمێکی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە بارەکە بنوێنێت، پاشان سیستەمەکەشیکاربکە بۆ ئەوەی ژمارەی ئەو تەلەفۆنانەی هەژار بۆی هاتوون و ژمارەی ئەو تەلەفۆنانەی لێوەی دەرچوون دیاربکات.

ئەندازە سیستمی ئەو لاسەنگە هێڵییانە بنووسە کە شێوەکە ناوچە شیکارەکەیەتی

21 لاکێشە **22** چوارگۆشە **23** سێگۆشە وەستاو **24** نیمچە لاتەریب

25 ئۆتۆمبێلەکانی پێشبڕکێ لەژێر چەند مەرجێکدان، لەبارەی قەبارە و بارستاییەوە، بەپێی پۆلێنکردنیان دەبێ بارستایی ئۆتۆمبێلی فورمولا بە بارستایی شۆفێرەکەوە لە 600 kg کەمتر نەبێت. لە کاتێکدا ئۆتۆمبێلی تری پێشبڕکێ، دەبێ بارستاییەکە بەبێ بارستایی شۆفێر لە 710 kg کەمتر نەبێت.

أ سستەمێکی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە بۆ بەکارهێنانی بەراوردی بارستای دوو ئۆتۆمبێلەکە بە بێ شۆفێرکان

ب بوارو مەودای گونجاو بۆ سیستەمەکە دیاریکە.

ج دوو لاسەنگەکە بەڕوونکردنەوەی شیکاریکە.

ڕێژەی باجی دەرامەت بە پێی بەشەکان	
ڕێژەکە	داهات (بەملیۆن دینار)
15%	لە 14 000 تا 56,800
25%	لە 56,801 تا 114,650
28%	لە 114,651 تا 174,700

26 **باجی دەرامەت** خشتەکەی بەرامبەر ڕێژەی باج لەسەر داهات بە پێی نرخی داهاتی خیزانێك نیشاندەدات. ڕێژەی باجی داهاتی سەرجۆن و ژنەکەی 25% داهاتی ژنەکە بەلایەنی کەمەوە دوو ملیۆن دینارە زیاترە لە داهاتی پیاوەکە سستەمێکی لاسەنگە هیڵییەکان بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت، پاشان سیستمەکەبە ڕوونکردنەوەی شیکاربکە.

هەریەك لەم سیستمە لاسەنگە هێڵییانە بەڕوونکردنەوەی شیکاربکە، سێ خاڵ لە ناوچەی شیکارەکەدا دیاریبکە.

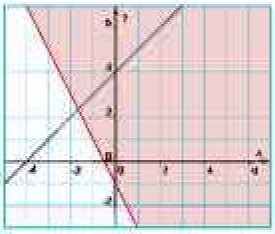
27 $\begin{cases} -5y < 2x \\ 5y \geq 2x - 20 \end{cases}$ **28** $\begin{cases} y + 7 > 0 \\ y < 2x + 5 \\ y < -3x + 4 \end{cases}$ **29** $\begin{cases} y \geq -8 \\ x + 2y < 4 \\ x > -6 \end{cases}$ **30** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y \leq 2 \\ x - y > 3 \end{cases}$

31 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئەگەر ئەو دوو ڕاستەهێڵەی ناوچەی شیکاری سیستمی دوو لاسەنگە کە دیاری دەکەن بەیەکتری تەریب بن، ناوچە شیکاری گونجاو چییە؟

32 **بنووسە** ئایا دەگونجێ سیستمێکی دوو لاسەنگەی هیڵی شیکاری نەبێت؟ ئەمە ڕوونبکەرەوە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

33 کام لەم سیستمە لاسەنگە هێڵییانە شیکارە ڕوونکردنەوەییەکەی شێوەیەکەی بەرامبەر دەنوێنێت؟



أ $\begin{cases} y > x + 4 \\ y < -2x - 1 \end{cases}$ ج $\begin{cases} y \leq x + 4 \\ y \geq -2x - 1 \end{cases}$

ب $\begin{cases} y > x + 4 \\ y > -2x - 1 \end{cases}$ د $\begin{cases} y \geq x + 4 \\ y \geq -2x - 1 \end{cases}$

34 بڕی تێچوونی بڕێك لە کالا بۆ بەرهەمهێنان 300 000 دینارە و 1250 دینار زیادە دەچێتە سەر هەر کالایەك کە دێتەبەرهەم. کۆمپانیاکە ئەو کالایە بە نرخێك کە لە 2500 دینار بۆ هەر کالایەك تیپەڕناکات دەفرۆشێت، کام لەم لاسەنگە هێڵییانەی خوارەوە دەگونجێت بۆ ناوچە شیکارەکە بەکاربێت بۆ نواندنی قازانجی گونجاو کۆمپانیاکە؟ هێمای c بۆ تێچوونی گشتی، و n بۆ ژمارەی یەکە بەرهەمهاتووەکان دادەنرێت.

أ $\begin{cases} c \leq 300\,000n \\ c \leq 300\,000 + 1\,250n \end{cases}$ ج $\begin{cases} c \leq 2\,500n \\ c \geq 300\,000 + 1\,250n \end{cases}$

ب $\begin{cases} c \geq 2\,500n \\ c \leq 300\,000 + 1\,250n \end{cases}$ د $\begin{cases} c \geq 2\,500n \\ c \geq 300\,000 + 1\,250n \end{cases}$

35 کام لەم خشتانەی خوارەوە شیکاری ئەم سیستەمەی تێدایە $\begin{cases} 3x-12y>8 \\ x+5y>-5 \end{cases}$

أ

x	y
1	−2
2	0
3	0
4	−2

ب

x	y
1	−2
2	1
3	1
4	−2

ج

x	y
1	−1
2	−1
3	0
4	0

د

x	y
1	−2
2	−2
3	−1
4	−1

بەرەنگاری و فراوانکردن

36 سیستمێکی لاسەنگە هێڵییەکان بنووسە کە ناوچە شیکارەکەی پێنجلابێت.

37 ئایا نەزانراوی m بەهایەکی هەیە کەوا لە سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بکات شیکاری نەبێت؟ ئەگەر وەلامەکەت بەڵێ بوو ئەو بەهایە کامەیە، وئەگەر بەنەخێر بوو هۆیەکەی ڕوونبکەوە. $\begin{cases} y>-3x+2 \\ y<mx-3 \end{cases}$

38 سەردار دەیەوێت 30 ملیۆن دینار لە بازاری پارەدا (سوق الاوراق المالیە) وەگەرخات، بانکەکە دوو جۆرە کاری خستە پێش. یەکەمیان کەم مەترسییە و قازانجەکەی ساڵانەبەڕێژەی5% بێت. دووەمیان پڕ مەترسییە و قازانجەکەی ساڵانە بە ڕێژەی7% بێت. کەمترین بڕە پارەکە دەبێ وەکاربخات بەڕێژەی قازانجی 7% تا قازانجەکەی ساڵانە لە 000 900 1 دینار کەمترنەبێت چەندە؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

دۆزە کۆکردنەوەی هەریەك لەم ژمارانە و هەڵگەڕاوەکەی بنووسە (پۆلەکانی پێشوو).

39 7 **40** $-\frac{3}{4}$ **41** 2.48 **42** −1

هاوکێشەیەك بو ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە (پۆلەکانی پێشوو)

43 بە دووخاڵی $(2, -7)$ و $(1, 1)$ دا دەڕوات.

44 بە خاڵی $(3, -3)$ دادەڕوات و لارییەکەی سفربێت.

45 بە دووخاڵی $(1, -1)$ و $(0, 0)$ دا دەڕوات.

46 بە خاڵی $(9, 6)$ دادەڕوات و لارییەکەی $-\frac{1}{3}$ بێت.

47 بە خاڵی $(-2, 4.5)$ دادەڕوات و لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=4x-1$ ئەستوون دەبێت

48 بە خاڵی $(3, 2)$ دادەڕوات و بەڕاستەهێڵ $y=-x-7$ تەریب بێت.

4-2 پڕۆگرامی هێڵی

Linear Programming

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەندازیارەکانی باخچەکان پڕۆگرامە هێڵییەکان بۆ دیاریکردنی ئەو ڕووەکانەی لەسەر ڕووە سەوزەکان دەیانڕوێنن بەکاردێنن.

ئامانجەکان

شیکارکردنی پڕۆگرامی هێڵی.

زاراوەکان
Vocabulary

پڕۆگرامی هێڵی
Linear programming

مەرج
Constraint

ناوچەی گونجاو
Feasible Region

نەخشەی بەسوود
Objective Function

ڕووە سەوزەکان، ئەو ڕووانەن کە لە جیاتی مەودای تری وەک چیمەنتۆ یان قرمید بە ڕووەکە سەوزەکان داپۆشراون، بۆ ئەوەی یارمەتی دابەزاندنی پلەی گەرما بدات. و جۆری هەواکە باش بکات. هەڵبژاردنەکانی ئەندازیارانی باخچەکان کاردەکات لە نرخی ڕووەکەکان و بڕی ئاوی پێویست و بڕی دووەم ئۆکسیدی کاربۆن کە دەیمژێت.

پڕۆگرامی هێڵی Linear programming ڕێگایەکە بۆ دیاریکردنی گەورەترین یان بچوکترین بەها بۆ ئەو نەخشەیەی پاساداتی کۆمەڵە مەرجێك دەکات. کە پێی دەوترێت مەرجەکانی پرسیارەکە. مەرج **Constraint** یەکێك لە لاسەنگەکانە لە پرسیاری پڕۆگرامی هێڵی.

دەگونجێت ئەو کۆمەڵە شیکارانەی هەموو مەرجەکان جیبەجێ دەکات بتوانرێت، کە ناوچەیەك لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا پەیدا دەکات پێی دەوترێت **ناوچەی بەسوود (الجدوی) Feasble Region** .

نموونــــە 1 نواندنی ناوچەی گونجاو بە ڕوونکردنەوەیی

سیروان نەخشەی ئەندازەی باخچەیەك دەکێشێت ڕووبەرەکەی لە $600m^2$ تێناپەڕێت، دوو جۆر ڕووەك بەکاردێنی، ڕووەکی جۆری یەکەم ڕووبەریکی $1.2m^2$ دادەپۆشێت، و ڕووەکی جۆری دووەم ڕووبەریکی $2m^2$ دادەپۆشێت. نرخی هەر ڕووەکێك لە دوو جۆرەکە 2500 دینارە، دەبێ تێچوونی ڕووەکەکان لەیەك ملیۆن دینار تێپەڕنەکات، مەرجەکان بنووسە و ناوچەی گونجاو بەڕوونکردنەوەی بنوێنە

هێمای گۆڕاوی x بۆ ژمارەی ڕووەکەکانی جۆری یەکەم، و گۆڕاوی y بۆ ژمارەکان لە جۆری دووەم دابنێ. مەرجەکانی بنووسە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$

ژمارەکەکانی ڕووەکەکان بەسالیب نەبێت
ڕووبەری داپۆشراو لە $600\ m^2$ پتر نەبێت
تێچوونی ڕووەکەکان لە 100 0000 دینار پتر نەبێت.

بەڕوونکردنەوەیی هەریەك لە مەرجەکانی پرسیارەکە شیکاربکە، ئەو ناوچەیەی یەکتربڕی ناوچە شیکارە جیاوازەکان پێکدێنێت ڕەنگبکە. ناوچەی بەسوود ئەو ناوچەیەدەبێت کە دەستمان دەکەوێت، چوار لایەکە خاڵی سەرەکانی بریتین لە $(0, 0)$ ؛ $(400, 0)$ ؛ $(250, 150)$ ؛ $(0, 300)$

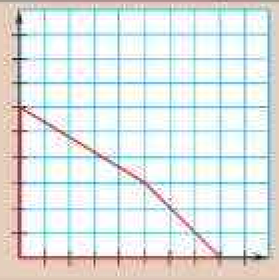
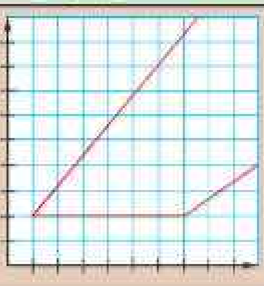
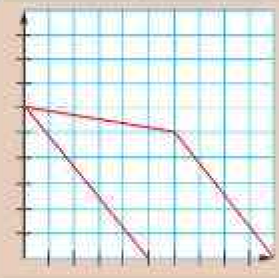
ساغکردنەوە ئەگەر خاڵێك وەك $(100, 100)$ هەڵبژارد دەبینی کە پۆوتانەکەی هەموو مەرجەکان دێنێتەدی. ✓

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

خۆلی چاودێری

1. بەرِوونکردنەوەیی ناوچەی گونجاو بۆ ئەم پرسیارە بنوێنە.

کاتێك پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵی شیکاردەکەی، تەنها نواندنی ناوچەی گونجاو لە ڕووتەختی پۆوتاندا بەس نییە، زۆربەی کات لەسەرت پێویستە بەهای ئەو گۆڕاوانەی نەخشەکە بدۆزیتەوە. بە هۆی ئەو گۆڕانانەوە کەوا لە نەخشەکە دەکەن بەهاکەی بگاتە گەورەترین یان بچووکترین بەم جۆرە نەخشانەش دەوترێت نەخشەی بەسوود (دالة منفعه) **Objective Function** بە پێ ناوچەی گونجاو، دەکرێ نەخشە بەسوودەکە بەهاکەی گەورەترین یان بچوکترین یان هەردووکیان پێکەوە یان هیچیان نەبێت.

ناوچە دیاریکراوەکان و ناوچە دیارینەکراوەکان	
ناوچەی گونجاو دیاریکراوە	ناوچەی گونجاو دیارینەکراوە
	 
نەخشە بەسوودەکە گەورەترین و بچوکترین بەهای هەیە.	نەخشە بەسوودەکە گەورەترین بەها یان بچوکترین بەهای هەیە و هەردووکیان پێکەوەنین.

دەتوانرێت بە هۆی بیرکاری بالاترەوە، ئەمەی خوارەوە بسەلمێنرێت.

هێربە

لووتکەی سەرەتا لە پرۆگرامی هێڵییدا

ئەگەر نەخشەی بەسوود (ئامانج) لە پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵییدا گەورەترین یان بچووکترین بەهای هەبێت، ئەوا ئەو نەخشەیە بەهاکانی دەگاتە سەرێك لە سەرەکانی ناوچەی گونجاو.

نموونـــــە 2 شیکارکردنی پرسیاری هێڵی

ڕۆشنایی

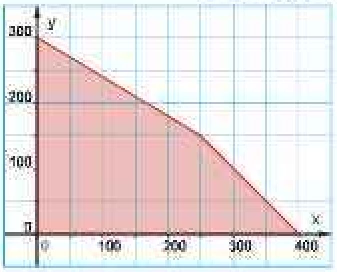
بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ ساغکردنەوەی ئەو ناوچەی گونجاو دەستتکەوتووە. بیرت نەچێت گۆڕاوەکان بە x و y بگۆڕە

سیروان ئەندازیاری باخچەکانە ئەوپەڕی گرنگی بە ڕاگرتنی پارسەنگی بیسبوونی هەوا دەدات. بۆ گەیشتن بەو مەبەستە سیروان کار بۆ ئەوە دەکات ژمارەی ئەو ڕووەکانەی زۆرترین دووەم ئۆکسیدی کاربۆن هەڵدەمژن گەورەترین بێت. تێکڕاییەکانی هەڵمژینی دووەم ئۆکسیدی کاربۆن و پێدراوەکانی نموونەی 1 بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ڕووەکەکان لەو دوو جۆرە.

سالانە 1.05 kg لە CO_2

سالانە 0.7 kg لە CO_2

هەنگاوی 1 هێمای گۆڕاوی C بۆ بڕی دووەم تۆکسیدی کاربۆنی هەڵمژراو دابنێ. x بۆ ژمارەی ڕووەکەکان لە جۆری یەکەم و y بۆ ژمارەی جۆری دووەم بەکاربێنە.



نەخشەی بەسوود بنووسە: $C = 0.7x + 1.05y$

هەنگاوی 2 مەرجەکانی پرسیارەکە بنووسە

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 1.2x + 2y \le 600 \\ 2500x + 2500y \le 1000000 \end{cases}$$

و ناوچەی گونجاو بنوێنە

هەنگاوی 3 بەهای نەخشەی بەسوود لە هەرسەرێك لە سەرەکانی ناوچەی گونجاو هەژماربکە.

(x, y)	$0.7x + 1.05y$	C
$(0, 0)$	$0.7(0) + 1.05(0)$	0
$(0, 300)$	$0.7(0) + 1.05(300)$	315
$(250, 150)$	$0.7(250) + 1.05(150)$	332.5
$(400, 0)$	$0.7(400) + 1.05(0)$	280

نەخشە بەسوودەکە دەکاتە گەورەترین بەها لە $(250, 150)$

سیروانی ئەندازیار پێویستە لەسەری 250 ڕووەك جۆری یەکەم و 150 ڕووەك لە جۆری دووەم بڕوێنی (بچێنی). بۆ ئەوەی ئەو بڕە دووەم ئۆکسیدە کاربۆنەی، ڕووەکەکانی باخچەکە هەڵیدەمژن بگاتە ئەوپەڕی بەها.

خاڵی چاوێری

2. گەورەترین بەها بۆ نەخشەی بەسوودی $p = 25x + 30y$ دیاریبکە لە ژێر ئەم مەرجانەی خوارەوە.

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 1.5 \\ 2.5x + 5y \le 20 \\ 3x + 2y \le 12 \end{cases}$$

نموونـــــە 3 جێبەجێکردنەکان

لە ڤیستیڤالی ئەسپ سواری دا، دەبێت بێستون ڕۆژانە ژەمە خواردنەکان لە قووتو دابنێت بۆ ئەو مەبەستەش کرێکاری پسپۆڕی بەکارهێنا کرێی ڕۆژانەی یەکێکیان 60 000 دینارە. و کرێکاری تر پسپۆڕی نین کرێی یەك ڕۆژی 40 000 دینارە پێویستە ئەو کرێیەی دەیاندات ئەو پەڕی 1 440 000 دینار بێت. پێستون لە بەرامبەر هەر کرێکارێکی پسپۆڕیدا 3 کرێکاری نا پسپۆڕی پێویستە، تەنها 16 کرێکاری پسپۆڕی دەستکەوتووە. کرێکارە پسپۆڕەکە 25 قووتو لە کاتژمێرێکداو نا پسپۆڕەکە 18 قووتو لە کاتژمێرێکدا بەرهەم دێنێت ژمارەی کریکارەکان لە هەر جۆرێك بدۆزەوە. بۆ ئەوەی ژمارەی ئەو قووتوانەی بەرهەمدێن گەورەترین بێت.

1 پرسیارەکە تێبگە

وەڵامەکە لە دوو بەش پێکدێت: ژمارەی پسپۆڕەکان و ژمارەی ناپسپۆڕەکان.لیستێك بۆ زانیارییە گرنگەکان دابنێ:

- کرێی پسپۆڕ 60 000 دینارە لە ڕۆژێکدا، کرێی ناپسپۆڕێك 40 000 دینارە لە ڕۆژێکدا.
- بێستون 1 440 000 دیناری بۆ ئەوپەڕی کرێی کرێکارەکان دانەوە.
- پسپۆڕەکە 25 قووتو لە کاتژمێرێکدا و ناپسپۆڕەکەش 18 قوتو لە کاتژمێریکدا بەرهەمدێنێت.
- بێستون بۆ هەر پسپۆڕێك 3 نا پسپۆڕی پێویستە.
- تەنها 16 کریکاری پسپۆڕی هەیە.

2 پلانی شیکارکردن دابنێ

هێمای گۆڕاوی x بۆ ژمارەی کرێکارە نا پسپۆڕەکان و گۆڕاوی y بۆ ژمارەی کرێکارە پسپۆڕییەکان دابنێ. مەرجەکانی پرسیارەکە و نەخشەی بە سوود بنووسە.
پاڵپشت بەو زانیارییە گرنگانەی نووسیوتە.

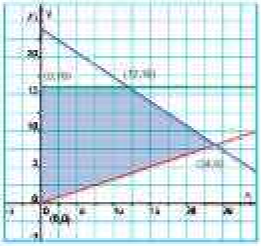
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 40000x + 60000y \leq 1440000 \\ y \geq \frac{1}{3}x \\ y \leq 16 \end{cases}$$

- $x \geq 0$ ژمارەی کرێکارەکان سالب نییە.
- $40000x + 60000y \leq 1440000$ کرێی کرێکارەکان لە 1 440 000 دینار تێناپەڕێت.
- $y \geq \frac{1}{3}x$ کرێکارێکی پسپۆڕە بەلایەنی کەمەوە بۆهەر 3 کرێکاری ناپسپۆڕی
- $y \leq 16$ ژمارەی کرێکارە پسپۆڕە ئامادەبووەکان 16 کرێکارە.

هێمای گۆڕاوی p بۆ ژمارەی قوتوە بەرهەمهاتووەکان لە کاتژمێرێکدا دابنێ نەخشەی بەسوود بریتییە لە $p = 18x + 25y$

3 شیکاربکە

بە ڕوونکردنەوەیی ناوچەی گونجاو و سەرەکان دیاریبکە پاشان بەهای نەخشە بە سوودەکە لە هەر سەرێکدا هەژماربکە.



$p(0, 0) = 18(0) + 25(0) = 0$

$p(0, 16) = 18(0) + 25(16) = 400$

$p(12, 16) = 18(12) + 25(16) = 616$

$p(24, 8) = 18(24) + 25(8) = \mathbf{632}$

نەخشەی بە سوود گەورەترین بەهای دەبێت لە سەری $(24, 8)$دا. پێویستە بێستون 8 کرێکاری پسپۆڕ و 42 کرێکاری نا پسپۆڕ بەکاربێنێت.

4 ڕوانینێك بۆ دواوە

دڵنیابە لەوەی جووتە ڕێکخراوی $(24, 8)$ هەموو مەرجەکانی پرسیارەکە پاسادان دەکات.

$x \geq 0$	$y \geq 0$	$y \leq 16$
$24 \geq 0$ ✓	$8 \geq 0$ ✓	$8 \leq 16$ ✓
	$y \geq \frac{1}{3}x$	$40000x + 60000y \leq 1440000$
	$y \geq \frac{1}{3}(24)$	$40000 \times 24 + 60000 \times 8 \leq 1440000$
	$8 \geq 8$ ✓	$1440000 \leq 1440\ 000$ ✓

خاڵی چاودێری

3. بەڕێوەبەری کتێبخانەیەك دەیەوێت دۆڵابی کتێب بکرێت. کتێبخانەکە پێویستی بە دوو جۆرە ڕەف هەیە بە درێژی $320\ m$. تێچوونی دۆڵاب لە جۆری یەکەم کە $32\ m$ ڕەفەی هەیە 200 000 دینارە. تێچوونی دۆڵاب لە جۆری دووەم کە $16\ m$ ڕەفەی هەیە 125 000 دینارە. بە پێی پێوانەکانی هۆڵی کتێبخانە بەلایەنی زۆرەوە 8 دۆڵاب لە جۆری یەکەم و 12 دۆڵاب لە جۆری دووەم دەگرێت.
بەڕێوەبەری کتێبخانەکە پێویستە چەند دۆڵاب لە هەر جۆرێك بکرێت بۆ ئەوەی کەمترین پارە بدات.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. چی وا لە مەرجەکانی پرسیاری پرۆگرامی هێڵی دەکات بە زۆری دوو مەرجی $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ی تێدابێت؟
2. چی وا لە نەخشەی بەسوود دەکات لە پرسیاری پرۆگرامی هێڵیدا دوو مەرجەکانی $\begin{cases} x+y>0 \\ y \leq 4 \end{cases}$ گەورەترین بەها یان بچووکترین بەهای هەبێت و هەردووکیان پێکەوە نەبن؟
3. چۆن دەزانیت کە زانیارییەکە لە پرسیاری پرۆگرامی هێڵیدا هی مەرجەکەیە یان هی نەخشە بە سوودەکەیە؟
4. ڕێکخەر بە خشتەکە بنووسەوە، پاشان تەواوی بکە، لەهەر خانەیەکدا نموونەیەك بنووسە، پێدراوەکانی دوو نموونە 1 و 2 بەکاربێنە.

4-2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ناڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لە پرسیاری پرۆگرامی هێڵیدا بە لاسەنگەکان دەوترێت ؟ (مەرجەکان یان نەخشەی بەسوود)

بڕوانە نموونە 1

هەر ناوچەیەکی گونجاو بەڕوونکردنەوەیی دیاریبکە.

2 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x+3 \\ y \leq -x+7 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \\ y \leq x+1 \\ y \leq -\frac{1}{4}x+6 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 1 \\ y \geq 0.5x-2 \\ y \leq -2x+3 \end{cases}$

بڕوانە نموونە 2

بەهاکانی x و y بدۆزەوەکە گەورەترین بەها یان بچوکترین بەها دەدات بە نەخشە بە سوودەکە.

	مەرجەکان	نەخشەی بەسوود	گەورەترین یان بچوکترین بەها
5	مەرجەکانی پرسیاری 2	$p=10x+16y$	گەورەترین بەها
6	مەرجەکانی پرسیاری 3	$p=3x+5y$	بچووکترین بەها
7	مەرجەکانی پرسیاری 4	$p=2.4x+1.5y$	گەورەترین بەها

بڕوانە نموونە 3

8 **پزیشکی ددان** ڕێبوار پزیشکی ددانە ڕۆژانە 7 کاتژمێر کاردەکات، نیو کاتژمێر بۆ ئەو نەخۆشە دادەنێت کە دەیەوێت ددانی پاك بکاتەوە، 40 000 دیناری لێ وەردەگرێت، و کاتژمێرێك بۆ ئەو نەخۆشەی چارەسەری پووکی دەکات و 95 000 دیناری لێ وەردەگرێت. پزیشکەکە دەتوانێت بەلایەنی زۆرەوە 4 نەخۆش لە ڕۆژێکدا ببینێت کە چارەسەری پووکیان دەکەن. ژمارەی بارەکانی پاککردنەوەی ددان و ژماری ئەوانەی چارەسەری پووکیان دەکەن، بۆ ئەوەی زۆرترین داهات بۆ پزیشکەکە دابین بکات بدۆزەوە؟

ڕاهێنان و شیكاركردنی پرسیارەكان

بۆ شیكاری ڕاهێنانەكان	سەیری نموونە بكە
11-9	1
14-12	2
15	3

(ڕاهێنانی ئازاد)

بە ڕوونكردنەوەی هەریەك لە ناوچەی گونجاو بنوێنە.

9 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 4x-4 \\ y \leq x+5 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 9 \\ y \geq -2x-7 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \geq \frac{1}{5}x-3 \\ y \leq -x+4 \end{cases}$

بەهاكانی x و y بدۆزەوەكە گەورەترین یان بچوكترین بەها دەدات بە نەخشەی بەسوود.

	مەرجەكان	نەخشەی بەسوود	گەورەترین بەها یان بچوكترین بەها
12	مەرجەكانی پرسیاری 9	$p=-21x+11y$	گەورەترین بەها
13	مەرجەكانی پرسیاری 10	$p=-2x-4y$	بچووكترین بەها
14	مەرجەكانی پرسیاری 11	$p=x+3y$	گەورەترین بەها

15 ڕیكلامەكان كۆمپانیایەك 60 ملیۆن دیناری تەرخانكرد بۆ ڕێكخستنی هەڵمەتی پروپاگەندە بۆ بەرهەمەكانی لە تەلەفزیۆن لە ماوە نێوارانەكەی و ژمارەیەك لەڕادیۆكانیش. بەرپرسی هەڵمەتەكە بڕیاریدا لە نێوان 30 تا 60 جاردا پەخشی ئێسگەكە بەكاربێنێت. ئەم خشتەیە بەكاربێنە كە ژمارەیەك ڕیكلامی ماوەی نێوارانی تەلەفزیۆن و ئێسگەدا كە درێژترین كاتی گونجاو لە ڕیكلام، لە سنووری بووجەكەیدا دابین دەكات.

جۆر	ماوە (چركە)	تێچوون (دینار)
ئێسگە	20	400 000
تەلەفزیۆن (ماوەی نێواران)	30	1 500 000
تەلەفزیۆن (ماوەی شەو)	30	1 200 000
ڕۆژنامەكان		300 000

16 بلیتەكانی پێشبڕكێی خۆر هەڵات بۆ ئۆتۆمبێلەكان بە دوو نرخ دەفرۆشرێن 25 000 دینار بۆ كورسییەكانی سەرەوە و 45 000 دینار بۆ كورسییەكانی خوارەوە. ڕێكخەری پێشبڕكێكە بڕیاردرا ژمارەی تەماشاكەران 160 000 كەس زیاتر نەبێت.

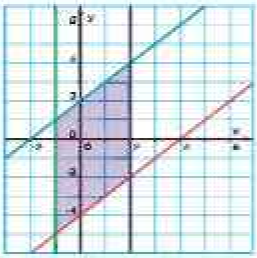
أ ژمارەی ئەو بلیتانەی لە هەر جۆرێك پێویستە بفرۆشرێت بۆ دەستكەوتنی زۆرترین قازانجی گونجاو بدۆزەوە ئەگەر بزانیت ژمارەی كورسییەكانی سەرەوە لە 120 000 كورسی تێناپەڕێت و ژمارەی كورسییەكانی خوارەوە لە 60 000 كورسی تێناپەڕێت.

ب سستەم و شیكارەكە چۆن دەگۆڕێت، ئەگەر بەڕێوەبەرایەتی پێشبڕكێیەكە پێشبینی ئەوە بكات داهاتی هەر كورسیەك لە كورسییەكانی سەرەوە 60 000 دینار و هەریەك لە كورسییەكانی خوارەوە 30 000 دیناربێت. بەكرێنی یابۆڵە و ساردەمەنییەكانیشەوە؟

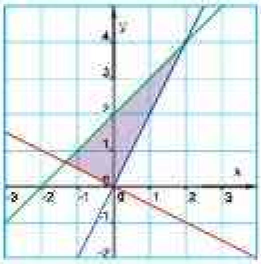
17 پیشەسازی دەزگای الـ(سەباح) دوو جۆر پانكە بەرهەم دێنێت. دروستكردنی پانكە لە جۆری یەكەم 4 كاتژمێر دەخایەنێت و 40 000 دینار قازانج دەكات، پانكەی جۆری دووەم 6 كاتژمێر دەخایەنێت و قازانجەكەی 80 000 دینارە. هێزی بەرهەمهێنان دامەزراوەكە ڕۆژانە 15 پانكە لە جۆری یەكەم و 4 پانكە لە جۆری دووەم تێپەڕ ناكات. ژمارەی كەمترین كاتژمێرەكانی كاركردنی لەم دامەزراوەیەدا بۆ ئەوەی بڕی قازانجی ڕۆژانە لە 400 000 دینار كەمتر نەبێت چەندە؟

ئەندازە لە خوارەوە نواندنەكانی ڕوونكردنەوەیی ناوچە گونجاوەكانە لە پرسیارەكانی پرۆگرامی هێڵییدا، بۆ هەریەكەیان سیستمی لاسەنگەكان بنووسە.

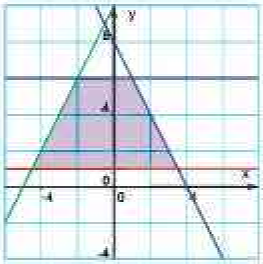
18



19



20



21 **هاتوو چۆ** بەڕێوەبەرایەتی ڕێگا خێراكان بڕیاریدا ئێشكگری تایبەت لە سەر ڕێگاكان بۆیارمەتی ئەو كەموكورپانەی لە سووتەمەنیدا هەیە، یان ئەو ئۆتۆمۆبێلانەی یەكێك لە تایەكانی لە كاردەكەوێت دەربكات، سووتەمەنی پێدانی ئۆتۆمۆبێلێك 15 خولەكی پێویستە، چاككردنەوەی تایەی ئۆتۆمبێل 45 خولەكی پێویستە. زۆرترین ژمارەی ئەو ئۆتۆمبێلانەی ئێشكگرێك دەتوانێت لە ماوەی 8 كاتژمێردا یارمەتیان بدات چەندە؟ ئەگەر بزانیت لە 28 گالۆن زیاتر ناتوانێت هەڵبگرێت.

22 **بیری ڕەخنەگرانە** ئایا دەبێت پرسیارێكی پرۆگرامی هێڵی شیكاری نەبێت؟ بە نموونەیەك پاڵپشتی وەڵامەكەت بكە.

ئەڕوازەیەك

لەسەر مێژووی بیركاری

زانستی پرۆگرامی هێڵی لە ماوەی شەڕی دووەمی جیهانیدا و لەسەدەی بیستەمدا پەرەی پێدرا. ئەو زانستە ڕۆڵی زۆری گێڕا بەشێك لە زانستی بەرفراوانتر كە پێی دەوترێت توێژینەوەی كردارەكان ڕۆڵی لە بردنەوەی ئەو شەڕە دابینی بە هۆی باشی دابەشكردنی پێداویستییە سەربازییەكانەوە.

23 **خواردن** یەكێك لە كارگەكانی خۆراكی تەندروستی دوو جۆر خۆراك بە زیادكردنی پرۆتین صویا و ڤیتامینەكان بەرهەمدێنێت. جۆری یەكەم پێویستی بە دوو ئۆنس لە پرۆتین صویا ویەك ئۆنس لە ڤیتامینەكان هەیە، و 000 25 دینار قازانج دەكات، جۆری دووەم پێویستی بە 3 ئۆنس لە پرۆتین صویا و یەك ئۆنس لە ڤیتامینەكان هەیە، و 000 32 دینار قازانج دەكات. چەندیەكە لە هەر جۆرێك پێویستە كارگەكە بەرهەمبهێنێت بۆ ئەوەی زۆرترین قازانج بكات. ئەگەر بزانیت گەنجینەی پرۆتین صویا و ڤیتامینەكان 100 ئۆنسی تێدایە.

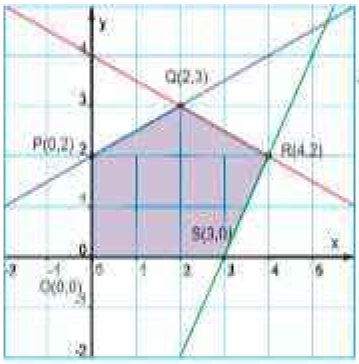
24 **بیری ڕەخنەگر** نموونەیەك لەسەر پرسیارێكی پرۆگرامی هێڵی بنووسە كە ناوچە گونجاوەكەی تێدابێت بەهایەكی سالبی هەبێت.

25 **بنووسە** ئەگەر پێویست بوو لەسەرت بە دوای گەورەترین بەهاو بچووكترین بەهای نەخشەیەكی بەسوود لە پرسیارێكی پرۆگرامی هێڵییدا بە پێی مەرجەكانی پرسیارەكە بگەڕێیت. چۆن ئەوە جیادەكەیتەوە.

26 **بنووسە** چۆن پۆوتانی سەرەكانی ناوچەی گونجاو دەدۆزیەوە؟

ئامادەكردن بۆ تاقیكردنەوە

27 كام خاڵ گەورەترین بەها دەدات بە نەخشەی بەسوودی $P=-x+y$ لە پرسیارێكی پرۆگرامی هێڵییدا كە شێوەی بەرامبەر تیایدا ناوچە گونجاوەكە دەنوێنێت.



أ) P ب) Q

ج) R د) S

28 سەرەکانی ناوچەی گونجاو لە پرسیارێکی پرۆگرامی هێڵییدا بریتییە لە خاڵەکانی $(0,0)$ $(-1,2)$ $(-2,6)$، کام لەم نەخشە بەسوودانەی خوارەوە نزمترین بەهای سالبی لە ناوچەی گونجاودا هەیە؟

(أ) $P=-4x+y-1$ (ج) $P=-x+3y+2$

(ب) $P=12x+7y$ (د) $P=-5x-y$

29 یەکێك لە کۆمپانیاکانی بینا گەورەکان پلان بۆ دروستکردنی چەند بینایەکی بازرگانی و چەند بینایەکی نیشتەجێبوون لەسەر پارچە زەویەك ڕووبەرەکەی $30\,000\ m^2$ بێت دا دەنێت هەر بینایەکی نیشتەجێبون $250\ m^2$ و هەر بینایەکی بازرگانی $3000\ m^2$ پێویستە کۆمپانیاکە لە هەربینایەکی نیشتەجیبون یەك ملیۆن دینار و لە هەر بینایەکی بازرگانی 20 ملیۆن دینار قازانج دەکات، کام لەمانەی خوارەوە نەخشەی بەسوودە بۆ ئەم پرسیارەی پرۆگرامی هیڵییە و زۆرترین قازانجی گونجاو دابین دەکات، ئەگەر بزانی ژمارەی بینا بازرگانییەکان لە 6 بینا تێناپەڕێت؟

(أ) $P=250x+3000y$ (ج) $P=1000000x+20000000y$

(ب) $P=250x+100000y$ (د) $P=300\,000-x-6y$

بەرەنگاری و فراوانکردن

30 **دەرمان** یەکێك لە کۆمپانیاکانی دروستکردنی دەرمان پلان بۆ تاقیکردنەوەی جۆرێکی نوێ لە دژە زیندەییەکان (المضادات الحيوية) لەسەر دوو جۆر A و B لە بەکتریا دادەنێت. وا پێویست دەکات دەرمانە نوێیەکە تاقیبکرێتەوە لەسەر بەلایەنی کەمەوە لە 700 جۆر بەکتریا بۆ بڕیاردان لەسەری، لە نێوانیاندا 400 نموونەیان لە جۆری B بێت بەلایەنی کەمەوە بۆ یارمەتی دانی کۆمپانیاکە لەسەر دابەزاندنی تێچوونی تاقیکردنەوەکە بۆ کەمترین بڕ.

أ بەڕوونکردنەوەیی ناوچەی گونجاوی پرسیارەکە بنوێنە

ب هەریەك لەم دوو خاڵەی پرسیارەکە $(350, 400)$ و $(400, 350)$ چی دەنوێنێت؟

ج ئایا هەریەکە لەم دوو خاڵە مەرجەکانی پرسیارەکە پاسەدان دەکەن؟هۆکاری ڕوونبکەوە.

پێداچونەوەی لولپێچی

لەهەر پرسیارێك لەمانەدا $f(7)$ و $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ هەژماربکە (پۆلەکانی پێشو).

31 $f(x)=\frac{1}{2x-3}$ **32** $f(x)=0.5x$ **33** $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

نەخشەی بەهای ڕووتی $f(x)=|x|$ بگۆڕە بە جۆری سەرەکەی لە خاڵێکی دیاریکراودابێت. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە نوێیەکە بکێشە (پۆلەکانی پێشوو)

34 $(6,-3)$ **35** $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ **36** $(-2.5, 0.75)$

ئەندازە بە ڕوونکردنەوەیی هەر سیستمێکی لاسەنگەکان بنوێنە. ئەو شێوە ئەندازەییەی ناوچە شیکارەکە دەنوێنێت ناوی بنێ (وانەی 2-3)

37 $\begin{cases} y\le 6 \\ y-2x\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$

38 $\begin{cases} y\ge 0 \\ y\le 2 \\ y\le x \\ x+y\le 6 \end{cases}$

بەشی 2

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1-2 لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوەکان (دوو گۆڕاوەکان)

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەم لاسەنگە هێڵییە دوو نەزانراوانە شیکاربکە

1 $y-1\le 5$

2 $2x+5y>10$

3 $3x-4y>5x+12$

4 $3(2x-1)+y>6x-4$

5 تارا 30 000 دیناری پێیە بۆ کڕینی کارتی پیرۆزبایی. نرخی کارتێکی گەورە 2500 دینار و نرخی کارتێکی بچووك 1500 دینارە. لاسەنگەیەك بنووسە بارەکە بنوێنێت. دوو نەزانراو بەکاربێنە کە هێمای هەریەکێکیان ژمارەی جۆرێك لە کەرتەکان بێت. بە ڕوونکردنەوەیی لاسەنگەکە شیکاربکە.

2-2 نموونە هێڵییەکان

6 پزیشکێکی منالان بۆ ماوەی چەند حەفتەیەك ئەمانەی تۆمارکرد. چەند کاتژمێر لە هەفتەیەکدا کاریکردووە. چەند هەزار دیناری لە کارەکەی وەرگرتووە. خشتەی خوارەوە ئەو پێدراوانە ڕووندەکاتەوە. بۆ ئەو حەفتانەی پزیشکەکە بە هەرەمەکی هەڵیبژاردون.

ژمارەی کاتژمێرەکان	8	23	18	30	12	28
کرێیەکەی	152	465	315	530	240	525

أ ئەو پێدراوانە بەخاڵی ڕوونکردنەوەی بنوێنە، ژمارەی کاتژمێرەکان وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە.

ب بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ دۆزینەوەی هاوکۆلکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی نواندنی باشترین پێدراوەکان بەکاربهێنە، لاری ڕاستەهێڵەکە بۆ پزیشکەکە چی دەگەیەنێت؟

ج ئەو هاوکێشەیەی دۆزیتەوە بۆ خەمڵاندنی دەستکەوتی پزیشکەکە بەکاربێنە ئەگەر زانیت 40 کاتژمێر لە هەفتەیەکدا کاردەکات.

3-2 شیکارکردنی سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەك لە سیستمی لاسەنگەکان شیکاربکە

7 $\begin{cases} y-x<3 \\ y+x<3 \end{cases}$

8 $\begin{cases} y+x\le 0 \\ y\le 4-x \end{cases}$

9 $\begin{cases} y\ge 2x+3 \\ y>-x \end{cases}$

4-2 پرۆگرامی هێڵی

لە هەریەك لەم پرسیارانەدا، ناوچەی گونجاو بە ڕوونکردنەوەیی دیاریبکە پاشان گەورەترین بەها یان بچوکترین بەها بۆ ئەخشە بەسوودەکە $P=4x+5y$ دیاریبکە.

10 $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\le x-1 \\ y\le -\frac{1}{2}x+4 \end{cases}$ بچووکترین بەها

11 $\begin{cases} x\le 2 \\ y\ge 0 \\ y\le 2x+4 \\ y\le -3x+9 \end{cases}$ گەورەترین بەها

5-2 شیکارکردنی سیستمی هێڵی بەسێ نەزانراو

Solving Linear systems in 3 unknowns

بۆ چی ئەمە فێر دەبیت؟

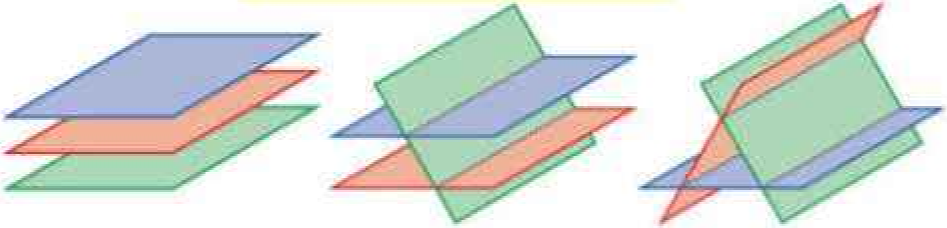
دەتوانین سیستمی سێ هاوکێشەی هێڵی بە سێ نەزانراو بەکار بهێنێت بۆ شیکارکردنی زۆر پرسیار لە ژیانی ڕۆژانەماندا، وەك دۆزینەوەی سیستمی بەرزی نمرەکان بۆ وەرگرتن لە کۆلێژی ئەندازە(نموونەی 2).

ئامانجەکان

- شیکاری سیستمی هێڵی بە 3 نەزانراو لە بۆشایی پۆوتاندا دەتوێنێت.
- سیستمی هێڵی بە سێ نەزانراو بەجەبری شیکار دەکات.

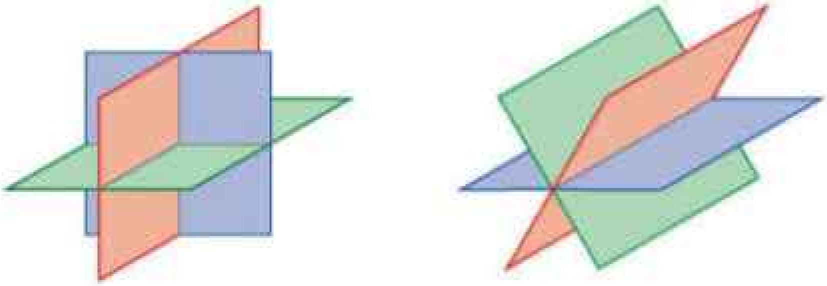
لە پۆلەکانی پێشوودا فێربوویت چۆن سیستمی هێڵی بۆ دوو هاوکێشەی هێڵی دوو نەزانراو یان سیستمی هێڵی 2×2 شیکار بکەیت. زۆر جار بەسیستمی هێڵی 3 هاوکێشەیی سێ نەزانراو پێی دەوترێت سیستمی 3×3 بۆ ئەوەی تاکە شیکارێك بۆ سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بدۆزیتەوە بەگشتی پێویستت بەوە هەیە کە ژمارەی هاوکێشەکان یەکسان بێت بە ژمارەی نەزانراوەکان. بەبیر خۆتی بێنەوە لە بەشی پێشوودا کە هاوکیشەی هێڵی بە سێ نەزانراو لە بۆشایی پۆوتاندا بە هۆی ڕووتەختەوە دەنوێنرا. کاتێك سیستمێکی هێڵی لە 3 هاوکێشەی سێ نەزانراو لە بۆشایی پۆوتاندا دەنوێنێت سێ ڕووتەختت دەستکەوێت. لەوانەیە ئەو ڕووتەختانە یەکتری ببڕن یان نەیبڕن هەر خاڵێکی هاوبەش لە نێوان هەرسێ ڕووتەختەکەدا شیکاری سیستمەکەدەنوێنێت. لەوەوە دەستمان دەکەوێت کە سیستمەکەیەك شیکاری هەیە یان ژمارەیەکی نادیار شیکاری هەیە و هەندێك جار لەوانەیە شیکاری نەبێت.

سیستمە نەستەمەکان (شیکاریان نییە)



سیستمە دیارینەکراوەکان ژمارەیەکی ناکۆتا شیکاریان هەیە)

سیستمە دیاریکراوەکان (شیکاری تاقانەیان هەیە)



لەوانەیە دیاریکردنی شیکارەکانی سیستەمی هێڵی 3×3 بە بەکارهێنانی نواندنی لە بۆشایی پۆوتانەکاندا کارێکی گران بێت. بەڵام دەتوانیت ئەم سیستەمە بە جەبری شیکار بکەیت بە بەکارهێنانی لابردن و لە جیاتیدانان بۆ گۆڕینی لە سیستەمی هێڵی3×3 بۆ سیستەمی هێڵی2×2 پاشان سیستەمی پەیدابوو شیکاربکەیت بەو ڕێگایانەی لەوانەکانی پێشوودا فێربوویت.

نموونــــه 1 شیکارکردنی سیستەمی هێڵی 3 هاوکێشە بە سێ نەزانراو

ڕێگای لابردن بۆ شیکاکردنی ئەم سیستەمە هێڵییەی خوارەوە بەکاربێنە.

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 & (1) \\ 2x-2y+z=7 & (2) \\ x+y+2z=-4 & (3) \end{cases}$$

هەنگاوی 1 یەکێك لە سێ نەزانراوەکە لابە باشتر وایە نەزانراوی y لابەیت، چونکە هاوکۆلکەکان لە دوو هاوکێشەی (1) و (2) پێچەوانەی ئیشانەن

هاوکێشەی (1) و (2) کۆبکەوە

$$\begin{array}{lr} (1) & x+2y-3z=-2 \\ (2) & \underline{2x-2y+z=7} \\ & 3x \quad -2z=5 \quad (4) \end{array}$$

هەردوو هاوکێشەی (1) و (3) بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی هاوکێشەیەکی تر بە دوو نەزانراوی x و z

هاوکێشەی (3) لە -2 بدە و ئەنجامەکەی لەگەڵ هاوکێشەی (1)دا کۆبکەوە.

$$\begin{array}{lll} (1) & x+2y-3z=-2 & x+2y-3z=-2 \\ (3) & \underline{-2(x+y+2z=-4)} \rightarrow & \underline{-2x-2y-4z=8} \\ & & -1x \quad -7z=6 \quad (5) \end{array}$$

لێرەدا سیستمی هێڵی 2×2مان هەیە.

$$\begin{cases} 3x-2z=5 & (4) \\ -x-7z=6 & (5) \end{cases}$$

هەنگاوی 2 نەزانراوێکی تر لابە، هاوکێشەی پەیدابوو شیکارێکە بەهای نەزانراوی سێیەمت دەست دەکەوێت، نەزانراوی x لابە.

هاوکێشەی (5) لێکدانی 3 بکە و لەگەڵ هاوکێشەی (4) کۆبکەوە.

$$\begin{array}{lll} (4) & 3x-2z=5 & 3x-2z=5 \\ (5) & \underline{3(-x-7z=6)} \rightarrow & \underline{-3x-21z=18} \\ & & -23z=23 \\ & & z=-1 \end{array}$$

هەنگاوی 3 یەکێك لە دوو هاوکێشەی سیستمی 2×2 بۆ هەژمارکردنی بەهای x بەکاربێنە.

لە جیاتی z بەهاکەی -1 دابنێ

$$\begin{array}{lr} (1) & -x-7z=6 \\ (2) & -x-7(-1)=6 \\ & x=1 \end{array}$$

هەنگاوی 4 بەهاکانی x و z لەیەکێك لە هاوکێشە بنەڕەتییەکاندا دابنێ، بەهای y هەژماربکە.

لە جیاتی دانان

$$\begin{array}{lr} (1) & x+y+2z=-4 \\ (2) & (1)+y+2(-1)=-4 \\ & y=-3 \end{array}$$

شیکاری سیستەمەکەبریتییە لە $(1, -3, -1)$

خاڵی چاودێری

1. ڕێگای لابردن بۆ شیکارکردنی ئم سیستەمەی خوارەوە بەکاربێنە.

$$\begin{cases} -x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ -3x-4y+z=4 \end{cases}$$

دەشتوانیت ڕێگای لە جیاتیدانان بۆ شیکارکردنی سیستمی هێڵی 3×3 بەکاربێنیت هەروەها لێرە بیرۆکەی گۆڕینی سیستمی 3×3 بۆ سیستمی 2×2 پێویستە.

نموونــــە 2 جێبەجێکردن لەسەر پێشبرکێی وەرگرتن

پالێوراو	بیرکاری	زانستەکان	زمانی ئینگلیزی	سەرجەم
سۆزان	90	60	70	700
ئازاد	60	70	80	590
هوشیار	0	60	60	240

ئارەزوومەندان بۆ وەرگرتن لە کۆلێجی ئەندازیاری ناچاردەبن بە پێشبرکێ لە 3 بابەت بیرکاری و زانستەکان و زمانی ئینگلیزی دەبەستن لیژنەی پشکنین پشت بەنمرە بەرزی پالێوراوەکان دەبەستێت «نمرەکەی لێکدانی ژمارەیەك دەکرێت» بەرزی نمرەی هەربابەتێك جیاوازە لە نمرەکانی دوو بابەتەکەی تر. ئەم خشتەیەی بەرامبەر نمرەی 3 پالێوراو لە سێ بابەت، و کۆنمرەی هەریەکەیان دوای نمرە بەرزی دەنوێنێت، پێدراوەکانی خشتەکە بۆ دۆزینەوەی بەرزی نمرەی هەر بابەتێك بەکاربێنە.

هەنگاوی 1 هێمای گۆڕاوی x بۆ بەرزی بابەتی بیرکاری و گۆڕاوی y بۆ نمرە بەرزی بابەتی زانستەکان و گۆڕاوی z بۆ نمرەی بەرزی زمانی ئینگلیزی بەکاربێنە، سیستمی هاوکێشەکان بنووسە کە پێدراوی ناو خشتەکە بنوێنێت.

$$\begin{cases} 90x+60y+70z=700 & ❶ \\ 60x+70y+80z=590 & ❷ \\ 60y+60z=240 & ❸ \end{cases}$$

نمرەکانی سۆزان
نمرەکانی ئازاد
نمرەکانی هۆشیار

تێبینی گۆڕاوی x بکە نمرەکەی دیارنییە لە هاوکێشەی سێیەم. لەبەر ئەوەی هۆشیار لەوانەی بیرکاری سفری وەرگرتوە نەبوونی گۆڕاوێك هیچ لە کارەکە ناگۆڕێت، ئەگەر سەیری هاوکێشەی 3بکەیت دەتوانیت بەهای y بەهۆی zەوە بدۆزیتەوە. ئەم کارە یارمەتیدەرە بۆ بەکارهێنانی لە جیاتیدانان لە گۆڕینی سیستمەکەبۆ سیستمی هێڵی لە دوو هاوکێشەی دوونەزانراو.

هەنگاوی 2 بەبەکارهێنانی هاوکێشەی ❸ هەژماری گۆڕاوی y بەبێ گۆڕاوی z بکە

$$60y+60z=240$$
$$y=4-z$$

y هەژماریکە بەبێ گۆڕاوی z

هەنگاوی 3 لە هەردوو هاوکێشەی❶ و ❷ دا، لە جیاتی y بەهاکەی دابنێ.

$$\begin{cases} 90x+60(4-z)+70z=700 \rightarrow \\ 60x+70(4-z)+80z=590 \rightarrow \end{cases} \begin{cases} 90x+10z=460 & ❹ \\ 60x+10z=310 & ❺ \end{cases}$$

لەجیاتی دانێ وسادەبکە

هەنگاوی 4 لابردنی بەکاربهێنە بۆ شیکاری ئەو سیستەی دەستکەوتوە، هاوکێشە ❺ لە هاوکێشەی ❹ دەربکە

$$\begin{array}{rl} 90x+10z=460 & ❹ \\ 60x+10z=310 & ❺ \\ \hline 30x \quad\quad =150 & ❻ \end{array}$$

هەنگاوی 5 ئەو هاوکێشەی دەستتکەوتووە شیکاری بکە.

$$30x=150$$
$$x=5$$

هەنگاوی 6 لەجیاتی x بەهاکەی لە هاوکێشەی ❹ دا دابنێ بۆ هەژمارکردنی بەهای z .

$$90(5)+10z=460$$
$$10z=10$$
$$z=1$$

هەنگاوی 7 لە هاوکێشەی ❶ دا هەریەکە لە بەهاکانی x ، z دابنێ بۆ هەژمارکردنی بەهای y

$$90(5)+60y+70(1)=700$$
$$60y \quad =180$$
$$y \quad =3$$

سیستمەکەیەك شیکاری هەیە $(5, 3,1)$نمرەکانی بیرکاری بە هاوکۆڵکەی 5 و زانستەکان بە هاوکۆلکەی 3 و ئینگلیزی بە هاوکۆلکەی 1 بەرز دەکرێتەوە.

خاڵی چاودێری

2. بەرزی نمرەی هەر بابەتێک لە پێشبڕکێی چوونە کۆلێجی پزیشکی بە پێی ئەم خشتەی پێدراوانە دیاریبکە.

پالێوراو	بیرکاری	زانستەکان	زمانی ئینگلیزی	سەرجەم
شیرین	80	70	50	430
سۆلاف	70	80	0	370
سانا	90	70	80	490

بۆ هەریەکە لە سیستەمەکانی نموونەیی 1 و 2 تەنهایەک شیکار هەیە. بەڵام دەگونجێت سیستەمی هێڵی 3×3 شیکاری نەبێت یان ژمارەیەکی دیارینەکراو شیکاری هەبێت.

نموونـــــه 3 پۆلێنکردنی سیستەمی هاوکێشەی هێڵی 3×3

ئەو سیستەمە پۆلێنبکە و ژمارەی شیکارەکانیشی دیاربکە.

$$\begin{cases} 4x-2y+4z=8 & ❶ \\ -3x+y-z=-4 & ❷ \\ -2x+2y-6z=4 & ❸ \end{cases}$$

دەتوانین ڕێگای لابردن بەکاربهێنین چونکە دوو هاوکۆلکەی گۆڕاوی y لە دوو هاوکێشەی ❶ و ❸ دژیەکن لە نیشانەدا، ئەم دوو هاوکێشە کۆبکەوە.

$$\begin{array}{rl} 4x-2y+4z=8 & ❶ \\ -2x+2y-6z=4 & ❸ \\ \hline 2x \quad -2z=12 & ❹ \end{array}$$

$$4x-2y+4z=8 \qquad\qquad 4x-2y+4z=8$$

$$2(-3x+y-z=-4) \rightarrow \quad \begin{array}{rl} -6x+2y-2z=-8 & \\ \hline -2x \quad +2z=0 & ❸ \end{array}$$

سیستەمێک لە دوو هاوکێشەی هێڵی دوو نەزانراوت دەستکەوت.

$$\begin{cases} 2x-2z=12 & ❹ \\ -2x+2z=0 & ❺ \end{cases}$$

گۆڕاوی x لاببە دوو هاوکێشەی ❹ و ❺ کۆبکەوە.

$$\begin{array}{rl} ❹ & 2x-2z=12 \\ ❺ & -2x+2z=0 \\ \hline & 0=12 \ \times \end{array}$$

لەبەرئەوەی 0 یەکسان نابێت بە 12 ئەم یەکسان بوونە هەڵەیە لەمەوە دەردەچێت ئەم سیستەمە نەستەمە.

خاڵی چاودێری

3. هەریەکە لەم سیستمانە پۆلێنبکە و ژمارەی شیکارەکانی دیاریبکە.

أ $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ 2x-y+3z=7 \\ -9x+3y-6z=-12 \end{cases}$

ب $\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ 2x-4y+6z=10 \\ y-z=-2 \end{cases}$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بڕوانە سیستەمە ئەستەمەکان و بێسنوورەکان (غیر المحددة) کە لە لاپەڕەی یەکەمی وانەکەدا هاتووە. بارێکی تر باسبکە بۆ سێ ڕووتەخت کە سیستەمێکی ئەستەم بنوێنێت، و بارێکی تر کە سیستەمێکی بێسنوور بنوێنێت.
2. ڕێکخەربە ئەم خشتەیە دروستبکە و تەواوی بکە لایەنە هاوشێوە و لایەنە جیاکان لە نێوان سیستەمی هێڵی 3×3 و سیستەمی هێڵی 2×2 باسبکە.

هێربە

5-2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بڕوانە نموونە 1

ڕێگای لابردن بۆ شیکارکردنی هەر سیستەمێک بەکاربێنە.

1 $\begin{cases} -2x+y+3z=20 \\ -3x+2y+z=21 \\ 3x-2y+3z=-9 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ x+3y+2z=5 \\ x+4y-z=-5 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x+y-z=4 \\ x+y+3z=7 \end{cases}$

بڕوانە نموونە 2

4 **کارگێڕی کار** بەڕێوەبەرایەتی باخچەی ئاژەڵان سێ جۆر کارت دەفرۆشێت بۆ منداڵان و نەوجەوانان و گەورەکان. ئەم خشتەیە فرۆشراوی کارتەکانی چوونە ناو باخچەی ئاژەڵان پێشاندەدات لە ماوەی 3 کاتژمێردا ئەوا نرخی هەر جۆرە کارتێك بدۆزەوە.

چوونە ناو باخچەی ئاژەڵان				
کارت	گەورەکان	نەوجەوانان	منداڵان	نرخی فرۆشراوەکان
16:00–15:00	5	10	12	310 000
17:00–16:00	5	5	4	155 000
18:00–17:00	4	2	3	92 000

بڕوانە نموونە 3

هەریەك لەو سیستەمە هێڵییانە پۆلێنبکە و ژمارەی شیکارەکانی دیاریبکە.

5 $\begin{cases} 2x+4y-2z=4 \\ -x-2y+z=4 \\ 3x+6y-3z=10 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x+4y-5z=-10 \\ -x-2y+8z=16 \\ -2x+4y+2z=4 \end{cases}$

7 $\begin{cases} -2x+3y+z=15 \\ x+3y-z=-1 \\ -5x-6y+4z=-16 \end{cases}$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی سەیری ڕاهێنانەکان	نموونە بکە
10-8	1
11	2
14-12	3

بۆ شیکارکردنی هەر سیستمێك ڕێگای لابردن بەکاربێنە.

8 $\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ 4x+3y+2z=-4 \\ -3x+2y+5z=-3 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 5x-6y+2z=21 \\ 2x+3y-3z=-9 \\ -3x+9y-4z=-24 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 4x+7y-z=42 \\ -2x+2y+3z=-26 \\ 2x-3y+5z=10 \end{cases}$

11 **بۆ خۆشی** لە پێشبڕکێی گۆرانیبێژی ئایندە لێژنەی هەڵسەنگاندن بە پێی سێ پێوەر « بەهرە و وەستان لەسەر شانۆ و بەجێهێنان» کە بۆ هەریەك لە پێوەرەکان ڕێژەی سەدی لە هەڵسەنگاندنی کۆتایی دیاریکراوە. گۆرانیبێژە کە هەڵدەبژێرن. ئەم خشتەیەی خوارەوە هەڵسەنگاندنی سێ لە پێشبڕکێکەرانی تێدادیاریکراوە. بە پێی پێوانەیەك بۆ هەڵسەنگاندنی کۆتایی زیاد دەکرێت. ڕێژەی سەدی هەڵسەنگاندنی کۆتایی بۆ هەر پێوانەیەکیان چەندە؟

پێشبڕکێی گۆرانیبێژی ئایندە				
پێشبڕکێکەران	بەهرە	وەستان لەسەر شانۆ	بەجێهێنان	هەڵسەنگاندنی کۆتایی
زانا	8	9	10	9.2
ڤیان	9	7	8	8.1
ئاراس	6	10	8	7.8

هەریەکە لەم سیستمە هێڵییانە پۆلێن بکە و ژمارەی شیکارەکانی دیاریبکە.

12 $\begin{cases} 4x-3y+z=-9 \\ -3x+2y-z=6 \\ -x+3y+2z=9 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x+3y+3z=4 \\ 2x-y-5z=2 \\ 5x+2y-2z=8 \end{cases}$

14 $\begin{cases} -x+y+z=8 \\ 2x-2y-2z=-16 \\ 2x-y+4z=-6 \end{cases}$

15 **ئەندازە** لە سێگۆشەی ABCدا پێوانەی گۆشەی A دوو ئەوەندەی سەرجەمی پێوانەی هەردوو گۆشەی C و B . هەروەها پێوانی گۆشەی B سێ ئەوەندەی پێوانەی گۆشەی C. ئەوا پێوانەی هەریەکەیان چەندە؟

16 **وەرزش** لە مێژووی یەکێتی تۆپی سەبەتەی ئەمریکا (لوی دامپە) یەکەم کەس بوو کۆی خاڵە تۆمارکراوەکانی بگاتە 726 13 خاڵ کە دابەشکراوە بەسەر گۆڵی سێ خاڵی و گۆڵی دوو خاڵی و گۆڵی یەك خاڵیدا. دامپە 144 2 خاڵی لە گۆڵی دوو خاڵی زیاتر لەوەی لە گۆڵی یەك خاڵ تۆمارکردووە و 558 1 خاڵی لە گۆڵی یەك خاڵی تۆمارکردوە. زیاتر لەوەی لە گۆڵی سێ خاڵی بەدەستیهیناوە. چەند خاڵی لە گۆڵی یەك خاڵی لە هەر جۆرێك لە جۆرەکانی گۆڵ تۆمارکردووە.

17 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئەم سیستمەی خوارەوە لە دوو هاوکێشەی سێ نەزانراو پێکهاتووە.

$\begin{cases} x+2y+4z=4 \\ 2x+3y+z=12 \end{cases}$

أ چی ڕوودەدات کاتێك هەوڵی شیکارکردنی ئەم سیستمە دەدەیت، باسیبکە

ب ڕونیبکەوە هۆی چیە نابێت ژمارەی هاوکێشەکانی سیستمی هێڵی کەمتربێت لە ژمارەی نەزانراوەکان. بۆ ئەوەی سیستمەکەتەنهایەك شیکاری هەبێت.

18 **بنووسە** هەر ڕووتەختێك لە نێوان سێ ڕووتەختدا یەکتری دەبڕن کە سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان 3×3 بەپێی ڕاستەهێڵ دەنوێنێت. جۆری ئەو شیکارەی لە توانادایە بۆ ئەم سیستمە چییە؟

19 ئەم سیستمەی خوارەوە سێ ڕوو بۆ هەرەمێکی سێینیە دەنوێنێت (هەر هاوکێشەیەک ڕووتەختێک دەنوێنێت) کاتێک بنکەی هەرەمەکە دەکەوێتە ڕووتەختی پۆتانی XY. پێوانەکان بەمەترە.

$$\begin{cases} x+y+z=53 \\ 3x-2y+z=69 \\ -x+2y-z=-59 \end{cases}$$

أ پۆتانی لووتکەی هەرەمەکە چەندە؟

ب ئەندازیارەکە ستوونێکی بۆ هەرەمەکە دانا بۆ ڕاگرتنی لوتکەی هەرەمەکە، بەرزی ئەو ستوونە چەندە؟

ج پۆتانی خاڵی ڕاگری ئەستوونە کە چەندە؟

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

20 کام خاڵ شیکاری ئەم سیستمە دەنوێنێت.

$$\begin{cases} 2x+y+3z=-1 \\ 4x+2y+3z=1 \\ x-y+4z=-6 \end{cases}$$

أ $(2,-2,-1)$　　ج $(2,1,-1)$

ب $(0,2,-1)$　　د $(3,-2,2)$

21 سۆزان و میران و ساڤان خوشك و بران تەمەنی سۆزان دوو ئەوەندەی تەمەنی میرانە کە 12 ساڵ لە تەمەنی ساڤان کەمترە. پاش 5 ساڵ تەمەنی ساڤان دوو ئەوەندەی تەمەنی میرانی لێدێت تەمەنی هەریەکەیان چەندە؟

أ سۆزان 6 میران 3 ساڤان 15　　ج سۆزان 5 میران 10 ساڤان 22

ب سۆزان 34 میران 17 ساڤان 29　　د سۆزان 14 میران 7 ساڤان 19

22 **کورتە وەڵام** بەهای x چەندە لە شیکاری سیستمی

$$\begin{cases} x+4y=6 \\ 2x+3z=12 \\ 4y+z=10 \end{cases}$$

بەرەنگاری و فراوانکردن

23 ڕێگای گونجاو بۆ شیکارکردنی ئەم سیستمە بەکاربێنە.

$$\begin{cases} w+2x+2y+z=-2 \\ w+3x-2y-z=-6 \\ -2w-x+3y+3z=6 \\ w+4x+y-2z=-14 \end{cases}$$

24 **ئابووری** سێ هاوڕێ سێ جۆر پارەیان: أ ، ب ، ج خستەکارەوە هەریەکەیان یەک ملیۆن دیناری خستەکار هەرسێ جۆرەکەی تێدابوو ئەم خشتەیەی خوارەوە بڕی خستنەکاری هەر جۆرێك لەو پارانە ڕووندەکاتەوە لەگەڵ قازانجەکەی لە کۆتایی ساڵدا. ڕێژەی سەدی بۆ دەستکەوتی هەر جۆرێك بدۆزەوە.

خستنەکاری پارە				
کەسەکان	أ	ب	ج	قازانج
ئازاد	300 000	300 000	400 000	56 000
ئوزاد	600 000	200 000	200 000	76 000
دڵسۆز	100 000	300 000	600 000	30 000

پێداچوونەوەی لولپێچی

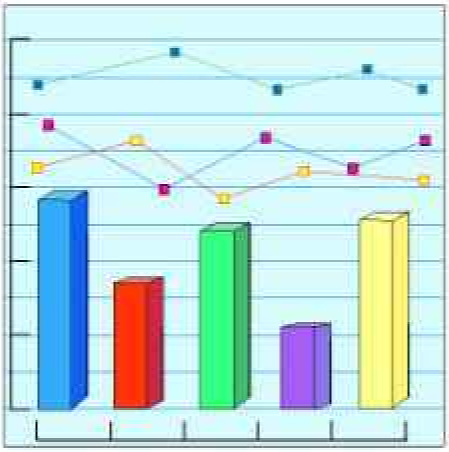
پۆوتانی وێنەی خاڵی$(2,-3)$لە هەر ڕاکێشانێکدا چەندە؟ (پۆلەکانی پێشوو)

25 6 یەکە بۆ لای ڕاست، یەك یەکە بۆ سەرەوە. **26** 4 یەکە بۆ لای چەپ دوو یەکە بۆ خوارەوە.

27 **بینا** پێوانەکانی ژووری چێشتخانە لەسەر نەخشەی خانوویەك $8\,cm \times 11\,cm$ پێوانەی ڕاستینەیی چەندە؟ ئەگەر پێوەری نەخشەکە $1\,cm : 0.65\,m$ بێت؟ (پۆلەکانی پێشوو)

هەر هاوکێشەیەك لەمانە بەشێوەی لاری - یەکتربڕین بنووسە پاشان وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە کە دەینوێنێت (پۆلەکانی پێشوو)

28 $4x-3y=-6$ **29** $3y-2x=-12$ **30** $2x+5y=15$



6-2 پێوانە ئامارییەکان

Statistical Measurements

ئامانجەکان

- دۆزینەوەی پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق و پێوەرەکانی پەرتبوون بە پێی پێدراوە ئامارییەکان.
- لێکۆڵینەو لە کاریگەری بەها پەرگرەکان (المتطرفە) لە کۆمەڵە پێدراوەکان.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئامارناسان پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق و پێوەرەکانی پەرتبوون بۆ شیکارکردنی پێدراوە ئامارییەکان بەکاردەهێنن (نموونە 2)

لە بیرت بێت کە ناوەندە ژمێرەیی و ناوەڕاستە و باو لە پێوەرەکانی ڕووکردنەچەقن. واتە ئەو پێوانانەیە کە باسی چەقی کۆمەڵە پێدراوەکان دەکەن.

ناوەندە ژمێریی **Mean** : بریتییە لەسەرجەمی گشت بەهایەکان دابەشکرابێت بەسەر ژمارەی بەهایەکاندا. بە هێمای $\overline{x}$ دیاریدەکرێت. باو **Mode** بریتییە لە و بەهایەی کە زۆرترین دووبارەبوونەوەی هەبێت لە کۆمەڵەکەدا. دەگونجێت کۆمەڵە پێدراوێك زیاتر لەیەك باوی هەبێت و دەگونجێت باوی نەبێت. ناوەڕاستە **Median** ئەو بەهایەیە کە دەکەوێتە ناوەڕاستی بەهایەکان کاتێك ڕیزکرابن بەرەو ژوور یان بەرەوژێر کاتێك ژمارەی بەهایەکان تاك بێت، ناوەڕاستە دوو بەهای دەبێت. لە ناوەڕاستدا کاتێك ژمارەیان جووت بێت.

زاراوەکان Vocabulary

ناوەندە ژمێرەیی قورسکراو (المتوسط المثقّل) Weighted average

دابەشبوونی ئەگەر Propability Distribution

لێکنەچوون Variance

لاداتی پێوانەیی Standard Deviation

بە ها پەرگرەکان Outliers

بەها پێشبینیکراوەکان Expected value

چواریەك (الربع) Quartile

نموونــــە 1 دۆزینەوەی پێوەرەکانی ڕووکردنەچەق

ناوەندە ژمێریی و ناوەڕاستە و باو بۆ ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بدۆزەوە.

{6،4،3،4،2،5،3،4،5،2،3،4}

ناوەندە ژمێری: $\overline{x} = \dfrac{4+3+2+5+4+3+5+2+4+3+4+6}{12} = \dfrac{45}{12} = 3.75$

ناوەڕاستە 6 5 4 4 4: 4 :3 3 3 2 2 : $\dfrac{4+4}{2} = 4$

باو ئەو بەهایەی زۆرتر لەوانی تر دووبارە بۆتەوە 4 ە واتە باو بریتییە لە 4

خالی چاوێدێری

1. ناوەندە ژمێریی و ناوەڕاستە و باو بۆ هەریەك لەم کۆمەڵە پێدراوانە بدۆزەوە.

أ {6،9،3،8}   ب {2،5،6،2،6}

ناوەندی قورسکراو Weighted average ئەو ناوەندەیەکە ڕەچاوی هەژماری دووبارە بوونەوەی هەربەهایەك دەکات. وادابنێ هەڵسەنگاندن بۆ 30 کتێب کرا، وەك لەم خشتەیەی خوارەوە ڕوونکراوەتەوە.

هەڵسەنگاندنی پەرتووك					
هەڵسەنگاندن	★★★★	★★★	★★	★	بێ ئەستێرە
ژمارەی کتێب	8	12	7	2	1

ناوەندی قورسکراو بۆ هەڵسەنگاندنی کتێبەکان بریتییە لە $\dfrac{(4)8+(3)12+(2)7+(1)2+0(1)}{8+12+7+2+1} = \dfrac{84}{30} = 2.8$

بە ناوەندی قورسکراوی کۆمەڵەیەك لە بەهای ژمارەی پەیدا بوو لە تاقیکردنەوەیەك دەوترێت **بەهای پێشبینکراو Expected value** بۆ تاقیکردنەوەکە. بەهای چاوەڕوانکراو بۆ ژمارەی ئەو ئەستێرانەی هەر کتێبێك وەریگرێت کە لە نێوان 30 کتێبەکەدا بە شێوەیەکی هەرەمەکی هەڵبژێرێت بریتییە لە 2.8 .

دابەشبوونی ئەگەر **Probability distribution** بۆ تاقیکردنەوەیەکی هەرەمەکی بریتییە لە ئەخشەیەك هەر ئەنجامێکی لە تواناد بوو ببەستێت بە ژمارەیەکەوە کە ئەگەری ڕوودانی هەیە.

نموونــــە 2 دۆزینەوەی بەهای پێشبینیکراو

خشتەی خوارەوە دابەشبوونی ئەگەر بۆ ژمارەی یارییەکانی هەر خولێکی جیهانی لە ساڵەکانی 1923 و بۆ ساڵی 2004 دەنوێنێت. ژمارەی پێشبینیکراوی یارییەکان لەیەك خولدا چەندە؟

خولە جیهانییەکان				
ژمارەی یارییەکان n	4	5	6	7
ئەگەری n یاری	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{11}{27}$

بەهای پێشبینیکراو $4\left(\frac{5}{27}\right)+5\left(\frac{5}{27}\right)+6\left(\frac{6}{27}\right)+7\left(\frac{11}{27}\right)$ ناوەندی ژمێری قورسکراو بەکاربێنە

سادەبکە $=\frac{20}{27}+\frac{25}{27}+\frac{36}{27}+\frac{77}{27}=\frac{158}{27}\approx 5.85$

ژمارەی پێشبینیکراوی یارییەکان لە ماوەی یەك خول بریتییە لە 5.85 یاری بەنزیکراوەیی.

ڕۆشنایی

سەرجەمی هەموو ئەگەرەکان لە هەر دابەشبوونێکی ئەگەردا یەکسانە بە 1 لە نموونە 2 دەدۆزینەوە

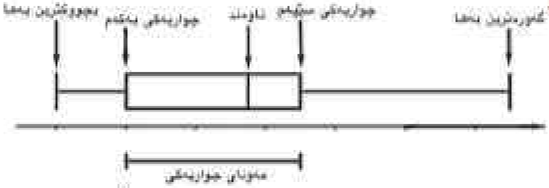
$\frac{5}{27}+\frac{5}{27}+\frac{6}{27}+\frac{11}{27}=1$

خاڵی چاودێری

2. ئەم خشتەیەی خوارەوە دابەشبوونی ئەگەرە بۆ ژمارەیەك ڕووداوی هاتوچۆ لە ماوەی حەفتەیەکدا لە یەکێك لە چوار ڕێیانی ڕێگایەك بە پشت بەستن بە ئامارەکانی ساڵانی پێشوو. بەهای پێشبینیکراو بۆ ژمارەی ڕووداوەکان لەحەفتەیەکدا بدۆزەوە.

ژمارەی ڕووداوەکان n	0	1	2	3
ئەگەری ڕووداوەکان n ڕوودلو	0.75	0.15	0.08	0.02

ڕوونکردنەوەی سمێڵی Box - and - Whisker - Plot ئەم هێڵکارییە دابەشکردنی کۆمەڵە پێدراوەکان دەنوێنێت، لەم ڕوونکردنەوەدا 5 خاڵی سەرەکی هەیە: گەورەترین بەهاو بچووکترین بەها، ناوەڕاستە، چواریەکی یەکەم و چواریەکی سێیەم.



چواریەکی یەکەم First quartile : بریتییە لە ناوەڕاستەی بچووکترین بەها لە ناوەڕاستەی کۆمەڵە هێماکەی Q_1

چواریەکی سێیەم Third quartile : بریتییە لە ناوەڕاستەی گەورەترین بەها لە ناوەڕاستەی کۆمەڵە هێماکەی Q_3

مەودای چواریەکی Interquartile range : بریتییە لە جیاوازی نێوان چواریەکی سێیەم و چواریەکی یەکەم واتە Q_3-Q_1 واتە 50% ی پێدراوەکان دەنوێنێت.

لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار: کێشانی ڕوونکردنەوەی سمێڵی

کێشانی ڕوونکردنەوەی سمێڵی پێش دەستپێکردن بە ڕوونکردنەوەیی سمێڵی، پێویستە پێدراوەکان ڕێزبکەیت. پێدراوەکان لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی دابکە بەبەکارهێنانی لیستەکە. بە پێی هەڵبژاردنەکان STAT پێدراوەکان بەرە و ژوور ریزبکە دەتوانیت پرۆگرامی بژمێرەیی وەك EXCEL بەکاربێنێت بۆ ڕیزکردنی پێدراوەکان.

نموونـــــە 3 دروستکردنی ڕوونکردنەوەیی سمێڵی و دیاریکردنی مەودای چواریەکی

ڕوونکردنەوەی سمێڵی بۆ ئەمانە بکێشە و مەودای چواریەکی بۆ ئەم پێدراوانە دیاریبکە.

$$\{5, 3, 9, 2, 14, 6, 8, 9, 5, 8, 13, 3, 15, 7, 4, 2, 12, 8\}$$

هەنگاوی 1 پێدراوەکان بەرەو ژوور ڕێزبکە.

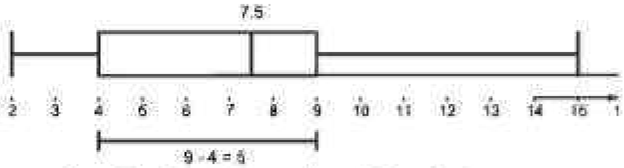
2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 15

هەنگاوی 2 گەورەترین بەهاو بچووکترین بەها و ناوەراستە چواریەکی یەکەم و چواریەکی سێیەم بدۆزەوە.

(2، 2، 3، 3، 4، 5، 5، 6، 7) ، (8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 15)

گەورترین بەها، چواریەکی سێیەم، ناوەراستە 7.5، چواریەکی یەکەم، بچوکترین بەها

هەنگاوی 3 دروستکردنی ڕوونکردنەوەی سمێڵی وێنەی تەوەری ژمارەکان بکێشە، پاشان خالێك دیاریبکە بۆ هەر بەهایەك لە پێنج بەهاکە، پاشان وێنەی لاکێشە لە نێوان دوو خاڵی چواریەکی یەکەم و چواریەکی سێیەم. لەگەڵ پارچە ڕاستەهێڵێکی ستوونی لە ناوەراستدا. پاشان وێنەی دوو سمێڵ بکە لە خاڵی چواریەکی یەکەم بۆ خاڵی بچووکترین بەهاو لە خاڵی چواریەکی سێیەم بۆ گەورەترین بەها.



مەودای چواریەکی: بریتیە لە 5 ، دەکاتە ماوەی نێوان چواریەکی یەکەم و چواریەکی سێیەم یان درێژی لاکێشە کە.

خاڵی چاودێری

3. **ڕوونکردنەوەی سمێڵی دروستبکە و مەودای چواریەکی بۆ ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بدۆزەوە.**

$$\{13, 12, 17, 15, 12, 13, 19, 11, 14, 14, 18, 22, 23\}$$

دەگونجێت دوو کۆمەڵە پێدراوی وەك $\{19, 20, 21\}$ و $\{0, 20, 40\}$ هەمان ناوەندە ژمێرەیی و ناوەراستەیان هەبێت. لەگەڵ ئەوەی بە تەواوی لەیەك جیاوازن. بۆیە ئامارناسان زۆر گرنگی بە پەرتبونی پێدراوەکان لەدەرەوەی ناوەندی ژمێرەیی یان ناوەراستە دەدەن. لەبەر ئەوەش پێوانەی نوێیان بۆ دەربڕینی پەرتبوون دانا. لە نێوان ئەم پێوانانەدا **مەودای چواریەکەکان و لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی.**

لێکنەچوون Variance بەهێمای σ^2 دەردەبڕێت. بریتییە لە ناوەندی ژمێرەیی دووجای دوورییەکەیان لە نێوان ناوەندە ژمێرەیی و بەهاجیاوازەکان.

لادانی پێوانەیی Standard deviation بە هێمای σ دەردەبڕێت. بریتییە لە ڕەگی دووجای لێکنەچوون لە هەموو پێوانە ئامارییەکان بە سوودترە و زیاتر بەکاردەهێنرێت. بچووکی بەهای لادانی پیوانەیی نیشانەیە بۆ بوونی زۆربەی پێدراوەکان لە تەنیشت پێوانەکانی ڕووکردنە چەق. لەگەڵ ئەوەشدا گەورەیی ئەم بەهایە نیشانەیە بۆ پەرتبوونی پێدراوەکان بەدوورکەوتنەوەیان لەو پێوانانەوە.

خوێندنەوە

ئامارناسان هێمای $\bar{x}$ (ئێکس بار) دەخوێننەوە بۆ ناوەندی ژمێرەیی بەکاردێنن و پیتی یۆنانی σ (بەسیگما) دەخوێننەوە بۆلادانی پێوانەی بەکاردەهێنن.

	دۆزینەوەی لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی
هەنگاوی 1	ناوەندە ژمێرەیی بۆ پێدراوەکان بدۆزەوە
هەنگاوی 2	جیاوازی نێوان ناوەندە ژمێرەی و هەر پێدراوێك بدۆزەوە پاشان دووجاکانیان هەژماربکە.
هەنگاوی 3	لێکنەچوون σ^2 بدۆزەوە بە ڕێگای ژمارە دەستکەوتووەکان لە هەنگاوی 2 و دابەشکردنی بەسەر ژمارەیاندا.
هەنگاوی 4	لادانی پێوانەیی بە هەژمارکردنی ڕەگی دووجای لێکنەچوون بدۆزەوە.

نموونـــــه 4 دۆزینەوەی ناوەندە ژمێری و لادانی پێوانەیی

ئەم کۆمەڵەیە $\{14, 13, 16, 9, 3, 7, 11, 12, 11, 4\}$ ڕێژەی مادەیەکی دیاریکراو لە خوێنی تەخۆشێک دەنوێنێت لە ماوەی 10 ڕۆژدا. ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە.

هەنگاوی 1 ناوەندە ژمێرەیی بدۆزەوە.

$$\overline{x} = \frac{4+11+12+11+7+3+9+16+13+14}{10} = 10$$

هەنگاوی 2 جیاوازی نێوان ناوەندی ژمێرەیی و هەر بەهایەك بدۆزەوە و دووجایەکەی هەژماربکە.

نرخی x	4	11	12	11	7	3	9	16	13	14
$x-\overline{x}$	-6	1	2	1	-3	-7	-1	6	3	4
$(x-\overline{x})^2$	36	1	4	1	9	49	1	36	9	16

هەنگاوی 3 لێکچوون بدۆزەوە.

$$\sigma^2 = \frac{36+1+4+1+9+49+1+36+9+16}{10} = 16.2$$

هەنگاوی 4 لادانی پێوانەیی بدۆزەوە

$\sigma = \sqrt{16.2} \approx 4.02$ لادانی پێوانەیی بریتییە لە ڕەگی دووجای موجەبی لێکچوون،
ناوەندە ژمێرەیی پێدراوەکان دەکاتە 10 و لادانی پێوانەیی دەکاتە 4.02 بە نزیکەیی.

خاڵی چاودێری

4. ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم پێدراوانەی خوارەوە بدۆزەوە.
دەربارەی ژمارەی جارەکانی وەستانی سەرخەرێك لە هاتووچۆکردنەکانیدا
$\{0, 3, 1, 1, 0, 5, 1, 0, 3, 0\}$

بەهای پەڕگر Qutiliers لە کۆمەڵەیەك پێدراودا، ئەو بەهایەی دەکەوێتە دەرەوەی ڕێسای زۆرینەی بەهایەکانی کۆمەڵەکەوە. وەکو ئەو بەهایەی کە زۆر گەورەتر بێت لێیان و یان زۆر بچووکتربێت لێیان بوونی ئەم جۆرە بەهایە بە توندی کاریگەری لەسەر ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی دەبێت.
ئەگەر بەهای پەڕگر لە ئەنجامی هەڵە پێوانەدا بێت، ئامارناسان خۆیان لای دەبەن. زۆر ڕێگە هەیە بۆ دیاریکردنی بەهای پەڕگر. لە و ڕێگایانە کاتێك بەهایەکە سێ ئەوەندەی لادانی پێوانەیی دوور بێت لە ناوەندی ژمێرەییەوە بەبەهای پەڕگردادەنرێت.

نموونـــــه 5 خوێندنی بەهای پەڕگرەکان

ئەم کۆمەڵەیەی خوارەوە نمرەکانی خوێندکارانی پۆلی دەیەم لە تاقیکردنەوەی بیرکاری نیشان دەدات $\{51, 55, 56, 53, 56, 48, 96, 48, 54, 47, 50, 52, 57, 58, 59, 45, 55\}$

هەنگاوی 1 پێدراوەکان لە لیستی L1 بخەرە ناو بژمێرەی ڕوونکردنەوەییەوە.

هەنگاوی 2 ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی بدۆزەوە STATدابگرە، پاشان CALC هەڵبژێرە، پاش ئەوvariable-1:1 دوگمەی ENTER دابگرە لە شاشەی بەرامبەر: ناوەندە ژمێرەیی 55.29 بە نزیکەیی.
لادانی پێوانەیی: 10.92

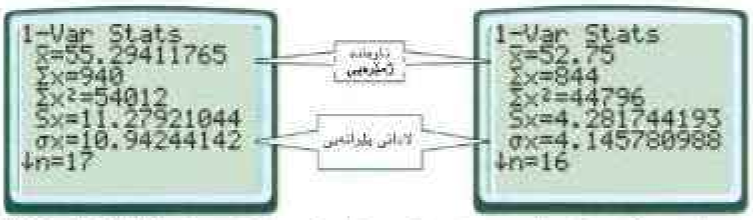
هەنگاوی 3 بەهای پەڕگر دیاریبکە بەدوای ئەو بەهایەدا بگەڕێ کە دوورە لە ناوەندی ژمێرەیی بە سێ ئەوەندەی لادانی پێوانەیی.
سێ ئەوەندەی لادانی پێوانەیی بریتییە لە $3 \times 10.92 = 32.76$

لەبیرت بێت

پێدراوەکان لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی بە دانگرتنی دوگمەی STAT و هەڵبژاردنی 1:Edit ئەبێت.

بەهای پەرگر ئەو بەهایەیە کە زیاترە لە$91.65 = 53.61 + 38.04$ یان کەمترە لە $53.61 - 38.04 = 15.57$
لێرەدا یەک بەهای پەڕگرمان هەیە ئەویش 96

هەنگاوی 4بەهای پەرگر لابە بۆ دیاریکردنی کاریگەری لەسەر ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی.



بوونی بەهای پەرگر بۆتە هۆی بەرزبوونەوی ناوەندی ژمێرەیی لە 51.11 بۆ 53.61
بەرزبوونەوەی لادانی پێوانەیی لە 7.64 بۆ 12.68.

خاڵی چاودێری

5. بەهای پەرگر لە نێوان ئەم کۆمەڵە پێدراوانە دا دیاریبکە $\{3, 19, 4, 4, 2, 3\}$ کاریگەری چۆنە لەسەر ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی ڕوونبکەوە.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. کاریگەری زیادکردنی هەمان ژمارە بۆ هەر بەهایەک لە کۆمەڵەی پێدراوەکان لەسەر ناوەندی ژمێرەیی ئەو کۆمەڵەیە ڕوونبکەوە.
2. کاریگەری زیادکردنی هەمان ژمارە بۆ هەر بەهایەک لە کۆمەڵەی پێدراوەکان لەسەر لادانی پێوانەیی ئەو کۆمەڵەیە ڕوونبکەوە.
3. کاریگەری دوو ئەوەندەکردنی لێکنەچوون لەسەر لادانی پێوانەیی چییە؟
4. ڕێکخەرە هێڵکارییەکە دروستبکەوە و تەواوییکە لەناو هەر خانەیەک پێناسەی ئەوە بنووسە کە تێیدایە و نموونەی لەسەر بێنەوە.

فێربە

6-2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ناڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ئەو پێوەری پەرتبوونەی کە زۆرترین بەکاردێت بریتییە لە ___؟___
(لێکنەچوون یان لادانی پێوانەیی)

بڕوانە نموونە 1

بۆهەر کۆمەڵە پێدراوێک ناوەندی ژمێرەیی و ناوەڕاستە و باو بدۆزەوە.

2 $\{5,7,4,7,6,7\}$

3 $\{2,4,4,6,6,6,7,8\}$

4 $\{10,14,18,22,26\}$

بڕوانە نموونە 2

5 بەهای پێشبینکراوی خەڵاتەکە بدۆزەرە.

بەدەستهێنانی خەڵاتەکە						
بەها	0	1 000	5 000	20 000	100 000	1 000 000
ئەگەر	0.9359	0.05	0.01	0.003	0.001	0.0001

بڕوانە نموونە 3

ڕوونکردنەوەی سمێڵی بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێک دروستبکەو مەودای چواریەکی بدۆزەوە.

6 $\{3, 5, 2, 2, 8, 9, 1, 11\}$

7 $\{2, 4, 1, 4, 2, 2, 7, 4\}$

8 $\{33, 34, 31, 27, 22\}$

بڕوانە نموونە 4

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەر کۆمەڵەیەک لە پێدراوەکان بدۆزەوە.

9 $\{3, 3, 4, 5, 5\}$

10 $\{10, 12, 14, 15, 18, 20, 23\}$

11 $\{7, 14, 21, 28, 35, 42\}$

بڕوانە نموونە 5

12 **پێوانە** مامۆستای پۆلی چوارەم داوای لە قوتابییەکان کرد درێژی ئەو میزەی لەسەری دانیشتوون بە سانتیمەتر پێوانە بکەن. مامۆستا پێوانەکانی قوتابییەکانی بەم شێوەیە تۆمارکرد: 49، 50، 49، 48، 48، 19، 50، 49، 48، 50، 49، 50 بەهای پەڕگر دیاریبکە. ڕوونیبکەوە چۆن بە بەهای پەڕگر کاردەکاتە سەر هەریەکە لە ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی.

ڕاهێنان و شیکاری پرسیارەکان

بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێک ناوەندی ژمێرەیی و ناوەڕاستە و باوو بدۆزەوە.

13 $\{4, 16, 25, 9, 36, 49\}$

14 $\{5, 10, 15, 20, 25\}$

15 $\{1, 7, 7, 2, 3, 14, 127, 8\}$

16 ژمارەی پێشبینیکراوی بۆ ژمارەی جارەکانی دەستکەوتنی شێر بدۆزەوە.

هەڵدانی سێ پارچە پارەی کانزایی				
ژمارەی جارەکان	0	1	2	3
ئەگەر	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ڕاهێنانی ئازاد

ڕاهێنانەکان	بۆ ئیشکارکردنی سەیری نموونە بکە
15-13	1
16	2
19-17	3
22-20	4
23	5

ڕوونکردنەوەی سمێڵی بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێك دروستبکە و مەودای چواریەکی بدۆزەوە.

17 $\{12, 15, 12, 6, 18, 29\}$ **18** $\{2, 2, 3, 8, 2, 8, 2, 42\}$

19 $\{3, 4, 3, 1, 2\}$

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێك بدۆزەوە.

20 $\{4, 4, 4, 4, 5\}$ **21** $\{8, 12, 30, 35, 48, 50, 62\}$

22 $\{14, 26, 40, 52\}$

23 **تۆپی سەبەتە** ئاری لە 13 یاری تۆپی سەبەتەدا بەشداریکرد و ئەم خاڵانەی تۆمارکرد 24، 16، 9، 17، 17، 23، 20، 26، 17،14، 58، 27، 28 ناوەندە ژمێرەیی و لادانی پێوانەی بدۆزەوە. بەهای پەرگر دیاریبکە کاریگەری لەسەر بەهای هەریەکە لە ناوەندی ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی باسبکە.

24 **بیری ڕەخنەگرانە** کۆمەڵە پێدراوێك بنووسە کەناوەندی ژمێرەیی و ناوەراستە لە نێوانیاندا نەبێت.

25 **بازارکردن** هەرێم چوو بۆ بازار بۆ کڕینی گەرمی پێوێکی باش. بۆ پێوانەکردنی پلەی گەرمی ژوورەکەی لەیەکێك لە دوکانەکاندا 4 گەرمی پێوی تێدابوو ئەم پلە گەرمیانەییان نیشاندەدا 25، 26، 24، 8 کام پێوەر لە پێوەرکانی ڕووکردنەچەق پێویستە هەرێم بەکارینەهێنێت بۆ هەڵبژاردنی گەرمی پێوی گونجاو.

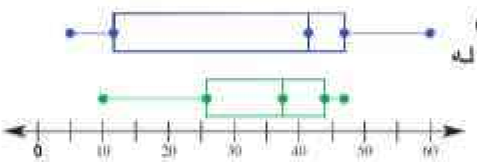
هەندێك لە ئامارناسان وایانداناوە کە بەهایەك لە ناو بەهاکانی کۆمەڵە پێدراوەکان بەهای پەرگرە. ئەگەر کەمتربێت (چواریەکی یەکەم− 1.5 × مەودای چارەکی) یان زیاتر بێت لە (چوارەکی سێیەم + 1.5 × مەودای چواریەکی).

بە بۆچوونی ئەو ئامارناسانە کام بەها لەناو کۆمەڵەکانی خوارەوە بەهای پەرگرە؟

26 $\{2, 3, 4, 5, 5, 25\}$ **27** $\{91, 90, 79, 15, 82, 90, 88\}$

28 $\{1, 36, 34, 33, 35, 92\}$

دوو ڕوونکردنەوەی سمێڵی بەرامبەر بەکاربێنە بەپێی دوو کۆمەڵە پێدراوەکان بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 29 بۆ 32



29 کام کۆمەڵە گەورەترین بەهای هەیە؟ بەچەند زیاترە لە بەها گەورەکەی کۆمەڵەکەی تر.

30 کام کۆمەڵە ناوەراستەکەی گەورەترە؟ بیخەمڵێنە بە چەند گەورەترە لە ناوەراستەی کۆمەڵەکەی تر؟

31 مەودای چواریەکی هەر کۆمەڵەیەکیان بخەمڵێنە.

32 کام کۆمەڵەیان بچووکترین لادانی پێوانەیی هەیە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

33 بەختت لە بردنەوەی خەڵاتی نیو ملیۆن دینار دا 0,01% لە کاتێکدا بەختت لە دۆڕاندنی هەزار دینار کە نرخی بلیتەکەیە 99, 9% بەهای پێشبینکراو بۆ قازانجەکەت چەندە؟ (یارمەتی: دوو بەهای لە توانادا بوو. بۆ قازانجەکەت هەیە (500 000 و 1000−)

34 بەختت لە بردنەوەی خەڵاتی سەد هەزار دینار لە10%. وبەختت لە دۆڕانی 2000 دینار بریتییە لە30% ئەگەری 60% هەیە بۆ وەستاندنت لە یارییەکە بەهای پێشبینیکراو بۆ بردنەوەت چەندە؟

35 **هەڵە لە شیکردنەوە** ئەمانەی خوارەوە دوو هەوڵدانە بۆ دۆزینەوەی لادانی پێوانەیی بۆ پێدراوەکانی 4، 6، 8، 10 کام هەوڵەیان ناڕاستە؟ هەڵەکەی ڕوونبکەوە.

أ

$7-4=3 \to 9$
$7-6=1 \to 1$
$7-8=-1 \to 1$
$7-10=-3 \to 9$
20
$20 \div 4 = 5$
$\sqrt{5} \approx 2.24$

ب

$7-4=3 \to 3$
$7-6=1 \to 1$
$7-8=-1 \to 1$
$7-10=-3 \to 3$
8
$8 \div 4 = 2$
$\sqrt{2} \approx 1.4$

36 **بنووسە** ئایا بەهای پێشبینیکراو بۆ کۆمەڵە پێدراوێك هەمیشە یەکێکە لەو پێدراوانە؟ ئایا هەندێك جار سەربەو کۆمەڵەیە یان هەر سەربەو کۆمەڵەیە نابێت؟ بەنموونەیەك پاڵپشتی وەلامەکەت بکە.

37 یارییەك بریتییە لە هەڵدانی بەردەزارێك و لێکدانی دوو ژمارەکەی سەرەوی دوزارەکە.

أ بەهای پیشبینی کراولە یارییەکە چەندە.

ب ئەگەری ئەنجامی لێکدانی یەکێك لە ئەنجامەکانی گەورەتربێت لە بەهای پێشبینیکراو چەندە؟

ج ئەگەری ئەنجامی لێکدانی یەکێك لە ئەنجامەکانی بچووکتربێت لە بەهای پێشبینیکراو چەندە؟

د ئایا وەلامی لقی ب و ج یەکسانن؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

38 ئەم خشتەیەی خوارەوە تێکرای باران بارینە لە ساڵێکدا بە سانتیمەتر لە 1994 تا 2003 یەکێك لە شارەکاندا نیشاندەدات.

سال	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
تێکرای	9.4	17.0	7.3	7.0	16.1	5.4	6.9	8.5	4.2	9.2

أ ناوەندە ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە.

ب لە کام سالأنەدا دووری تێکرایی لە ناوەندی ژمێرییەوە لە لادانی پێوانەیی گەورەترە.

ج ناوەراستە و مەودای چواریەکی بۆ کۆمەڵەی پێدراوەکان بدۆزەوە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

39 کام لەم کۆمەڵە پێدراوانە بچووکترین لادانی پێوانەیی هەیە

أ $\{1, 5, 7, 50\}$ ج $\{2, 10, 102, 110\}$

ب $\{100, 200, 300, 400\}$ د $\{100, 101, 102, 105\}$

40 کام لەمانەی خوارەوە لەسەر ئەم دوو کۆمەڵە پێدراوانە $\{0, 48, 49, 50, 51, 52, 100\}$ $\{0, 1, 2, 50, 98, 99, 100\}$ دروستنابێت

أ هەمان ناوەندی ژمێرەییان هەیە. ج هەمان لێکنەچوونیان هەیە.

ب هەمان مەودایان هەیە. د هەمان ناوەراستەیان هەیە

41 ناوەندی ژمێرەیی ئەنجامەکانی یەکێك لە تاقیکردنەوەکان 50 بوو. کام لەمانەی خوارەوە ناگونجێت ڕاست بێت

أ نیوەی سفر و نیوەکەی تری سەد بێت. ب مەودای 50 بێت.

ج نیوەی ئەنجامەکان 25 ونیوەکەی تری 50 بووبێت. د هەمووی 50 بێت.

بەرەنگاری و فراوانکردن

42 کۆمەڵە پێدراوێك ناوەندی ژمێرەییەکەی 4 و ناوەراستەکەی 3 و لادانی پێوانەییەکەی 1.6 بێت.

أ وایدابنێ کە هەریەهایەك لێکدانی ژمارە 5 کراوە، ئایا ناوەندی ژمێرەیی کۆمەڵەی نوێ چەندە؟ ناوەڕاستەکەی چەندە؟ لادانی پێوانەیی چەندە؟

ب وایدابنێ هەر بەهایەك کۆی 5 کراوە. ئایا هەریەکە لە ناوەندی ژمێرەیی و ناوەڕاستە و لادانی پێوانەیی کۆمەڵە نوێیەکە چەندە؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

43 **بازرگانی** سارا لە پەکێك لە کتێبخانە گەورەکان ئیشدەکا. لە مانگێکدا موچەی 725 000 دینار وەردەگرێت. بڕی 1 750 دینار بۆ زیاد دەکرێت. بۆ هەر کتێبێك کە بیفرۆشێت. سارا 1 425 000 دیناری لە مانگی پێشوودا وەرگرت ئایا چەند کتێبی فرۆشتووە؟ (پۆلەکانی پێشوو)

ئەنجامی ئەم لێکدانانە بدۆزەوە (پۆلەکانی پێشوو)

44 $\left(2-x^2\right)\left(2x^2+5x-3\right)$

45 $4xy^2\left(x^2y+3x^2-2y\right)$

شەشپاڵوێکی ژمارەکان هەڵدرا. ئەگەری هەر ڕووداوێك چەندە؟

46 دەستکەوتنی 1 یان ژمارەی جووت.

47 دەستکەوتنی 4 یان ژمارەی تاك.

48 دەستکەوتنی ژمارەیەك توانای دابەشبوونی بەسەر 2 یان 6 دا هەبێت.

لاپەڕەی تەکنۆلۆژیا

کۆکردنەوەی پێدراوەکان بە شێوەی تاقیکردنەوە

Collecting Experimental Data

دەتوانیت تاقیکردنەوەیەک بۆ وەبەرهێنانی پێدراوەکان و کۆکردنەوەیان و ڕێکخستنیان ئەنجامبدەیت، پاشان شیکردنەوەیان بۆ دارشتنی ڕستەی بیرکاری بۆ بکەیت.

چالاکی 1

خشتەیەک دروستبکە بۆ کۆکراوەکانی دوو ژمارە لە ئەنجامی هەڵدانی دوو بەردەزار.

بەردەزاری شین

بەردەزاری سوور

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

هەوڵبدە

1 هەر هاوجێبونێک لە خشتەکەدا تێبینی دەکەیت باسیبکە

2 ئەگەری تیوری بۆ بەدەستهێنانی دابەشبوونی ئەگەر بەکاربێنە

سەرجەم	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ئەگەرەکەی											

3 دابەشبوونی ئەگەری پێشوو بۆ دۆزینەوەی بەهای پێشبینیکراو بەکاربێنە.

4 کام سەرجەم گەورەترین ئەگەری هەیە. کام سەرجەم بچووکترین ئەگەری هەیە.

5 ئایا کۆمەڵەی جیاواز هەیە لە ئەگەرە کانیاندا یەکسانبن؟ ئەگەر هەبوو بینووسە.

1 دوو بەردەزاری 36 جار هەڵبدە. ئەنجامەکانیان لە خشتەیەکدا بنووسە.

2 لەو ئەنجامانەی بەدەست هێناون دابەشبونێکی ئەگەر درووستبکە.

3 دابەشبوونی ئەگەر کە لە پرسیاری 7 دا دەستتکەوتووە بۆ دۆزینەوەی بەهای پێشبینی کراو بەکاربێنە.

پشت ببەستە بەو تاقیکردنەوەیەی ئەنجامت داوە بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارانە

4 کام سەرجەم گەورەترین ئەگەری هەیە؟ و کام سەرجەم بچووکترین ئەگەری هەیە.

5 ئایا کۆمەڵە هەیە لە ئەگەردا یەکسان بن؟ ئەگەر هەبوو بینووسە.

6 ئەو ئەنجامەی دەستتکەوتووە لەگەڵ ئەنجامی تیۆریدا بەراوردی بکە.

7 ئەو ئەنجامەی دەستتکەوتوە لەگەڵ ئەنجامی هەریەک لە هاوڕێکانتدا بخەرە پاڵیەک، بەراورد لە نێوان ئەو ئەنجامانەدا بکە، کە دوای یەکخستن دەستتکەوتوون و لە نێوان ئەوەی لە ئەنجامی تاقیکردنەوەی خۆتدا دەستتکەوتون بەراورد لە نێوانیاندا و لە نێوان ئەو ئەنجامە تیوریانەدا بکە.

7–2 بەشینەوەکانی دووانی (کراوەی دووڕادەدار)

Binomial Distributions

بۆچی ئەمە فێردەبیت؟

دەتوانیت بەشکردنی دووڕادەدار بۆ دیاریکردنی بەختت لە بردنەوەی خەڵاتەکان. خستنەرووی بازرگانی بەکاربێنیت (نموونە 3).

ئامانجەکان

- سەلمێنراوی دوو ڕادەدار بۆ دەرخستنی سنووری دوو ڕادەدار و دۆزینەوەی ئەگەری دوای و تاقیکردنەوەی بەردۆزەکان بەکاردێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

سەلمێنراوی دووڕادەدار
Binomial theorem

تاقیکردنەوەی دووانی
Binomial experiment

ئەگەری دووانی
Binomial probability

لە پۆلی دەیەم فێری لێکدانی ڕادەدارەکان بویت لێرەدا فێری بارێکی تایبەتی دەبێت لە لێکدانی ڕادەدارەکان کە بریتییە لە کراوەی هێزی ڕادەدارە دووانییەکان.

نموونە 1 کراوەی هێزی دوو ڕادەدار

$(x+y)^3$ بکەوە.

$(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)$	لەسەر شێوەی لێکدان بنووسە
$=(x+y)\left(x^2+2xy+y^2\right)$	دوو هاوکۆلکەکەیان لە یەکبدە .
$=x\left(x^2\right)+x(2xy)+x\left(y^2\right)+y\left(x^2\right)+y(2xy)+y\left(y^2\right)$	بەشینەوە
$=x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3$	لێکدانیان بکە
$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	سادە بکە

خاڵی چاودێری

1. بکەوە

أ $(x+4)^4$ ب $(2x-1)^3$

هاوکۆلکەکانی کراوەی $(x+y)^3$ بیشکنە بریتییە لەو ژمارانەی کە لە سەر ڕیزەکەن لە پلە 3 ـیە لە سێگۆشەی پاسکال

	کراوەی هێزی دوو ڕادەدار	سێگۆشەی پاسکال
$(a+b)^0=$	1	1
$(a+b)^1=$	$a+b$	1 1
$(a+b)^2=$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3=$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4=$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5=$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1

ژمارەی ناو هەر ڕیزێك لە ڕیزەکانی سێگۆشەی پاسکاڵ هاوکۆلکەی کراوەی هێزی ڕادەداری دووانی پێکدێنێت. بە توانێك کە یەکسانە بە پلەی ڕیزەکە (تێبینی بکە پلەی ڕیزەکان پاسکاڵ بەسفر دەستپێدەکات نەك بە 1. دەتوانین شێوەی ڕیزەکانی پاسکاڵ تەواو بکەین بۆ بەدەستهێنانی هاوکۆلکەکانی کراوەی هێزی ڕادەداری دووانی. بەهەر توانێك بێت $(a+b)^n$ کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی سالب نەبێت.

کراوەی هێزی ڕادەداری دووانی

لەکاتی کردنەوەی $(a+b)^n$ ئەمانەت لەبیربێت.

1. ژمارەی ڕادەکان لە کراوەی $(a+b)^n$ دا بریتییە لە $n+1$ ڕادە.
2. هاوکۆلکەکانی کراوەی $(a+b)^n$ بریتییە لە ژمارەکانی سێگۆشەی باسکاڵ لەڕیزی n .
3. لەڕادەی یەکەمداتوانی هێزی a (n) ە پاشان یەك کەم دەکات کە دەچینە سەر ڕادەیەکی تر.
4. توانی هێزی b سفرە لە ڕادەی یەکەمدا، پاشان یەك زیاد دەکات کە دەچینە سەر ڕادەیەکی تر.
5. کۆی توانی هێزی a و هێزی b لە هەر ڕادەیەکدا یەکسانە بە n .

لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار — کراوەی هێزی ڕادەداری دووانی

1	4	6	4	1
x^4	x^3	x^2	x	
	y	y^2	y^3	y^4

هێڵکارییەك بۆ کراوەی هێزی سنووررداری دووانی بەکاردێنم هەروەها $(x+y)^4$ وەك نموونە بەکاردێنم لە ڕیزی یەکەمی خشتەکەدا ژمارەکانی ڕیزی 4 لە سێگۆشەی باسکاڵ دەنووسم لە ڕیزی دووەم هێزی x ی تواناکان سەربەرەوژێر ڕیزدەکەین بە دەستپێکردن لە لای چەپەوە لە ڕیزی سێیەم هێزی y تواناکان سەربەرەوژێر ڕیزدەکەین لە لای ڕاستەوە دەستپێکە. لە کۆتایی دا ڕادەکانی هەر ستونێك لێکدابکە بۆ و بەدەستهێنانی.

$$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

نموونــــە 2 بەکارهێنانی سێگۆشەی باسکاڵ بۆ کراوەی هێزی ڕادەداری دووانی

ئەم هێزی ڕادەداری دوانییانە بکەوە.

أ $(y-3)^4$

ژمارەی ڕیزی 4 سێگۆشەی باسکاڵ بنووسە   1 4 6 4 1

$$\left[1(y)^4(-3)^0\right]+\left[4(y)^3(-3)^1\right]+\left[6(y)^2(-3)^2\right]+\left[4(y)^1(-3)^3\right]+\left[1(y)^0(-3)^4\right]$$

$$y^4-12y^3+54y^2-108y+81$$

ب $(4z+5)^3$

ژمارەی ڕیزی 3 سێگۆشەی باسکاڵ بنووسە   1 3 3 1

$$\left[1(4z)^3(5)^0\right]+\left[3(4z)^2(5)^1\right]+\left[3(4z)^1(5)^2\right]+\left[1(4z)^0(5)^3\right]$$

$$64z^3+240z^2+300z+125$$

خاڵی چاودێری

2. کراوەی ڕادەداری دووانی ئەمانە بدۆزەوە

أ $(x+2)^3$ ب $(x-4)^5$ ج $(3x+1)^4$

لە لایەکی تر پەیوەندی هەیە لە نێوان سێگۆشەی باسکاڵ ژمارەی گونجێنەکان.

سێگۆشەی باسکاڵ	گونجێنەکان	کراوەی هێزی ڕادەداری دووانی	
1	${}_0C_0$	1	$(a+b)^0=$
1 1	${}_0C_0$ ${}_1C_1$	$a+b$	$(a+b)^1=$
1 2 1	${}_2C_0$ ${}_2C_1$ ${}_2C_2$	$a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^2=$
1 3 3 1	${}_3C_0$ ${}_3C_1$ ${}_3C_2$ ${}_3C_3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$(a+b)^3=$

دەتوانێت سوود لە شێوازی خشتەی سەرەوە وەربگری بۆ کراوەی هێزی ڕادەداری بەبەکارهێنانی سەلمێنراوی دوو ڕادەداری.

فێربە

سەلمێنراوی دوو ڕادەداری

n هەر ژمارەیەکی تەواوی نا سالیب بێت، ئەوا

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^ny^0 + {}_nC_1x^{n-1}y^1 + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots + {}_nC_{n-1}x^1y^{n-1} + {}_nC_nx^0y^n$$

نموونـــــە 3 کراوەی دوو ڕادەدار

سەلمێنراوی دوو ڕادەداری بۆکردنەوەی ئەم هێزە ڕادەدارە دووانیانە بەکاربێنە

أ $(x+y)^4$

ژمارەی ڕیزی 4 سێگۆشەی پاسکاڵ بنووسە 1 4 6 4 1

$$(x+y)^4 = {}_4C_0x^4y^0 + {}_4C_1x^3y^1 + {}_4C_2x^2y^2 + {}_4C_3x^1y^3 + {}_4C_4x^0y^4$$
$$= 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4$$
$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

ب $(3p+q)^3$

ژمارەی ڕیزی 3 سێگۆشەی پاسکاڵ بنووسە 1 3 3 1

$$(3p+q)^3 = {}_3C_0(3p)^3q^0 + {}_3C_1(3p)^2q^1 + {}_3C_2(3p)^1q^2 + {}_3C_3(3p)^0q^3$$
$$= 1\times 27p^3\times 1 + 3\times 9p^2q + 3\times pq^2 + 1\times 1q^3$$
$$= 27p^3 + 27p^2q + 9pq^2 + q^3$$

ڕۆشنایی

لەکاتی کردنەوەی $(x+y)^n$ دا توانی x لە n ەوە بۆ 0 کەمدەکات توانای y لە 0 ەوە بۆ n زیادەکات، هەروەها کۆی هەردوو توانەکان لەهەر ڕاندەیەکدا دەکاتە n.

خاڵی چاودێری

3. سەلمێنراوی کراوەی دوو ڕادەدار بۆ کردنەوەی ئەمانە بەکاربێنە.

أ $(x-y)^5$ ب $(a+2b)^3$

تاقیکردنەوەی دووانی تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکییە کرداری هەڕەمەکی تێیدا دووبارە دەبێتەوە دوو ئەنجامی لەتوانادا هەیە دەرچوون یان کەوتن. ئەگەری دەرچوون p بێت لە هەر جارێکدا و ئەگەری کەوتن q بێت لە هەر جارێکدا لەبەرئەوەی کرداری هەڕەمەکی دوو ئەنجامی گونجاوی هەیە بۆیە $p+q=1$ یان $q=1-p$ ئەمەی خوارەوە نموونەیە لەسەر تاقیکردنەوەی دووانی.

تاقیکردنەوە	دەرچوون	کەوتن	ئەگەری دەرچوون	ئەگەری کەوتن
هەڵدانی پارچە پارەیەکی کانزایی 10 جار	شێر	خەت	$p=0.5$	$q=0.5$
هەڵدانی بەربەزارێك سەد جار	دەستکەوتنی ژمارە 3	دەستکەوتنی جگە لە 3	$p=\frac{1}{6}$	$q=\frac{5}{6}$

وادابنێ ئەگەری کەسێك چەپەوانەبێت (بەدەستی چەپ بنووسێت) بریتییە لە 0.1 و تۆش ئارەزوو دەکەین دوو کەس بدۆزیتەوە لەنێوان سێ کەسدا چەپەوانەبن. لێرەدا ${}_3C_2$ ڕێگا هەیە بۆ پێکهێنانی کۆمەڵەیەك لە سێ کەسدا دووکەسیان وابن. هێمای پیتی L بەکاربێنە بۆ کەسێك چەپەوانە و پیتی R بۆ کەسێك چەپەوانە نەبێت. ڕێگای هەڵبژاردنی دوو چەپەوانە LLR ، LRL ، RLL ئەگەری هەریەك لەم ئەنجامانە لە توانادابێت بریتییە لە $0.1\times 0.1\times 0.9$ ئەمەش بەرە و ئەم یاسایەمان دەبات.

فێربە

ئەگەری دووانی

ئەگەر تاقیکردنەوەیەکی دووانی n جار سەربەخۆ دووبارە کرایەوە، کاتێک p ئەگەری دەرچوون و q ئەگەری کەوتن بێت لە n جاردا. ئەوا ئەگەری دەرچوون r جار لە نێوان n جار بریتییە

$$P(r)={}_nC_r\,p^r q^{n-r}$$

بەم ئەگەرە دەووترێت **ئەگەری دووانی**.

نموونە 4 دۆزینەوەی ئەگەرە دووانییەکان

لەهەر 5 کەشتی کەشتییەک لە ڕێڕەوی دەریایی تێپەڕدەبێت ڕاستەوخۆ دەچێتە ناو دەریاوە بێ ئەوەی لە بەندەرەکەوە بڕوات 4 کەشتی بەڕێڕەوی دەریاییدا دەڕۆن.

أ ئەگەری ڕاستەوخۆ چوونە ناو دەریای تەنها دوو کەشتی چەندە؟

ئەگەری ڕاستەوخۆ چوونە ناودەریا بۆ کەشتیەکە بریتییە لە $\frac{1}{5}=0.2$.

$P(r)={}_nC_rp^rq^{n-r}$ $n=4$ چونکە تاقیکردنەوەکە 4 جار دووبارە دەبێتەوە (4 کەشتی)

$P(2)={}_4C_2p^2q^{4-2}$ ژمارەی دەرچوان $r=2$ (تەنها دوو کەشتی دەچێنە ناو دەریا)

$=6(0.04)(0.64)=0.1536$

ئەگەری ڕاستەوخۆی چوونە ناودەریا بۆ هەردوو کەشتییەکە لە 15.36% .

ب ئەگەری بەلایەنی کەمەوە دوو کەشتی ڕاستەوخۆ بچنە ناو دەریا چەندە؟

بەلایەنی کەمەوە دوو کەشتی ڕاستەوخۆ بچنە ناو دەریا (واتە دوو یان سێ یان چوار کەشتی بچنە ناو دەریاوە)

$$P(2)+P(3)+P(4)$$

$${}_4C_2(0.2)^2(0.8)^{4-2}+{}_4C_3(0.2)^3(0.8)^{4-3}+{}_4C_4(0.2)^4(0.8)^{4-4}$$

$$0.1536+0.0256+0.0016=0.1808$$

ئەگەری بەلایەنی کەمەوە دوو کەشتی ڕاستەوخۆ بچنە ناو دەریا و بریتییە لە 18.08%

خاڵی چاودێری

4. **أ** بەڕێوەبەری خوێندنگایەک بۆ هەر خوێندکارێک مامۆستایەک لە نێوان سێ مامۆستا بەهەڕەمەکی دەستنیشان دەکات بۆ ئەوەی ببێتە سەرچاوەی ئەو خوێندکارە لە خوێندندا، ئەگەری ئەوەی مامۆستا نومێد ببێتە سەرچاوەی ئەو دوو خوێندکارە لەو سێ خوێندکارەی کە تازە هاتوون چەندە؟

ب شیرین دەچێت بۆ ئەنجامدانی تاقیکردنەوەیەک کە هەڵبژاردنی جۆراوجۆری تێدایە و لە 5 پرسیار پێکهاتووە، بۆ وەڵامی هەر پرسیارێک چوار هەڵبژاردن هەیە، ئەگەری وەڵام دانەوەی بەشێوەیەکی ڕاست بەلایەنی کەمەوە بۆ دوو پرسیار چەندە؟

نموونە 5 جیبەجێکردن لەسەر شیکاری پرسیارەکان

کۆمپانیایەکی ساردەمەنی پیشانگایەکی لەو شوشەواتەی بەرهەمی هێناوە بۆ کڕیارەکانی کردەوە وێنەیەکی لەسەر سەرقابی هەندێکیان چاپکردوە، بۆ ئەو کەسەی بەخت یاوەریەتی کۆمپانیاکە بیریکردوە بۆ هەر چوار لە شوشەواتەکان لەسەر یەکێکیان وێنەیەکی چاپکردوە. شێروان دەبارچە شوشەواتی کڕی. ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە دوو خەڵاتی بۆ دەربچێت چەندە؟

1 لە پرسیارەکە تێبگە

داواکراو ئەگەری ئەوەی شێروان بەلایەنی کەمەوە دوو خەڵات بباتەوە.

زانیارییەگرنگەکان دیاریبکە

- شێروان 10 شووشەی کڕیوە.
- ئەگەری دووانی لە بردنەوەی شووشەی خەڵات بریتییە لە $\frac{1}{4} = 0.25$

2 پلاندانان

ڕێگای ڕاستەوخۆ بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە بریتییە لە هەژمارکردن $P(2) + P(3) + ... + P(10)$ کەچی هەژمارکردنی ئەگەری ڕووداوی تەواوکەر وادەردەکەوێت ئاسانترە، چونکە داوای هەژماری $P(0) + P(1)$ دەکات لەبەرئەوەی ڕووداوی تەواوکەر بۆ بردنەوەی بەلایەنی کەمەوە دوو خەڵات بریتییە لە بردنەوەی یەک خەڵات یان هیچ نایباتەوە. ئەگەری ڕووداوی تەواوکەر بدۆزەوە و لە 1 ی دەربکە.

3 شیکار بکە

هەنگاوی 1 بدۆزەوە

$$P(0) + P(1)$$

$$P(0) + P(1) = {}_{10}C_0 (0.25)^0 (0.75)^{10-0} + {}_{10}C_1 (0.25)^1 (0.75)^{10-1}$$

$$= 1(1)(0.75)^{10} + 10(0.25)(0.75)^9$$

$$\approx 0.0563 + 0.1877$$

هەنگاوی 2 ڕووداوی تەواوکەر بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی وەڵام.

$$1 - 0.2440 = 0.7560$$

ئەگەری ئەوەی شێروان بەلایەنی کەمەوە دوو خەڵات بباتەوە بریتییە لە 0.76 بە نزیکراوەیی.

4 ساغبکەوە

وەڵامی گونجاو بەهای پێشبینی کراو بۆ بردنەوە بریتییە لە $\frac{1}{4} \times 10$ لە 10 واتە $2.5 = \frac{10}{4}$ نزیکە لە 2 کەواتە، ئەگەری ئەوەی شێروان بەلایەنی کەمەوە دووخەڵاتەکە بباتەوە لە 0.5 زیاتر دەبێت.

خاڵی چاودێری

5. أ بێستون تاقیکردنەوەیەک ئەنجام دەدات کە هەڵبژاردنی جۆراو جۆری تێدایە و لە 20 پرسیار پێکهاتووە بۆ هەر یەکێکیان چوار وەڵامی کراوە هەیە. ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە دوو پرسیار بەڕاستی وەڵام بداتەوە چەندە؟

ب ئامێرێک جۆرێک لەپارچەی بەدەکی ئۆتۆمبیل بەرهەمدێنێت. ئەگەری پارچەکە باش بێت بریتییە لە 98% . ئامێرەکە 25 پارچەی دروستکرد ئەگەری ژمارەی پارچە باشەکان زیاتر نەبێت لە 23 پارچە چەندە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. پلەی کراوەی ڕادەداری $(2x+8)^7$ چەندە؟ ژمارەی ڕادەکانی چەندە؟
2. لە تاقیکردنەوەی دوانیدا $p+q$ یەکسانە بە چەند؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.
3. ئەو سێ بڕانە چەندن کە لێکدانی یەکتر دەکرێن بۆ دۆزینەوەی ئەگەری دەرچوونی r جار لە تاقیکردنەوەی دوانی n جار دووبارە بێتەوە؟
4. ڕێکخەر بە ئەم خشتەیە دروستبکە. شیکاری هەر پرسیارێك بکە کە دەینووسیت.

تاقیکردنەوە دوانییەکان	
ئەگەر	نموونە
ئەگەری دەرچوونی r لە تاقیکردنەوەیەکدا n جار دووبارە بێتەوە	
ئەگەری بەلایەنی کەمەوە دەرچوونی r لە تاقیکردنەوەیەکدا n جار دووبارە بێتەوە	
ئەگەری بەلایەنی زۆرەوە دەرچوونی r لە تاقیکردنەوەیەکدا n جار دووبارە بێتەوە	
ئەگەری بەکارهێنانی ڕووداوی تەواوکەر	

7–2 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ناڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ژمارەی ئەنجامە لە تواناداپووەکانی تاقیکردنەوەیەکی دوانی بریتییە لە ____؟

بڕوانە نموونە 1
هەر یەك لەمانە بە لێکدان بکەوە.

2 $(x+2)^3$　**3** $(x+y)^4$　**4** $(x+1)^4$　**5** $(x-3y)^3$

بڕوانە نموونە 2
هەر بڕەیەك لەمانە بەبەکارهێنانی سێگۆشەی باسکاڵ بکەوە.

6 $(x-2)^4$　**7** $(2x+y)^4$　**8** $(x+2y)^3$　**9** $(2x-y)^5$

بڕوانە نموونە 3
سەلمێنراوی ڕادەداری دوانی بۆ کردنەوەی ئەم بڕانە بەکاربێنە.

10 $(x+3)^4$　**11** $(3x+5)^3$　**12** $(p-2)^6$　**13** $(x+y)^6$

بڕوانە نموونە 4

14 بەڕێوەبەری خوێندنگایەك ویستی 6 خوێندکار بۆ هاوبەشی کردنی لە گرتنی وێنەیەکی یادگاری بۆ خوێندکاراتی خوێندنگاکە هەڵبژێریت. ئەگەری ئەوەی لەنێوان 6 خوێندکار، 4 یان وەرزشەوان بێ چەندە؟ ئەگەر بزانیت ئەگەری خوێندکارێك وەرزشەوان بێت لە 30% ؟ ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە 4 لە خوێندکاران وەرزشوان بن چەندە؟

بڕوانە نموونە 5

15 **بازارکردن** بەشی شیرینی سوپەرمارکێتێك پاکەتی شوکولاتەکان پێشاندەدات لە هەر 5 تابلۆ تابلۆیەکیان پسولەیەکی شاراوەی تێدایە، ئەو کڕیارەی بۆی دەردەچێت تابلۆیەك بە خۆرایی وەردەگرێت ڤیان 4 تابلۆی شکولاتەی کڕی ئەگەری ئەوەی 3 بلیت بباتەوە چەندە؟ ئەگەر ئەوەی بەلایەنی کەمەوە 2 بلیت بباتەوە چەندە؟

نموونە 5

16 **پیشەسازی** کارگەیەک بەرهەمەکانی لە قووتوی کارتۆن دادەنێت، لە سەر ڕووی سەرەوەی هەر قووتویەک پولێکی تایبەتی چاپدەکات. ئەگەری بوونی پولەکە لەسەر هەردوو ڕووی سەرەوە و خوارەوە بریتییە لە%2 بارهەڵگرێک 30 قوتوی کارتۆنی بارکرد ئەگەری ئەوەی دوو کارتۆن پولی کارگەکەی لەسەر هەردوو ڕوی سەرەوە و خوارەوەی بێت چەندە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیار

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکاری سەیری ڕاهێنانەکان نموونە بکە	
20-17	1
24-21	2
28-25	3
29	4
30	5

هەر برێک لەمانە بە لێکدان بکەوە.

17 $(2x-2)^3$ **18** $\left(x+\frac{1}{3}\right)^4$ **19** $(x-y)^4$ **20** $(4+y)^3$

هەر برێک لەمانە بەبەکارهێنانی سێگۆشەی باسکاڵ بکەوە.

21 $(x-3y)^4$ **22** $(x-2)^5$ **23** $(x+y)^5$ **24** $(2x-3y)^4$

هەر برێک لەمانە بەبەکارهێنانی سەلمێنراوی ڕادەداری دووانی بکەوە

25 $(y+5)^4$ **26** $(2m-1)^3$ **27** $(4+3x)^5$ **28** $(2a+3c)^3$

29 **مافی شارستانی** ڕاپرسییەک سەبارەت بە مافی ڕادەربڕین لە نێوان 100 000 هاوڵاتیدا کرا. %83ی ڕاپرسیکەران لەگەڵ ئەو مافەدابوون 8 لەو ڕاپرسیکەرانە بەهەرەمەکی هەڵبژێران. ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە 6 لەوانە لەگەڵ ئەو مافە دابن چەندە؟

30 5 گۆ لە تورەگەیەک یەک بەدوانی یەک ڕاکێشرا دوای گێڕانەوەی گۆیەکە لە هەموو جارێکدا. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە ڕەش بێت %15 یە ئەگەری ئەوەی دوو گۆ لە 5 گۆی ڕاکێشراو ڕەش بن چەندە؟ئەگەری ئەوەی دوو گۆ بەلایەنیکەم لە نێوان 5 گۆ ڕاکێشراوەکە ڕەش بن چەندە؟

31 **جینەکان** ژنێکی دوو گیان چاوەڕوانی دەکرد 3 منداڵی بەیەکەوە ببێت ئەگەری ئەوەی یەکێکیان کوڕ و دوانیان کچ بێت چەندە؟ ئەگەری ئەوەی هەرسێ منداڵەکە کچ بن چەندە؟

32 **ڕووەکزانی** ئەگەری ئەوەی ئەمامێک لە جۆرێکی دیاریکراو و گوڵ بگرێت %25 ە ئەگەری ئەوەی 4 ئەمام لە نێوان 15 ئەمامی لەم جۆرە گوڵ بگرێت. کە بەهەرەمەکی هەڵبژێراون چەندە؟

هەر برەیەک لەمانە بەبەکارهێنانی سەلمێنراوی ڕادەداری دووانی بکەوە.

33 $(x-y)^5$ **34** $(c+6)^3$ **35** $(4k-1)^4$ **36** $(p+q)^7$

37 **گەشت** کۆمپانیاکانی فڕۆکەوانی شوێنی زیاتر بۆ خەڵک دەگرن کە لە کورسییەکانی ناو فڕۆکەکە زیاترن. هەندێک لەگەشتیاران شوێن گرتنەکەیان هەڵدەوەشیننەوە لە دواساتدا. وای دابنێ ئەگەر ئەوەی هیچ گەشتیارێک شوێن گرتنەکەی هەڵنەوەشێنێتەوە بریتییە لە 0.91 کۆمپانیاکە 22 شوێنی گرت لەسەر فڕۆکەیەک کە 20 کورسی تێدایە ئەگەری ئەوەی هەر گەشتیارێک ئامادەبێت کورسییەکی دەستبکەوێت چەندە؟

38 **جینەکان** مێیەی ژیشکێک 4 بێچوی بوو ئەگەری ئەوەی هەر چواریان نێرین چەندە؟ ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە سیانیان نێرین چەندە؟

پارچە پارەیەک 10 جاو هەڵدرا، هەریەک لەمانە بدۆزەوە.

39 زیاتر لە 7 خەت بێت. **40** بەلایەنی کەمەوە دووانیان خەت بێت **41** تەنها 5 خەتی تێدابێت

42 **چاودێری جۆری** یەکێک لە کارگەکان پارچەی یەدەگی ئۆتۆمبێل دروستدەکات ئەگەری باشی پارچەکە95% ئەگەری پارچە خراپەکانی ناو سندوقێک کە 8 پارچەی تێدایە لەیەک پارچە زیاتر نەبێت چەندە؟

43 **بژمێری ڕوونکردنەوەیی** بژمێری ڕوونکردنەوەیی ئەخشەی randBin تێدایە بۆ لێدوانی تاقیکردنەوەی دووانی و هەژمارکردنی ژمارەی بارە سەرکەوتووەکان بۆ لێکچوونی تاقیکردنەوەی دووانی لە $n=6$ کاریگی هەرمەکیە ئەگەری سەرکەوتن $p=0.3$ و ژمارەی سەرکەوتوان $r=5$ MATH دابگرە PRB هەڵبژێرە پاشان، randBin(و ژمارەکە تۆماربکە پاشان 0.3 پاشان 5 بۆشای لە نێوان ژمارەکان دابنێ "،".

أ تاقیکردنەوەی هەرمەکی دووانی چەندبارەبکەوە لە $n=5$ و کارەکانی هەرمەکی بێت ئەگەری سەرکەوتن $p=0.8$ و ژمارەی سەرکەوتنەکان $r=5$.

ب یاسا بۆ دۆزینەوەی ئەگەری سەرکەوتن بەکاربێنە.

ج بەراورد لە نێوان هەردوو ئەنجامەکە بکە

44 **هەنگاوی جۆرا و جۆر** $p=0.8$ و $n=10$ بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەگەری دووانی بۆ ژمارەی سەرکەوتوان لە 0 تا 10 وەڵامەکان بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە ستوونی ڕوونکردنەوەییەکان دروستبکە بۆ نیشاندانی ئەو ئەنجامانەی بەدەستتهێناوە. باسی شێوەی وێنەی ڕوونکردنەوەییەکە بکە پەیوەندی لە نێوان وێنەی ڕوونکردنەوەیی و بەهای پێشبینیکراو کامەیە؟

45 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** کامیان ئەگەری زیاترە: خێزانێک لە 4 منداڵ دووانیان کوڕ و دووانیان کچ یان خێزانێک لە 4 منداڵ سیانیان ڕەگەزێکە و چوارەمیان ڕەگەزێکیتربێت؟

46 ژمارەی ڕۆژە پێشبینیکراوەکانی باران بارین لە یەکێک لە ناوچەکان 82 ڕۆژە لە ساڵێکدا بە پشتبەستن بە پێدراوە مێژووییەکان. وادابنێ بارینی باران لە ڕۆژە جیاوازەکاندا ڕووداوی سەربەخۆن

أ ئەگەری ئەوەی کە ڕۆژێک هەڵبژێرن بەهەرمەکی ڕۆژی باران بارین بێت چەندە؟

ب ئەگەری هەڵبژاردنی 3 ڕۆژ لە هەفتەیەکدا باران بباریت چەندە؟

ج ئەگەری هەڵبژاردنی هەرمەکی بەلایەنی کەمەوە 3 ڕۆژ لەهەفتەیەکدا باران بباریت چەندە؟

47 تورەکەیەک 10 گۆی تیایە نیوەی سوور و نیوەکەی تری شینە ئومێد 3 گۆی یەک لە دوای یەکی ڕاکێشا بەبێ گەڕانەوە و هەر جارێک ڕەنگی گۆیە ڕاکێشراوەکەی تۆمارکرد ئەو هۆیە ڕوونبکەوە کەوا لەم تاقیککردنەوە هەرمەکییە دەکات دووانی نەبێت؟

48 **گەشت** یەکێک لە کۆمپانیاکانی فرۆکەوانی توێژینەوەیەکی ئەنجامدا، دەریخست45% گەشتیاران لە کاتی سەرکەوتنیان بۆ ناو فرۆکە زیاتر لە جانتایەک هەڵدەگرن. لە یەکێک لە گەشتەکاندا میوانداری فرۆکەکە پێشوازی لە یەکەم 5 گەشتیارکرد ئەگەری ژمارەی ئەوانەی زیاتر لە جانتایەک هەڵدەگرن لە 3 کەمتر نەبێت چەندە؟

49 **بنووسە** بارێکی گونجاو تێیدا ڕووداوی تەواوکەر بۆ هەژمارکردنی ئەگەری دووانی بەکارهاتبێت باسبکە.

خەملاندن وێنەی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 50 و 51 وێنەکە ئەگەرەکانی r سەرکەوتن لە تاقیکردنەوەی دووانی کە کرداری هەرەمەکی 10 جار دووبارەبێتەوە دەنوێنێت.

50 ئەگەری ژمارەی سەرکەوتنەکان زیاتر نەبێت لە 2 بخەملێنە

51 بەهای ئەگەری دەرچوونی p بخەملێنە. ڕوونیبکەوە چۆن وەڵامەکەت دۆزییەوە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

52 کام لەمانەی خوارەوە لە تاقیکردنەوەی دووانیدا هەڵەیە.

(أ) ئەنجامی لە تواناندا بوو دووانن، سەرکەوتن یان سەرنەکەوتن
(ب) ئەگەری دەرچوون نەگۆڕە.
(ج) کردارە هەرەمەکییەکان پێکەوە بەستراون
(د) کردارە هەرەمەکییەکان هەمان کردارن.

53 تاقیکردنەوەیەکی دوانی لە دووجار دووبارەبوونەوەدا لە کردارێکی هەرەمەکی پێکدێت، ئەگەری دەرچوون 40% ئەگەری یەکجار دەرچوون چەندە؟

(أ) 16% (ب) 36% (ج) 48% (د) 52%

54 تاقیکردنەوەیەکی دووانی لە 5 جار دوبارەبوونەوەدا کردارێکی هەرەمەکی پێکدێت، ئەگەری دەرچوون 20% کام لەمانە هەژماری ئەگەری 3 جار دەرچوون دەدات؟

(أ) $3(0.2)^3(0.8)^2$ (ب) $10(0.2)^3(0.8)^2$ (ج) $3(0.2)^2(0.8)^3$ (د) $10(0.2)^2(0.8)^3$

55 **تەنها وەڵام** یەکێك لە کارگەکان پارچەی بژمێرە ئەلیکترۆنییەکان دروستدەکات. ئەگەری پارچە پەککەوتوەکان لە 4%. 10 پارچە بەشێوەی هەرەمەکی هەڵبژێرا. ئەگەری ئەوەی کە لە نێوانیاندا لەیەك پارچەی پەککەوتو زیاتر نەبێت چەندە؟ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین ڕێژەی سەدی تەواو نزیکبەوە.

56 **کورتە وەڵام** 18.8% دانیشتوانی وڵاتێك هەڵگری یەکێك لەو 100 ناوەی کە باون بە شێوەیەکی هەرەمەکی 10 کەس هەڵبژێرە ئەگەری 3 کەس لەوانە کە ناوێکیان هەبێت لەو ناوانە چەندە ؟

بەرەنگاری و فراوانکردن

57 **جینەکان** ئەگەری ئەوەی یەکێك چەپەوانەبێت 0.1 هۆڵێك 650 کەسی تێدایە

[أ] ژمارەی پێشبینیکراوی کە سەچەپەوانەکانی ناو هۆڵەکە چەندە؟ ئەمە ڕوونبکەرەوە.

[ب] لادانی پێوانەیی بۆ تاقیکردنەوەیەکی دووانی پێکهاتوە لە دووبارەبونەوەی کردارێکی هەرەمەکی n بە بەکارهێنانی $\sigma = \sqrt{npq}$ هەژماربکە. بەهای لادانی پێوانەیی بدۆزەرەوە؟

58 هەریەك لەم دوو ئەگەرە بدۆزەوە و دیاریبکە کامیان گەورەترە.

[أ] دەستکەوتنی ژمارە 1 بەلایەنی کەمەوە یەکجار لە هەڵدانی بەردە زارێك 6 جار.

[ب] دەستکەوتنی ژمارە 1 بەلایەنی کەمەوە دووجار لە هەڵدانی بەردە زارێك 12 جار.

59 دیاریکە کام ژمارەی ${}_{n+1}C_{r+1}$ لە سێگۆشەی پاسکاڵ دا یەکسانە بە سەرجەمی ئەو دوو ژمارەیەی بە ${}_{n}C_{r}$ و ${}_{n}C_{r+1}$ دەورەدراون، کاتێک $r \neq 0$ و $r \neq n$ و $n > 1$.

60 **بۆڵینگ** ئەگەری پێکانی یاریزانێکی بۆڵینگ لە دوو جار هەڵدانداا یەکجار 40% بێت

أ | هاوکێشەی هەژمارکردنی p بنووسە و پاشان شیکاریکە

ج | ئەگەر پێکانی یاریزانەکە لە هەردوو هەڵدانەکەدا چەندە؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

هەژمارەی هەریەک لەمانە بکە $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$ (بڕگەکانی پێشوو)

61 $f(x) = -x^2 + 2x - 4$

62 $f(x) = (-x)^2 - 3x + 1$

ئەگەر y ئەخشەیەکی توانی بێت بە پێی x دیاریبکە. ئەگەر وەها بوو بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەخشەیەکی توانی کە پێدراوەکانی ئەم خشتەیە بنوێنێت.

63

x	1	2	3	4	5
y	1.4	2.6	3.8	5.0	6.2

64

x	1	2	3	4	5
y	10	22	36	52	70

ناوەندە ژمێری و ناوەڕاستە و باو بۆ هەر کۆمەڵەیەک لە پێدراوەکان بدۆزەوە (وانەی 2 – 6)

65 $\{2, 18, 15, 14, 18\}$

66 $\{6, 13, 9, 7, 6, 4\}$

67 $\{24, 20, 32, 24, 16, 34\}$

68 $\{10, 5, 15, 5, 8\}$

بەشی 2
ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

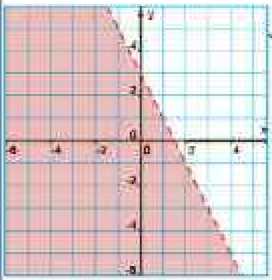
ئەم لاسەنگانەی خوارەوە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاریکە

1 $y > -3$

2 $y \leq x + 3$

3 $2x + 4y > -12$

4 $6x - 2y > 8$



5 لاسەنگەیەك بە دوونەزانراو بنووسە بەمەرجێك وێنەی بەرامبەر ببێتە شیکاری ڕوونکردنەوەیی لاسەنگەکە

6 بەڕێوەبەرایەتی یەکێك لە مۆزەخانەکان دوو جۆر بلیتی چوونە ژوورەوە دەفرۆشێت. بلیتێکیان بۆ یەك ڕۆژ نرخەکەی 12 000 دینارە و بلیتەکەی تر بۆ دوو ڕۆژە ونرخەکەی 21 000 دینارە. لە یەك ڕۆژدا بابی زیاتر لە 2 520 000 دینار بلیتی چوونە ژوورەوە فرۆشرا لاسەنگەکە بنووسەوە بە ڕوون کردنەوەیی شیکاری بکە.

7 ئەو خاڵە ڕوونکردنەوەییانە دابنێ کە پێدراوەکانی خشتەکە دەنوێنێت هاوکۆڵکەی پەیوەستی و هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە.

x	2	5	9	13	16
y	8	10	24	16	29

8 ئەم خشتەی خوارەوە پێدراوی داهاتی ساڵانەی هەندێك کەسە، و بەهای ئەو خانووەیکە هەیانە.

داهاتی ساڵانە (بەملیۆن دینار)	بەهای خانووەکەی (بەملیۆن دینار)
96.5	130.2
46.3	94.5
56.7	115.5
65.2	106.4
54.7	98.6
59.6	115.5

(أ) ئەم پێدراوانە بە شێوەی ڕوونکردنەوە بنوێنە، داهات وەك گۆڕاوێکی ئازاد بەکاربێنە.

(ب) هاوکۆلکەی پەیوەستی r و ڕاستەهێڵی باشترین نواندن بدۆزەوە

9 فرۆشراوی دوو لقی یەکێك لە کۆگا گەورەکان گەیشتە 12 ملیار دینار، هاوبەشی یەکێك لە لقەکان بەلایەنی کەمەوە 75% کۆی فرۆشراوەکان بوو سیستمی لاسەنگەی هێڵی بنووسە و بە شێوەی ڕوونکردنەوەیی شیکاریبکە بۆ دیاریکردنی فرۆشراوی لە توانادابووی هەر لقێك.

سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی شیکاریکە

10 $\begin{cases} y + 1 > 4x \\ y \leq x + 1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} y - 3x < 3 \\ 3y \geq x + 3 \end{cases}$

سیستمی لاسەنگە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی شیکاریکە. ناوچەی شیکارەکە چی دەنوێنێت دیارییکە.

12 $\begin{cases} y \leq -x + 2 \\ x > -1 \\ y > -1 \end{cases}$

13 $\begin{cases} y \geq 2x \\ y < 4 \\ y > 2 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

14 **کارگێڕی کار** خاوەن دوکانێکی قاوە فرۆش ئارەزوو دەکات تێکەڵێکی لە دوو جۆر قاوە ئامادە بکات کە لە 120 کیلۆ گرام زیاتر نەبێت. نرخی هەر کیلۆ گرامی 10000 دینار کەمترە. بۆ ئەو مەبەستە جۆرێکیان نرخی یەك کیلۆ گرامی 8000 دینار و جۆرەکەی تر نرخەکەی 11500 دینار بوو. سیستمی لاسەنگەکان بنووسە. کە ئەو بڕانەی بەکار هاتووە لە دوو جۆرەکە دەربخات. پاشان سیستمەکە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاریکە.

15 یەکێك لە دوکانەکان بابۆڵەی گەرم و سارد پێشکەش دەکات. ئەم خشتەیە پێدراوەکانی بابۆڵەکان دەنوێنێت کە دوکانەکە فرۆشتویەتی ژمارەی ئەو بابۆڵانەی دوکانەکە دەیفرۆشێت لە 125 تێپەرناکات لە هەردوو جۆرەکە. دوکانەکە 750 دینار قازانج دەکات لە بابۆڵەیەکی سارد و 1000 دینار لە بابۆڵەی گەرم. چەند بابۆڵە لە هەر جۆرێك پێویستە دوکانەکە بیفرۆشێت بۆ بە دەستهێنانی ئەو پەری قازانجی لە توانادابوو؟

بابۆڵە فرۆشراوەکان	نزمترین ڕادە	بەرزترین ڕادە
سارد	60	80
گەرم	40	60

بە شێوەی ڕوونکردنەوەیی ناوچەی گونجاو دیارییکە

16 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x + 1 \\ y \leq -\frac{3}{4}x + 6 \end{cases}$

17 $\begin{cases} y < 3 \\ y \geq 0 \\ y < 2x + 1 \\ y \leq -x + 4 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ y>\frac{1}{2}x-6 \end{cases}$

19 $\begin{cases} y\le 2 \\ y\ge -1 \\ y\ge -1 \\ y\le -x+3 \end{cases}$

20 ئەو پەڕی بەهای ئەخشەی بە سوودی $p=6x+10y$ چەندە؟ مەرجەکانی ڕاهێنانی 16 ساغدەکاتەوە.

21 ئەو پەڕی بەهای ئەخشەی بە سوودی $p=14x+9y$ چەندە؟ مەرجەکانی ڕاهێنانی 17 ساغدەکاتەوە.

یەکێك لەکارگەکان دوو جۆرە پێڵاو دروست دەکات لە جۆری ئەستوور کە دروستکردنی 6 خولەکی دەوێت و بڕی 8000 دینار قازانج دەکات و جۆری تەنك دروستکردنی 4 خولەکی دەوێت و 9000 دینار قازانج دەکات. تۆڕی بەرهەمهێنان لە توانایدا هەیە 12 کاتژمێر ئیش بکات یان 750 خولەك بەپێی پێداویستییەکانی بازار کارگەکە پێڵاوی ئەستوور بەلایەنی کەمەوە دوو ئەوەندەی پێڵاوی تەنك دروست دەکات

22 ئەو بەرنامە هێڵییە بنووسە کە ئەم پرسیارە دەنوێنێت و بەڕوونکردنەوەیی ناوچەی گونجاو دیاریبکە.

23 ئەخشەی بەسوود بنووسە.

24 زۆرترین قازانج لە توانادایێت کە کارگەکە لە ڕۆژێکدا دەستی بکەوێت چەندە؟

25 **فرۆشراوەکان** دوکانی مۆبایل لە نێوان 10 تا 52 مۆبایل لەگەڵ بەڵێنی چاککردنەوە دەفرۆشێت و لەنێوان 5 تا 10 مۆبایل بەبێ بەڵێن دەفرۆشێت کۆی فرۆشراوەکان لە 30 مۆبایل تێپەرناکات لە ڕۆژێکدا دوکانەکە 35000 دینار بۆ هەر مۆبایلێك لەگەڵ بەڵێندا قازانج دەکات و بڕی 5000 دینار قازانج دەکات بۆ هەر مۆبایلێك بەبێ بەڵێن بیفرۆشێت. پێویستە دوکانەکە چەند مۆبایل لە هەرجۆرێك بفرۆشێت بۆیە دەستهێنانی ئەو پەڕی قازانجی لە توانادابێ؟

ڕێگەی لابردن بۆ شیکارکردنی هەریەك لەم سیستمانە بەکاربێنە؟

26 $\begin{cases} x+3y+2z=13 \\ 2x+2y-z=2 \\ x-2y-3z=-12 \end{cases}$

27 $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=-1 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

بۆلێنی ئەم سیستمانە بکە و ژمارەی شیکارەکانی دیاریبکە

28 $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -x+2y-5z=4 \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases}$

29 $\begin{cases} -x-y+2z=-3 \\ 4x+4y-8z=12 \\ 2x+y-3z=-2 \end{cases}$

ناوەندی ژمێرەی و ناوەڕاستە و باو بۆ هەریەکە لەم پێدراوانە بدۆزەوە.

30 6 ، 8 ، 0 ، 8 ، 5

31 12 ، 15 ، 13 ، 13 ، 15 ، 12

32 ئەم ئەخشەیە دابەشبوونی ئەگەر بۆ ژمارەی ڕوداوەکانی ڕۆژانەی شارێکی بچووك بەنوێنێت. ژمارەی ڕووداوی چاوەڕوانکراو لە ڕۆژێکدا بدۆزەوە

ژمارەی ڕوداوەکانی n	0	1	2	3
ئەگەری n ڕووداو	0.65	0.22	0.1	0.03

33 ڕوونکردنەوەی سمێڵی دروستبکە بۆ ئەم کۆمەڵە پێدراوانە پاشان مەودای چواریەکی دیاریبکە.
71، 50، 29، 83، 48، 65، 52، 33

34 ژمارەی ئەو پێشبڕکێیانەی یەکێك لە شۆفێری ئۆتۆمبێلەکانی وەرزش تێیدا براوەیە لە هەر ساڵێك لە ساڵەکانی 10 ساڵی ڕابردوو بریتییە لە 5، 7، 4، 11، 8، 10، 8، 6، 9، 7 ...؟ ژمارەی ئەو پێشبڕکێیانەی کە دوورییەکەی لە ناوەندە ژمێرەکەی لە لادانی پێوانەکەی لەیەك زیاتر نابێت بدۆزەوە.

35 خوێندکارانی پۆلی کۆتایی تاقیکردنەوەی وەرگرتنیان لە زانکۆ ئەنجامدا. ناوەندی ژمێری نمرەکانیان 81.3 بوو و لادانی پێوانەیی 4.4 بوو، کاوە، 96 نمرەی لە 100 بەدەستهێناوە. ئایا نمرەکەی بەهای بەرگرە؟

36 ئەگەر نمرەکانی ئەشمیل لە 6 تاقیکردنەوەدا بەم شێوەیەبێت، 73، 88، 86، 90، 87، 29 ئەوا لادانی نێوانەیی و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە ئەگەر نمرەکەی لە تاقیکردنەوەی حەوتەم 32 بێت کاریگەری ئەم نمرەیە ڕوونبکەوە لە سەر هەردوو لادانی نێوانەیی و پێوانەیی.

سەلمێنراوی کراوەی دوو ڕادەدار بۆ کردنەوەی ئەوانە بەکاربێنە

37 $(5+2x)^3$

38 $(x-2y)^4$

39 سەردار گوڵکەری تیپی تۆپی پێیە ئەگەری پێکانی گوڵ لە لێدانی سەربەخۆ بریتییە لە 0.65 سەردار 57 لێدانی سەربەخۆی جێبەجێکرد ژمارەی پێشبینیکراو بۆ پێکانی گوڵ لە لێدانەکانیدا بدۆزەوە، لادانی پیوانەیی بدۆزەوە؟

بەشی 2

تاقیکردنەوەی بەش

1 پانەی دهۆك كراس و كڵاو كە دروشمی پانەكەی لەسەر نەخشكراوە دەفرۆشێت بۆ ئەوەی بەلایەنی كەمەوە 2 400 000 دینار كۆبكاتەوە. نرخی هەر كراسێك 15 000 دینار و نرخی كڵاوێك 8 000 دینارە لاسەنگەیەك بنووسە ژمارەی كڵاوەكان و كراسەكان كە پێویستە پانەكە بیفرۆشێت بنوێنێت، لاسەنگەكە بە ڕوونكردنەوەیی شیكاربكە.

2 تیپێك لە توێژەوەران هەستان بە توێژینەوەیەك لەسەر نەخۆشخانەكان، لە خشتەیەكدا پێدراوەكانی ژمارەی قەرەوێڵەكان و ژمارەی كارگوزارانی خەستەخانەكەیان تۆماركرد

ژمارەی قەرەوێڵەكان	ژمارەی كارمەندان
23	69
29	95
35	118
42	126
46	123
54	178
64	156
76	176

أ پێدراوەكانی خشتەكە بە ڕوونكردنەوەیی بنوێنە ژمارەی قەرەوێڵەكان بە گۆڕاوی ئازاد دابنێ.

ب هاوكۆلكەی پەیوەستی و هاوكێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی باشترین تواندن بدۆزەوە. وێنەی ڕاستەهێڵەكە و خاڵەكانی بەڕوونكردنەوەیی بكێشە

ج ژمارەی ئەو قەرەوێڵەكانی ئەو نەخۆشخانەیەی كە 80 كەس ئیشی تیادەكات بخەملێنە.

ئەم سیستمی لاسەنگانە بە ڕوونكردنەوەیی شیكاربكە

3 $\begin{cases} 2y-4x\geq 4 \\ y-x\geq 1 \end{cases}$

4 $\begin{cases} y+x\geq 3 \\ y-4\leq 0 \end{cases}$

5 **كیمیا** یەكێك لە كیمیازانان ئیش لەسەر ئاوێتەیەكی 250 ml . كە بەلایەنی زۆرە سوێرییەكەی 18% بە بەكارهێنانی دوو گیراوە سوێری یەكەم 9% و سوێری دووەم 24% . سیستمی لاسەنگەكان بنووسە شیكاری بكە بۆ دۆزینەوەی ئەو بڕەی كە پێویستە لە هەریەك لە دوو گیراوەكە بەكاربیهێنێت.

6 بچووكترین بەها بۆ ئەخشەی بەسوود $P=5x+9y$ بە پێی ئەم مەرجانە بدۆزەوە .

مەرجەكان $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ y\leq 2x+1 \\ y\leq -3x+6 \end{cases}$

پۆلینی سیستمی هێڵی بكەو بە ڕێگای لابردن سیستمی دیاریكراو شیكاربكە

7 $\begin{cases} x-y+z=-2 \\ 4x-y+2z=-3 \\ 2x-3y+2z=-7 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 3x-y-z=-1 \\ x+y+2z=8 \\ 6x-2y-2z=5 \end{cases}$

ئەم خشتەیەی خوارەوە ژمارەی مانگەكانی هەر هەسارەیەك لە سیستمی ڕۆژی پیشان دەدات.

هەسارەكە	ژمارەی مانگەكان
عەتارد	0
زوهرە	0
زەوی	1
مەریخ	2
موشتەری	63
زوحەل	33
ئۆرانۆس	27
نیپتۆن	13
پلۆتۆ	1

9 ئایا بەهای 63 بەهایەكی پەڕگرە؟ ئەو ڕوونبكەوە.

10 هەژماری ناوەندی ژمێری و ناوەڕاستە و باو و لادانی پێوانەیی ئەم كۆمەڵە پێدراوانە بكە:
بەهای پەڕگر لەو كۆمەڵەیە دیاریبكە. باسی بكە چۆن بەهای پەڕگر كاردەكاتە سەر ناوەندە ژمێرەیی و لادانی پێوانەیی. 90, 114, 99, 128, 111, 12,
95, 98, 103, 110, 107, 93

11 ڕادەداری دووانی $(3x+4)^4$ بكەوە.

ئەگەری بردنەوە لە یەكێك لە یارییەكاندا بریتییە لە ئاوێتەكردنی 15% هۆشیار 10 جار یاریكرد.

12 ئەگەری بردنەوەی دوو جار بدۆزەوە

13 ئەگەری بردنەوەی بەلایەنی كەمەوە دوو جار بدۆزەوە

بەشی
2

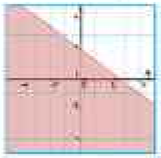
تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

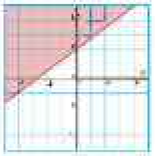
1 کام لەمانەی خوارەوە هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە دەنوێنێت کە بەخاڵی $(-2, 7)$ دا دەڕوات و لارییەکەی -3 ە؟

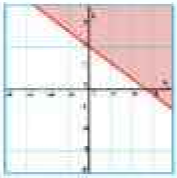
أ) $y=-3x-1$ ب) $y=-3x+1$

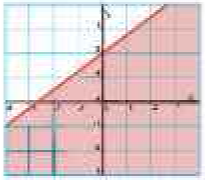
ج) $y=-3x+13$ د) $y=-\frac{1}{3}x+1$

2 کام لەمانەی خوارەوە ناوچەی شیکاری لاسەنگەی $y+\frac{3}{4}x\geq 2$ دەنوێنێت؟

أ) 

ب) 

ج) 

د) 

3 کام لەم کۆمەڵە ژمارانەی خوارەوە 3−دانەتییە تێیدا؟

أ) تەواوەکان ب) ڕاستییەکان

ج) ڕێژەییەکان د) سروشتییەکان

4 بڕی $4\sqrt{50}+3\sqrt{72}$ بەسادەترین شێوە بنووسە

أ) $4\sqrt{7}$ ب) $7\sqrt{112}$

ج) $12\sqrt{5}$ د) $38\sqrt{2}$

5 لاری ڕاستەهێڵی $-3y=6x+12$ چەندە؟

أ) -4 ب) -2 ج) $-\frac{1}{2}$ د) $-\frac{1}{4}$

6 ئەم خشتەیەی خوارەوە پێدراوی کرێی ڕۆژانەی کرێکارەکانی یەکێك لە کۆمپانیاکان بە پێی ساڵانی شارەزاییان ڕووندەکاتەوە. کام لەمانە بەهایەکی گونجاو بۆ لاری ڕاستەهێڵی زۆرترین تواندن؟

ژمارەی ساڵانی شارەزایی	کرێ بەدینار
0	33 407
2	34 273
5	37 882
8	40 185
10	42 977
12	45 864
15	53 811

أ) 450 ب) 750 ج) 1275 د) 2650

7 تێچوونی بەکرێ گرتنی ئۆتۆمبێلێك 39 950 دینارە، لەگەڵ زیادکردنی 400 دینار بۆ هەر کیلۆمەترێك کە ئۆتۆمبێلەکە کە دەیبڕێت.
کام لەمانەی خوارەوە باشترین پەیوەندی دەنوێنێت لە نێوان تێچوون C و ژمارەی کیلۆمەتری بڕاو k .

أ) $C=39\ 950+400$

ب) $C=39\ 950k+400$

ج) $C=39\ 950+400k$

د) $C=39\ 950k+400k$

8 خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕووتەختی $2x+y-5z=20$ لەگەڵ تەوەرەکانی بۆشایی پۆوتانەکاندا چەندە؟

أ) $x=0$ ، $y=0$ ، $z=0$

ب) $x=2$ ، $y=1$ ، $z=-5$

ج) $x=10$ ، $y=20$ ، $z=-4$

د) $x=10$ ، $y=20$ ، $z=4$

9 سەرەکانی ناوچەی گونجاو بریتییە لەخاڵی $(0,0)$ $(-2,6)$ $(3,-1)$ $(-1,1)$ $(-5,-5)$ گەورەترین بەهای تەخشەی بەسوود بۆ $P=4x-y$ لە ناوچەیەدا چەندە؟

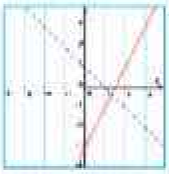
أ) 0 ب) 7 ج) 13 د) 25

10 ماڵی ڕۆڤەند 660 km دوورە لە زانکۆکەیەوە ئەگەر ڕۆڤەند ئۆتۆمبێلەکەی بە خێراییەکی نەگۆڕ 90 km / h لێبخورێت پێویستی بە 8 کاتژمێر هەیە بەنزیکی. کام لەم تەخشانەی خوارەوە ژمارەی ئەو کیلۆمەترانە دەنوێنێت کە بڕیویەتی لەدوایی x کاتژمێر لە دەرچوون لە ماڵەکەی.

أ) $f(x)=660-90x$ ب) $f(x)=660+90x$

ج) $f(x)=660-80x$ د) $f(x)=90x$

11 کام لەم سیستمی لاسەنگانە ئەم ناوچە شیکارەی هەیە؟



أ) $\begin{cases} y\leq 2x-3 \\ y\geq -x+1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} y\leq 2x-3 \\ y>-x+1 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} y<2x-3 \\ y>-x+1 \end{cases}$ د) $\begin{cases} y\geq 2x-3 \\ y<-x+1 \end{cases}$

12 کام لەم سیستمە هێڵییانەی خوارەوە سیستمێکی دیاریکراو

أ $\begin{cases} 2y+3x=-8 \\ 9x=-24-6y \end{cases}$

ب $\begin{cases} 2y+7x=24 \\ 5y-6=-4x \end{cases}$

ج $\begin{cases} y=-x+4 \\ 3y+3x=-21 \end{cases}$

د $\begin{cases} 2y=3x-6 \\ 8y-12x=80 \end{cases}$

کورتە وەڵام

13 لەکاتی هەژمارکردنی کۆ نمرەکانی پاڵێوراوێك لە تاقیکردنەوەکاندا کە لە کۆلێجێك وەریگیرێت نمرەی زانست لێکدانی 2 و نمرەی بیرکاری لێکدانی 3 نمرەی زێندەزانی لێکدانی 4 دەکرێت بەڵام ئەم نمرەی لە زمان وەریگرتووە لێکدانی هیچ هاوکۆڵکەیەك ناکرێت. نمرەکان شێرزاد 49 لە زمان و 32 لە زانست و 20 لە بیرکاری کۆی خاڵەکانی 411 بوو. ئایا نمرەکەی لە زیندەزانی چەندە؟

14 بچووکترین ژمارەی تەواوی موجەب کە شیکاری ئەم لاسەنگەیە دەکات بدۆزەوە. $816 < \frac{|430-3x|}{3}$

15 هەڵۆ 3 پارچە پیتزاو 8 شلێکی خوارد 975 گەرمۆکەی گەرمی وەرگرت کەچی بڵند 950 گەرمۆکەی گەرمی وەرگرت پاش خواردنی 4 پیتزا و 6 شلیك ئایا چەند گەرمۆکە گەرمی لە پارچە پیتزا کە هەیە؟

کورتە وەڵام

16 کۆمەڵەیەك لە سەردانکەرانی باخچەی ئاژەڵان 4 بلیتی چوونە ژووری گەورە و 5 بلیتی منداڵانیان کرێ بری 68 000 دیناریاندا، کۆمەڵێکی تر 216000 دیناریان بۆ نرخی 12 بلیتی گەورە و 17 بلیتی منداڵاندا

أ سیستمی هاوکێشەکان بنووسە کە ئەم پرسیارە بنوێنێت

ب ئەم سیستمە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

ج سیستمەکەبە ڕێگایەکی ترشیکار بکە هۆی ئەوە ڕوونبکەوە کە ئەو ڕێگای بەکارتهێناوە باشترە لە ڕێگای ڕوونکردنەوەیی نرخی بلیت لە هەر جۆرێك چەندە؟

17 خاڵی B وێنەی خاڵی $A(3,4)$ بە وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری یەکەم.

أ پۆتانی خاڵی B چەندە؟

ب خاڵی C وێنەی خاڵی B بە ڕاکێشانی 3 یەکە بۆ لای چەپ و دووریەکە بۆ خوارەوە پۆوتانی خاڵی C چەندە؟

18 نەخشەی $g(x)$ نەخشەیەکی پەیدا بوو لە گۆڕانی نەخشەی $f(x)=4x-3$ بە ڕاکیشانی بۆ خوارەوە بەبڕی 5 یەکە.

أ هاوکێشەی نەخشەی $g(x)$ بنووسە.

ب هاوکێشەی نەخشەی $h(x)$ بنووسە کە پەیدابووە لە ئەنجامی گۆڕانی $g(x)$ بە وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری یەکەم.

وەڵامی درێژ

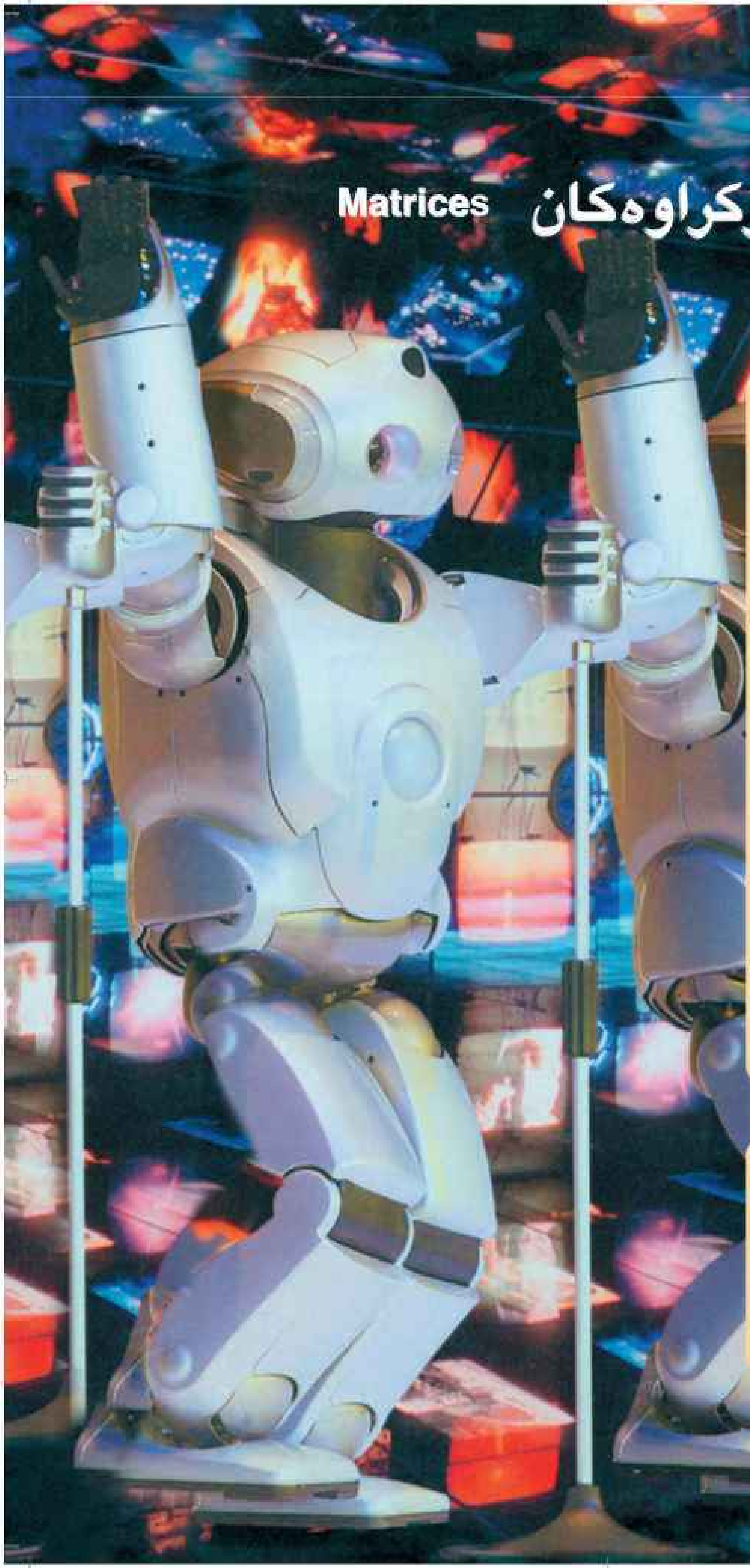
19 لە کارگەی پەردە 820 پاکەت دەزووی لۆکەو 1250 پاکەت دەزووی نایلۆن هەیە. بۆ دروستکردنی پەردەیەکی هەرزان 18 پاکەت دەزووی لۆکەی پێویستە. بەڵام درووستکردنی پەردەیەکی باش 32 پاکەت دەزووی نایلۆن پێویستە بەڵام بۆ دروستکردنی جۆرێکی باش 36 پاکەت دەزووی لۆکە و 28 پاکەت دەزووی نایلۆن پێویستە.

أ مەرجەکانی پرسیارەکە بنووسە.

ب وێنەی ناوچەی گونجاو بکێشە سەرەکانی دیاریبکە.

ج کارگەکە 170 000 دینار بۆ پەردەی هەرزان و 190 000 دینار بۆ پەردەی باش قازانج دەکا نەخشەی بە سوود بنووسە.

د چەند پەردە پێویستە کارگەکە لە هەر جۆرێك درووستی بکات تا ئەوپەڕی قازانجی دەستبکەوێت؟



بەشی

3

ڕیزکراوەکان Matrices

بەشی سێیەم

وانەکان

1-3 ڕیزکراوەکان

2-3 لێکدانی ڕیزکراوەکان

3-3 ڕیزکراوکان و جێگۆڕکێی ئەندازەیی

4-3 سنووردارەکان و ڕێسای گرامەر

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

5-3 هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە

لاپەڕەی تەکنۆلۆژیا شیکارکردنی سیستمی هێڵی بەبەکارهێنانی Excel

6-3 ژمارە ئاوێتەکان

7-3 کردارەکان لەسەر ژمارە ئاوێتەکان

جیهانی تەکنیکی

دەتوانیت ڕیزکراوەکان بەکاربێنیت بۆ خستنەڕووی پێدراوەکان و شیکردنەوەیان. وەك زیادبوونی ژمارەی ئەو هەرزەکارانەی ئامێری تەکنەلۆژیایان هەیە.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

ئەم وشانە ببەستەوە بە پێناسەکەیەوە کە لەلای چەپدا هاتووە.

1 نیوتیرەی بازنە
2 سستەمی ئەستەم
3 سیستمی کۆتایی نەهاتوو
4 جێگۆڕکێی ئەندازەیی

أ کردارێکە ئەنجامی ناگۆڕێت ئەگەر شوێنی کۆلکەکانیان بگۆڕێت وەك. $ab = ba$, $a+b = b+a$

ب دووری نێوان چەق و خاڵێکی سەر چێوەکەیەتی.

ج سستەمی ئەو هاوکێشانەیە کە شیکاریان نییە.

د گۆڕانە لەجێگای شێوە ئەندازەییەکە یان لەپێوانەکانی یان شێوەکەی

هـ سستەمی ئەو هاوکێشانەیە کە ژمارەیەکی ناکۆتا شیکاری هەیە.

کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ژمارە تەواوەکان

ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

5 $2+7+(-10)$ 6 $-8+14+(-3)$ 7 $-2+(-3)+(-5)$

8 $-9+15-7+1$ 9 $20-(-5)+(-3)-2$ 10 $9+8-7+5-(-3)+2$

لێکدان و دابەشکردنی ژمارە تەواوەکان

ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

11 $-18 \div 9$ 12 $-6(-1)$ 13 $16(-2)$ 14 $-15 \div (-3)$

ڕیزبەندی کردارەکان

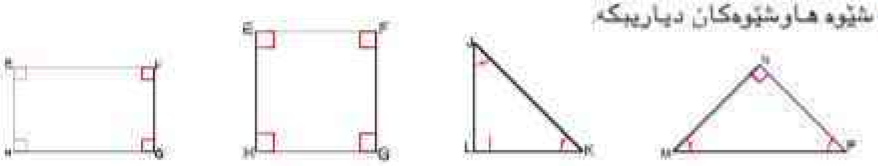
ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

15 $2(0.5)+2(0.6)$ 16 $0(6.7)+1(0.3)-5(2)-3(8)$

17 $3(2+7+0)-5(3+6+4)$ 18 $4(3-6+2)-5(2+0-1)$

جیاکردنەوەی شێوە هاوشێوەکان

19 شێوە هاوشێوەکان دیاریبکە.



دۆزینەوەی پێوانە، نەزانراوەکان لە شێوە هاوشێوەکاندا

20 هەردوو سێگۆشەی ABC و DEF هاوشێوەن $m\widehat{FDE}=35^\circ$ چ گۆشەیەکی تر پێوانەکەی 35°؟

21 هەردوو سێگۆشەی FGH و JKL هاوشێوەن $JL=12$ ، $GH=12$ ، $FH=8$ ، KL بدۆزەوە.

بەشی 3

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

خوێندوتە

- ڕێکخستنی پێدراوەکان لە خشتەدا.
- ئەنجامدانی کردارەکان لە ژمارە ڕاستیەکاندا.
- شیکارکردنی سیستەمی دووانی 2×2
- شیکارکردنی هاوکێشە دووجاکان.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- ڕێکخستنی پێدراوەکان بەڕیزکراو.
- کردارەکان لەسەر ڕیزکراوەکان ئەنجام بدەیت.
- سیستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان شیکاربکەیت.
- بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان جێگۆڕکێی ئەندازەییەکان ئەنجام بدەیت.
- جێبەجێکردنی کردارەکان لەسەر ژمارە ئاوێتە.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربهێنیت

- لە کاتی لێکۆڵینەوە لە بابەتەکانی تری وەک ئەندازە و ئامار و کارگێڕی.
- لەو بارییانەی ئاستی جیاواز و ئاڵۆزی تێدایە.
- لە دەرەوەی خوێندنگا بۆ ڕێکخستنی پێدراوەکان و چارەسەرکردنیان ڕێگای شیکردنەوەی ئەو گۆڕانانەی بەسەر ئەنجامەکانیاندا دێت.

زاراوەکان — *Vocabulary*

زاراوەکان	Vocabulary
ناونیشان	Adress
پلە (جۆر)	Dimensions
دانە	Entry
تەوەری سەرەکی	Main diagonal
ڕیزکراو	Matrix
ڕیزکراوەی چوارگۆشەی	Square matrix

دەروازەیەک لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێک لەم زاراوانەدا ڕابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیڕەوبکە:

1. **ناونیشان** ژمارەیەکە لە ڕیزکراوەدا. ئەو ستوون و ڕیزەت بۆ دیاریدەکات کە ژمارەکە دەکەوێتە یەکتربڕینیانەوە. ئەو دوو دانەیە کامانەن کە بەکاری دەهێنیت بۆ دیاری کردنی ناونیشانیماڵێک لە شارێکدا.
2. **پلە (جۆر)** ڕیزکراوە ژمارەی ڕیز و ستوونەکانت بۆ دیاریدەکات. چی لە هاوڕێکەت تێدەگەیت ئەگەر بڵێ باریگایەک 50 m بە 30 m ؟
3. **تیرەی سەرەکی** لە ڕیزکراوەیەکدا لە گۆشەی سەرەوەی لای چەپەوە دەست پێدەکات بۆ گۆشەی خوارەوەی لای ڕاست. ئایا ژمارەی لاپەڕەی ئەم کتێبە دەکەوێتە سەر تیرە سەرەکییەکەی؟
4. وەک دەزانیت درێژی و پانی چوارگۆشە یەکسانن. دەرئەنجامی چی دەکەیت لە ڕیزکراوەیەک پێی بووترێت **ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی**.

بەشی

3

بیرکاری به خوێندنەوە و نووسین

ستراتیژیەتی خوێندنەوە: خوێندنەوەی هێما بیرکارییەکان و تێگەیشتن لەوەی دەینوێنێت.

خوێندنەوەی هێما بیرکارییەکان و پەیبردن بە ماناکانیان شارەزاییەکە دەبێ هەتبێت، بۆئەوەی بابەتەکانی بیرکاری تێبگەیت. لەکاتی خوێندنی بیرکاری بە بەکارهێنانی ئەم کتێبە، بە دەنگێکی بەرز ئەو برانە بخوێنەوە کە هێما و نووسینی بیرکارییانەی تێدایە. ئەم جۆرە ڕاهێنانە توانای وەرگێڕانی هێمات بۆ وشە پێ دەبەخشێت.

هێمای باو	$=$ یەکسانە	$\sqrt{\ }$ ڕەگی دووجا	$\%$ لەسەدا	$\lvert x \rvert$ بەهایی ڕووتی x	∞ دوتەهاتوو
هێمای لاسەنگە	$<$ بچووکتر لە	$>$ گەورەتر لە	$\leq$ بچووکتر یان یەکسان	$\geq$ گەورەتر یان یەکسان	$\neq$ یەکسان نییە یان (جیاوازە لە)
هێمای نەخشە و کۆمەڵە	$f(x)$ f نەخشەی x دەخوێندرێتەوە ئیف ئۆف ئێکس.	$\{$ سیستەم	$\wedge$ و (یەکتربڕین)	$\vee$ یان (یەکگرتن)	$\{x\mid\}$ کۆمەڵەی x کاتێك

نووسین بە هێما	وەرگێڕانی بە ووشە
$f(x)=\sqrt{16x}-4$	نەخشەی ئیف ئۆف x یەکسانە بەڕەگی دووجای 16 جاران x کەم 4
$\frac{\lvert x-15\rvert}{6}\leq 12$	بەهای ڕووتی x کەم 15 دابەش 6 بچووکترە یان یەکسانە بە 12
$\{x/(x\leq -19)\vee(x>8)\}$	کۆمەڵەی ژمارەکانی x کاتێك x بچووکترە یان یەکسانە بە19- یان x گەورەترە لە 8
$\begin{cases} y\leq -4x+8 \\ y>x-6 \end{cases}$	سیستەمی دوو لاسەنگە کە پێکهاتووە لە «y بچووکترە یان یەکسانە بە سالب 4 جاران x کۆ 8» و «y گەورەترە لە x کەم 6»

هەوڵبدە

هەرنووسینێکی هێمادار بە وشە دەربڕە.

1 $\{x/(x\geq -7)\vee(x\leq -1)\}$

2 $f(y)=\lvert 15y\rvert+\frac{y}{2}$

3 $\begin{cases} y=2x+3 \\ y=x \end{cases}$

4 $[-5,\infty[$

ئەم ڕستەی دێت بە بەکارهێنانی هێما بیرکارییەکان دەربڕە.

5 کۆمەڵەی ژمارەکانی x کاتێك لەنێوان سالب 8 و 10 دا بێت.

1–3 ڕیزکراوەکان Matrices

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

ڕیزکراوەکان بەکاردەهێنرێت بۆ ڕێکخستنی پێدراوەکان وەك ڕێکخستنی کاڵاکانی دوکانێکی بازرگانی بەبەکارهێنانی ڕیزکراوەکان (نموونە 3)

ئامانجەکان

- ڕیزکراوەکان بەکاردەهێنێت بۆ نواندنی پێدراوەکانی بیرکاری و ژیانی ڕۆژانە.
- ڕیزکراوەکان کۆدەکاتەوە و لێکیان دەردەکات.
- ژمارەیەکی ڕاستی لە ڕیزکراوە دەدات.

ئەم خشتەیەی خوارەوە چالاکییەکی بازرگانی یەکێك لە دوکانەکانی فرۆشتنی شتومەکی ماڵان بە درێژایی مانگی نیسان پیشان دەدات. لە خشتەکەدا شتومەکەکانی دوکانەکە (دەرخست لە یەکی نیساندا) و فرۆشتنەکان (لە مانگی نیساندا) کاڵا گڕاوەکان (لە مانگی نیساندا) پیشان دەدات.

	شتومەکەکانی ناو دوکانەکە لە سەرەتای مانگی نیسان		فرۆشراوەکان لە مانگی نیساندا		کاڵا گڕاوەکان لەمانگی نیساندا	
	بچووك	گەورە	بچووك	گەورە	بچووك	گەورە
مێزی ناو باخ	8	10	7	9	15	20
مقەڵی	15	12	15	12	18	24

داتوانیت پێدراوەکانی شتومەکەکان بە بەکارهێنانی ڕیزکراوە بنوێنیت. گەورە بچووك

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$$

(ستوونەکان: بچووك، گەورە — ڕیزەکان: مێزی ناو باخ، مقەڵی) ← ڕیزکراوەی شتومەکەکان

ڕیزکراوە Matrix خشتەیەکی لاکێشەییە لە چەند خانەیەك پێکدێت بە دوو کەوانەی ئەستوون دەورە دراون هەرخانەیەك لە ژمارەیەك پێکدێت پێی دەوترێت **دانەیەك Entry** لە دانەکانی ڕیزکراوەکە، **جۆری Dimension** ڕیزکراوە ژمارەی ڕیز و ستوونەکانی دەنوێنیت. بەم شێوەیەش دەنووسرێت: **ژمارەی ڕیزکراوەکان × ژمارەی ستوونەکان** ئەگەر ڕیزکراوەیەك لە دوو ڕیز و سێ ستوون پێکهاتبێت ئەوا جۆرەکەی (3×2)یە. بە 2 بە 3 دەخوێندرێتەوە. جۆری ڕیزکراوەی شتومەکەکانی سەرەوە ٢ × ٢. هەموو دانەیەك لە دانەکانی ڕیزکراوە **ناونیشانێکی Adress** هەیە کە شوێنەکەی لە ڕیزکراوەکەدا پیشان دەدات. ناونیشانی دانە لە ژمارەی ئەو ڕیزەی لەسەر یەکێك بەدوایدا ژمارەی ئەو ستوونەی لەخۆی دەگرێت پێکدێت. دانەی 10 لە ڕیزکراوەکەی سەرەوەدا ئەو دانەیەیە کە لەسەر ڕیزی یەکەم و ستوونی دووەمە. ئەم دانەیە m_{12} هێمادەکرێت.

زاراوەکان Vocabulary

ڕیزکراوە Matrix

پلەی ڕیزکراوە (جۆرەکەی) Dimensions

دانەی ڕیزکراوە Entry

ناونیشان Adress

نموونە 1 بەکارهێنانی ڕیزکراوە بۆ خستنەڕووی پێدراوەکان

پێدراوەکانی فرۆشتنەکانی مانگی نیسان بەکاربهێنە.

أ ڕیزکراوەیەك بەکاربێنە بۆ خستنەڕووی ئەو پێدراوانە.

$$s = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$$

(ستوونەکان: بچووك، گەورە — ڕیزەکان: مێزی ناو باخ، مقەڵی) ← ڕیزکراوەی فرۆشتنەکان

ب جۆری ڕیزکراوەی S چەندە؟

ڕیزکراوەی S دوو ڕیز و دوو ستوونی هەیە. کەواتە جۆرەکەی ٢ × ٢.

ج دانەی s_{12} کامەیە؟

دانەی s_{12} دەکەوێتە سەر یەکتربڕینی ڕیزی یەکەم و ستوونی دووەم. کە 9 یە. ئەم دانەیە ئەوە دەنوێنێت کە دوکانەکە 9 مێزی گەورەی لە مانگی نیساندا فرۆشتووە.

د ناونیشانی دانەی 15 چییە؟

دانەی 15 دەکەوێتە شوێنی یەکتربڕینی ڕیزی دووەم لەگەڵ ستوونی یەکەم. دانەی m_{21}

خاڵی چاوەدێری

1. ڕیزکراوەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارانە.

$$M=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 0\\ 1 & 5 & 0 & 9\\ 12 & 11 & 4 & 12\end{bmatrix}$$

أ جۆری ڕیزکراوەی M چەندە؟

ب دانەی m_{32} کامەیە؟

ج لەدوو شوێندا سفر دەردەکەوێت. ناونیشانی هەردووکیان کامەیە؟

دوو ڕیزکراوە یەکسان دەبن ئەگەر لەهەمان پلە(جۆر) بن و دانە بەرامبەرەکانی هەردوو ڕیزکراوەکە یەکسان بن (واتە ئەو دانانەی لەهەردوو ڕیزکراوەکەدا هەمان ناونیشانیان هەبێت).

نموونــــە 2 یەکسانبوونی ڕیزکراوەکان

بەهای x و y دیاریبکە، کاتێک هەردوو ڕیزکراوەکە یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix}2x+4 & 5 & 1\\ -2 & -3y+5 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 5 & 1\\ -2 & 5y-3 & -4\end{bmatrix}$$

لەبەرئەوەی هەردوو ڕیزکراوەکە یەکسانن مانای $2x+4=12$ و $-3y+5=5y-3$.

$2x=8$ و $-8y=-8$

$x=4$ و $y=1$

خاڵی چاوەدێری

2. بەهای x و y دیاریبکە، کاتێک هەردوو ڕیزکراوەکە یەکسان بن

$$\begin{bmatrix}-3 & -2x & -3\\ -2 & 3y & -12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -15 & -3\\ -2 & -2y+15 & -12\end{bmatrix}$$

فێربە

کۆکردنەوە ولێدەرکردنی ڕیزکراوەکان

بەنووسین	بەژمارە	بەجەبری
بۆئەوەی دوو ڕیزکراوە کۆبکەیەوە یان لێکیاندەربکەیت دانە بەرامبەرەکان کۆبکەوە	$[1\ \ 2]+[5\ \ 10]=[6\ \ 12]$	$[a_{11}\ \ a_{12}]+[b_{11}\ \ b_{12}]=[a_{11}+b_{11}\ \ a_{12}+b_{12}]$

بۆ کۆکردنەوەی دوو ڕیزکراوە یان لێدەرکردنی یەکێکیان لەوی تر پێویستە هەردووکیان هەمان جۆربن.

دەتوانرێت کرداری کۆکردنەوە ئەنجام بدرێت لەبەرئەوەی هەردوو ڕیزکراوەکە لەهەمان جۆرن	ناتوانرێت کۆکردنەوە ئەنجام بدرێت لەبەرئەوەی ڕیزکراوەکان هەمان جۆرنین
$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 7 & 6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}5\\ 6\\ 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 8\\ 1\end{bmatrix}$	~~$[1\ \ 2]+\begin{bmatrix}5\\ 10\end{bmatrix}$~~ ~~$[a_{11}\ \ a_{12}]+[b_{11}\ \ b_{12}\ \ b_{13}]$~~

نموونــــە 3 کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ڕیزکراوەکان

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکان.

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\\ -5 & 14\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 3 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

کۆیانبکەوە و لەیەکیان دەربکە (ئەگەر توانرا)

أ $A+C$

هەموو دانەیەکی ڕیزکراوەی یەکەم لەگەڵ دانەی بەرامبەری لەڕیزکراوەی دووەمدا کۆبکەوە

$$A+C=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\\ -5 & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3 & -2+2\\ -3+0 & 10+(-9)\\ 2+(-5) & 6+14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ -3 & 1\\ -3 & 20\end{bmatrix}$$

ب $C-A$

$$C-A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\\ -5 & 14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-4 & 2-(-2)\\ 0-(-3) & (-9)-10\\ -5-2 & 14-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 3 & -19\\ -7 & 8\end{bmatrix}$$

ج $C+B$

لەبەرئەوەی جۆری ڕیزکراوەی C (2×3) و جیاوازە لەجۆری ڕیزکراوەی B (3×2) بۆیە کرداری کۆکردنەوەیان ناکرێت.

خاڵی چاودێری

3. کۆبکەوە یان لێدەربکە (ئەگەر توانرا)

أ $B+D$ **ب** $B-A$ **ج** $D-B$

دەزانیت لێکدان کۆکردنەوەیەکی دووبارەیە. ئەمە کاتێک ڕاستە کە ڕیزکراوەیەک لە ژمارەیەک بدرێت.
ئەگەر $M=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ دەتوانیت $M+M$ بە شێوەی $2M$ بنووسیت.

دەتوانیت ژمارەیەک لە ڕیزکراوەیەک بدەیت. ئەویش بە لێکدانی هەموو دانەیەک لە دانەکانی ڕیزکراوەکە لەو ژمارەیە

$$2\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times2 & 2\times0\\ 2\times1 & 2\times5\end{bmatrix}$$

نموونــــە 4 جێبەجێکردن لە بازرگانیدا

بە گەڕانەوە بۆ نموونەی چالاکی بازرگانییەکەی دوکانی فرۆشتنی کەلوپەلی ناوماڵ. ڕیزکراوەی $M-S+D$ هەژماربکە. کاتێک M ڕیزکراوەی شتوومەکەکانی ناو دوکانەکە و S ڕیزکراوەی فرۆشتنەکان و D ڕیزکراوەی فرۆشتنەکان بێت. ڕیزکراوەی ئەنجامەکە چی دەنوێنێت؟

$$M-S+D=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 15 & 12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 9\\ 15 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15 & 20\\ 18 & 24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-7+15 & 10-9+20\\ 15-15+18 & 12-12+24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 21\\ 18 & 24\end{bmatrix}$$

	بچووک	گەورە
مێزی ناو باخ	16	21
مقەڵی	18	24

ڕیزکراوەی ئەنجامەکە شتوومەکەکانی ناو دوکانەکە دەنوێنێت لە کۆتایی مانگی نیساندا. دوکانەکە 16 مێزی ناوباخی بچووک و 21 مێزی گەورە و 18 مقەڵی بچووک و 24 گەورەی تیادەمێنێتەوە.

خاڵی چاودێری

4. ڕیزکراوەی $A+2B-3C$ هەژماربکە کاتێک

$$C=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix} \text{ و } A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

نموونـــــە 5 نووسینی بڕە ڕیزکراوەییەکان بە سادەترین شێوە

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکان

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}-6 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

بە سادەترین شێوە ئەمانە بنووسە

أ $2A-3B$ ئەگەر لە تواناادا هەبوو

$$2A-3B=2\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

لەبەرئەوەی لێکدانی ڕیزکراوەیەك لە ژمارەیەکی نەگۆڕ جۆرەکەی ناگۆڕێت، کەواتە جۆری ڕیزکراوەی $2A$ و $3B$ یەکسان نابن. ئەمەش وادەکات کۆکردنەوەیان لە تواناادا نەبێت.

ب $C-2A$

$$C-2A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(-2)\times 4 & (-2)\times(-2)\\ (-2)\times(-3) & (-2)\times 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8 & 4\\ 6 & -20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 6\\ 6 & -29\end{bmatrix}$$

ڕۆشنایی

دووکەوانەی ڕیزکراوە هێمایە بۆ بەشبوون $2A-$ بەسەر هەموو دانەکانی ڕیزکراوەی A دا بەشیکە. پێش ئەوەی دەست بە کۆکردنەوە بکەیت وەك لە بڕە ژمارەییەکاندا دەکرێت

خاڵی چاودێری

5. ئەگەر لە توانادابوو ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $2B+3C$ ب $4A-3C$ ج $D+0.5D$

سیفەتەکانی کۆکردنەوەی ڕیزکراوەکان

بەنووسین	بەژمارە	بەجەبری
سیفەتەکانی ئاڵوگۆڕ کۆکردنەوەی ڕیزکراوە کرداری ئاڵوگۆڕە	$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 7\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$	$A+B=B+A$
سیفەتەکانی یەکتربەستن کۆکردنەوەی ڕیزکراوە کرداری یەکتربەستنە	$\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$	$A+B+C$ $=(A+B)+C$ $A+(B+C)$
ڕیزکراوەی بێلایەن لەکۆکردنەوە کۆمەڵەی سفر دانەی بێ لایەنی ڕیزکراوەکانە	$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$	$A+0=A$
دژە کۆی ڕیزکراوە دژەکۆی ڕیزکراوەی M بریتییە لەو ڕیزکراوەی کە پەیدادەبێت لە ئەنجامی گۆڕینی هەردانەیەك لە دانەکانی M بە دژەکۆیەکەی	$\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 9 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -5\\ -9 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	ئەگەر B دژەکۆی A بێت ئەوا $A+B=0$ کاتێك 0 ڕیزکراوەی سفرییە.

ڕۆشنایی

ڕیزکراوەی سفری ئەو ڕیزکراوەیە کە هەموو دانەکانی سفرن.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. هەموو جۆرەکانی ئەو ڕیزکراوە کە لە توانادایە ژمارەی دانەکانی 8 بێت بدۆزەوە.
2. باسی ئەو کردارە بکە لە ڕیزکراوەکاندا کە وادەکات نیشانەی هەموو دانەکانی پێچەوانە بێتەوە.
3. ڕێکخەر بە ئەم خشتەی خوارەوە بنووسەوە، پاشان تەواوبکە. لەهەر خانەیەکدا نموونەیەکی ژمارەیی و نموونەیەکی ڕیزکراوەیی بهێنەوە.

کردار	ژمارە	ڕیزکراوە
کۆکردنەوە		
لێدەرکردن		
لێکدان لە ژمارەیەک		

1-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ئەو بەهایەی کە دەکەوێتە سەر یەکتربڕینی ڕیزێك و ستوونێك لە ڕیزکراوەیەکدا (دانەیەك یان ناونیشانی دانەیەك) دەنوێنێت.

2 هۆشیار و شێرکۆ و دڵسۆز کاری فرۆشتنی بلیتی ئاهەنگی کۆتایی ساڵیان گرتە ئەستۆ ئەم خشتەی خوارەوە ئەو پێدراوانە دەنوێنێت کە پەیوەندییان بەفرۆشتنی بلیتەکانەوە هەیە.

بڕوانە نموونە 1

فرۆشتنەکانی بلیتەکانی ئاهەنگی کۆتایی ساڵی خوێندن			
خوێندنکار	بلیتی تاك	دەفتەرە بلیت	کۆی بارەی گشتی
هۆشیار	39	15	114 000 دینار
شێرکۆ	108	8	143 000 دینار
دڵسۆز	13	25	138 000 دینار

أ به ڕیزکراوەی A پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنە.

ب جۆری ڕیزکراوەی A چەندە؟

ج دانەی a_{13} کامەیە؟ چی دەنوێنێت؟

د ناونیشانی دانەی 000 143 چییە؟

3 بەهای x و y دیاریبکە، کاتێك هەردوو ڕیزکراوەکە یەکسانبن.

بڕوانە نموونە 2

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 14-x \\ -13-y & 0 \end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & x+8 \\ 2y-1 & 0 \end{bmatrix}$$

بڕوانە نموونە 3

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 4 تا 7. کۆیان بکەوە و لەیەکیان دەربکە (ئەگەر توانرا)

$$A=\begin{bmatrix}1.5 & 3.8 & 3\\ -1.2 & 2.4 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-1 & 1.1 & 6\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 2.3 & 1\end{bmatrix}$$

4 $A+B$ **5** $B-C$ **6** $B-A$ **7** $B+A$

بڕوانە نموونە 4

8 بەکاربردن خشتەی بەرامبەر نرخی سێ جۆر پۆشاکی وەرزشی دەنوێنێت پێش دانانی باج لەسەریان. ئەم نرخانە بە ڕیزکراوەی M بنوێنە. پاشان ڕیزکراوەی T بدۆزەوە کە بەهای باجی هەر جۆرێکیان بنوێنێت. ئەگەر بزانیت ڕێژەی سەدی باج 8.25%. ڕیزکراوەی A بنووسە کە نرخی هەرسێ جۆر پۆشاکەکە بنوێنێت دوای زیادکردنی باج لەسەری.

نرخی پۆشاکی وەرزشی			
	سادە	بە نارم	نایاب
کراسی لۆکە	9 000	13 000	14 000
شۆرتی کورت	6 000	9 500	11 000
شۆرتی درێژ	15 000	21 000	23 000

بڕوانە نموونە 5

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکانی 9 تا 12. ئەنجامەکە بەسادەترین شێوە بنووسە. (ئەگەر توانرا)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\ C=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 6\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

9 $3B$ **10** $\frac{1}{2}C$ **11** $A-2B$ **12** $2C-A$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
شیکاری پرسیارەکان	سەیری نموونەی
13	1
14	2
18-15	3
19	4
23-20	5

13 پێدراوەکانی خشتەکە بەکاربهێنە بۆ وەڵامی پرسیارەکان

هەڵبژاردنەکانی گەشت			
ئمرە	بلیت	ئۆتێل	ئۆتۆمبیل
سەرەتا	425 500	396 000	65 990
نیش	385 980	245 500	45 900
ئابوورییانە	275 120	103 250	29 500

أ پێدراوەکانی خشتەکە بە ڕیزکراوەی A بنوێنە

ب جۆری ڕیزکراوەی A چەندە؟

ج دانەی a_{32} کامەیە؟ چی دەنوێنێت؟

د ناونیشانی دانەی 385 980 چییە؟

14 بەهای x و y دیاریبکە بۆ ئەوەی دوو ڕیزکراوەکە یەکسانبن

$[2x \quad y+1 \quad -2y]$ و $[3-2y \quad 14-x]$

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ شیکاری پرسیارەکانی 15 تا 18. کۆیانبکەوە و لەیەکیان دەربکە (ئەگەر توانرا)

$$D=\begin{bmatrix}5.1 & 2.5\\ -2 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}3.2 & -1\\ -1.5 & 2.4\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}-4.2 & -1\\ 2.2 & 0\end{bmatrix}$$

15 $F-E$ **16** $D+E$ **17** $D+F$ **18** $E+F$

19 **خوێندنی زانکۆ** ئەم خشتەی خوارەوە تێچوونی ساڵانەی خوێندنی زانکۆدا دەردەخات.

بەهای نزیکەیی تێچوونی ساڵانەی خوێندنی زانکۆ			
	زانکۆی تایبەت	زانکۆی نەتەوەیی فەرمی	زانکۆی فەرمی بێگانە
تێچوون بەدینار	27 677 000	12 841 000	19 188 000

شارەزایان وا پێشبینی دەکەن کە ساڵانە بڕی تێچوون بە ڕێژەی 5% زیادبکات. بە بەکارهێنانی لێکدانی ژمارەیەك لە ڕیزکراوە بەهای نزیکەیی تێچوونی خوێندن لەهەرسێ جۆر زانکۆیەکە بدۆزەوە.

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ شیکارڕدنی پرسیارەکانی 19 تا 22. ئەنجامەکە بە سادەترین شێوە بنووسە (ئەگەر توانرا)

$$G=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ J=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -2\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\\ 5 & 0\end{bmatrix}$$

20 $2G$ **21** $\frac{1}{2}(H+J)$ **22** $2K-G$ **23** $H-0.3G$

24 وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر ئەو ئەنجامانە دەنوێنێت کە کلارا بە بەکارهێنانی بژمێر دەستیکەوتوە. پاش ئەوەی خەرجی مانگی شوبات وئازاری تێداتۆمارکرد. ڕیزکراوەی $F(3\times1)$ بەکاربێنە بۆ نواندنی خەرجییەکانی لە مانگی شوباتداو ڕیزکراوەی M بۆ نواندنی خەرجییەکانی لە مانگی ئازاردا. ڕیزکراوەکان کۆبکەوە بۆ دەستکەوتنی خەرجی گشتی لەهەردوو مانگەکەدا.

25 **ئەندازە** ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}2 & 2.5\\ 3 & 3.5\end{bmatrix}$ نیوەتیرەکانی چوار بازنە دەنوێنێت.

أ ڕیزکراوەیەك بنووسە چێوەی بازنەکان بنوێنێت.

ب ئایا دەتوانین ڕیزکراوەیەك بەدەست بێنین ڕووبەری بازنەکان بنوێنێت بە بەکارهێنانی کۆکردنەوەی ڕیزکراوەکان و لێکدانیان لە ژمارەیەك؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

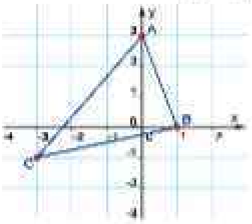
بیری ڕەخنەگر **ڕوونبکەوە ئەم دەستەواژانە هەمیشە دروستن یان هەندێك جار دروستن یان هەمیشە نادروستن.**

26 دەتوانرێت دوو ڕیزکراوە کۆبکرێنەوە کە هەمان دانەیان هەبێت.

27 دەتوانرێت دوو ڕیزکراوە کۆبکرێنەوە کە ژمارەی دانەکانیان جیاوازبن.

28 دەتوانرێت دوو ڕیزکراوە کۆبکرێنەوە کەهەریەکەیان لە 3 ڕیز و 4 ستوون پێکهاتبن.

29 ئەگەر توانرا دووڕیزکراوە کۆبکرێنەوە ئەوا دەتوانرێت لەیەکیش دەربکرێت



30 أ ڕیزکراوەیەك بنووسە خاڵی سەرەکانی سێگۆشەکە بنوێنێت. بەجۆرێك پۆی خاڵەکان ڕیزی یەکەم و تانەکانیان لەسەر ڕیزی دووەم بێت.

ب کردارێك لەسەر ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆ زیادکردنی 3 بۆ پۆی خاڵەکان و 1 بۆ تانی خاڵەکان.

ج وێنەی ئەو سێگۆشەیە بکێشە ڕیزکراوە تازەکە بنوێنێت. چۆن ئەم سێگۆشەیەت دەستدەکەوێت بە بەکارهێنانی سێگۆشە بنەڕەتییەکە؟

31 بەهای x و y و z دیاربیکە بۆئەوەی ڕیزکراوەکان یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix}3 & x\\ -2 & -8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11 & -4\\ y & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -10\\ 9 & z\end{bmatrix}$$

32 هەڵە لە شیکردنەوەدا هەڵەکە ڕوونبکەوە:
$$\begin{bmatrix}2 & 8\\ 4 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 11 & 0\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

33 بنووسە ئایا لێدەرکردنی ڕیزکراوەکان کردارێکی ئاڵوگۆڕە؟ بە نموونەیەک پاڵپشتی وەڵامەکەت بکە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

34 $B=\begin{bmatrix}1 & 0.1 & 2\\ 1.5 & 2.1 & 0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}2 & 0.4 & 6\\ 6 & 6.4 & 0\end{bmatrix}$. کام بڕە یەکسانە بە ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

(أ) $2C-\frac{1}{2}B$ (ب) $C-2B$ (ج) $B-2C$ (د) $2B-\frac{1}{2}C$

35 کام دەستەواژە لەمانەی خوارەوە هەمیشە دروستە لە ڕیزکراوەی E کە لە پلەی $m\times n$ ؟

(أ) ژمارەی دانەکانی $m\times n$
(ب) دانەی e_{nm} هەیە
(ج) ژمارەی دانەکانی $m+n$
(د) m ستوون و n ڕیزی هەیە

36 بەهای x چەندە بۆئەوەی پاسادانی $8\begin{bmatrix}12 & 8\\ 2 & 7\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}48 & 32\\ 8 & 28\end{bmatrix}$ بکات؟

(أ) 0.25 (ب) 0.5 (ج) 2 (د) 4

37 کورتە وەڵام بەهای x بدۆزەوە کە پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکا $[2\ \ -2]-2[5\ \ -x]=[-8\ \ -1]$

بەرەنگاری و فراوانکردن

38 بیری ڕەخنەگر چی دەربارەی ئەو ڕیزکراوانە دەڵێی کەژمارەی دانەکانیان ژمارەی خۆیەتی؟ ڕونبکەوە.

39 چی وادەکات هەردوو ڕیزکراوەی $A-B$ و $A+(-B)$ یەکسان بن، کاتێک A و B هەمان جۆربن؟

40 لە چوارگۆشە سیحرایی‌یەکاندا، وەک دوو چوارگۆشەی بەرامبەر، هەمیشە هەمان ژمارەمان دەستدەکەوێت ئەگەر ئەو ژمارانەی لەسەر هەمان ڕیز یان ستوونن کۆیان بکەینەوە. ئایا سەرجەمی هەردوو ڕیزکراوەی چوارگۆشەی سیحراوی چوارگۆشەیەکی سیحراویە؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

41 ڕیزکراوەی B بدۆزەوە بۆئەوەی ئەم یەکسانیە دروست بێت $3\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & -4\end{bmatrix}-2B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 2\end{bmatrix}$

پێداچوونەوەی لوولپێچی

بڕەیکی جەبری بنووسە کە هەر باریک بنوێنێت. (پۆلەکانی پێشوو)

42 چێوەی سێگۆشەیەک درێژی لایەکانی سێ ژمارەی جووتی یەک بەدوای یەک بن.

43 ژمارەی ئەو بلیتانەی کە فرۆشراون بە 20 کەس، ئەگەر بزانیت n بلیتی کڕیوە.

44 پارە شیلان 36 پارچە پارەی پێیە کە لە دوو جەشنی 1 000 و 500 دینارین. بەهای ئەو بڕە پارەیە چەندە؟ ئەگەر بزانیت ژمارەی جەشنی 500 دیناریەکان دوو ئەوەندی ژمارەی جەشنی هەزار دیناریەکانە؟ (پۆلەکانی پێشوو)

ڕوونبکەوە کە ئایا خاڵی بڕاو شیکاری سستەمی هەردوو هاوکێشەکەن. (پۆلەکانی پێشوو)

45 $(2,-2)$ ؛ $\begin{cases}x-y=4\\ 5x+6y=2\end{cases}$

46 $(4.5,2)$ ؛ $\begin{cases}y=2\\ 2x-4y=1\end{cases}$

2–3 لێکدانی ڕیزکراوەکان

Multiplying Matrices

ئامانجەکان

• سیفەتەکانی ڕیزکراوەکان لە کرداری لێکدانیدا دەناسێتەوە بە لێکدانی ڕیزکراوەیەک لە یەکێکی تر.

زاراوەکان
Vocabulary

ئەنجامی لێکدانی دوڕیزکراو
Matrix product

ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی
Square matrix

تیرەی سەرەکی
Main diagonal

ڕیزکراوەی یەکە
Unit matrix

ڕۆشنایی

ئەمەی خوارەوەت لەبیربێت بۆئەوەی ئەنجامی لێکدانی دوو ڕیزکراوە پێناسەکراو بێت پێویستە ژمارەی ستونەکانی ڕیزکراوەی لای چەپ یەکسان بێت بە ژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی لای ڕاست.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

خاوەن دامەزراوەکان ڕیزکراوە بۆ دۆزینەوەی دەستکەوت و تێچوون و قازانج بەکاردەهێنن (نموونەی 3)

لە وانەی پێشوودا لێکدانی ژمارەیەک لە ڕیزکراوەیەک فێربوویت. دەشتوانیت دوو ڕیزکراوە لە یەکتری بدەیت. لێکدانی دوو ڕیزکراوە، ڕیزکراوەیەکی تری لێپەیدادەبێت پێی دەوترێت **ئەنجامی لێکدانی دوو ڕیزکراوە Matrix product** . بۆ لێکدانی دوو ڕیزکراوە ئەم دوو ڕێسایە جێبەجێدەکەیت.

- کاتێک دەتوانیت ڕیزکراوەی A لە ڕیزکراوەی B بدەیت (واتە هەژماری $A\times B$ یان AB) بکەیت ئەگەر ژمارەی ستوونەکانی A یەکسان بێت بە ژمارەی ڕیزەکانی B .
- ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەیەک جۆرەکەی $m\times n$ بێت لە ڕیزکراوەیەک جۆرەکەی $n\times p$ بێت، ڕیزکراوەیەکە جۆرەکەی $m\times p$.

$$A=\begin{bmatrix}3&5&7\\4&1&2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&3&3&8\\9&5&2&0\\0&1&6&7\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}A & B & AB\\ 2\times 3 & 3\times 4 & \rightarrow 2\times 4\end{matrix}$$

ژمارەی ڕیزەکان = ژمارەی ستوونەکان

$$C=\begin{bmatrix}3&5\\4&1\\5&8\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}2&3&3&8&4\\9&5&2&0&6\\0&1&6&7&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}C & D & CD\\ 3\times 2 & 3\times 5 & \end{matrix}$$ پێناسە نەکراوە

ژمارەی ڕیزەکان ≠ ژمارەی ستوونەکان $(3\neq 2)$

زۆرجار نوسینی $A_{m\times n}$ بەکاردەهێنرێت بۆ دەرخستنی ئەوەی جۆری ڕیزکراوەکە mn ـە

نموونە 1 جیاکردنەوەی لە توانادابوونی لێکدانی دوو ڕیزکراوە

ڕوونبکەوە کە ئەگەر ئەنجامیلێکدانی ئەم دوو ڕیزکراوانە پێناسەکراوە یان نا. ئەگەر پێناسەکراوبوو جۆرەکەی دیاریکە.

أ $A_{2\times 5}\ B_{5\times 3}$

$$\begin{matrix}A & B & AB\\ 2\times 5 & 5\times 3 & = 2\times 3\end{matrix}$$

لەبەرئەوەی ژمارەی ستوونەکانی ڕیزکراوەی A یەکسانە بە ژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی B بۆیە ئەنجامی لێکدانیان پێناسەکراوە ڕیزکراوەکە لە جۆری 2×3 .

ب $C_{4\times 3}\ D_{4\times 5}$

$$\begin{matrix}C & D & CD\\ 4\times 3 & 4\times 5 & \end{matrix}$$ پێناسە نەکراوە

لەبەرئەوەی ژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی C یەکسان نییە بە ژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی D . بۆیە ئەنجامی لێکدانیان پێناسە نەکراوە.

خاڵی چاودێری

1. ڕیزکراوەکانی نموونەکە بەکاربهێنە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکان. ڕوونبکەوە کە لێکدانی دوو ڕیزکراوەکە پێناسەکراوە یان نا. ئەگەر پێناسەکراوبوو جۆرەکەی دیاریکە

أ BA ب DC ج DB

چۆن سەیری ژمارەی ستوونەکانی ڕیزکراوەی A و ژمارەی ڕیزەکانی ڕیزکراوەی B ت کرد بۆئەوەی بڕیار لەوە بدەیت کە لێکدانی AB پێناسەکراوە یان نا. بەو شێوەیەش بۆ هەژمارکردنی ئەنجامی لێکدانی دوو ڕیزکراوە هەمان کار بەکاردەهێنێت.

فێربە

لێکدانی ڕیزکراوەکان

بەنووسین	بەژمارە	بەجەبری
بۆ هەژمارکردنی دانەی p_{kj} لە ڕیزکراوەی $P=AB$. هەر دانەیەکی ڕیزی k لە ڕیزکراوەی A لە دانەی بەرامبەری ڕیزی j لە ڕیزکراوەی B بدە، پاشان ئەنجامەکانیان کۆبکەوە.	$P=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}1\times5+2\times7 & 1\times6+2\times8\\3\times5+4\times7 & 3\times6+4\times8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}c_1&c_2\\d_1&d_2\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}a_1c_1+a_2d_1 & a_1c_2+a_2d_2\\b_1c_1+b_2d_1 & b_1c_2+b_2d_2\end{bmatrix}$

نموونە 2 لێکدانی ڕیزکراوەکان

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە $A=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}11&-1\\12&10\end{bmatrix}$

ئەنجامی لێکدانەکان هەژماربکە (ئەگەر توانرا)

أ AB

جۆرەکان بپشکنە بۆئەوەی بڕیاربدەیت کە لێکدانەکە پێناسەکراوە. جۆری ڕیزکراوەی A بریتییە لە 3×2، جۆری ڕیزکراوەی B بریتییە لە 2×3 . مانای لێکدانی AB پێناسەکراوە. ئەنجامەکەشیان لە جۆری 2×2 . ڕیزی یەکەمی ڕیزکراوەی A لە ستوونی یەکەمی ڕیزکراوەی B بدە وەك لە خوارەوە ڕونکراوەتەوە. ئەنجامەکە لە ڕیزکراوەی C دا لە شوێنی دانەی C_{11} بنوسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46&?\\?&?\end{bmatrix} \leftarrow 0(5)+4(-2)+9(6)$$

ئێستاش ڕیزی یەکەمی ڕیزکراوەی A لە ستوونی دووەمی ڕیزکراوەی B بدە. وەك لە خوارەوە ڕوونکراوەتەوە. ئەنجامەکە لە ڕیزکراوەی C دا لە شوێنی دانەی C_{12} بنووسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46&28\\?&?\end{bmatrix} \leftarrow 0(1)+4(7)+9(0)$$

ڕیزی دووەمی ڕیزکراوەی A لە ستوونی یەکەمی ڕیزکراوەی B بدە وەك لە خوارەوە ڕونکراوەتەوە. ئەنجامەکە لە ڕیزکراوەی C دا لە شوێنی دانەی C_{21} بنووسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46&28\\-9&?\end{bmatrix} \leftarrow (-3)(5)+3(-2)+2(6)$$

ڕیزی دووەمی ڕیزکراوەی A لە ستوونی دووەمی ڕیزکراوەی B بدە وەك لە خوارەوە ڕوونکراوەتەوە. ئەنجامەکە لە ڕیزکراوەی C لە شوێنی دانەی C_{22} بنووسە.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46&28\\-9&18\end{bmatrix} \leftarrow (-3)(1)+3(7)+2(0)$$

کەواتە $C=AB=\begin{bmatrix}46&28\\-9&18\end{bmatrix}$

ب BA

جۆرەکان بپشکنە بۆئەوەی بڕیار بدەیت کە لێکدانیان پێناسەکراوە، جۆری ڕیزکراوەی B بریتییە لە 2×3 و جۆری ڕیزکراوەی A بریتییە لە 3×2 ئەنجامی BA پێناسەکراوە و ڕیزکراوەیەکە لە جۆری 3×3 .

$$BA=\begin{bmatrix} 5(0)+1(-3) & 5(4)+1(3) & 5(9)+1(2) \\ -2(0)+7(-3) & -2(4)+7(3) & -2(9)+7(2) \\ 6(0)+0(-3) & 6(4)+0(3) & 6(9)+0(2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 23 & 47 \\ -21 & 13 & -4 \\ 0 & 24 & 54 \end{bmatrix}$$

ج AD

جۆرەکان بپشکنە بۆ ئەوەی بڕیار بدەیت، کە لێکدانیان پێناسەکراوە جۆری ڕیزکراوەی A بریتییە لە 3×2 و جۆرەی ڕیزکراوەی D بریتییە لە 2×2. ئەنجامی AD پێناسە نەکراوە.

ئاگاداربە!

تێبینی ئەوە بکە ئەنجامی لێکدان AB و BA هەمیشە جیاوازن. لێکدانی ڕیزکراوەکان سیفەتی ئاڵوگۆڕی تێدانییە.

خاڵی جاوبێری

2. ئەنجامی لێکدانی ئەمانە هەژماربکە (ئەگەر توانرا)

أ BD ب DA

ڕیزکراوەکان بەکاردێن لە کاروباری کارگێڕی و هەژمارکردنی داهات و تێچوون و قازانج.

نموونـــــە 3 جێبەجێکردن لەسەر دەرخستە (جرد)

کۆمپانیای کەژێ بۆ کەل و پەلی وەرزشی دوو جۆر پۆشاکی ڕۆیشتن لە دوو دوکانی جیاوازدا دەفرۆشێت. خشتەی یەکەم کاڵاکانی ناو هەردوو جۆر پۆشاکەکە دەنوێنێت و دووەمیش نرخی فرۆشتن و تێچوون و قازانجی هەر تاکێك لە تاکەکانی جۆرەکان دەنوێنێت. تێچوونی گشتی هەردوو جۆر پۆشاکەکە لەهەر دوکانێکدا بدۆزەوە.

کاڵاکانی ناو هەردوو دوکان

	پەسەند	ناباب
دوکانی 1	14	10
دوکانی 2	7	8

داهات وتێچوون وقازانج بەهەزاران دینار

	نرخ	تێچوون	قازانج
پەسەند	89	44	45
ناباب	119	58	61

لێکدانی ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی داهات و تێچوون و قازانجی هەر دوکانێك.

$$\begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 89 & 44 & 45 \\ 119 & 58 & 61 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14(89)+10(119) & 14(44)+10(58) & 14(45)+10(61) \\ 7(89)+8(119) & 7(44)+8(58) & 7(45)+8(61) \end{bmatrix}$$

داهات تێچون قازانج

$$=\begin{bmatrix} 2436 & 1196 & 1240 \\ 1575 & 772 & 803 \end{bmatrix}\begin{matrix} \text{1 دوکانی} \\ \text{2 دوکانی} \end{matrix}$$

تێچوونی پۆشاك لە دوکانی 1 بریتییە لە 1196 هەزار دینار و لە دوکانی 2 دا 772 هەزار دینار

خاڵی جاوبێری

3. کاڵاکانی دوکانی ژمارە 2 بگۆڕە بە 6 جۆری پەسەند و 9 جۆری ناباب ڕیزکراوەی ئەنجامی لێکدانەکان هەژماربکەوە. قازانجی دوکانی 2 دیاریبکە.

ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی Square matrix ئەو ڕیزکراوەیە کەهەمان ژمارە لە ڕیز و ستوونی هەیە ڕیزکراوەیەکە لەجۆری $m \times m$. **تیرەی سەرەکی Main diagonal** لە ڕیزکراوەی چوارگۆشەییدا ئەو تیرەیە کە گۆشەی سەرەوەی لای چەپ بە گۆشەی خوارەوەی لای ڕاست دەگەیێنێت.

ڕیزکراوەی یەکە Unit matrix ئەو ڕیزکراوەیە کە هەموو دانەکانی سفرە جگە لەو دانەی دەکەونە سەر تیرەی سەرەکی کە (I) ن. تەنها یەك ڕیزکراوەی یەکە بۆ هەموو جۆرێکی $n \times n$ لە جۆرەکانی ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی هەیە.

ڕیزکراوەی یەکە بۆجۆری 2×2 بریتییە لە $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بۆجۆری 3×3 بریتییە لە $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

لە لێکدانی ڕیزکراوەکاندا، ڕیزکراوەی یەکە لە پلەیەکی دیارکراو هەمان ڕۆڵی 1 دەبینێت لە لێکدانی ژمارەکاندا. ئەگەر A ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەیی پلە $m \times m$ بێت ئەوا $AI_m = I_mA = A$

ئەگەر $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ئەوا:

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 7 \times 0 & 5 \times 0 + 7 \times 1 \\ -1 \times 1 + 4 \times 0 & -1 \times 0 + 4 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

و $$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 0 \times (-1) & 1 \times 7 + 0 \times 4 \\ 0 \times 5 + 1 \times (-1) & 0 \times 7 + 1 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

لەبەرئەوەی دەتوانرێت ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەیی لەخۆی بدرێت. دەتوانین ئەم کردارە چەندجارێك دووبارە بکەینەوە و هێزی ڕیزکراوەکەمان دەستبکەوێت.

نموونە 4 هێزەکانی ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ئەگەر توانرا ئەمانە هەژماربکە.

أ A^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \times 7 + 3(-2) & 7 \times 3 + 3 \times 0 \\ -2 \times 7 + 0 \times (-2) & -2 \times 3 + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 21 \\ -14 & -6 \end{bmatrix}$$

ب B^2

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 4 \times 5 + 1 \times 1 & 2 \times 4 + 4 \times 0 + 1(-1) & 2 \times 1 + 4(-2) + 1 \times 3 \\ 5 \times 2 + 0 \times 5 + (-2) \times 1 & 5 \times 4 + 0 \times 0 + (-2)(-1) & 5 \times 1 + 0(-2) + (-2) \times 3 \\ 1 \times 2 + (-1) \times 5 + 3 \times 1 & 1 \times 4 + (-1) \times 0 + 3(-1) & 1 \times 1 + (-1)(-2) + 3 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 7 & -3 \\ 8 & 22 & -1 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

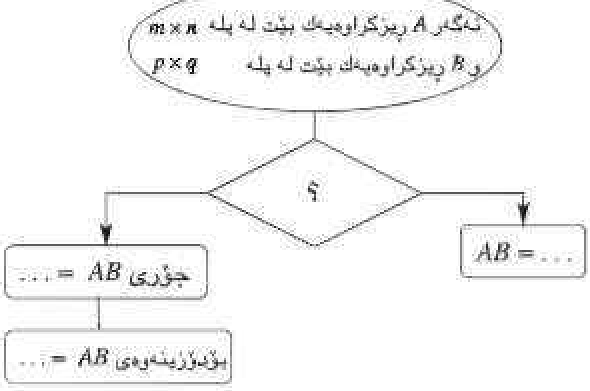
خاڵی چاوەدێری

4. هەریەکە لەم ڕیزکراوانە هەژماربکە (ئەگەر توانرا)

أ C^2 ب A^3 ج B^2 د I^4

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونیبکەوە چی ڕوودەدات کاتێك هەوڵی دۆزینەوەی دانەی یەکەمی ئەنجامی لێکدانی AB دەدەیت ئەگەر جۆری هەردوو ڕیزکراوەکە 3×2 بێت.
2. ئایا لێکدانی ڕیزکراوەکان کرداری ئاڵوگۆڕە. نموونە بێنەوە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت.
3. A ڕیزکراوەیەکە جۆرەکەی 2×4 ئایا دەتوانیت A^2 هەژماربکەیت؟ هۆیەکەی ڕوونبکەوە.
4. ڕێکخەربکە ئەم خشتەیە دروستبکەوە، پاشان تەواوی بکە پرسیارێك لەناو مەعینەکەدا بنووسە. وەڵامەکەی یارمەتیت بدا بە ئاڕاستەی ڕاست و چەپدا بڕۆیت پاشان هێڵکارییەکە تەواوبکە بۆ ڕوونکردنەوەی لێکدانی ڕیزکراوەکان.



فێربە

2-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ڕیزکراوەیەك لە جۆری 2×2 ، هەموو دانەکانی 1 بێت بریتییە لە ______ (ڕیزکراوەی چوارگۆشەییەکان یان ڕیزکراوەی یەکە).

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە کە ئەگەر لێکدانی ئەمانە پێناسەکراوە. جۆرەکەی دیاریبکە ئەگەر وابوو.

2 $A_{4\times 5}B_{5\times 3}$ **3** $B_{5\times 3}A_{4\times 5}$ **4** $C_{9\times 3}D_{3\times 9}$

5 $D_{3\times 9}C_{9\times 3}$ **6** $E_{6\times 2}F_{2\times 6}$ **7** $F_{2\times 6}E_{6\times 2}$

بڕوانە نموونە 2

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکانی 8 تا 13. ئەنجامی لێکدانیان هەژماربکە (ئەگەر توانرا)

$$A=\begin{bmatrix}0 & 7 & 3\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 5 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}3 & -1 & 7 & 10\\ 1 & -1 & 3 & 5\end{bmatrix},\ I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

8 BA **9** CA **10** CB **11** DC **12** BI **13** IB

بڕوانە نموونە 3

14 **دووبارە دروستکردنەوە** خوێندنکارانی ئامادەیی سلێمانی هەڵدەستن بە کۆکردنەوەی ئەو کەرەستانەی کە دەتوانرێت بەکاربهێنرێنەوە بۆ دروستکردن، بە مەبەستی فرۆشتن و خەرج کردنی لە ئاهەنگی کۆتایی ساڵی خوێندندا. خشتەی یەکەم ئەو کەرەستانە پیشان دەدات کە خوێندکاران لەماوەی سێ هەفتەدا کۆیانکردۆتەوە خشتەی دووەم بڕی ئەو پارانە پیشان دەدات کە لەبڕی هەر کیلۆگرامێك لە جۆرە جیاوازەکان وەریانگرتووە. لێکدانی ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بڕی هەموو ئەو پارانەی کە لە بڕی کۆکردنەوەی هەر جۆرە کەرەستەیەك وەریدەگرن.

کۆمەڵە کەرەستەکان			
جۆر	هەفتەی 1	هەفتەی 2	هەفتەی 3
شوشە	29	25	16
قووتوو	8	11	6
ڕۆژنامە	163	127	206
کاغەز	53	107	84

نرخەکان بەهەزاران دینار				
هەفتە	شوشە	قوتوو	ڕۆژنامە	کاغەز
1	20	700	20	1060
2	20	550	10	1000
3	10	420	20	1030

بڕوانە نموونە 4

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی **15** تا **18**. هەرهێزێک لەمانە هەژماربکە (ئەگەر توانرا)

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

15 A^2 **16** A^3 **17** C^2 **18** B^2

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی سەربەست	
شیکاری پرسیارەکان	سەیری نموونەی
24–19	1
29–25	2
30	3
40–31	4

دیاریبکە کە ئەگەر لێکدانی ئەمانە پێناسەکراوە جۆرەکەی دیاریکە ئەگەر وابوو.

19 $A_{2\times3}B_{2\times3}$ **20** $B_{2\times3}A_{2\times1}$ **21** $C_{3\times3}D_{5\times1}$

22 $D_{5\times1}C_{3\times5}$ **23** $E_{7\times7}F_{6\times7}$ **24** $F_{6\times7}E_{7\times7}$

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیاری **8** تا **13**. ئەنجامی لێکدانەکە هەژماربکە (ئەگەر توانرا)

$$A=\begin{bmatrix}4\\ -1\\ 2\end{bmatrix},\; B=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 7 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\; C=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix},\; I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

25 AB **26** CA **27** CB **28** IC **29** CI

30 دەرخستە (جردة) دوکانێک دوو پێوانەی جیاواز سندوقی صابون دەفرۆشێت. خشتەی یەکەم لە خوارەوەدا کۆمەڵەی دانەکانی هەردوو جۆر سندوقەکە پیشان دەدات کە دوو لقی جیاواز لە لقەکانی دوکانەکەی. خشتەی دووەم داهات و تێچوون و قازانجی هەر لقێک لە لقەکانی دوکانە پیشان دەدات. لەسەر پێوانەیەک لە پێوانەکانی سندوقەکان. تێچوونی گشتی هەژماربکە.

کۆمەڵەی دانەکانی سندوقەکە لەهەردوو لقدا		
	پێوانەی ئاسایی	پێوانەی گەورە
لقی 1	11	7
لقی 2	8	6

داهات و تێچوون و قازانج			
	داهات	تێچوون	قازانج
پێوانەی ئاسایی	130 000	75 000	55 000
پێوانەی گەورە	190 000	110 000	80 000

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی **31** تا **40**. بەسادەترین شێوە بیان نووسە (ئەگەر توانرا)

$$Q=\begin{bmatrix}4 & 13 & -9\end{bmatrix}\; S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\; T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\; A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\; B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}\; C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

31 S^2 **32** B^2 **33** T^2 **34** S^3 **35** Q^3

36 AB **37** BA **38** $2BA-C$ **39** $3CB+2B$ **40** $(BA)^2$

41 **پێشبڕکێی پایسکیل** پێشبڕکێی پایسکیل لە سێ جۆر قۆناغ کە جیاوازن لە قورسیدا پێکدێت، ئەمەش وادەکات کە ئەنجامی هەر قۆناغێك لە هاوکۆلکەیەك بەدرێت کە ڕەچاوی قورسی قۆناغەکە و تەمەنی پێشبڕکێکەرەکە بکات. خشتەکەی خوارەوە ئەو خاڵانە دەنوێنێت کە هەریەکە لەو چوار پێشبڕکێکەرە لە قۆناغە جیاوازەکاندا بەدەستیانهێناوە. خشتەی دووەم هاوکۆلکەی ڕاستکردنەوە بۆ هەر قۆناغێك و هەر پێشبڕکێکەرێك پیشان دەدات.

خاڵەکانی هەر پێشبڕکێکەرێك لەهەرسێ قۆناغدا			
پێشبڕکێکەر	قۆناغی 1	قۆناغی 2	قۆناغی 3
گۆران	23.0	18.5	19.5
هەڵۆ	24.0	28.5	25.0
کاوە	19.0	22.0	21.5
کارزان	27.0	26.5	28.0

هاوکۆلکەی ڕاستکردنەوە				
قۆناغی	گۆران	هەڵۆ	کاوە	کارزان
1	1.2	1.6	2.0	1.8
2	2.3	2.0	2.8	2.5
3	2.7	2.6	3.2	3.1

أ پێدراوەکان لە دوو ڕیزکراوەدا ڕێکبخە. هەژماری لێکدانیان بکە.

ب ڕیزکراوەی ئەنجامی لێکدانەکان بەکاربێنە بۆ هەژمارکردنی خاڵەکانی کۆتایی هەر پێشبڕکێکەرێك

ج هۆی چییە کە وادەکات دانەکانی دەرەوەی تیرە سەرەکییەکە لە ئەنجامی لێکدانەکەدا هیچ مانایەك نەبەخشن لەم پرسیارەدا؟

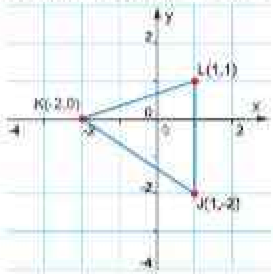
بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە دیاریبکە ئەم دەستەواژانە هەمیشە دروستن یان هەندێك جار دروستن یان هەمیشە نادروستن. وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

42 ئەگەر ڕیزکراوەی A لەجۆری 3×2 و ڕیزکراوەی B سێ ڕیزی هەبێت ئەوا ڕیزکراوەی AB پێناسەکراوە.

43 ئەگەر ڕیزکراوەی A لەجۆری 3×2 بێت وڕیزکراوەی B سێ ستوونی هەبێت ئەوا ڕیزکراوەی AB پێناسەکراوە.

44 ئەگەر ڕیزکراوەی AB پێناسەکراوبێت ئەوا ڕیزکراوەی BA پێناسەکراو دەبێت.

45 ئەگەر هەردوو ڕیزکراوەی AB و BA پێناسەکراوبوون ئەوا هەردوو ڕیزکراوەکە چوارگۆشەیی دەبن.



46 أ **بنووسە** ڕیزکراوەیەك خاڵی سەرەکانی سێگۆشەی JKL بنوێنێت، بەجۆرێك پۆی خاڵەکان لەسەر ڕیزی یەکەم و تانی خاڵەکان لەسەر ڕیزی دووەم بێت.

ب ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ لێکدانی پۆتانەکانی لە 2.

ج وێنەی ئەو سێگۆشەیە بکێشە کە ڕیزکراوە نوێیەکە بنوێنێت.

47 بەهای x بدۆزەوە کە وادەکات هەردوو ڕیزکراوە یەکسان بن $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & \frac{x}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -19 \\ 24 & -26 \end{bmatrix}$

48 **بنووسە** هۆی ئەمە چیەکە وادەکات یەکسان بوونی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ دروست بێت؟

49 **پێشبڕکێی چنین** پێشبڕکێی چنین سێ شێوەی جیاواز لە قورسیدا لەخۆدەگرێت. ئەمەش وادەکات هەر شێوەیەك لە هاوکۆلکەیەك بدرێت کە ڕەچاوی قورسی و تەمەنی پێشبڕکێکەرەکە بکات. خشتەی یەکەمی خوارەوە ئەم خاڵانە دەنوێنێت کە هەریەکی لەو سێ پێشبڕکێکەرە بە دەستی هێناوە. خشتەی دووەم هاوکۆلکەی ڕاستکردنەوەی هەر شێوەیەك و هەر پێشبڕکێکەرێك دەنوێنێت.

ئەوخاڵانەی لیژنەی سەرپەرشتیکردن بۆپێشبڕکێکەرانی داناوە			
پێشبڕکێکەر	شێوەی 1	شێوەی 2	شێوەی 3
شارا	16.5	18.0	17.5
سازان	12.5	14.0	17.0
دیلان	16.0	19.5	18.0

هاوکۆلکەی ڕاستکردنەوە			
شێوە	شارا	سازان	دیلان
1	2	3	2
2	3	3	1
3	2	2	1

50 **فرۆشراوەکان** خشتەی یەکەمی خوارەوە فرۆشراوی چەند کرێکارێکی دوکانێکی پێڵاو دەنوێنێت خشتەی دووەم ڕێژەی کۆن و نوێی ئەو بڕە پارەیە دەنوێنێت کەهەر کرێکارێك لەبری فرۆشتنەکانی دەستی دەکەوێت.

فرۆشراوی کرێکارەکان بەدینار			
کرێکار	پیاوانە	ژنانە	منداڵانە
شێرزاد	5 200 000	4 200 000	2 300 000
بەختیار	8 100 000	8 400 000	3 100 000
ژانا	2 700 000	7 400 000	6 300 000

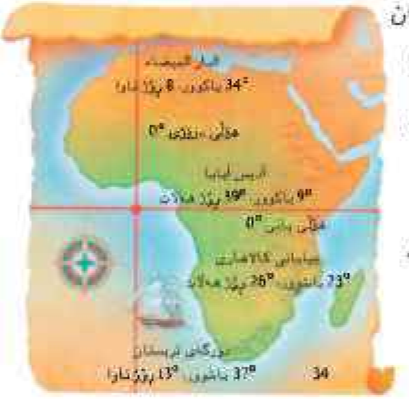
ڕێژەی پارە		
	ڕێژەی کۆن	ڕێژەی نوێ
بۆ پیاوان	9%	9.5%
بۆ ژنان	9%	10%
بۆ منداڵان	13%	12%

أ ئەنجامی لێکدانی هەردوو ڕیزکراوەکە بدۆزەوە. ئەو بڕە پارەیە چەندە کەهەر کرێکارێك بەپێی ڕێژەکە وەریدەگرێت.

ب کام کرێکار لەهەموویان سوودمەندترە بە گۆڕینی ڕێژەی پارەکە؟

51 **مەشق** لەپێشبڕکێیەکی تەلەفزیۆنیدا پێویست بوو پێشبڕکێکەران ئەو شوێنە دیاریبکەن کە پێویست بوو بۆی بچن. ئەو شوێنەش دانەکانی ڕیزکراوەی ئەنجامی لێکدانی ئەم دوو ڕیزکراوە دیاریدەکەن.

$$P=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -11 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -2\\ 9 & -3\end{bmatrix}$$



دانەی P_{21} شوێنی هێڵی پانی (باکوور ئەگەر دانە موجەب و باشوور ئەگەر دانە سالب بوو) دیاریدەکات، هەروەها دانەی P_{12} شوێنی هێڵی درێژی (ڕۆژ هەڵات ئەگەر دانەکە موجەب و ڕۆژ ئاوا ئەگەر دانەکە سالب بوو) دیاریدەکات کام یەکێك لەو شوێنانەی نەخشەی بەرامبەر پێویستە لەسەریان بیگەنێت.

52 **تۆپی پێ** کۆمەڵەی ئەو خاڵانە بدۆزەوە کەهەر تیپێك بەدەستی هێناوە.

تیپ	لێدانی کۆرناڵ	لێدانی ڕاستەوخۆ	گۆڵەکان
یانەی هەولێر	11	9	4
یانەی پێرس	15	12	6
یانەی سلێمانی	6	5	9

جۆری گۆڵ	خاڵەکان
لێدانی کۆرناڵ	6
لێدانی ڕاستەوخۆ	1
گۆڵەکان	3

53 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ڕیزکراوەی بەرامبەر بەشێوەی لێکدانی ڕیزکراوەیەك کە دانەکانی ژمارەی تەواوبن لە ژمارەیەکی ڕاستی بنووسە

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{4} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}$$

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

54 ڕیزکراوەی B لەجۆری 5×12. چ مەرجێك لە ڕیزکراوەی C دا هەبێت بۆئەوەی CB پێناسەکراو بێت؟

أ 5 ستوونی هەبێت ب 12 ستوونی هەبێت ج 5 ڕیزی هەبێت د 12 ڕیزی هەبێت

55 ئەنجامی کام یەکێك لەمانە یەکسان نییە بە سێ ئەنجامەکەی تر؟

أ $2\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

56 کام یەکێك لەم بڕانە یەکسانە بەدانەی C_{22} لە ئەنجامی لێکدانی $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = C$ ؟

(أ) $4(-2)+2\times 3$ (ب) $7\times 5+(-1)8$ (ج) $4\times 5+2\times 8$ (د) $(-1)3+2\times 8$

57 **کورتە وەڵام** $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ دیاریبکە ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 33 & -18 \\ -14 & 64 \end{bmatrix}$ یەکسانە بە AB یان BA یان هیچ یەکێك لەوانە نییە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

58 ئایا لێکدانی ڕیزکراوەکان کرداری یەکتربەستنی تێدایە؟ واتە ئایا $(AB)C = A(BC)$ وا دابنێ ئەنجامی لێکدانەکان پێناسەکراوە؟ بە نموونەیەك پاڵپشتی وەڵامەکەت بکە.

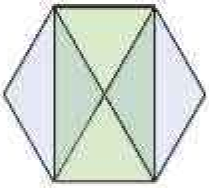
59 **گوێزراوەی Transpose** ڕیزکراوەی A بریتییە لە ڕیزکراوەی A^T کە لە ئەنجامی گۆڕینی هەر ڕیزێك لە ڕیزەکانی ڕیزکراوەی A بەو ستوونەی کەهەمان جۆری هەیە. نموونە بۆ ئەوەش ئەگەر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ئەوا گوێزراوە کەی بریتییە لە ڕیزکراوەی $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

(أ) ئایا لێکدانی ڕیزکراوە یەك لە گوێزراوەکەی هەمیشە لە توانا دایە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

(ب) ڕیزکراوەی $P = AA^T$ بدۆزەوە ئەگەر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ئایا ڕیزکراوەی P دانەکانی یەکسانی تێدایە؟ کامانەن؟

60 هێزەکانی ڕیزکراوەی $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ هەژماربکە. هەموو جارێك دانەی سەر ڕیزی دووەم و ستونی دووەم لە ڕیزکراوەی ئەنجامەکە بنووسە؟ پەیوەندی نێوان بەها یەك لەدوای یەکەکانی ئەو بەهایانە چییە؟

پێداچوونەوەی لوولپێچی



نەخشەدانانی زەخرەفە ڕووکاری دەرەوەی شێوەی بەرامبەر شەشلایەکی ڕێکە. سێگۆشە سەوزەکە لایەکسانە. (پۆلەکانی پێشوو)

61 شێوەکە چەند جووت گۆشەی سەر بەرامبەری تێدایە؟

62 شێوەکە چەند سێگۆشەی جووتبوو لەگەڵ سێگۆشە سەوزەکەی تێدایە؟

63 شێوەکە چەند پارچە ڕاستەهێڵی جووتبوو لەگەڵ لاکانی شەشلا ڕێکەکە تێدایە؟

لە تەوەری بۆشاییەکاندا ئەم خاڵانە دیاریبکە (وانەی ١-١)

64 $(0, 4, -5)$ **65** $(2, 2, 6)$ **66** $(-3, -3, 3)$ **67** $(1, -1, -1)$

ئەم بڕانەی خوارەوە هەژماربکە ئەگەر توانرا کاتێك $S = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.83 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ و $V = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (وانەی ٣-١)

68 $S+T$ **69** $V-T$ **70** $4T$

3-3 ڕیزکراوەکان وجێگۆڕکێ ئەندازەییەکان
Matrices and Geometric Transformations

بۆچی ئەمە فێردەبین؟
هونەرمەندان ئەم شێوازە بۆ گۆڕانکارییە یەك لەدوای یەکەکان بەکاردەهێنن لەکاتی جێبەجێکردنی کارە هونەرییەکانیان (پرسیاری 16)

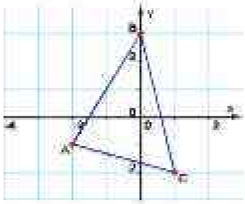
ئامانجەکان
- ڕیزکراوەکان بەکاردەهێنرێت بۆ جێگۆڕکێی شێوە ئەندازەییەکان

زاراوەکان
Vocabulary

ڕیزکراوەی ڕاکێشان
Translation matrix

ڕیزکراوەی خولانەوە
Rotation matrix

ڕیزکراوەی وێنەدانەوە
Reflection matrix



لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا دەتوانیت وەسفی شوێن و ڕووکار و پێوانەی شێوەیەکی ئەندازەیی بکەیت، بە بەکارهێنانی ئەو جووتە ڕێکخراوانەی کە سەرەکانی دەنوێنن. ئەگەر سێگۆشەی بەرامبەر وەربگریت دەبینیت سەرەکانی بریتین لە$(-2, -1)A$ و $B(0, 3)$ و $(1, -2)C$، دەتوانیت ئەم سێگۆشە بەم ڕیزکراوە بنوێنێت.

$$P=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -2\end{bmatrix}$$ ← پۆی خاڵەکان x ← تاتی خاڵەکان y

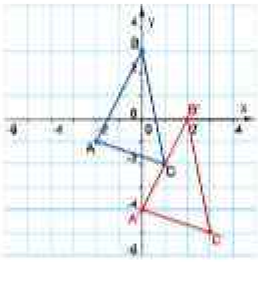
ڕاکێشان **Translation** جێگۆڕکێیەکی ئەندازەییە خاڵی $A(x, y)$ دەگۆڕێت بۆ خاڵێکی تری وەك $A'(x', y')$ بە جۆری $x' = x+a$ و $y' = y+b$ (a و b دوو ژمارەی ڕاستی نەگۆڕن). دەتوانرێت ڕاکێشانی پێشوو بەهۆی ڕیزکراوەیەکەوە ئەنجام بدرێت کە تێدایە ستوونی $\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ بەپێی سەرەکانی شێوە داواکراوەکە دووبارەبێتەوە. ئەم ڕیزکراوەیەش پێی دەوترێت **ڕیزکراوەی ڕاکێشان Translation Matrix**

نموونە 1 بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بۆ ڕاکێشانی شێوە ئەندازەییەکان

سێگۆشەی ABC ڕابکێشە کاتێك $A(-2, -1)$ و $B(0, 3)$ و $C(1, -2)$ دوو یەکە بۆلای ڕاست و 3 یەکە بۆ خوارەوە. پۆتانی سەرەکانی سێگۆشەی وێنەکە هەژماربکە پاشان وێنەکەی بکێشە

ڕیزکراوەی ڕاکێشان بریتییە لە

$$T=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ -3 & -3 & -3\end{bmatrix}$$ ← پۆی خاڵەکان ← تاتی خاڵەکان



بۆ هەژمارکردنی پۆتانی وێنەی سێگۆشەکە بەو کشانەی سەرەوە ئەو ڕیزکراوەیەی کە سێگۆشە بنەڕەتییەکە دەنوێنێت لەگەڵ ڕیزکراوەی ڕاکێشان کۆبکەوە.

ڕیزکراوەی سێگۆشەکە + ڕیزکراوەی ڕاکێشان

$$\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ -3 & -3 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2+2 & 0+2 & 1+2\\ -1-3 & 3-3 & -2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ -4 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

وێنەی سێگۆشەی ABC بە ڕاکێشان بریتییە لە $A'B'C'$ کاتێك $A'(0, -4)$، $B'(2, 0)$، $C'(3, -5)$

خاڵی چاودێری

1. سێگۆشەی ABC ڕابکێشە کاتێك $A(2, 4)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, -1)$، 3 یەکە بۆلای ڕاست و یەکەیەك بۆ خوارەوە، پۆتانی سەرەکانی وێنەی سێگۆشەکە هەژماربکە پاشان وێنەکەی بکێشە

هاوڕێژەی ئەندازەیی Dilation ئەو گۆڕانەیە کەپێوانەی شێوەکە-وێنەکە دەگۆڕێت (بە گەورەکردن یان بچووك کردن) بە شێوەیەك شێوەکە-وێنەکە هاوشێوەی شێوە-وێنە بنەڕەتییەکە بێت. لەبیرت بێت شێوە هاوشێوەکان هەمان ڕووکاریان هەیە بەڵام پێوانەکانیان جیاوازن. گۆشە بەرامبەرەکان جووتن و لایەکانیان هاوڕێژە دەبن.

کاتێك چەقی هاوڕێژەبوونە ئەندازەییەکە خاڵی بنەڕەتی ڕووتەختی پۆوتانەکان بێت، ئەوەندە بەسە ڕیزکراوەی شێوەکە-بنەڕەتی لە ڕێژەی هاوڕێژەبوونە ئەندازەییەکە بدەین بۆئەوەی ڕیزکراوەی شێوەکە-وێنەکەت دەستبکەوێت. لەم بەشەدا تەنها باسی ئەو هاوڕێژە ئەندازەییانە دەکرێت کە چەقیان خاڵی بنەڕەت بێت.

نموونە 2 بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بۆ جێگۆڕکێ ئەندازەییەکان بە ڕێژەیەکی ئەندازەیی

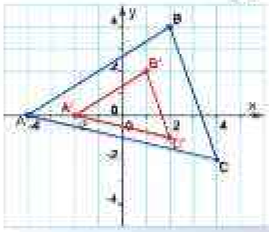
سێگۆشەی ABC کاتێك $A(-4,0)$ و $B(2,4)$ و $C(4,-2)$ بێت بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت و ڕێژەکەی $\frac{1}{2}$ بێت (بچووك کردنەوە) بگۆڕە. پۆوتانی سەری سێگۆشەی-وێنەکەی بدۆزەوە. پاشان وێنەکەی بکێشە.

ڕیزکراوەی سێگۆشەکە لە $\frac{1}{2}$ بدە

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 2 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(-4) & \frac{1}{2}\times 2 & \frac{1}{2}\times 4\\ \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times 4 & \frac{1}{2}(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

پۆی خاڵەکان ←

تانی خاڵەکان ←



پۆوتانی سەری سێگۆشەی-وێنەکەی بریتییە لە $A'(-2,0)$ و $B'(1,2)$ و $C'(2,-1)$

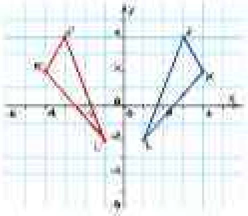
خاڵی چاودێری

2. سێگۆشەی ABC کاتێك $A(2,3)$ و $B(5,1)$ و $C(-2,-7)$ بێت، بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت و ڕێژەکەی $\frac{4}{3}$ بێت (گەورەکردن) بگۆڕە. پۆوتانی سەری سێگۆشەی-وێنەکەی بدۆزەوە و پاشان وێنەی بکێشە.

ڕیزکراوەی وێنەدانەوە Reflection Matrix ڕیزکراوەیەکە گۆڕان لە وێنەی شێوە ئەندازەییەك دەکات بە وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەرەیەکدا. بۆئەوەی وێنەدانەوەی وێنەی شێوەیەکی ئەندازەییت دەستکەوێت بەدەوری تەوەرەی y دا ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ لە ڕیزکراوەی شێوەکە بدە. ئەمەش وادەکات پۆی خاڵەکە x بگۆڕێت بۆ دژەکەی $(-x)$. و تانی خاڵەکە بەبێ گۆڕان وەك خۆی بهێڵێتەوە.

نموونە 3 بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بۆ وێنەدانەوەی شێوە ئەندازەییەکان

وێنەدانەوەی سێگۆشەی JKL کاتێك $J(3,4)$ و $K(4,2)$ و $L(1,-2)$ بەدەوری تەوەرەی y دا دیاریکە پۆوتانی سەری سێگۆشە-وێنەکەی بدۆزەوە پاشان وێنەکەی بکێشە.



$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 4 & 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -4 & -1\\ 4 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

پۆی خاڵەکان لە 1- و تانەکان لە 1 دراوە سەرەکانی سێگۆشە-وێنەکەی بریتین لە $J'(-3,4)$ و $K'(-4,2)$ و $L'(-1,-2)$.

ئاگاداربە!

لێکدانی ڕیزکراوەکان کردارێکی ئاڵوگۆڕ نییە لەبیرتەوە دڵنیابە کە ڕیزکراوەی گۆڕاو لە چەپەوە نووسراوە

خاڵی چاودێری

3. بۆئەوەی وێنەدانەوەی شێوەیەکی ئەندازەییت دەستکەوێت بەدەوری تەوەرەی x دا ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ لە ڕیزکراوەی شێوەکە بدە، وێنەدانەوەی سێگۆشەی نموونەی 3 بەدەوری تەوەرەی x دیاریبکە پۆوتانی سەری سێگۆشەی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەکەی بکێشە.

ڕیزکراوەی خولانەوە Rotation Matrix ڕیزکراوەی گۆڕانە کە وێنەی شێوە ئەندازەییەکەمان دەستکەوێت بە خولانەوە. نموونەی 4 جۆرەکانی ڕیزکراوەی خولانەوە دەردەخات.

نموونـــــه 4 بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بۆ خولانەوەی شێوە ئەندازەییەکان

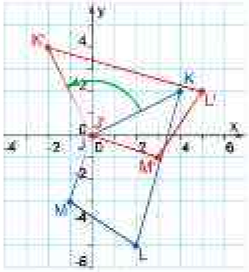
ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ گۆڕینی چوارلای $JKLM$ کاتێک $J(0,0)$ و $K(4,2)$ و $L(2,-5)$ و $M(-1,-3)$ ، بێت خولانەوەی بەدەوری خاڵی بنەڕەت، وێنەی شێوە–وێنەکەی بکێشە باسیبکە

ڕۆشنایی

لێکدانی پۆوتان لە 1- دژەکەیمان نداتی.

أ

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

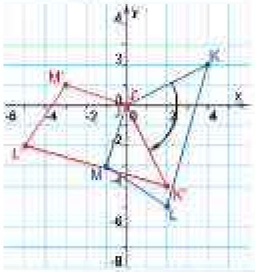


$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

وێنەکە، وێنەی چوارلایەکە بە خولانەوەی بەگۆشەی $90°$ بەپێچەوانەی ئاراستەی میلی کاتژمێر چەقی خولانەوەکە خاڵی بنەڕەت بێت.

ب

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

وێنەکە، وێنەی چوارلایەکە بە خولانەوەی بەگۆشەی $90°$ بە ئاراستەی میلی کاتژمێر چەقی خولانەوەکە خاڵی بنەڕەت بێت.

خاڵی چاودێری

4. ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ گۆڕینی سێگۆشەی ABC کاتێک $A(0,0)$ و $B(4,0)$ و $C(0,-3)$ بێت. بە خولانەوەی بە دەوری خاڵی بنەڕەت. شێوەی–وێنەکە بکێشە. باسیبکە

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییەی کە لە ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ لە ڕیزکراوەی شێوە ئەندازەییەکە پەیدادەبێت باسبکە.
2. ئەو گۆڕانە ڕوونبکەوە کە بەسەر پۆی خاڵەکاندا دێت لە ڕیزکراوەی شێوەیەکی ئەندازەیی کاتێک بە یەکێک لەم ڕیزکراوانە لێکدەدرێت.

أ $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ **ب** $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ **ج** $C=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix}$ **د** $D=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. ڕێکخەریە ئەم خشتەیە دروستبکەوە و پاشان تەواوی بکە. Q ڕیزکراوەی سێگۆشە دەنوێنێت. لەهەر چوارچێوەیەکدا بڕەی ڕیزکراوەی گونجاو بنووسە.

جێگۆڕکێ	کردارەکە بەهۆی ڕیزکراوەوە
ڕاکێشانی سێگۆشەکە بەستوونی	
ڕاکێشانی سێگۆشەکە بەئاسۆیی	
گەورەکردن یان بچووک کردنی سێگۆشەکە	
وێنەدانەوەکەی بە دەوری تەوەرەی صادی	
وێنەدانەوەکەی بە دەوری تەوەرەی سینی	
خولانەوەی سێگۆشەکە بە گۆشەی $90°$ بە دەوری خاڵی بنەڕەت بە ئاراستەی میلی کاتژمێر	
خولانەوەی سێگۆشەکە بەگۆشەی $90°$ بە دەوری خاڵی بنەڕەت بەپێچەوانەی ئاراستەی میلی کاتژمێر	

3-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 زاراوەکان ئەو شێوە ئەندازەییەی کە ــــــ پەیدای دەکات وەک ئەوە وایە یەکێک لە تەوەرەکان دەوری ئاوێنەیەک ببینێت. (ڕیزکراوەی وێنەدانەوە یان ڕیزکراوەی ڕاکێشان)

پڕوانە نموونە 1

وێنەی چوارلای $ABCD$ کاتێک $A(-2,4)$ و $B(3,1)$ و $C(1,-4)$ و $D(-2,-2)$ بێت لەژێر کاری کشانەوەی دیاریکراو لە پرسیاری 2 و 3 دا دیاریکراوە. پۆوتانی سەرەکانی وێنەکەی بدۆزەوە و وێنەی بکێشە

2 دوو یەکە بەرەو لای چەپ و یەک یەکە بۆ سەرەوە.

3 یەک یەکە بەرەو لای ڕاست و سفر یەکە بۆ خوارەوە.

پڕوانە نموونە 2

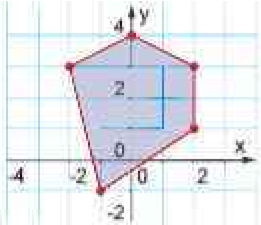
ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆگەورەکردن یان بچووکردنەوەی چوارلای $ABCD$ کاتێک $A(-2,4)$ و $B(3,1)$ و $C(1,-4)$ و $D(-2,-2)$ بەپێی ئەو ڕێژەیەی لەپرسیاری 4 و 5 دا دیارکراوە. پۆوتانی سەرەکانی شێوەی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەی بکێشە

4 بچووککردنەوەی چوارلایەکە بە ڕێژەی 0.5

5 گەورەکردنی چوارلایەکە بە ڕێژەی 2

پڕوانە نموونە 3

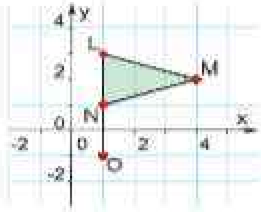
وێنەی چەندلای $ABCDE$ کاتێک $A(-2,3)$ و $B(0,4)$ و $C(2,3)$ و $D(2,1)$ و $E(-1,-1)$ بێت وەک لە پرسیاری 6 و 7دا دیارکراوە دیاریبکە پۆوتانی سەرەکانی شێوەی-وێنەکە بدۆزەوە. وێنەکەی بکێشە



6 وێنەدانەوەکەی بەدەوری تەوەرەی y

7 ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی وێنەی چەندلایەکە بە وێنەدانەوەی بەدەوری ڕاستەهێڵی $y=x$.

پڕوانە نموونە 4



ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی وێنەی چوارلای $LMNO$ کاتێک $L(1,3)$ و $M(4,2)$ و $N(1,1)$ و $O(1,-1)$ بێت بەخولانەوەیەک کە ڕیزکراوەکەی لە پرسیاری 8 و 9دا دراوە. پۆوتانی سەرەکانی شێوەی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەکە بکێشە

8 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

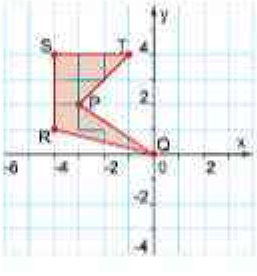
جێبەجێکردنەکان

بۆ شیکاری ڕاهێنانی	تەماشای نموونە
10	1
11	2
12	3
14-13	4

10 وێنەی ڕاکێشانی چوارلای $ABCD$ کاتێک $A(0,4)$، $B(-3,-1)$ ، $C(1,-5)$ ، $D(1,0)$ بە 3 یەکە بۆلای ڕاست و 3 یەکە بۆ سەرەوە پۆوتانی سەرەکانی شێوەی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەکە بکێشە.

11 وێنەی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە کاتێک $A(1,2)$ ، $B(-2,3)$ ، $C(-3,4)$ ، $D(-4,1)$ بێت بەهاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت و ڕێژکەی $\frac{3}{2}$ بێت پۆوتانی سەرەکانی شێوەی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەکە بکێشە.

12 وێنەدانەوەی چەندلای $ABCDE$ بدۆزەوە کاتێک $A(-2,3)$، $B(0,4)$، $C(2,1)$، $D(2,1)$، $E(-1,-1)$ بەدەوری تەوەری x . پۆوتانی سەرەکانی شێوەی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەکە بکێشە

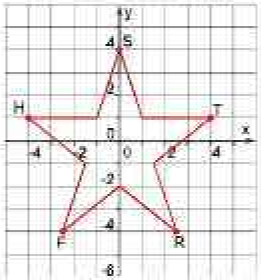


ڕیزکراوە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی وێنەی چەندلای $PQRST$ کاتێک $P(-3,2)$ و $Q(0,0)$ و $R(-4,1)$ و $S(-4,-4)$ و $T(-1,4)$ بێت بەخولانەوەیەک کە ڕیزکراوەکەی لە پرسیاری 13 و 14 دا دراوە پۆوتانی سەرەکانی شێوەیی-وێنەکە بدۆزەوە و وێنەکە بکێشە

13 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

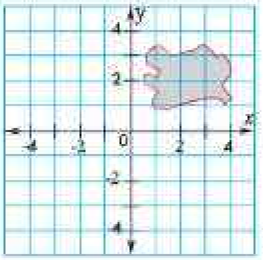
15 **نەخشەکێشان** چنار نەخشەی ئارمێکی بۆ یانەی ژینگەپارێزی خوێندنگاکەیان داڕشت لەشێوەی ئەستێرەی ئەدریادا. پۆوتانی سەرەکانی ئەستێرەکە بریتین لە $S(0,4)$ ، $T(4,1)$ ، $R(2.5,-4)$
$H(-4,1)$ $F(-2.5,-4)$



أ ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 0.81 & -0.59 \\ 0.59 & 0.81 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ خولانەوەی ئەستێرەکە بە ڕێژەی $\frac{1}{10}$ ی خولەکێکی تەواو بە دەوری خاڵی بنەڕەت. پۆوتانی سەرەکانی ئەستێرەی–وێنەکە بۆ نزیکترین نیو یەکە نزیکبکەوە.

ب ئایا ئەستێرەکە بە ئاڕاستەی میلی کاتژمێر خولاوەتەوە یان بە پێچەوانەی ئەو ڕوونبکەوە.

16 **نیگار** بۆ خشت ڕێزکردنی کارێکی هونەری وێنەی شێوە بنەڕەتییەکە دەکێشرێت پاشان بەهۆی گۆڕانی ئەندازەیی چەندجارێك گۆڕانی بەسەردا دەکەن تاهەموو ئەو ڕووبەرە بگرێتەوە کەپێویستە خشتڕێز بکرێت بێ ئەوەی هیچ بۆشاییەك یان زیادەڕۆیی هەبێت هونەرمەندێك وێنەی ئەو شێوەی لای چەپی دروستکرد.



أ هونەرمەندەکە شێوەکەی گۆڕی بە خولانەوەی بە گۆشەی $180°$ بەدەوری خاڵی بنەڕەت. ڕیزکراوەی ئەم گۆڕانە بنووسە.

ب پۆوتانی هەر چوار سەرەکەی شێوەکە پاش گۆڕانەکە بنووسە.

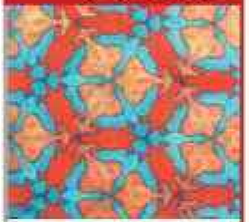
ج پاشان هونەرمەندەکە هەستا بە ڕاکێشانی ئەو وێنەیەی دەستی کەوتووە بە 4 یەکە بۆ سەرەوە 2 یەکە بۆلای ڕاست.

د پۆوتانی سەرەکانی شێوەکە لە ئەنجامی ئەم ڕاکێشانە بدۆزەوە.

هـ لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا وێنەی شێوە بنەڕەتییەکە و شێوەی کۆتایی بکێشە.

دەروازەیەك

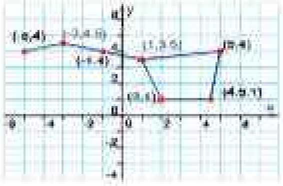
مێژووی هونەر



هونەرمەندی بەناوبانگ ئیشەر (1898 – 1972) شێوە ئەندازەییە هاوچێکانی گۆڕیوەتە سەر شێوەی چۆلەکە و خشۆکەکان و شێوەیتر.

17 **بیری ڕەخنەگر** $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەی T لە ڕیزکراوەی شێوەیەکی ئەندازەیی ڕوونبکەوە. پاشان ئەنجامی لێکدانی T لە ئەنجامی لێکدانی پێشوو ڕوونبکەوە.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر ئەستێرەی ورچی گەورە دەنوێنێت. ڕیزکراوەیەك بنووسە پۆوتانەکانی وێنەکە بنوێنێت پاشان پۆوتانەکانی وێنەی ئەم بارانە بدۆزەوە.



18 کشانی 2 یەکە بۆ سەرەوە.

19 کشانی یەك یەکە بۆ خوارەوە، 3 یەکە بۆلای چەپ.

20 گەورەکردنێك بە ڕێژەی 2 .

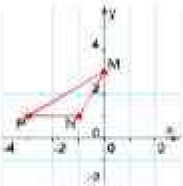
21 وێنەدانەوە بە دەوری تەوەرەی x .

22 خولانەوەیەك بە دەوری خاڵی بنەڕەت بە گۆشەی $90°$ بە ئاڕاستەی میلی کاتژمێر.

23 خولانەوەیەك بەدەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $90°$ بە ئاڕاستەی پێچەوانەی میلی کاتژمێر.

24 **بنووسە** ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەی $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ لە ڕیزکراوەی شێوەیەکی ئەندازەیی.

25 ڕیزکراوەی ئەو گۆڕانە ئەندازەییە بنووسە کە نەخشەی $f(x)$ دەگۆڕێت بۆ نەخشەی $h(x) = -f(x)$ و ڕیزکراوەی ئەو گۆڕانەی دەیگۆڕێت بە $g(x) = f(-x)$



26 أ ڕیزکراوەی وێنەی بەرامبەر بنووسە.

ب ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ لە ڕیزکراوەی سێگۆشەکە بدە.

ج وێنەی سێگۆشە تازەکە بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەی ئەنجامەکە بکێشە. باسی سێگۆشەکە بکە

د هەنگاوی ب و ج بەسەر سێگۆشە تازەکەدا جێبەجێبکە، چی دەربارەی سێگۆشەی سێیەم دەڵێیت.

27 سەرجۆن هەستا بە گۆڕینی شێوەیەکی ئەندازەیی، بە ڕێژەیەکی ئەندازەیی بە دوایدا خولانەوەیەك بە دەوری خاڵی بنەڕەت بە ئاڕاستەی میلی کاتژمێر بە گۆشەی $90°$ بەدوایدا وێنەدانەوەکەی بە دەوری تەوەری y. کام زنجیرە لەمانە ئەو گۆڕانە یەك لە دوای یەکە دەنوێنێت.

(أ) لێکدانی ڕیزکراوەکە لە ژمارە، کۆکردنەوەی دوو ڕیزکراوەکە، لێکدانی دوو ڕیزکراوەکە.

(ب) لێکدانی ڕیزکراوەکە لە ژمارە، لێکدانی دوو ڕیزکراوەکە، لێکدانی دوو ڕیزکراوەکە.

(ج) کۆکردنەوەی دوو ڕیزکراوەکە، لێکدانی دوو ڕیزکراوەك، کۆکردنەوە دوو ڕیزکراوەکە.

(د) لێکدانی دوو ڕیزکراوەکە، کۆکردنەوەی دوو ڕیزکراوەکە، لێکدانی ڕیزکراوەکە لە ژمارە.

28 ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەی شێوەیەکی ئەندازەیی لە ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ چی دەبێت؟

(أ) گەورەکردنی شێوەکە؛ پاشان خولانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $90°$ بەئاڕاستەی میلی کاتژمێر.

(ب) بچووککردنی شێوەکە؛ پاشان خولانەوەی بەدەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی $90°$ بەپێچەوانەی میلی کاتژمێر.

(ج) بچووککردنی شێوەکە؛ پاشان وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری x

(د) گەورەکردنی شێوەکە؛ پاشان وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری y

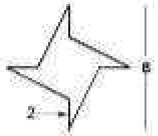
29 کام یەکێك لەم ڕیزکراوانە بەکاردەهێنرێت بۆ جێگۆڕکێی شێوەیەك بەخولانەوە بەدەوری بنەڕەت بەگۆشەی $180°$

(أ) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

بەرەنگاری و فراوانکردن

30 کام ڕیزکراوە بەکاردەهێنرێت بۆگۆڕینی شێوەیەك بەوێنەدانەوەی بەدەوری ڕاستەهێڵی $y=-x$

31 سێگۆشەی بەرامبەر لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا بکێشە و ڕیزکراوەکەی بنووسە.



[أ] چۆن ئەم سێگۆشەیە دەگۆڕێت بۆ دەستکەوتنی شێوەکەی تر؟

[ب] ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆ هەستان بەم گۆڕانە. پۆتانی هەر چوار سەری شێوەکەی-وێنەکە بنووسە.

32 شێوەیەکی ئەندازەیی بە جێگۆڕکێ بگۆڕە بە پێی ئەم ڕیزکراوەیە $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ باسی ئەو جێگۆڕکێیە بکە. چی ڕوودەدات ئەگەر ئەو شێوەیە چەندجارێك بەو جێگۆڕکێیە بگۆڕین.

پێداچوونەوەی لوولپێچ

33 دیاریبکە پێدراوەکانی ئەم خشتەیە وەك ئەخشەیەکی هێڵی پێناسەدەکات (پۆلەکەی پێشوو)

کارتەکان	2	5	8	11
تێچوون	35 000	87 500	140 000	192 500

دیاریبکە ئایا ئەم جووتە ڕیکخراوانە شیکارن بۆ سیستەمی ئەم لاسەنگانە (وانەی 3-2)

34 $\begin{cases} y > 2x-8 \\ y \le \frac{1}{4}x+2 \end{cases}$ ؛ $(2, -4)$

35 $\begin{cases} y > 0 \\ y \ge 2x-11 \\ 5x+y < 5.5 \end{cases}$ ؛ $(0, 5)$

ئەمانە هەژماربکە ئەگەر توانرا (وانەی 2-3)

36 $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

38 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

4–3 سنووردەرەکان و ڕێسای گرامر

Determinants and Cramer's Rule

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

شارەزایانی بواری خواردنی وەرزشکاران پێویستیان بەشیکارکردنی هاوکێشە هێڵییەکان بۆ دیاریکردنی ئەو بڕە گەرموٚکیانە و پرۆتین و چەوری و کاربۆهیدرات کە پێویستە لە خواردنەکەیاندا هەبێت.

ئامانجەکان

- هەژمارکردنی سنووردەری ڕیزکراوەی 2×2 یان 3×3 دەکا.
- سستەمی هێڵی شیکاردەکات بە بەکارهێنانی ڕێسای گرامر.

زاراوەکان
Vocabulary

سنووردەر
Determinant

ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان
Coefficient matrix

ڕێسای گرامر
Crame's rule

زانایانی بیرکاری ڕیزکراوە چوارگۆشەییەکان و ژمارەکان جووت دەکەن. بە مەرجێك هەر ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەیی بەرامبەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت کە پێی دەوترێت **سنووردەری ڕیزکراوە Determinant** .

هێمای $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ بەکاردەهێنرێت بۆ دەرخستنی سنووردەری ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. سنووردەری ڕیزکراوەیی ڕۆڵێکی گرنگی هەیە. هەروەك لەمەودا دەیبینیت.

فێربە

سنووردەری ڕیزکراوەی 2 × 2

بەنووسین	بەژمارە	بەجەبری
سنووردەری **Determinant** ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$ پێناسە دەکرێت.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $= (1)(4) - (3)(2) = -2$	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $= ad - bc$

نموونە 1 دۆزینەوەی سنووردەری ڕیزکراوەی 2 × 2

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

أ $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 5 \times 8$$

$$= 18 - 40 = -22$$

ئەنجامی لێکدانی دوو بڕاوانەکە لە ئەنجامی لێکدانی دوو لایەکە دەربکە

سنووردەری ڕیزکراوەکە دەکاتە -22 .

ب $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times 3 - \frac{2}{3}(-6) = 1 + 4 = 5$$

سنووردەری ڕیزکراوەکە دەکاتە 5.

خاڵی چاودێری

1. سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

أ $\begin{bmatrix} 0.2 & 30 \\ -0.3 & 5 \end{bmatrix}$ **ب** $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ **ج** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 4 & 2\pi \end{bmatrix}$

دەتوانیت سنووردەرەکان بەکاربهێنی بۆ شیکاری سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان. بۆ شیکاری سیستمی $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ دەستپێبکە بە نووسینی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ کەپێی دەوترێت **ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان** **Coefficient matrix** پاشان سنووردەری D بدۆزەوەو هەردوو سنووردەری لەگەڵ دۆزینەوەی $Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ و $Dy=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$، ئێستاش ڕێسای گرامەر وەك لە خوارەوەدا دراوە بەکاربهێنە.

فێربە

ڕێسای گرامەر بۆ سیستمی 2 × 2

ئەگەر سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان D جیاوازبێت لە 0، ئەوا سیستەمی $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ تەنها یەك شیکاری هەیە کە بریتییە لە $x=\frac{Dx}{D}$ و $y=\frac{Dy}{D}$، کاتێك $Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ و $Dy=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

دەتوانیت سنووردەرەکانی D و Dx و Dy بەکاربهێنیت بۆ ئەوەی بزانیت سیستەمەکە سنوورداری (تەنهایەك شیکاری هەیە) یان ستەمە (شیکاری نییە) یان بێسنووورە (ژمارەیەکی بێسنوور شیکاری هەیە). لەو پۆلێنکردنەی دێت وا دادەنێین کە a_1 و b_1 سفرنین لە هەمان کاتدا، و a_2 و b_2 سفر نین لە هەمان کاتدا.

پۆلێنکردنی سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی دوو نەزانراو		
ئەگەر $D\neq0$ ئەوا سیستمێکی سنووردارە	ئەگەر $D=0$ و $Dx=Dy$ ئەوا سیستمێکی بێسنوورە	ئەگەر $D=0$ و $Dx\neq0$ یان $Dy\neq0$ ئەوا سیستمێکی ئەستەمە.

نموونــــــە 2 شیکاری سیستمی هێڵی 2×2 بە بەکارهێنانی ڕێسای گرامر

شیکارکردنی سیستمی هێڵی بە بەکارهێنانی ڕیسای گرامر

أ $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

هەنگاوی 1 سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بدۆزەوە.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1(-1)-2(-1)=1$$

سیستمێکی سنووردارە چونکە $D\neq0$

هەنگاوی 2 بەهای هەر نەزانراوێك هەژماربکە. بە بەکارهێنانی ڕێسای گرامەر.

$$Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-4 \quad ، \quad Dy=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7$$

شیکار بریتییە لە $(-4, -7)$.

ب $\begin{cases} y-2=3x \\ 3x-y=7 \end{cases}$

هەنگاوی 1 سیستمەکە بە شێوە گشتییەکە بنووسە.

$$\begin{cases} 3x-y=-2 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

هەنگاوی 2 سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بدۆزەوە.

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=3(-1)-3(-1)=0$$

هەنگاوی 3 Dx هەژمار بکە.

لەبەر ئەوەی $D=0$، $Dx \neq 0$، $Dy \neq 0$ ئەوا سیستمەکە ئەستەمە.

$$Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=9$$

$$Dy=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=27$$

ڕۆشنایی

ئەگەر هاتوو $D=0$ و $Dx=0$ ئەوا پێویستە Dy بدۆزیتەوە بۆ ئەوەی بڕیار لەسەر سیستمەکە بدەی کە ئەستەمە یان سەربەخۆیە.

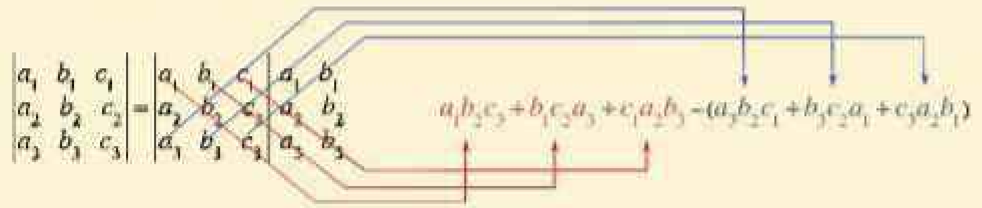
خاڵی چاوێری

2. بە بەکارهێنانی ڕێسای گرامر سیستمەکە شیکاربکە. $\begin{cases} 6x-2y=14 \\ 3x=y+7 \end{cases}$

بۆئەوەی ڕێسای گرامەر بۆ شیکارکردنی سیستمی هێڵی 3×3 بەکاربێنیت، پێویستە هەژماری سنووردەری ڕیزکراوەکانی پلە 3×3 بکەیت. ئەم هێڵکارییەی خوارەوە یەکێکە لە ڕێگاکان بۆ ئەنجامدانی ئەم کارە.

دوو ستوونی یەکەم لەلای ڕاستی سنووردەرەکە بنووسە.

ئەنجامەکانی لێکدانی ژمارەکانی هەر تیرەیەکی سوور کۆبکەوە پاشان سەرجەمی ئەنجامەکانی لێکدانی هەر تیرەیەکی شینی لێدەربکە.



$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-(a_3b_2c_1+b_3c_2a_1+c_3a_2b_1)$$

نموونە 3 هەژمارکردنی سنووردەری ڕیزکراوەی 3 × 3

سنووردەری ڕیزکراوەی $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ بدۆزەوە.

سنووردەرەکە بنووسە پاشان دوو ستوونی یەکەم لەلای ڕاستی سنووردەرەکە بنووسە:

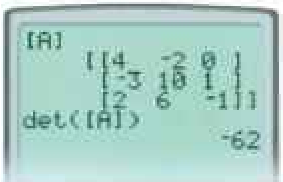
$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{matrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & -2 & 0 & 4 & -2 \\ -3 & 10 & 1 & -3 & 10 \\ 2 & 6 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right|$$

هەنگاوی 1 هەژماری ئەنجامی لێکدانی هەرتیرەیەکی بەرەوژێربکە و ئەنجامیان کۆبکەوە $(4)(10)(-1)+(-2)(1)(2)+(0)(-3)(6)=-44$

هەنگاوی 2 هەژماری ئەنجامی لێکدانی هەرتیرەیەکی بەرەوژوور بکە وئەنجامیان کۆبکەوە

$(2)(10)(0)+(6)(1)(4)+(-1)(-3)(-2)=18$



هەنگاوی 3 ئەنجامی دووەم لە ئەنجامی یەکەم دەربکە

$-44-18=-62$

سنووردەری ڕیزکراوەی A دەکاتە 62-. بەبژمێرەکەت ساغ بکەوە.

ڕۆشنایی

ڕێنەی تیرەکان بە هێڵی کاڵ یارمەتیت دەدات بۆ دیاری کردنی ئەنجامی شەش لێکدانەکەی پێویستە بۆ هەژمارکردنی سنووردەرەکە

خاڵی چاودێری 3. سنووردەری ڕیزکراوەی $A=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ بدۆزەوە.

دەتوانین ڕێسای گرامر فراوان بکەین بۆنەوەی سستەمی هێڵی 3×3 بگرێتەوە.

فێربە

ڕێسای گرامر بۆ سستەمی 3 × 3

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

ئەگەر سنووردەری ریزکراوی هاوکۆلکەکەکان جیاوازبن لە سفر ئەوا سستەمی:

$x=\dfrac{Dx}{D}$ ، $y=\dfrac{Dy}{D}$ ، $z=\dfrac{Dz}{D}$ و $Dx=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ و $Dy=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ و $Dz=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ تەنها یەك شیکاری هەیە.

کاتێك $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ هێمای سنووردەری هاوکۆلکەکان بێت.

ئەگەر $D\neq 0$ ئەوا سستەمێکی دیاریکراو دەبێت.

ئەگەر $D=0$ و هیچ کام لە سنووردەرەکانی یەکسان نەبێت بە سفر ئەوا سیستمێکی نەستەمە.

ئەگەر $D=0$ و یەکێك لە سنووردەرەکانی یەکسان بێت بە سفر ئەوا سیستمێکی نادیار دەبێت.

نموونـــــە 4 جێبەجێکردن لەسەر خۆراکزانی

یەکێك لە شارەزایانی خۆراك نیش لەسەر داڕشتنی سیستمی خۆراکی یاریزانانی تۆپی پێ دەکات. لەم سیستمەدا داوا لە یاریزانان دەکات 3600 گەرمۆکە بەکاربێنین لە بڕی 750 g خۆراکی ڕۆژانە سەرچاوەی ئەم گەرمۆکەیە پێویستە بڕی پڕۆتین و چەوری 60% ی کۆی گەرمۆکەکان بێت. چەند گرام لە پڕۆتین و کاربۆهیدرات و چەوری پێویستە لەم سیستمەدا.

گەرمۆکە لەسەر گرامێکدا	
خۆراك	گەرمۆکە
پڕۆتین	4
کاربۆهیدرات	4
چەوری	9

ئەم سستەمە خۆراکییە پێکهاتووە لە p گرام پڕۆتین و c گرام کاربۆهیدرات و f گرام چەوری.

$4p+4c+9f=3600$ کۆی گەرمۆکەکان

$p+c+f=750$ بڕی خۆراکی گشتی

$4p+0c+9f=2160$ گەرمۆکەکانی پڕۆتین و چەوری دەکاتە $60\%(3600)=2160$

ئاگاداربە!

وریابە لە گرنگی نووسینی ژمارە 0 وەکو هاوکۆلکەی نەزانراوی نادیار

$4p+0c+9f=2160$

$$Df=\begin{vmatrix}4&4&3600\\1&1&750\\4&0&2160\end{vmatrix},\ Dc=\begin{vmatrix}4&3600&9\\1&750&1\\4&2160&9\end{vmatrix},\ Dp=\begin{vmatrix}3600&4&9\\750&1&1\\2160&0&9\end{vmatrix},\ D=\begin{vmatrix}4&4&9\\1&1&1\\4&0&9\end{vmatrix}=-20$$

$$f=\frac{Df}{D}=\frac{-2400}{-20}=120\ ,\ c=\frac{Dc}{D}\frac{-7200}{-20}=360\ ,\ p=\frac{Dp}{D}=\frac{-5400}{-20}=270$$

ئەم سستەمە پێکهاتووە لە g 270 پرۆتین و g 360 کاربۆهیدرات و g 120 چەوری

خاڵی چاودێری

4. چی دەبێت ئەگەر...؟ سستمەکە ڕۆژانە داوای بەکاربردنی 3200 گەرمۆکەی گەرمی و g 700 خۆراك بكات، پێویستە ئەو گەرمۆکە گەرمییەی سەرچاوەکەی کاربۆهیدراتیە 70% کۆی گەرمۆکەکانی گەرمی بێت. چەند گرام لە پرۆتین و کاربۆهیدرات و چەوری پێویستە لەم سستمەدا؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. باسی ڕیزکراوەیەك بکە سنووردەرەکەی سفر بێت.
2. چۆن دەزانیت سێ سنووردەرەکە چی لێدێت، کاتێك ڕێسای گرامەر لەسەر سستەمی هێڵی بۆ دوو هاوکێشە بە دوو نەزانراو جێبەجێدەکرێت؟ ئەگەر یەکێکیان لە ئەنجامی لێکدان ئەویتریان لە ژمارەیەك، پەیدابووبێت.
3. ڕێکخەریە ئەم خشتەیە بنووسەوە و تەواوبکە. لەهەر چوارچێوەك ڕێسای گونجاوی بۆ بنووسە

فێربە

	ڕیزکراوەی 2 x2	ڕیزکراوەی 3 x3
سنووردەر		
ڕێسای گرامر		

4-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ناڕاستەکراو

1 زاراوەکان واتای چییە یەکێك لە دانەکانی ڕیزکراوە هاوکۆڵکەکان سفر بێت؟

بڕوانە نموونە 1

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە.

2 $\begin{bmatrix}7&5\\9&2\end{bmatrix}$ **3** $\begin{bmatrix}1.5&0.25\\6&2.5\end{bmatrix}$ **4** $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\\\frac{3}{4}&-4\end{bmatrix}$ **5** $\begin{bmatrix}-3&40\\-5&66\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

بڕوانە نموونە 2

ڕێسای گرامەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی ئەم سستەمە هێڵییانە.

6 $\begin{cases}6x=2-y\\3x+1=2y\end{cases}$ **7** $\begin{cases}4x+y+6=0\\8x+2y=9\end{cases}$ **8** $\begin{cases}5x-2y=3\\2.5x-y=1.5\end{cases}$ **9** $\begin{cases}2y=2-x\\-3x+6y=-9\end{cases}$

پروانە نموونە 3

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە.

10 $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ **11** $S=\begin{bmatrix}0 & -5 & -1\\ 4 & 1 & 6\\ 2 & 0.5 & 3\end{bmatrix}$ **12** $E=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

پروانە نموونە 4

13 بەکاربردن هەتاو 2kg فستق و 1.5kg بادەم و 3kg بندقی کڕی. بڕی 28 420 دینار پارەیدا. بەڵام دوێنێ هاوڕێی 39 390 دینار پارەی دا نرخی 4.5kg فستق و 2kg بندق، نرخی هەر کیلۆگرامێك لەهەر جۆرێکیان چەندە؟ ئەگەر بزانیت نرخی یەك کیلۆگرام فستق یەکسانە بەکۆی کیلۆگرامێك بادەم و کیلۆگرامێك بندق.

جێبەجێکردنەکان

راهێنانی ئازاد	
بۆ شیکارکردنی تەماشای	
راهێنانی	نموونەکە
17–14	1
21–18	2
24–22	3
25	4

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە.

14 $\begin{bmatrix}3 & -0.4\\ 5 & 0.3\end{bmatrix}$ **15** $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ **16** $\begin{bmatrix}-\frac{2}{5} & 8\\ -\frac{1}{2} & 10\end{bmatrix}$ **17** $\begin{bmatrix}r & -1\\ -2r^2 & \pi r\end{bmatrix}$

ڕێسای گرامەر بەکاربێنە بۆ شیکاری سستەمی هێڵی

18 $\begin{cases}0.5x+6y=2\\ 0.25x+3y=0.5\end{cases}$ **19** $\begin{cases}x+2y=3.5\\ 3x-y=2.7\end{cases}$ **20** $\begin{cases}2x+y=3\\ x+\frac{y}{2}=2\end{cases}$ **21** $\begin{cases}3y-x=7\\ 2x+3y=-7\end{cases}$

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە.

22 $A=\begin{bmatrix}2.5 & 1.5 & 0\\ 3.2 & 1 & -4\\ 6.4 & -5 & 2.1\end{bmatrix}$ **23** $L=\begin{bmatrix}-2.4 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0.5\\ 0 & 3.5 & 1\end{bmatrix}$ **24** $W=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -5 & 0\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}$

25 لەش جوانی (رشاقة) ناراس ژمارەی کاتژمێری ئەو مەشقانەی پێی هەڵدەستێت بە ژمارەی گەرمۆکەکانی گەرمی ڕۆژانە پێویستیەتی تۆمارکرد. ناراس چەند گەرمۆکەی پێویستە لەهەر کاتژمێرێکدا بۆهەر جۆرێك لەو مەشقانەی ئەنجامی دەدات. ڕێسای گرامەر بەکاربێنە بۆ شیکاری پرسیارەکە.

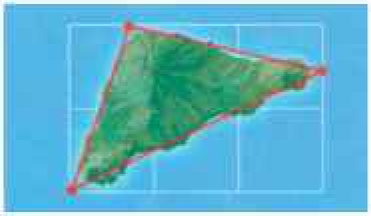
تۆماری کاتەکانی مەشقەکانی ناراس				
	پاسکیل سواری	تۆپی سەرمێز	مەلەوانی	گەرمۆکەی پێویست
دووشەممە	1.5 h	1h	0.75 h	1620
چوارشەممە	0.75 h		1 h	915
پێنجشەممە	1 h	1.5 h		1320

26 زانستەکان ئەم خشتەی خوارەوە بارستە گەردیلەکانی سێ بابەت نیشان دەدات، سستەمێکی هاوکێشەی هێڵی بنووسە ڕێسای گرامر بۆ دیاریکردنی بارستە گەردیلەی هەر یەك لە کاربۆن (C)، هایدرۆجین (H)، ئۆکسجین (O) بەکاربهێنە

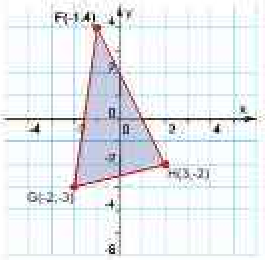
ماددە	شێوک	بارستەگەردیلە
میثان	CH_4	16
گلسیرۆل	$C_3H_8O_3$	92
ئاو	H_2O	18

ئەندازە سێگۆشەیەك سەرەکانی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) ڕووبەرەکەی یەکسانە بە بەهای ڕووتی سنووردەری $A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$ ئەم زانیارییە بەکاربێنە بۆ شیکاری پرسیاری **26** و **27**.

27 ڕووبەری دورگەیەی خوارەوە بدۆزەوە.



28 ڕووبەری سێگۆشەی FGH بدۆزەوە.



29 **بیری ڕەخنەگری** بەهای c چەندە کەوا لە سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکانی سستەمی $\begin{cases}2x+y=6\\cy=3-x\end{cases}$ بکات یەکسانە بێت بە سفر؟ ڕوونیبکەوە چۆن دەیدۆزیتەوە.

30 **ئەنتەرنێت** یەکێك لەماڵپەڕەکانی ئەنتەرنێت داوای هەڵسەنگاندنی بابەتێکی کرد. بە پێدانی خاڵێك یان دوو خاڵ یان 3 خاڵ. ژمارەی هەڵسەنگاران 38 کەس بووە. ژمارەی ئەوانەی 3 خاڵیان دابوو دوو ئەوەندەی ئەوانە بوون کە یەك خاڵیان دابوو. ژمارەی کەسەکانی هەرجۆرە هەڵسەنگاندنێك چەندە؟ ئەگەر زانیت ژمارەی گشتی خاڵەکان 85 خاڵە.

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بە پێی x بدۆزەوە.

31 $A=\begin{bmatrix}x & x-1\\x+1 & x\end{bmatrix}$

32 $B=\begin{bmatrix}x-2 & x+2\\x+2 & x+6\end{bmatrix}$

33 $C=\begin{bmatrix}6x^2 & -6x+2x^2\\3x & x-3\end{bmatrix}$

34 **کانزای بەنرخ** پارچەیەك پارەی بچووك زیو 2.268 g و پارچەیەك پارەی گەورەی زیو 5 g . ئومێد 425 پارچە پارەی لەهەردوو جۆرەکە هەیە. کێشی هەمووی 1483 g بوو.

أ ئومێد چەند پارچە پارەی لەهەر جۆرێك لایە.

ب نرخی زیوەکان چەندە، ئەگەر نرخی پارچە بچووکەکە 30 000 دینار و پارچە گەورەکەش 72 000 دینار بێت؟

35 کۆمەڵێك لە 6 گەورە و 3 منداڵ پێکهاتبوون سەردانی باخچەی ئاژەڵانیان کرد 48 000 دینار پارەیان دا. لەکاتێکدا کۆمەڵێکی تر لە دوو گەورە و 10 منداڵ پێکهاتبوون 52 000 دینار پارەیان دا بۆ چوونە ژوورەوە. نەزانراوی x بەکاربێنە بۆ نرخی بلیتی منداڵان و y بۆ نرخی بلیتی گەورەکان.

أ ئەو هاوکێشانە بنووسە کە ئەم پرسیارە ڕوونبکاتەوە؟

ب ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بنووسە و هەژماری سنووردەرەکەی بکە؟

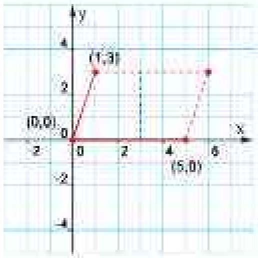
ج پرسیارەکە چەند شیکاری هەیە؟

د ڕێسای گرامەر بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای دوو نەزانراو؟

هـ نرخی بلیتی چوونە ژووری گەورەکان چەندە؟ نرخی بلیتی چوونە ژوورەوەی منداڵان چەندە؟

36 **بنووسە** چۆن ساغیدەکەیتەوە کە هاوڕێژەیەك ڕاستە؟ و چۆن ساغیدەکەیتەوە کە سنووردەری ڕیزکراوەی 2×2 دەکاتە سفر. بەراوردی بکە.

37 **هەنگاوی جۆراوجۆر** دوو خاڵی $(5, 0)$ و $(1, 3)$ دووسەری لاتەریبێکن، یەکێك لەسەرەکانی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا، وەك لەم وێنەیە نیشاندراوە.



أ ڕووبەری لاتەریبەکە بدۆزەوە.

ب هەردوو خاڵەکە بەڕێز لە $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ دابنێ هەژماری بەهای سنووردەرەکە بکە. پەیوەندی چییە لەنێوان بەهای سنووردەرەکە و ڕووبەری لاتەریبەکە؟

ج درێژی و پانی لاتەریبەکە بگۆڕە، پاشان هەژماری ڕووبەرەکەی و بەهای سنووردەرەکەی بکە. ئایا ئەو پەیوەندییەی دۆزیتەوە ڕاستە لەنێوان سنووردەرەکە و ڕووبەرەکە؟

د ئاڵوگۆڕ بکە لەنێوان دوو خاڵی لقی (ب) بەشێوەیەك خاڵی (x_1, y_1) ببێتە خاڵی $(1, 3)$ سەرلەنوێ هەژماری سنووردەرەکەی و ڕووبەرەکەی بکە. کاریگەری ئەم ئاڵوگۆڕکردنە چییە لەسەر بەهای سنووردەرەکەی؟

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

38 کام باسێك لەمانە ڕاستە لەسەر ئەم سستەمە هێڵییە $\begin{cases} 3x = y - 1 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$ ؟

أ) بێسنوور: ژمارەیەکی نادیار شیکاری هەیە
ب) نەستەمە: شیکاری زۆرە
ج) نەستەمە: شیکاری نیە
د) سنووردارە: یەك شیکاری هەیە

39 کام ڕیزکراوە سنووردەرەکەی 1 ؟

أ) $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
ب) $\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
ج) $\begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
د) $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

40 **کورتە وەڵام** بەهای x بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $25 = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}$.

بەرەنگاری پەرەپێدان

41 وادابنێ یەکێك لە ستوونەکان یان ڕیزەکانی ڕیزکراوەی 3×3 هەمووی سفرە. کاریگەری چی دەبێت لەسەر سنووردەرەکەی.

42 ڕیزکراوەیێك بنووسە کە سنوورەکەی $x^2 + y^2$ بێت.

43 بەهای a و b و c بدۆزەوە ئەگەر $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{5}$.

44 **شارستانی** بەمەبەستی دانانی پەیکەرێك لە یەکێك لەگۆڕەپانەکانی شارێك. کە لە بەشی باکوور و باشوور پێکهاتووە ڕاپرسییەك لە نێوان دانیشتوانەکەیدا ئەنجامدرا. ئەنجامی ئەم ڕاپرسییە بەڕێژەی سەدی نووسراوە لە خشتەی بەرامبەردا لەبەشی باشوور لەگەڵ دانانی پەیکەرەکەن ئەگەر بزانیت ژمارەی ئەوانەی بەشداری ڕاپرسییەکەیان کردووە 4 826 کەسن.

ئەنجامی ڕاپرسی		
بەش	لەگەڵدانان	دژی دانان
باکوور	47%	53%
باشوور	85%	15%
کۆی	49%	51%

ژمارەی ئەو هاولاتیانەی بەشی باشوور چەندە؟ کە دەنگیان بۆ ئەم ڕاپرسیە داوە.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

45 بەکاربردن ساقان 135 000 دیناری پێبوو. کاتێک چووە دوکانی پێڵاوی ژنان پێڵاوێکی بینی نرخەکەی بەڕێژەی %25 داشکابوو. لاسەنگەیەک بنووسە کە نرخە بنەڕەتیەکە پاسەدان بکات. ئەگەر بزانیت ساقان پێڵاوەکەی کڕی. (پۆلەکانی پێشوو)

ئەم هاوکێشانە بە لەجیاتیدانان شیکاربکە. (پۆلەکانی پێشوو)

46 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ 6x - 6y = 16 \end{cases}$

47 $\begin{cases} x + y = -5 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

48 $\begin{cases} 2x = y \\ 4x + y = -2 \end{cases}$

ڕێزکراوە بەکاربێنە بۆ گۆڕینی چوارلای $DEFG$ کاتێک $D(1, 1)$ و $E(4, -2)$ و $F(-2, -3)$ و $G(-1, -1)$ بێت. (وانەی 3-3)

49 ڕاکێشانی 5 یەکە بۆلای ڕاست و 3 یەکە بۆ سەرەوە.

50 وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری یەکەم.

51 ڕاکێشانی یەک یەکە بۆلای چەپ و دوو یەکە بۆ خوارەوە.

52 هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی ڕێژەکەی 3 بێت.

بەشی

3

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1-3 ڕیزکراوەکان و پێدراوەکان

سیفەتە میدالیاکانی یاری ئۆڵۆمپی			
	زێڕ	زیو	برۆنزی
کێش	567 gr	567 gr	453.6 gr
مس	7.5	7.5	90
ژمارەی کاتژمێری دروستکردن	19.65	18.30	18.45

خشتەکە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانی 1 تا 4

1 ڕیزکراوەی M بەکاربێنە بۆ نیشاندانی پێدراوی ناو خشتەکە.

2 ڕیزکراوەی M چ جۆرێکە؟

3 بەهای M_{32} چەندە؟ ئەم بەهایە چی دەنوێنێت؟

4 ناونیشانی دانەی 90 چەندە؟

ئەم ڕیزکراوانە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانی 5 تا 8

$$D=\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\ -1.5 & 2 & -2\end{bmatrix} ، C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\\ 5 & -1\end{bmatrix} ، B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix} ، A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

5 $A+C$ **6** $2B$ **7** $C-D$ **8** $C-3A$

2-3 لێکدانی ڕیزکراوەکان

جۆری ڕیزکراوەکانی $P_{5\times2}$، $Q_{2\times5}$، $R_{1\times5}$، $S_{5\times3}$ بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 9 تا 12 .

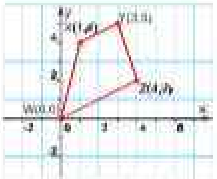
دیاریبکە ئایا ئەنجامی لێکدانەکە پێناسەکراوە. ئەگەر پێناسەکراو بوو جۆرەکەی بنووسە

9 PQ **10** QR **11** RS **12** SP

ئەم ڕیزکراوانەی خوارەوە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانی 13 تا 16

$$H=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} ، G=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix} ، F=\begin{bmatrix}0.5 & 0.75 & -1\end{bmatrix} ، E=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 5 & 3 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

13 EF **14** FH **15** HG **16** G^2



3-3 جێگۆڕکێ ئەندازەییەکان بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان

ئەم جێگۆڕکێ ئەندازەییانە بۆوتانی سەری چوارلایەکەی بدۆزەوە و وێنەی بکێشە.

17 ڕاکێشانی یەك یەکە بۆلای چەپ و دوو یەکە بۆ خوارەوە.

18 بچووککردنەوەیەك بەڕێژەی $\frac{2}{3}$

19 گۆڕینی ڕیزکراوەکەی بە $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ جۆری وێنەکە دیاریبکە.

20 گۆڕینی ڕیزکراوە بە $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ جۆری وێنە دیاریکە

21 گۆڕینی ڕیزکراوە بە $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ جۆری وێنە دیاریکە

4-3 سنووردەرەکان

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە.

22 $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ **23** $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 3 & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$ **24** $\begin{bmatrix}0.5 & 1.2\\ -0.2 & 2.0\end{bmatrix}$ **25** $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{bmatrix}$

بە بەکارهێنانی ڕێسای گرامەر، ئەمانە شیکاربکە.

26 $\begin{cases}2x+3y=5\\ y=1-x\end{cases}$ **27** $\begin{cases}x-y=2\\ y-x+4=0\end{cases}$ **28** $\begin{cases}2x-y+z=3\\ 3x+2y=2z+1\\ z=x+2\end{cases}$

5-3 هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکان

Matrix Inverse

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەوانەی ئیش لە ئاوێتەکردن و کردنەوەی جفرەکاندا دەکەن. بۆ پاراستنی نهێنی نامەکان (نموونە 4)

ئامانجەکان

- بڕیاردەدا ڕیزکراوەیەك هەڵگەڕاوەی هەیە یان نا.
- سیستمی هاوکێشەی هێڵی، بەبەکارهێنانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکان شیکاردەکات.

زاراوەکان
Vocabulary

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە
Matrix inverse

هاوکێشەی ڕیزکراوەکان
Matrix equation

ڕیزکراوەی ئەژاتراوەکان
Variable matrix

ڕیزکراوەی نەگۆڕەکان
Constant matrix

دەتوانیت نامە بە جفرە بنووسێت بە هۆی ڕیزکراوەکان. ئەو کەسەی نامەکەی پێدەگات، پێچەوانەی کردارەکە بەکاردەهێنێت، بۆ کردنەوەی جفرەکە و خوێندنەوەی نامەکە.
بۆئەوەی ڕیزکراوە هەڵگەڕاوەی هەبێت پێویستە چوارگۆشەیی بێت. هەرچەندە ئەم مەرجە بەس نییە، چونکە هەندێك ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی هەڵگەڕاوەی نییە. کاتێك ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەی A لە ڕیزکراوەی B یەکسان بێت بە ڕیزکراوەی یەکە I ئەوا $AB=BA=I$. لەم بارەدا بە ڕیزکراوەی B دەوترێت هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی A **Matrix Inverse** . هێمای A^{-1} بۆ دادەنرێت.

نموونە 1 دیاریکردنی ڕیزکراوەیەك هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەیەکی تر بێت

دیاریبکە ئایا ڕیزکراوەی B هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی A یە.

أ $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&1&2\\2&0&4\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{6}\\-2&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&1&2\\2&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{6}\\-2&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

لەبەرئەوەی ئەنجامی لێکدانیان ڕیزکراوەی یەکەیە کەواتە ڕیزکراوەی B هەڵگەڕاوەی A یە.

ب $A=\begin{bmatrix}2&3\\7&10\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}-10&6\\7&-4\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}2&3\\7&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10&6\\7&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$$

بە پشت بەستن بەوەی پێشوو، ڕیزکراوەی B هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی A نییە.

لەبیرت بێت

ڕیزکراوەی یەکەی پلە n ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەییە لەجۆری n کە هەموو دانەکانی 0 ، جگە لە دانانەکانی تیرەی سەرەکی نەبێت، کە هەموویان یەکسانن بە 1 . ڕیزکراوەی یەکە لە جۆری 3 بریتییە لە:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

خاڵی چاودێری

1. دیاریبکە ئایا ڕیزکراوەی A هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی B یە

$A=\begin{bmatrix}-1&0&2\\4&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}-0.2&0&0.4\\1.2&1&-1.4\\0.4&0&0.2\end{bmatrix}$

فێربە

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی پلە 2

ئەگەر ستووردەری ڕیزکراوەی $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یەکسان نەبێت بەسفر ئەوا ئەو ڕیزکراوەیە هەڵگەڕاوەی دەبێت و بریتییە لە $M^{-1}=\frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ڕیزکراوە هەڵگەڕاوەی نابێت ئەگەر ستووردەرەکەی یەکسان بێت بە سفر.

نموونە 2 دۆزینەوەی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی چوارگۆشەیی پلە دوو

هەڵگەڕاوەی ئەم ڕیزکراوە بدۆزەوە ئەگەر هەبوو.

أ $M=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

هەژماری ستووردەرەکەی بکە.

$$|M|=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=(-2)(-4)-2\times 3=2\neq 0$$

لەبەرئەوەی ستووردەرەکەی یەکسان نییە بە سفر کەواتە هەگەڕاوەکەی بریتییە لە:

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

ب $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$

هەژماری ستووردەرەکەی بکە.

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times 12-2\times 3=0$$

لەبەرئەوەی ستووردەرەکەی یەکسانە بە سفر، کەواتە ڕیزکراوەکە هەڵگەڕاوەی نییە.

ڕۆشنایی

بۆ بەدەستهێنانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ لە ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ دوە ئاڵوگۆڕ بکە لەنێوان دانەی a و d و نیشانەی دوو دانەکەی تر پێچەوانە بکە.

خاڵی چاودێری

2. هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $C=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ بدۆزەوە.

دەتوانیت ڕیزکراوەکان بەکاربهێنیت بۆ شیکارکردنی سستەمی هاوکێشەی هێڵی. بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان سستەمی هاوکێشەکان دەگۆڕێتە سەر کردارێکی هاوشێوەی هاوکێشەی هێڵی وەك $5x=20$. بە لێکدانی هەردوولای هاوکێشەکە لەهەڵگەڕاوەی هاوکۆلکەی 5 واتە $\frac{1}{5}$.

بۆ ئەنجامدانی ئەم کارە سستەمی هاوکێشەکان دەگۆڕێت بۆ **هاوکێشەی ڕیزکراوەی** $AX=B$ **Matrix equation** ، کاتێك A هێمای ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکانی سستەمەکە بێت. بەڵام X هێمای **ڕیزکراوەی نەزانراوەکان Variable matrix** بێت. هەروەها B هێمای **ڕیزکراوەی نەگۆڕەکان Constant matrix** بێت.

ئەو هاوکێشە ڕیزکراوەییەی سستەمی ئەم دوو هاوکێشە هێڵییە دەنوێنێت $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ بریتییە لە:

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان ← ؛ ڕیزکراوەی نەگۆڕەکان ← ؛ ڕیزکراوەی نەزانراوەکان ↑

بۆ شیکار کردنی هاوکێشەی ڕیزکراوەیی $AX=B$ هەردوولا لێکدانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی A بکە. «وادابنێ هەیە»: $A^{-1}AX=A^{-1}B$

$$IX=A^{-1}B$$
$$X=A^{-1}B$$

ئەنجامی لێکدانی ڕیزکراوەی A لە هەڵگەڕاوەکەی بریتییە لە ڕیزکراوەی یەکە I

نموونـــــە 3 شیکارکردنی سیستمی هاوکێشەی هێڵی بە بەکارهێنانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە

هاوکێشەیەکی ڕیزکراوەیی بنووسە کە ئەم سیستمە هێڵیە بنوێنێت $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ پاشان شیکاربکە.

هەنگاوی 1 ئەو هاوکێشە ڕیزکراوەییە بنووسە کە ئەم سستەمی دوو هاوکێشەییە بنوێنێت.

$$\begin{matrix} A & X & = & B \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

هەنگاوی 2 سنورەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بدۆزەوە.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\times 1-1\times 2=-1\neq 0$$

هەنگاوی 3 هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بدۆزەوە.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

هەنگاوی 4 شیکاربکە.

$$\begin{matrix} X= & A^{-1} & B \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

کەواتە شیکارەکەی: $x=-7$ و $y=15$.

> **ئاگاداریە!**
> لەبەرئەوەی لێکدانی ڕیزکراوە کرداری ئاڵوگۆڕ نییە. بۆیە پێویستە گرنگی بدەی بە لێکدانی هەڵگەڕاوەکەی بە هەمان ڕیزی هەردوولای یەکسانەکە. پێویستە A^{-1} لەهەردوولا بکەوێتە یەکەمی لای چەپ.

خاڵی چاودێری

ئەو هاوکێشە ڕیزکراوەییە بنووسە کە ئەم سیستمە دەنوێنێت $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ پاشان شیکاری بکە.

25	ل	13	ڕ	1	ئ
26	ڵ	14	ز	2	ا
27	م	15	ژ	3	ە
28	ن	16	س	4	ب
29	هـ	17	ش	5	پ
30	و	18	ع	6	ت
31	وو	19	غ	7	ج
32	ۆ	20	ف	8	چ
33	ی	21	ڤ	9	ح
34	ێ	22	ق	10	خ
0	ــــ	23	ک	11	د
		24	گ	12	ر

ئەو ڕیزکراوانەی هەڵگەڕاوەیان هەیە بەکاردێن بۆ جفرەکردنی نامەکان. وا دابنێ دەتەوێت ئەم نامەیە جفرەبکەی: «بەیانی زەماوەندە» قۆناغی یەکەم لە کرداری جفرەکردن بریتییە لە گۆڕینی نامەکە بۆ ژمارەی یەکبەدوای یەک. بە بەکارهێنانی خشتەی جفرەکردن. هەر پیتێك دەگۆڕێت بۆ ژمارەیەك «نامەنێر و نامەوەرگر هەمان خشتەی جفرەکردن بەکاردێنن» دەتوانیت خشتەی بەرامبەر بەکاربێنێت. کاتێك ــــ هێمای بۆشایی نێوان دوو وشە بێت. نامەکە پیت بە پیت بنووسە. لەگەڵ بەکارهێنانی هێمای ــــ بۆ جیاکردنەوەی وشەکان.

> **ئاگاداریە!**
> ئەگەر ژمارەی داتەکانی یەکبەدوای یەکەکە تاك بوو پێویستە لە کۆتایی یەکبەدوای یەکەکە 0 زیادبکەیت تا داتاکان ببێت بە جووت پاشان بکرێت بە ڕیزکراوە.

ە	د	ن	ە	و	ا	م	ە	ز	ــــ	ی	ن	ا	ی	ە	ب
3	11	28	3	30	2	27	3	14	0	33	28	2	33	3	4

ئەم یەکبەدوای یەکە لە ڕیزکراوەیەکی دوو ڕیزدا بنووسە لە ڕاستەوە بۆ چەپ، ئەم ڕیزکراوەیەت دەستدەکەوێت.

$$A=\begin{bmatrix} 14 & 0 & 33 & 28 & 2 & 33 & 3 & 4 \\ 3 & 11 & 28 & 3 & 30 & 2 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

کردنەوەی جفرەی ئەم نامەیە کارێکی گران نییە بۆیە نامەنێر ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشەیی کە هەڵگەڕاوەی هەبێت بەکاردێنێت بۆ شاردنەوەی یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکە پێش ناردنی. نامە وەرگر هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە بەکاردێنێت بۆ لابردنی شاردنەوەکە لەسەر ئەو یەکبەدوای یەکە ژمارەییەی پێی دەگات ڕیزکراوەی شاردنەوەی $M=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە و لێکدانی ڕیزکراوەی A بکە ئەمەت دەست دەکەوێت.

$$B = MA \begin{bmatrix} 45 & 11 & 127 & 87 & 36 & 101 & 36 & 15 \\ 76 & 22 & 221 & 146 & 70 & 169 & 69 & 26 \end{bmatrix}$$

نامەنێر ئەم یەکبەدوای یەکە دەنێرێت:

76 22 221 146 70 169 69 26 45 11 127 87 36 101 36 15

نامەوەرگر پێویستە ئەم یەکبەدوای یەکە بە ڕیزکراوەی دوو ڕیز لە ڕاستەوە بۆ چەپ. ئەم ڕیزکراوەیەی دەستدەکەوێت.

$$C = \begin{bmatrix} 45 & 11 & 127 & 87 & 36 & 101 & 36 & 15 \\ 76 & 22 & 221 & 146 & 70 & 169 & 69 & 26 \end{bmatrix}$$

پاشان لێکدانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی M ی دەکەین کە بریتییە لە $M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ ئەنجامی لێکدانی $M^{-1}C$ بریتییە لە:

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 33 & 28 & 2 & 33 & 3 & 4 \\ 3 & 11 & 28 & 3 & 30 & 2 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

وەرگر دانەکانی ئەو ڕیزکراوەکەی بەدەستی هێناوە بەیەك بەدوای یەکی ژمارەیی دەنوسێت بە دەستپێکردن لە لای ڕاستی ڕیزی یەکەم ئەمەی دەستدەکەوێت.

3 11 28 3 30 2 27 3 14 0 33 28 2 33 3 4

لەژێر هەر ژمارەیەکدا پیتەکەی بەرامبەری لە خشتەی جفرەکەوە دەنووسێت.

3	11	28	3	30	2	27	3	14	0	33	28	2	33	3	4
ە	د	ن	ە	و	ا	م	ە	ژ	ـــ	ی	ن	ا	ی	ە	ب

نامەکە دەخوێنێتەوە «بەیانی زەماوەندە»

نموونـــە 4 جێبەجێکردن لەسەر جفرە

هەژار ئەم نامەیەی لە لاوینی هاوڕێیەوە پێگەیشت 119 63 36 15 9 25 85 51 33 11 6 25 . لاوین و هەژار ڕیزکراوەی شاردنەوەی $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ بەکاردەهێنن. نامەکەی لاوین چییە؟

هەنگاوی 1 هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی M بدۆزەوە.

$$M^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

هەنگاوی 2 ئەو نامەیەی هەژار بەدەستی گەیشتوە لە ڕاستەوە بۆ چەپ بەشێوەی ڕیزکراوەی دوانی بنووسە.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 9 & 15 & 36 & 63 & 119 \\ 25 & 6 & 11 & 33 & 51 & 85 \end{bmatrix}$$

هەنگاوی 3 $M^{-1}A$ هەژماربکە.

$$M^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 9 & 15 & 36 & 63 & 119 \\ 25 & 6 & 11 & 33 & 51 & 85 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 0 & 3 & 27 & 27 & 17 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 12 & 34 \end{bmatrix}$$

هەنگاوی 4 ڕیزکراوەکە بەشێوەی یەکبەدوای یەك بنووسە

0 3 4 3 12 34 25 0 3 27 27 17

هەنگاوی 5 جفرەی نامەکە بکەوە

0	3	4	3	12	34	25	0	3	27	27	17
ـــ	ە	ب	ە	ر	ێ	ل	ـــ	ە	م	م	ش

(شەممە لێرەیە) نامەکەی لاوینە

خاڵی چاودێری

4. ڕیزکراوەی شاردنەوەی $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ کردنەوەی ئەم نامەیە

0 20 60 27 36 12 0 46 148 69 75 31 .

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەگەر زانیت ڕیزکراوەی A هەڵگەڕاوەی هەیە. چ ئەنجامێك دەرئەنجام دەکەیت؟

2. هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی یەکە چەندە؟

3. ڕێکخەریە ئەم خشتەیە دروستبکە و تەواوی بکە. بەراوردبکە لەنێوان هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە و هەڵگەڕاوەی ژمارەی ڕاستی.

فێربە

	ژمارە ڕاستییەکان	ڕیزکراوەکان
نووسین لەگەڵ نموونە		
چۆن هێمای هەڵگەڕاوەی ڕیزکراو یان هێمای هەڵگەڕاوەی ژمارە ئامادە دەکەیت		
سیفەتی ئاڵوگۆڕکردن		

5-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ناڕاستەکراو

1 زاراوەکان چۆن سیستمی هاوکێشەی هێڵی بە دوو نەزانراو بەشێوەی ڕیزکراوە دەنووسیت.

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە ئەگەر هەر ڕیزکراوەیەك هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکەی تریان بێت.

2 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 3 & 12.5 & 3 \\ -1.6 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 1 \\ 1.2 & 0 & 0.8 \\ -1.6 & 0.2 & -1 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

بڕوانە نموونە 2

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە بدۆزەوە ئەگەر هەبوو.

5 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{3}{2} & 9 \end{bmatrix}$

8 $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

9 $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

بڕوانە نموونە 3

ئەم سیستمی هاوکێشانە بەشێوەی ڕیزکراوەیی بنووسە

10 $\begin{cases} 3x-y=5 \\ y=2x-4 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 5x+9y=1 \\ 2-4x-7y=4 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2x+4y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

بڕوانە نموونە 4

13 **جفرە** سیروان نامەیەکی لە ئامانجی هاوڕێیەوە پێگەیشت. کاتی دیداری هەردووکیانی تێدا دیاری کردوە. ئەمەش نامەکەیە: 93 6 34 105 85 126 221 14 82 255 199 298 سیروان ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ بەکارهێنابوو بۆ شاردنەوەی نامەکەی، کاتی دیداری هەردووکیان چەندە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	تەماشای نموونە
16–14	1
21–17	2
24–22	3
25	4

ئایا هەریەك لەم ڕیزکراوانە هەڵگەڕاوەی ئەویتریانە؟

14 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} -\frac{16}{15} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{8}{15} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -2 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

هەڵگەڕاوەی ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە ئەگەر هەڵگەڕاوەی هەبوو.

17 $\begin{bmatrix} -0.25 & -0.5 \\ -1.5 & -2 \end{bmatrix}$

18 $\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

19 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

20 $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

21 $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$

هەریەك لەم سستمانە بەشێوەی ڕیزکراوەیی بنووسە

22 $\begin{cases} x-y=5 \\ 2y-x=6 \end{cases}$

23 $\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x+y=9 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 4x+7y=10 \\ 3x+5y=9 \end{cases}$

25 **جفرە** ئاری لە هاوڕێکەیەوە ئەم نامەیەی پێگەیشت. ناوی ئەو شارەی تێدا دیاریدەکات کە ئێستا لێی دەژێت نامەکە بریتییە لە: 277 15 198 27 136 167 59 62 3 43 6 33 40 14

ڕیزکراوەی شاردنەوەی $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ بەکارهاتووە بۆ شاردنەوەی نامەکە. ناوی ئەو شارە چییە؟

26 **گونجاندن (توضیب)** هەتاو سێ جۆر میوەی پیشاندراوی بەراوردکرد. هاوکێشەی ڕیزکراوەیی بۆ بنووسە و شیکاری بکە. بۆ دۆزینەوەی نرخی هەر کیلۆگرامێك هەرمێ و خۆخ و هەڵوژە.

27 **هەنگاوی جۆراوجۆر** بانەی بابل گەشتێکی دەریایی ڕێکخست کە بەلەمی تێدا بەکارهاتبوو دوو جۆر بوون، گەورەکان 6 کەسی دەگرت. بچووکەکانیان دوو کەسی دەگرت. ژمارەی گەشتیاران 34 کەس بوو پرسیارەکە دەربەبڕدرێت بەم سستەمە هێڵییە $\begin{cases} 6x+2y=34 \\ x+y=7 \end{cases}$، کاتێك x هێمای ژمارەی بەلەمە گەورەکانە و y ژمارەی بەلەمە بچووکەکانە.

أ ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بنووسە؟

ب سستمەکەی پێشوو لەسەر شێوەی ڕیزکراوە بنووسە؟

ج هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بنووسە؟

د شیکاری هاوکێشەی ڕیزکراوەیی بکە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی بەلەمەکانی هەرجۆرێك؟

28 **بیری ڕەخنەگر** ئەو پەیوەندییە چییە. ڕیزکراوە و هەڵگەڕاوەکەی و ڕیزکراوەی یەکە بەیەکەوە دەبەستێت؟

29 هەکار نامەیەکی جفرەکرد و دەیەوێت بۆ هاوڕێیەکەی بینێرێت نامە جفرەکراوەکە لە ڕیزکراوەی C دا نووسی. ڕیزکراوەی شاردنەوەی M ی بەکارهێنا. نامەیەکی شاراوەی جفرەکراوی D دەستکەوت. ئەو مەرجانە چین پێویستە ڕەچاوبکرێن بۆ ڕیزکردنی ڕیزکراوەکان.

30 **هەڵە لە شیکردنەوە** هەریەکە لە شوان و ساقان. هەژماری هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ یان کرد. ئایا کامیان هەڵەی کردووە؟ هەڵەکە ڕوونبکەوە.

أ) شوان: $M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

ب) ساقان: $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

31 **بۆ خۆشی** باوکت وتی 5000 دینار لە گیرفانمدایە، پێکهاتووە لە جۆری 50 دیناری و 100 دیناری نەیدەم بە تۆ ئەگەر بزانیت چەند پارچە لەهەر جۆرێك لە گیرفانمدایە، بۆ یارمەتیدانت وتی ژمارەی پارچەکان هەمووی 73 پارچەیە. هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ بردنەوەی 5000 دینارەکە.

32 **ئاو** شارەوانی شارێك بۆرییەکی ئاوی لە یەکێك لە باخچە گشتییەکانی شار دانا. بۆئەوەی گەشتیاران بەکاریبێنن. ئەم بۆرییە 24 کاتژمێر لە ڕۆژێکدا ئیش دەکات دەتوانرێت بەسێ خێرایی هێواش و ناوەند و خێرا بەکاربهێنرێت. ئەم خشتەیەی خوارەوە پێدراوەکانی بەکارهێنانی بۆرییە ئاوەکەیە لەماوەی سێ ڕۆژدا. خێرایی هەرسێ جۆرەکە بە کیلۆلیتر بۆ هەر کاتژمێرێك بدۆزەوە.

	هێواش ژمارەی کاتژمێرەکان	ناوەند ژمارەی کاتژمێرەکان	خێرا ژمارەی کاتژمێرەکان	پڕەکەی بە کیلۆمەتر
یەکشەممە	15	7	2	199
دووشەممە	16	4	4	208
سێشەممە	12	8	4	236

33 **چی دەبێت ئەگەر**... وا دابنێین کە دانەکانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ بکەیت بە دوو ئەوەندە؟

أ) دانەکانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە چۆن دەگۆڕێت؟

ب) دەستەواژەیەك بنووسە لەسەر چۆنیەتی گۆڕانی دانەکانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوێکی سنووردار. ئەگەر ڕیزکراوەکە لێکدانی ژمارە k بکەیت؟

34 هەرێم 24 000 دیناری دا بۆ نرخی چوونەژوورەوەی 7 بلیتی منالان و 2 بلیتی گەورە بۆ باخچەی ئاژەڵان. مازن 46 000 دینار پارەی دا نرخی 4 بلیتی گەورە و 13 بلیتی منالان. نەزانراوی x بەکاربێنە بۆ نرخی بلیتی گەورە و نەزانراوی y بۆ نرخی بلیتی منداڵان.

أ) بەهۆی سیستەمی هاوکێشەکانەوە ئەم پرسیارە دەربڕە.

ب) ئایا سنووردەری ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان یەکسانە بە سفر؟ ژمارەی شیکارەکانی چەندە؟

ج) شێوەی ڕیزکراوە و هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی x و y.

د) نرخی بلیتی گەورە چەندە؟ نرخی بلیتی منداڵان چەندە؟

35 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** أ بیسەلمێنە هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بریتییە لە $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ،

ب هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوێك $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ سنووردەرەکەی 1 بێت چەندە؟

ج ئەو هۆیە چییە کە وادەکات دانەکانی هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ژمارەی تەواوبێت. کاتێك دانەکانی ڕیزکراوەکە ژمارەی تەواوبن و سنووردەرەکەی 1 بێت.

36 بەهای x بدۆزەوە کاتێك ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ هەڵگەڕاوەی نەبێت.

37 هەڵگەڕاوەی ئەو ڕیزکراوەیە چەندە کە تەنها یەك دانەی هەیە $[a]$ ؟

38 **کیمیا** سانا بڕێك لە گیراوەیەك %15ی ترشی گۆگرد بێت تێکەڵ کرد لەگەڵ گیراوەیەکی تر کە %40 ئەو ترشەی تێدابێت. بڕی 50L بەدەستهێنا ڕێژەی ترشی گۆگرد تێیدا %35 بوو. ئایا چەند لیتر لەهەریەك لە گیراوەکان تێکەڵ کرا؟

39 **بنووسە** ئەنجامی لێکدانی $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ بدۆزەوە. پەیوەندی چییە لەنێوان ئەم دوو ڕیزکراوەیە؟

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

40 کام لەمانەی خوارەوە هاوکێشەی ڕیزکراوەیی سیستەمی $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ x=y+1 \end{cases}$ ؟

أ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

ج $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

د $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

41 کام لەمانەی خوارەوە ڕاستە بۆ ئەم ڕیزکراوەیە $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$ ؟

أ ڕیزکراوەکە هەڵگەڕاوەی هەیە. چونکە سنووردەرەکەی یەکسان نییە بە سفر.

ب ڕیزکراوەکە هەڵگەڕاوەی هەیە. چونکە سنووردەرەکەی یەکسانە بە سفر.

ج ڕیزکراوەکە هەڵگەڕاوەی نییە. چونکە سنووردەرەکەی یەکسانە بە سفر.

د ڕیزکراوەکە هەڵگەڕاوەی نییە. چونکە سنووردەرەکەی یەکسان نییە بە سفر.

42 دانەی b_{11} چەندە؟ ئەگەر B هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $A=\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ بێت؟

أ 1   ب $-\frac{1}{9}$ ج 3   د $-\frac{1}{27}$

43 کام لەمانەی خوارەوە ڕاستە لەسەر ڕیزکراوەی $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ئەگەر سنووردەرەکەی یەکسان نەبێت بە سفر و کاتێك $a>0$ و $b<0$ و $c<0$ و $d>0$ ؟

أ هەموو دانەکانی M^{-1} سالب نییە.

ب ڕیزکراوەی M^{-1} تەنها یەك دانە سالبی تێدایە.

ج ڕیزکراوەی M^{-1} تەنها دوو دانە سالبی تێدایە

د ڕیزکراوەی M^{-1} تەنها سێ دانە سالبی تێدایە.

44 **کورتە وەڵام** پێشانگایەکی تابلۆکانی هونەر. تابلۆیەکی هونەری تێچوونەکەی 25 000 دینارە پێشکەش بەو کەسە دەکات کە 500 000 دینار دەبەخشێت. تابلۆیەک تێچوونەکەی 50 000 دینار دەبەخشێتە ئەو کەسەی 1 000 000 دینار دەبەخشێت. پێشانگاکە 24 000 000 دیناری لە بەخشینەکان کۆکردەوە بەرامبەر پێدانی 35 تابلۆ. ژمارەی بەخشینەکان لەهەر جۆرێک چەندبوو؟

بەرەنگاری و فراوانکردن

45 **خولیاکان** نمرەکانی کۆتایی ساڵی خوێندکارێک بەرزدەکرێتەوە بەهاوکۆڵکەی جیاواز بە پێی هەر بابەتێک. ئەم خشتەیەی خوارەوە نمرەکانی 4 خوێندکار لە 4 بابەت و سەرجەمی هەریەکەیان روونەدەکاتەوە. پێویستە لەسەرت بەرزکردنەوەی هەر بابەتێک بدۆزێتەوە.

نمرەکانی ئاڤیکردنەوەی کۆتایی ساڵ					
خوێندکار	بیرکاری	زانست	زمانی عەرەبی	زمانی بیانی	سەرجەم
هیوا	65	72	55	50	1038
رێبەر	40	45	66	60	890
رەوەند	55	65	60	65	1030
عیماد	85	75	65	75	1275

46 بەهای دانەکانی ڕیزکراوەی $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بدۆزەوە بۆئەوەی یەکسان بێت بە هەڵگەڕاوەکەی.

47 ژیکاڵ لە باوکیەوە ئەم نامەیەی پێگەیشت 18 ، 0 ، 30 ، 15 ، 33- ، 8- ، 7 ، 5- ، 3- ، 5 ، 3 ، 12 ، 4 ، 8 ، 33 ، 6 ، 0 ، 0 . بۆ کردنەوەی نامەکە ڕیزکراوەیەکی شاراوەی 3×3 کە هەموو دانەکانی ژێرتیرەی سەرەکی سفرە، لە کاتێکدا دانەکانی تر هەموویان یەکسانن بە 1.

أ ئەو نامەیە چییە کە ژیکاڵ پێی گەیشتووە؟

ب ڕیزکراوەی شاردنەوە کە کامەیە؟

ج ژیکاڵ وەڵامی نامەکەی باوکی داوە بەم شێوەیە «بەڵێن دەدەم». ئەو نامەیە چییە کە باوکی پێی دەگات.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

شیکاریکە (پۆلەکەی پێشوو)

48 $\frac{2x}{10} = \frac{12}{30}$

49 $\frac{0.5}{0.2x} = \frac{100}{7}$

50 $125\%x = 117$

ڕێگای لابردن بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی سیستمی ئەم هاوکێشانە. (وانەی 5-2)

51 $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+3y-6z=5 \\ -4z-5y+0.25z=-9 \end{cases}$

52 $\begin{cases} y-x-3z=4 \\ 2x+y-4z=-3 \\ 0.25x+8z+3=2y \end{cases}$

سنووردەری ئەم ڕیزکراوانە بدۆزەوە. (وانەی 4-3)

53 $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

54 $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 3 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$

55 $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

56 $\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 8 \\ \frac{3}{2} & -81 \end{bmatrix}$

لاپەڕەی تەکنۆلۆژیا

شیکارکردنی سیستمی هێڵی بە بەکارهێنانی بەرنامەی Excel

پەیوەندە بە وانەی 3-5

چالاکی

شیکاری ئەم سیستەمە بکە $\begin{cases} 7x+2y=-8 \\ -3x+y=9 \end{cases}$

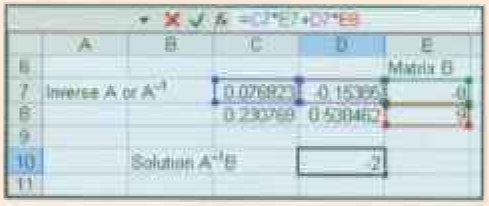
دەتوانیت بەرنامەی Excel بەکاربێنیت بۆ هەژمارکردنی سنووردەری ڕیزکراوەکە و هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە. بە نیازی شیکارکردنی سستەمی $AX=B$ بە نووسینی $X=A^{-1}B$ و هەژماری ڕیزکراوەی $A^{-1}B$ بۆ دۆزینەوەی A^{-1}. دەستبکە بەهەژماری سنووردەری ڕیزکراوەیی A لەبیرت بێت. سنووردەری ڕیزکراوەی $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بریتییە لە $|A|=ad-bc$

هەرچوار هاوکۆلکەکانی سستەمکە a لە $B2$ b لە $C2$، c لە $B3$، d لە $C3$ بخە ناو بژمێرەکەوە. بۆ هەژمارکردنی سنووردەری ڕیزکراوە ئەمانە $=B2*C3-B3*C2$ لە خانەی $C5$ تۆماربکە.

لەلایەکی تر، لەبیرت بێت هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

بریتییە لە $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ یان $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$، $=C3/C5$ بخەناو خانەی $C7$ بۆ هەژماری $\frac{d}{|A|}$

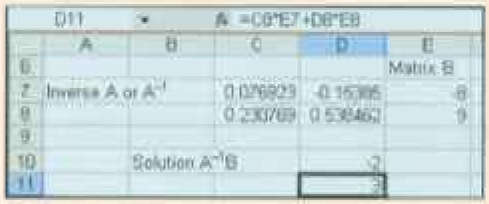
و بۆ هەژماری $\frac{a}{|A|}$، $=B2/C5$ لەخانەی $D8$ تۆماربکە.



شیکاری ڕیزکراوەکە لە ستوونێك پێکدێت ئەویش $A^{-1}B$ دوو ژمارەی لای ڕاستی هاوکێشەکە واتە(8- و 7)لە دوو خانەی $E7$ و $E8$ بەودای یەکدا تۆماربکە. بۆ هەژماری ڕیزکراوەی $A^{-1}B$ ئەمانە تۆماربکە

$=C7*E7+D7*E8$ لە خانەی $D10$

و $=C8*E7+D8*E8$ لە خانەی $D11$.



شیکار بریتییە لە $x=-2$ و $y=3$. بەرنامەیەکت داڕشت بۆ شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵیەکانی 2×2 . یەکێك لە هاوکۆلکەکانی سستەمی پێشوو بگۆڕە یان یەکێك لە ژمارەکانی لای ڕاست بگۆڕە. تێبینی بکە چۆن ئەنجامەکان دەگۆڕێت.

هەوڵبدە

1 هەردوو ژمارەی لای ڕاستی دوو هاوکێشەکە بگۆڕە بەدوو ژمارەی 5- و 9 ، سستەمی نوێ شیکاربکە بە بەکارهێنانی ئەو بەرنامەی داتڕشتووە.

2 چۆن ڕاستی ئەنجامەکەت دەسەلمێنێت بەکارهێنانی بەرنامەی Excel ؟

3 بیری ڕەخنەگر ئەو بەرنامەیە بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی سستەمێکی ئەستەم کە پێشتر زانیوتە. و یەکێکی تر دیارینەکراو بێت. چۆن بەرنامەی Excel بەکاردەهێنیت بۆئەوەی بزانیت کە ئەم سستەمە ئەستەمە یان دیارینەکراوە.

6–3 ژمارە ئاوێتەکان

Complexe Numbers

ئامانجەکان

- ناسینەوەی ژمارە خەیاڵییەکان و ئاوێتەکان و چۆنیەتی بەکارهێنانیان
- هاوکێشە دووجاکان کە لەژمارە ڕاستیەکاندا ڕەگیان نییە شیکاردەکات

زاراوەکان Vocabulary

یەکەی خەیاڵی Imaginary unit

ژمارەی خەیاڵی Imaginary number

ژمارەی ئاوێتە Complex number

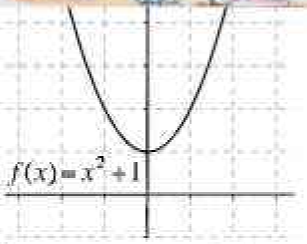
بەشی ڕاستی Real part

بەشی خەیاڵی Imaginary part

ئاوەڵی ژمارەی ئاوێتە Complex conjugate

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانرێت ژمارە ئاوێتەکان بۆ شیکاری ئەو هاوکێشە دووجایانە بەکاربهێنرێت کە لە ژمارە ڕاستیەکاندا شیکاریان نییە (نموونە 4)



دەتوانیت بە ڕوونکردنەوەیی دڵنیابیت کە نەخشەی $f(x)=x^2+1$ شیکاری نییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستیەکاندا. ئەگەر هەوڵبدەیت شیکاری ئەم هاوکێشە دووجایە $x^2+1=0$ بکەیت کە ئاوەڵیەتی ئەوا $x=\pm\sqrt{-1}$ دەستدەکەوێت. ئەمەش دڵنیات دەکات کە ڕەگەکانی ڕاستی نین. بەڵام بۆئەوەی لەتواناتدا هەبێت ئەم جۆرە هاوکێشانە شیکاربکەیت پێویستە ڕەگی دووجای ژمارەی سالب بزانیت. زانایانی بیرکاری ئەم جۆرە ڕەگانەیان خستەناو زانستی بیرکاریەوە و ناویان لێنا **ژمارە ئاوێتەکان Complex numbers** . یەکەمین ژمارە لەم ژمارانە $i=\sqrt{-1}$ ناویان لێنا **یەکەی خەیاڵی Imaginary Unit**. دەتوانیت ڕەگی دووجا بۆهەر ژمارەیەکی سالب بە بەکارهێنانی یەکەی خەیاڵی بنووسیت.

فێربە

ژمارە خەیاڵیەکان

بەنوسین	بەژمارە	بەجەبر
ژمارەی خەیاڵی Imaginary Number ڕەگی دووجای ژمارەیەکی سالبە دەتوانرێت هەموو ژمارەیەکی خەیاڵی لەسەر شێوەی bi بنوسرێت کاتێك b ژمارەی ڕاستی و i یەکەی خەیاڵی بێت. دووجای هەر ژمارەیەکی خەیاڵی دەکاتە ئەو ژمارە سالبەی بۆ پێناسەکردنی بەکارهاتووە	$\sqrt{-1}=i$ $\sqrt{-2}=\sqrt{-1}\sqrt{2}=i\sqrt{2}$ $\sqrt{-4}=\sqrt{-1}\sqrt{4}=2i$ $i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$	ئەگەر b ژمارەیەکی ڕاستی موجەب بێت ئەوا: $\sqrt{-b}=i\sqrt{b}$ $\sqrt{-b^2}=ib$ $\left(\sqrt{-b}\right)^2=-b$

نموونە 1 سادەکردنی ڕەگە دووجاکانی ژمارە سالبەکان

هەر برەیەك بەپێی i بنووسە.

أ $3\sqrt{-16}$

$3\sqrt{(16)(-1)}$ — 16– شیتەڵ بکە

$3\sqrt{16}\sqrt{-1}$ — سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان

$3\times4\sqrt{-1}$ — سادەبکە

$12\sqrt{-1}$ — لێکیدە

$12i$ — بەپێی i بنووسە

ب $-\sqrt{-75}$

$-\sqrt{(75)(-1)}$ — 75– شیتەڵ بکە

$-\sqrt{75}\sqrt{-1}$ — سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان

$-\sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{-1}$ — سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان

$-5\sqrt{3}\sqrt{-1}$ — سادەبکە

$-5\sqrt{3}i=-5i\sqrt{3}$ — بەپێی i بنووسە

خاڵی چاودێری

1. هەر برەیەك بە پێی i بنووسە.

أ $\sqrt{-12}$ ب $2\sqrt{-36}$ ج $-\frac{1}{3}\sqrt{-63}$

نموونــــە 2 شیکارکردنی ئەو هاوکێشە دووجایانەی کە دوو ڕەگەکەی خەیاڵین

هاوکێشەکە شیکاربکە

أ $x^2 = -81$

$x = \pm\sqrt{-81}$ ڕەگی دووجای هەردوولا وەربگرە

$x = \pm 9i$ بەهێی i بنووسە

پاسادانبکە

$x^2 =$	-81
$(9i)^2$	-81
$81i^2$	-81
$81(-1)$	-81 ✓

$x^2 =$	-81
$(-9i)^2$	-81
$81i^2$	-81
$81(-1)$	-81 ✓

ب $3x^2 + 75 = 0$

$3x^2 = -75$ 75− بۆهەردوولا زیادبکە

$x^2 = -25$ هەردوولا دابەشی بکە

$x = \pm\sqrt{-25}$ ڕەگی دووجای هەردوولا وەربگرە

$x = \pm 5i$ بەهێی i بنووسە

پاسادانبکە

$3x^2 + 75 =$	0
$3(\pm 5i)^2 + 75$	0
$3(25)i^2 + 75$	0
$75(-1) + 75$	0 ✓

خاڵی جاودێری **2.** هاوکێشەکە شیکاربکە.

أ $x^2 + 36 = 0$ ب $x^2 + 48 = 0$ ج $9x^2 + 25 = 0$

ژمارەی ئاوێتە Complex Number

ژمارەیەکە دەتوانیت بەشێوەی $a + ib$ بینووسیت کاتێک a و b ژمارەی ڕاستی بن. $i = \sqrt{-1}$ کۆمەڵەی ژمارەی ڕاستییەکان R بەشێکە لە کۆمەڵەی ژمارە ئاوێتەکان C واتە $R \subseteq C$

هەموو ژمارەیەکی ئاوێتە **بەشێکی ڕاستی Real Part** (a) و **بەشێکی خەیاڵی Imaginary Part** (b) هەیە

بەشی ڕاستی → a + bi ← بەشی خەیاڵی

ژمارە ڕاستییەکان ژمارەیەکی ئاوێتەن کە بەشە خەیاڵییەکانیان سفرە. ژمارە خەیاڵییەکانیان ژمارەی ئاوێتەن کە بەشە ڕاستییەکانیان سفرە. بەشە خەیاڵییەکەیان سفر نییە. دوو ژمارەی ئاوێتە یەکسان دەبن ئەگەر بەشە ڕاستییەکانیان یەکسان بن و بەشە خەیاڵییەکانیان یەکسان بن.

نموونــــە 3 یەکسانبوونی دوو ژمارەی ئاوێتە

بەهای هەریەکە لە x و y بدۆزەوە بەمەرجێک ئەم یەکسانبوونە دروستبێت. $3x - 5i = 6 - (10y)i$

دوو بەشە ڕاستییەکە

$$3x - 5i = 6 - (10y)i$$

دوو بەشە خەیاڵییەکە

$3x = 6$ دوو بەشە ڕاستییەکە یەکسان دەبن

$x = 2$

$-(10y) = -5$ دوو بەشە خەیاڵییەکە یەکسان دەبن

$y = \frac{1}{2}$

خاڵی چاودێری 3. بەهای هەریەکە لە x و y بدۆزەوە بۆئەوەی یەکسانبوونەکە دروستبێت.

أ $2x-6i=-8+(20y)i$ ب $-8+(6y)i=5x-i\sqrt{6}$

نموونـــە 4 دۆزینەوەی سفرە ناوێتەکانی نەخشە دووجاکان

هەردوو سفری نەخشە دووجاکە بدۆزەوە.

أ $f(x)=x^2-2x+5$

$x^2-2x+5=0$ هاوکێشەکە بنووسە

$x^2-2x+1=-5+1$ زیادبکە بۆ تەواوی

$(x-1)^2=-4$ ببێت بەدووجای تەواو

$x-1=\pm\sqrt{-4}$ ڕەگی دووجا وەربگرە

$x=1\pm 2i$ سادەبکە

ب $g(x)=x^2+10x+35$

$x^2+10x+35=0$ هاوکێشەکە بنووسە

$x^2+10x+25=-35+25$ زیادبکە بۆ تەواوی

$(x+5)^2=-10$ ببێت بەدووجای تەواو

$x+5=\pm\sqrt{-10}$ ڕەگی دووجا وەربگرە

$x=-5\pm i\sqrt{10}$ سادەبکە

خاڵی چاودێری 4. هەردوو سفری نەخشە دووجاکە بدۆزەوە.

أ $f(x)=x^2+4x+13$ ب $g(x)=x^2-8x+18$

لە نموونەی 4ـ ب دا پەیوەندییەک هەیە هەردوو سفری نەخشەکە $-5+i\sqrt{10}$ و $-5-i\sqrt{10}$ بە یەکەوە دەبەستێت. ئەو دوو ژمارە ناوێتەیە **ناوەڵی یەکتردەبن**. بەشە ڕاستییەکانیان یەکسانن و بەشە خەیاڵییەکانیان دژە کۆی یەکتردەبن. **ژمارەی ناوەڵ Conjugate Number** بۆ ژمارەی ناوێتەی $a+bi$ بریتییە لە ژمارە ناوێتەی $a-bi$ ئەگەر هەردوو ڕەگەکانی هاوکێشەیەکی دووجا هاوکۆلکەکانیان ژمارەی ڕاستی بن و خۆیان ڕاستی نەبوون ئەوا ڕەگەکانیان دوو ژمارەی ناوێتەی ناوەڵی یەکتردەبن.

ڕۆشنایی

ئەگەر هاوکۆلکەکانی هاوکێشەیەکی دووجا ژمارەی ڕاستی بن، یەکێک لە ڕەگەکانیمان زانی و ژمارەی ناوێتە بوو ئەوا ڕەگی دووەم دەبێتە ناوەڵی ئەو ڕەگە.

نموونـــە 5 دۆزینەوەی ژمارەی ناوەڵ بۆ ژمارەیەکی ناوێتە

ناوەڵی ئەم ژمارە ناوێتانە بدۆزەوە.

أ $2i-15$

$-15+2i$ بەشێوەی $a+bi$ بنووسە

$-15-2i$ بدۆزەوە $a-bi$

ب $-4i$

$0+(-4)i$ بەشێوەی $a+bi$ بنووسە

$0-(-4)i$ بدۆزەوە $a-bi$

$4i$ سادەبکە

خاڵی چاودێری 5. ناوەڵی ئەم ژمارە ناوێتانە بدۆزەوە.

أ $9-i$ ب $i+\sqrt{3}$ ج $-8i$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەگەر زانیت $3+i$ ڕەگێکی هاوکێشەیەکی دووجایە کە هاوکۆلکەکانی ژمارەی ڕاستین چۆن ڕەگەکەی تر دەدۆزیەوە

2. ژمارە ناوێتەی $a+bi$ بنووسە کاتێک $a\neq 0$ و $b=0$ پاشان ژمارە ناوێتەی $a+bi$ بنووسە کاتێک $a=0$ و $b\neq 0$ وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە

3. ڕێکخەریە ئەم هێلکاریە دروستبکە و پاشان تەواوی بکە. لەهەر چوار چێوەیەکدا پێناسە و نموونەی گونجاو بنووسە.

فێربە

6-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ژمارە 7 بریتییە لە ______ لە ژمارەی $\sqrt{5}+7i$. (بەشی ڕاستی یان بەشی خەیاڵی).

بڕوانە نموونە 1

ژمارەکە بەپێی i بنووسە

2 $5\sqrt{-100}$ 3 $\frac{1}{2}\sqrt{-16}$ 4 $-\sqrt{-32}$ 5 $\sqrt{-144}$

بڕوانە نموونە 2

هاوکێشەکە شیکاربکە.

6 $x^2=-9$ 7 $2x^2+72=0$ 8 $4x^2=-16$ 9 $x^2+121=0$

بڕوانە نموونە 3

بەهای x و y بدۆزەوە کە وادەکەن ئەم یەکسانییە دروست بێت.

10 $-2x+6i=(-24y)i-14$ 11 $-4+yi=-12x-i+8$

بڕوانە نموونە 4

سفرەکانی ئەخشەکە بدۆزەوە.

12 $f(x)=x^2-12x+45$ 13 $g(x)=x^2+6x+34$

بڕوانە نموونە 5

ژمارەی ئاوەڵ بدۆزەوە.

14 $-9i$ 15 $\sqrt{5}+5i$ 16 $8i-3$ 17 $6+i\sqrt{2}$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە
21-18	1
25-22	2
27-26	3
31-28	4
35-32	5

ژمارەکە بەپێی i بنووسە

18 $8\sqrt{-4}$ 19 $-\frac{1}{3}\sqrt{-90}$ 20 $6\sqrt{-12}$ 21 $\sqrt{-50}$

هاوکێشەکە شیکاربکە.

22 $x^2+49=0$ 23 $5x^2=-80$ 24 $3x^2+27=0$ 25 $\frac{1}{2}x^2=-32$

هەردوو بەهای x و y بدۆزەوە کە وادەکەن یەکسانیەکە دروست بێت.

26 $9x+yi-5=-12i+4$ 27 $5(x-1)+(3y)i=-15i-20$

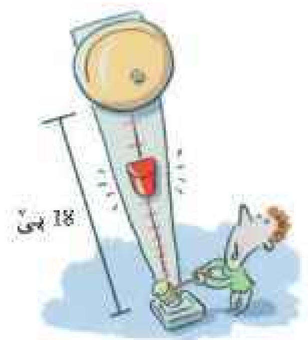
سفرەکانی ئەخشەکە بدۆزەوە.

28 $f(x)=x^2+2x+3$ 29 $g(x)=4x^2-3x+1$

30 $f(x)=x^2+4x+8$ 31 $g(x)=3x^2-6x+10$

ژمارەی ئاوەڵ بدۆزەوە. پاشان هاوکێشە دووجاکە کە ڕەگەکانی ئەم ژمارەو ئاوەڵەکەیتی بنووسەوە:

32 i 33 $-\frac{\sqrt{3}}{2}-2i$ 34 $-2.5i+1$ 35 $\frac{i}{10}-1$



36 **جی دەبێت ئەگەر؟** لە یەکێک لە یارییەکانی شاری یاری پێویستە یاریکەرەکە چەندی لەتوانادابێت سەرنگێک ڕابکێشێت بۆئەوەی گۆیە ئاسنەکە بە ئاڕاستەی زەنگەکە هەڵبدات. یاریکەرەکە یارییەکە دەباتەوە ئەگەر گۆیەکە بەر زەنگەکە بکەوێت، ئەخشەی $d(t)=16t^2-32t+18$ نموونەی هەژمارکردنی دوورییە d بەپێ لەنێوان گۆ و زەنگەکە بە پێی ژمارەی چرکەکان t لەو کاتەوە کە یاریکەرەکە لەتوانایدایە یارییەکە بباتەوە؟

ڕەگی دووەمی ئەو هاوکێشە بدۆزەوە کەهاوکۆلکەکانی ڕاستین ئەگەر بزانی ژمارە پێدراوەکە یەکێکە لەڕەگەکانی

37 $1+14i$ **38** $\frac{5}{7}i$ **39** $4i-2\sqrt{5}$

40 $-12-i$ **41** $9-i\sqrt{2}$ **42** $-\frac{17}{3}i$

هەردوو بەهای c و d بدۆزەوە کە وادەکەن یەکسانییەکە دروست بێت

43 $2ci+1=-d+6-ci$ **44** $c+3ci=4+di$ **45** $c^2+4i=d+di$

هاوکێشەکە شیکاربکە

46 $8x^2=-8$ **47** $\frac{1}{3}x^2=-27$ **48** $2x^2+12.5=0$

49 $\frac{1}{2}x^2+72=0$ **50** $x^2=-30$ **51** $2x^2+16=0$

52 $x^2-4x+8=0$ **53** $x^2+10x+29=0$ **54** $x^2-12x+44=0$

55 $x^2+2x=-5$ **56** $x^2+18=-6x$ **57** $-149=x^2-24x$

ئەم دەستەواژانەی خوارەوە هەمیشە دروستن یان هەندێک جار دروست نین یان هەمیشە نادروستن. ئەگەر هەندێک جار دروست بوون نموونەیەک بێنەوە پاڵپشتی وەڵامەکەت بکات.

58 ژمارەیەکی ڕاستی، ژمارەیەکی خەیاڵییە.

59 ژمارەی خەیاڵی ژمارەیەکی ئاوێتەیە.

60 ژمارەی ڕێژەیی ژمارەیەکی ئاوێتەیە.

61 ژمارەی ئاوێتە ژمارەیەکی خەیاڵییە.

62 ژمارەیەکی ڕاستی، ژمارەیەکی ئاوێتەیە.

63 هاوکێشە دووجاکان ڕەگی ڕاستیان نیە.

64 هاوکێشەی دووجا ڕەگێکی ڕاستی و ڕەگێکی ئاوێتەی هەیە.

65 هاوکێشە دووجاکان ڕەگی ڕاستییان نیە.

سفرەکانی ئەخشەکە بدۆزەوە.

66 $f(x)=x^2-10x+26$ **67** $g(x)=x^2+2x+17$ **68** $h(x)=x^2-10x+50$

69 $f(x)=x^2+16x+73$ **70** $g(x)=x^2-10x+37$ **71** $h(x)=x^2-16x+68$

72 **بیری ڕەخنەگر** ئایا دەتوانێت دوو سفری ئەخشەی $f(x)=x^2+64$ بە ڕوونکردنەوەیی بدۆزیتەوە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

73 **بیری ڕەخنەگر** ئەو ژمارە ئاوێتەیەی ئاوەڵی ژمارەیەکی ڕاستیە چییە؟

74 **بنووسە** ئەو ڕێگایە چییە بەکاریدێنیت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەیەکی دووجا کە ڕەگی ڕاستی نییە؟

75 یاریکەرێک تۆپێکی بۆ سەرەوە لێدا ئەخشەی $h(t)=-4.9t^2+40t$ نموونەیە کە بۆهەژمارکردنی بەرزی تۆپەکە بە مەتر لەدوای t چرکە لەکاتی لێدانیدا.

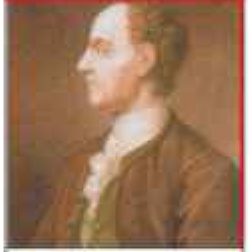
أ گۆڕەپانەکە سەقفێکی بەتۆڕی هەبێت بەرزیەکەی 72 مەتر بێت هاوکێشەی $-4.9t^2+40t=85$ شیکاربکە

ب پشتبەستن بەوەی لە پرسیاری (أ) دا دۆزیتەوە ئایا تۆپەکە دەگاتە تۆڕەکە؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

ج بەرزترین بەرزی چەندەکە تۆپەکە دەتوانێت بیگاتێ. بەپشت بەستن بە نموونەکە؟

بەرواژەیەک

مێژووی بیرکاری



زانای بیرکاری سویسری لیونارد ئۆلر Euler (1707–1783) یەکەم کەس بوو هێمای i بەکارهێنا بۆ $\sqrt{-1}$ وە $f(x)$ بەکارهێنا بۆ بەهای ئەخشەی f کاتێک گۆڕاوی x گۆڕاوێکی ئازاد بێت.

76 کام لەمانە ئاوەڵی ژمارە ئاوێتەی $-2+i$ یە؟

أ $2+i$ ب $2-i$ ج $i-2$ د $-2-i$

77 کام لەمانە دەکاتە $\sqrt{-225}$ نوسراوە بەپێی i ؟

أ $15i$ ب $-15i$ ج $i\sqrt{15}$ د $-i\sqrt{15}$

78 کام لەمانە دوو سفری نەخشەی $f(x)=x^2-2x+17$ ؟

أ $1\pm4i$ ب $4\pm i$ ج $-1\pm4i$ د $-4\pm i$

79 کام بەها بۆ نەزانراوی c دا لەم یەکسانییە $11-(9+ci)=5-4i-3$ دروست بێت؟

أ -2 ب -4 ج 2 د 4

80 کام لەم هاوکێشانەی خوارەوە ئەم دوو رەگەی $6i$ و $-6i$ هەیە؟

أ $-\frac{1}{6}x^2=6$ ب $\frac{1}{4}x^2=9$ ج $x^2-30=6$ د $20-x^2=-16$

81 **کورتە وەڵام** جۆری شیکارەکانی ئەو هاوکێشانەی لەسەر شێوەی $x^2=a$ دەنوسرێت کاتێک $a>0$ و کاتێک $a<0$ روونبکەوە؟

بەرەنگاری و پەرەپێدان

82 ژمارە ئاوێتەی $a+bi$ بدۆزەوە کاتێک $5a+3b=1$ و $-5b=7+4a$.

83 ئایا دەگونجێت هاوکێشەیەکی دووجا یەک رەگی راستی هەبێت؟ یەک رەگی خەیاڵی هەبێت؟ یەک رەگی ئاوێتەی هەبێت؟

84 ئەنجامی هەر مەرجێك لەسەر شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2+bx+c=0$ دیاریبکە

أ $b=0$ ب $c\leq0$ ج $c>0$

د کام مەرجە وا لەبەشی خەیاڵی شیکارەکە دەکات یەکسان نەبێت بە سفر؟

پێداچوونەوەی لوولپێچی

ئەم ریزکراوانەی خوارەوە بەکاربێنە بۆ شیکاری پرسیارەکانی 85 تا 88 هەژماریان بکە ئەگەر توانرا (وانەی 3–2)

$$S=\begin{bmatrix}1 & -5\\ -2 & 0\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}-4 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix}10 & 1\\ 0 & -1\\ -5 & 5\end{bmatrix}$$

85 T^2 86 TV 87 ST 88 S^2

بۆهەر نەخشەیەك: أ) دیاریبکە ئایا وێنە رونکردنەوەییەکەی لەسەرەوە بۆ خوارەوە دەکرێتەوە. ب) تەوەرەی هاوجێبوونی وێنە رونکردنەوەییەکەی بدۆزەوە. ج) سەری وێنە رونکردنەوەییەکەی بدۆزەوە. د) بەکتربرەکەی لەگەڵ تەوەرەی دووەم بدۆزەوە و وێنە رونکردنەوەییەکەی بکێشە. (پۆلەکانی پێشوو)

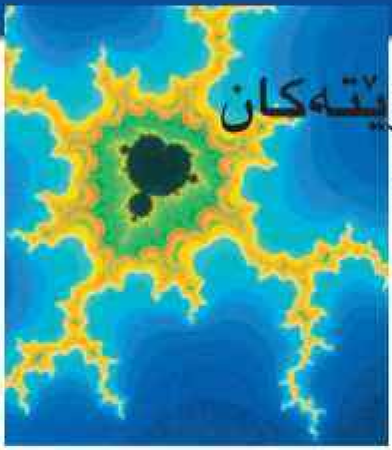
89 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+x-10$ 90 $f(x)=-x^2+3$

91 $f(x)=2x^2+4x-3$ 92 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+1$

هاوکێشەکە بەشیتەڵکردن شیکاربکە (پۆلەکانی پێشوو)

93 $x^2+5x=14$ 94 $6x^2=-x+2$ 95 $4x^2+9=15x$

96 $4x^2=1$ 97 $x^2+11x=-24$ 98 $x^2=-7x$



7-3 کردارەکان لەسەر ژمارە ئاوێتەکان
Operations With Complex Numbers

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

ژمارە ئاوێتەکان بەکاردەهێنرێن لەو ڕێسایانەی شێوە لەیەکچووەکان پێکدەهێنێت. (پرسیاری 84)

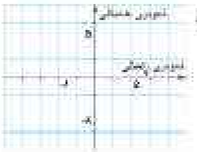
ئامانجەکان

- چوار کردارەکە لەسەر ژمارە ئاوێتەکان ئەنجام دەدات.

زاراوەکان
Vocabulary

ڕووتەختی ئاوێتە
Complexe plane

بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە
Absolute value of a complex number



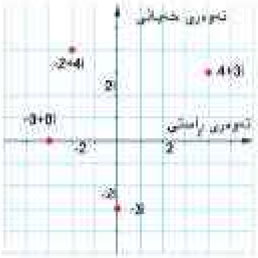
لەوانەکانی پێشوو ژمارە ڕاستییەکانت بە خاڵ لەسەر تەوەرەی ژمارەکان نواند. لەم وانەیەدا فێردەبیت چۆن ژمارە ئاوێتەکان لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا بە خاڵ بنوێنیت. **ڕووتەختی ئاوێتە Complex plane** ڕووتەختێکی پۆوتانە تەوەری یەکەمی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان و تەوەری دووەمی ژمارە خەیاڵییەکان دەنوێنێت.

نموونـــــە 1 نواندنی ژمارەی ئاوێتە:

هەریەک لەم ژمارە ئاوێتانە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە

أ $-3+0i$ ج $4+3i$

ب $-3i$ د $-2+4i$



ڕۆشنایی

تەوەری ڕاستی تەوەری یەکەمە و تەوەری خەیاڵی تەوەری دووەمە. بیربکەوە لە نموونەی $a+bi$. کە بریتییە لە $x+iy$

خاڵی چاودێری

1. هەریەک لەم ژمارە ئاوێتانە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

أ $3+0i$ ب $2i$ ج $-2-i$ د $3+2i$

لەبیرت بێت کە بەهای ڕووتی ژمارەیەکی ڕاستی دەکاتە ئەو دوورییەی دەکەوێتە نێوان ئەو خاڵەی کە ژمارە دەنوێنێت لەسەر تەوەرەی ژمارەکان و خاڵی بنەڕەت لەسەر هەمان تەوەرە. هەمان ڕێگا بەکاردەهێنین بۆ پێناسەی **بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە Absolute value** کە بریتییە لەو دوورییەی نێوان ئەو خاڵەی ژمارەکە دەینوێنێت لە ڕووتەختی ئاوێتەکە و خاڵی بنەڕەت لەو ڕووتەختەدا.

فێربە

بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە

بەنووسین	بەجەبر	نموونە
بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ **Absolute value** دەکاتە دووری نێوان خاڵی (a, b) و خاڵی بنەڕەت لە ڕووتەختی پۆوتاندا. بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ بە شێوەی $\|a+bi\|$ دەنووسرێت.	$\|a+bi\| = \sqrt{a^2+b^2}$	$\|3+4i\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

نموونــــــە 2 هەژمارکردنی بەهای ڕووتی ژمارەی ناوێتە

بەهای ڕووتی ئەم ژمارە ناوێتانە هەژماربکە.

أ	ب	ج
$\|-9+i\|$	$\|6\|$	$\|-4i\|$
$\|-9+i\|$	$\|6+0i\|$	$\|0-4i\|$
$\sqrt{(-9)^2+1^2}$	$\sqrt{6^2+0^2}$	$\sqrt{0^2+4^2}$
$\sqrt{81+1}=\sqrt{82}$	$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{16}=4$

خاڵی جاودێری

2. بەهای ڕووتی ئەم ژمارە ناوێتانە هەژماربکە.

أ $1-2i$ ب $-\frac{1}{2}$ ج $23i$

کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ژمارە ناوێتەکان هاوشێوەی کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ئەو بڕە جەبریانەیە کە چەند ڕادەیەکی هاوشێوەی تێدایە. بۆ کۆکردنەوەی ژمارە ناوێتەکان بەشە ڕاستییەکان بەیەکەوە و بەشە خەیاڵییەکانیش بەیەکەوە کۆدەکرێنەوە.

کردارەکانی کۆکردنەوە و لێدەرکردن و لێکدان لە کۆمەڵەی ژمارە ناوێتەکان هەمان سیفەتەکانی ئەو کردارانەیان هەیە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان. بۆیە دەتوانیت سیفەتەکانی ئاڵوگۆڕ و یەکتربەستن و بەشینەوە بەکاربهێنیت بۆ نووسینی بڕە ناوێتەکان بە سادەترین شێوە.

نموونــــــە 3 کۆکردنەوە و لێدەرکردنی ژمارە ناوێتەکان

کۆبکەوە یان دەربکە. ئەنجامەکە لەسەر شێوەی $a+bi$ بنووسە.

أ $(3-11i)+(-2+4i)$ — دوو بەشە ڕاستییەکە بە جیاو دوو بەشە

$(3-2)+(-11i+4i)$ — خەیاڵییەکە بە جیا کۆبکەوە

$1-7i$

ب $(4-i)-(5+8i)$ — بەشینەوە بکە

$(4-i)-5-8i$ — هەردوو بەشە ڕاستیەکە کۆبکەوە

$(4-5)+(-i-8i)$ — هەروەها دوو بەشە خەیاڵیەکە

$-1-9i$

ج $(6-2i)+(-6+2i)$ — دوو بەشە ڕاستیەکە کۆبکەوە هەروەها

$(6-6)+(-2i+2i)$ — دوو بەشە خەیاڵیەکە

$0+0i$

0

د $(10+3i)-(10-4i)$ — بە شینەوەبکە

$(10+3i)-10-(-4i)$ — دوو بەشە ڕاستیەکە کۆبکەوە،

$(10-10)+(3i+4i)$ — هەروەها دوو بەشە خەیاڵیەکە

$0+7i=7i$

ڕۆشنایی

ژمارەی ناوێتەی $a+bi$ دژە کۆیەکەی دەکاتە $-a-bi$

خاڵی جاودێری

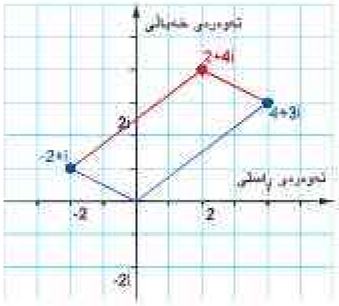
3. کۆبکەوە یان دەربکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+bi$ بنووسە.

أ $(-3+5i)+(-6i)$ ب $2i-(3+5i)$ ج $(4+3i)+(4-3i)$

دەتوانیت ژمارە ناوێتەکان کۆبکەیتەوە بە بەکارهێنانی ڕووتەختی پۆوتان.

نموونــــە 4 کۆکردنەوەی ژمارە ئاوێتەکان لەسەر ڕووتەختی ئاوێتە

سەرجەمی $(4+3i)+(-2+i)$ بەڕوونکردنەوەیی بدۆزەوە.



هەنگاوی 1 هەردوو ژمارەی ئاوێتەی $4+3i$ و $-2+i$ لە ڕووتەختی ئاوێتەکەدا بەڕوونکردنەوەیی دیاریدەکەین. بە پارچە ڕاستەهێڵێك هەر خاڵێکیان دەگەیەنین بە خاڵی بنەڕەت.

هەنگاوی 2 لاتەریبەکە تەواویکە. سەری چوارەمی لاتەریبەکە بریتییە لە کۆی دوو ژمارە ئاوێتەکە دەکاتە $2+4i$

کەواتە $(4+3i)+(-2+i)=2+4i$

ساغکردنەوە دوو ژمارە ئاوێتەکە کۆدەکەینەوە. بەشی ڕاستی بەیەکەوە و بەشە خەیاڵییەکانیش بەیەکەوە. $(4+3i)+(-2+i)=(4-2)+(3i+i)=2+4i$

خاڵی چاودێری

4. بەڕوونکردنەوەیی هەژماریکە.

أ $(3+4i)+(1-3i)$ ب $(-4-i)+(2-2i)$

دەتوانیت ژمارە ئاوێتەکان لێکبدەیت بە بەکارهێنانی بەشینەوە بە ڕەفتارکردن لەگەڵ بەشە خەیاڵییەکان وەك ڕادە لەیەکچووەکان. بە گۆڕینی i^2 بە ژمارە -1 لەهەر شوێنێکدا هەبوو.

نموونــــە 5 لێکدانی ژمارە ئاوێتەکان

لێکبدە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+bi$ بنووسە.

أ $2i(3-5i)$

$6i-10i^2$

$6i-10(-1)$

$10+6i$

ب $(7+2i)(7-2i)$

$49-14i+14i-4i^2$

$49-4(-1)$

53

ج $(5-6i)(4-3i)$

$20-15i-24i+18i^2$

$20-39i+18(-1)$

$2-39i$

د $(6i)(6i)$

$36i^2$

$36(-1)$

-36

خاڵی چاودێری

5. لێکبدە. ئەنجامەکە لەسەر شێوەی $a+bi$ بنووسە.

أ $2i(3-5i)$ ب $(4-4i)(6-i)$ ج $(3+2i)(3-2i)$

دەتوانیت هێزەکانی یەکەی خەیاڵی i بدۆزیتەوە. وەك چۆن لەم خشتەیەی خوارەوەدا ڕوونکراوەتەوە.

ڕۆشنایی

سەرنج بدە ئەو شێوازەی دووبارەبوونەوە لەهەر ڕیزێك یارمەتیت دەدات بۆ هەژماری هەر هێزێك لە هێزەکانی ژمارە i کە بریتییە لە ژمارەکانی i ، -1 ، $-i$ ، 1

هێزەکانی ژمارە i		
$i^9=i$	$i^5=i^4\times i=1\times i=i$	$i^1=i$
$i^{10}=-1$	$i^6=i^4\times i^2=1\times(-1)=-1$	$i^2=-1$
$i^{11}=-i$	$i^7=i^4\times i^3=1(-i)=-i$	$i^3=i^2\times i=(-1)\times i=-i$
$i^{12}=1$	$i^8=i^4\times i^4=1\times 1=1$	$i^4=i^2\times i^2=(-1)(-1)=1$

نموونـــــه 6 هەژماری هێزەکانی ژمارە i

أ $-3i^{12}$ بە سادەترین شێوە بنووسە

$$-3i^{12} = -3\left(i^2\right)^6$$

$$= -3(-1)^6 = -3 \times 1 = -3$$

ب i^{25} بە سادەترین شێوە بنووسە

$$i^{25} = i \times i^{24}$$

$$= i\left(i^2\right)^{12}$$

$$= i(-1)^{12} = i \times 1 = i$$

خاڵی چاوپێری

6. ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە

أ $\frac{1}{2}i^7$ **ب** i^{42}

بیربکەوە ئەو بڕەی بە سادەترین شێوە دەینووسێت نابێت ژێرەکەی ڕەگی تێدابێت. لەبەرئەوەی i ڕەگێکی دووجایە بۆیە نووسینی بڕێکی ئاوێتە بە سادەترین شێوە پێویست دەکات ژێرەکەی ڕزگار بکەین لە i بە ڕێژەیی کردنی ژێرە. بە لێکدانی سەرە و ژێرە لە ئاوەڵی ئەو ژمارە ئاوێتەیەی کە لە ژێرە دایە.

نموونـــــه 7 دابەشکردنی ژمارە ئاوێتەکان

أ $\frac{3+7i}{8i}$ بە سادەترین شێوە بنووسە

$$\frac{3+7i}{8i} = \frac{3+7i}{8i} \times \left(\frac{-8i}{-8i}\right)$$

$$= \frac{-24i-56i^2}{-64i^2}$$

$$= \frac{-24i+56}{64}$$

$$= \frac{-3i+7}{8} = \frac{7}{8} - \frac{3}{8}i$$

ب $\frac{5+i}{2-4i}$ بە سادەترین شێوە بنووسە

$$\frac{5+i}{2-4i} = \frac{5+i}{2-4i} \times \left(\frac{2+4i}{2+4i}\right)$$

$$= \frac{10+20i+2i+4i^2}{4+8i-8i-16i^2}$$

$$= \frac{10+22i-4}{4+16}$$

$$= \frac{6+22i}{20} = \frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$$

خاڵی چاوپێری

7. ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە

أ $\frac{3+8i}{-i}$ **ب** $\frac{3-i}{2-i}$

بیربکەوە و ئاوتوێبکە

1. ڕوونیبکەوە کەی ژمارەی ئاوێتەی $a+bi$ و ئاوەڵەکەی یەکسان دەبن؟
2. ئەنجامی لێکدانی $(a+bi)(c+di)$ بدۆزەوە بەشی ڕاستی و خەیاڵی ئەنجامەکەی دیاریبکە.
3. ڕێکخەریە ئەم هێڵکارییە دروست بکە و پاشان تەواوی بکە. لەهەر چوارچێوەیەکدا نموونەیەکی گونجاو دابنێ.

فێربە

7-3 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 زاراوەکان لە ڕووتەختی ئاوێتە دا تەوەری یەکەم ژمارەی ——— دەنوێنێت، بەڵام تەوەری دووەم ژمارەی ——— دەنوێنێت. (ڕاستی، ڕێژەیی، خەیاڵی).

بڕوانە نموونە 1 ئەم ژمارە ئاوێتەیە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە

2 4 **3** $-i$ **4** $3+2i$ **5** $-2-3i$

بڕوانە نموونە 2 بەهای ڕووت بدۆزەوە.

6 $|4-5i|$ **7** $|-33.3|$ **8** $|-9i|$ **9** $|5+12i|$ **10** $|-1+i|$ **11** $|15i|$

بڕوانە نموونە 3 کۆیبکەوە یان لێدەریکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+bi$ بنووسە

12 $(2+5i)+(-2+5i)$ **13** $(-1-8i)+(4+3i)$

14 $(1-3i)-(7+i)$ **15** $(4-8i)+(-13+23i)$

16 $(6+17i)-(18-9i)$ **17** $(-30+i)-(-2+20i)$

بڕوانە نموونە 4 بە ڕوونکردنەوەیی سەرجەم بدۆزەوە.

18 $(3+4i)+(-2-4i)$ **19** $(-2-5i)+(-1+4i)$ **20** $(-4-4i)+(4+2i)$

بڕوانە نموونە 5 لێکبدە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+ib$ بنووسە

21 $(1-2i)(1+2i)$ **22** $3i(5+2i)$ **23** $(9+i)(4-i)$

24 $(6+8i)(5-4i)$ **25** $(3+i)^2$ **26** $(-4-5i)(2+10i)$

بڕوانە نموونە 6 ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە

27 $-i^9$ **28** $2i^{15}$ **29** i^{30}

بڕوانە نموونە 7 دابەشبکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+ib$ بنووسە

30 $\frac{5-4i}{i}$ **31** $\frac{11-5i}{2-4i}$ **32** $\frac{8+2i}{5+i}$

33 $\frac{17}{4+i}$ **34** $\frac{45-3i}{7-8i}$ **35** $\frac{-3-12i}{6i}$

ڕاهێنان و شکیارکردنی پرسیارەکان

ئەم ژمارە ئاوێتانە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە

36 -3 **37** $-2.5i$ **38** $i+1$ **39** $4-3i$

بەهای ڕووت بدۆزەوە.

40 $|2+3i|$ **41** $|-18|$ **42** $\left|\frac{4}{5}i\right|$ **43** $|6-8i|$ **44** $|-0.5i|$ **45** $|10-4i|$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە
39–36	1
45–40	2
51–46	3
54–52	4
60–55	5
63–61	6
69–64	7

کۆبکەوە یان دەربکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+bi$ بنووسە.

46 $(8-9i)-(-2-i)$ **47** $4i-(11-3i)$ **48** $(4-2i)+(-9-5i)$

49 $(13+6i)+(15+35i)$ **50** $(3-i)-(-3+i)$ **51** $-16+(12+9i)$

سەرجەم بە ڕووتکردنەوەیی بدۆزەوە.

52 $(4+i)+(-3i)$ **53** $(5+4i)+(-1+2i)$ **54** $(-3-3i)+(4-3i)$

لێکبدە. ئەنجامەکە بەشێوەی $a+ib$ بنوسە.

55 $-12i(-1+4i)$ **56** $(3-5i)(2+9i)$ **57** $(7+2i)(7-2i)$

58 $(5+6i)^2$ **59** $(7-5i)(-3+9i)$ **60** $-4(8+12i)$

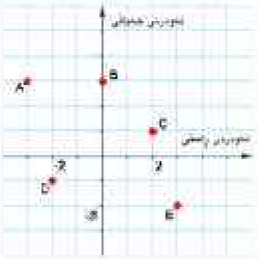
بە سادەترین شێوە بنووسە.

61 i^{27} **62** $-i^{11}$ **63** $5i^{10}$

دابەشبکە. ئەنجامەکە بە شێوەی $a+ib$ بنووسە.

64 $\frac{2-3i}{i}$ **65** $\frac{5-2i}{3+i}$ **66** $\frac{3}{-1-5i}$

67 $\frac{19+9i}{5+i}$ **68** $\frac{8+4i}{7+i}$ **69** $\frac{6+3i}{2-2i}$



ئەو ژمارە ناوێتەیە بنووسە کە خاڵەکە دەینوێنێت.

70 A **71** B **72** C **73** D **74** E

بەهای ڕووتی ژمارە ناوێتەکە بدۆزەوە.

75 $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ **76** $7i$ **77** $2\sqrt{2}-i\sqrt{3}$ **78** $-1-8i$

بەرواژەیی

شێوە لەیەکچووەکان

شێوەی لەیەکچووەکان Fractal شێوەیەکە بەك لەیەکتری پەیدادەبن لەسەر هەمان شێواز واتە بەشەکانی شێوەکە هاوشێوەی شێوە گشتییەکەیە. لە سروشتدا وێنە لەیەکچووەکان زۆرن وەك دەماری گەڵاکانی درەختێك کلوە بەفرەکانی بەدوای یەکدا دەبارن. زاناکان شێوە لەیەکچووەکان بەکاردەهێنن بۆ دروستکردنی نموونە لەم جەشنانە

79 شێوە لەیەکچووەکان **Fractals** شێوە لەیەکچووەکان شێوازێکن لە بەکارهێنانی ژمارە ناوێتەکان و دووبارەکردنەوەی یاسا بیرکارییەکان پەیدادەبن. ژمارەی یەکەم لە یاساکەدا لە جیاتیبگە پاشان ئەنجامەکە بدۆزەوە. ئەنجامەکە جارێکی تر لە یاساکەدا لە جیاتی بگەوە . . . و هەروەها دەتوانرێت هەر ژمارەیەکی ناوێتە کە لەم کردارە دووبارەبووەیە دەستمان دەکەوێت بەکاربهێنرێت بۆ دیاریکردنی ڕەنگی پێکسل (یان خاڵ) لەسەر شاشەی بژمێرەکە، وێنەی بەرامبەر نموونەیەك ڕووندەکاتەوە لەوەی دەستمان دەکەوێت. زۆر لە شێوازەکانی شێوە لە یەکچووەکان پشت دەبەستن بە یاسای کۆمەڵەی جولیا Julia کە بریتیە لە $Z_{n+1}=(Z_n)^2+c$ کاتێك c ژمارەیەکی نەگۆڕێت، یاسای کۆمەڵەی جولیا بەکاربێنە کاتێك $c=0.25$

أ Z_2 هەژماربکە ئەگەر بزانیت $Z_1=0.5+0.6i$

ب Z_3 هەژماربکە بە بەکارهێنانی ژمارەی Z_2 کە لە لقی أ دۆزیتەوە.

ج Z_4 هەژماربکە بە بەکارهێنانی ژمارەی Z_3 کە لە لقی ب دۆزیتەوە.

دوای سادەکردن برە ناوێتەکە بە شێوەی $a+ib$ بنووسە.

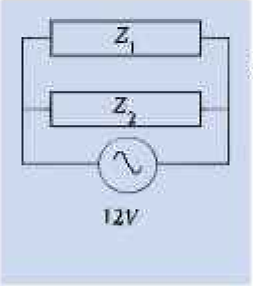
80 $6i-(4+5i)$ **81** $(-2.3+i)-(7.5-0.3i)$ **82** $(6-5i)^2$

83 $(-2-3i)^2$ **84** $(5+7i)(5-7i)$ **85** $(2-i)(2+i)(2-i)$

86 $3-i^{11}$ **87** $i^{52}-i^{48}$ **88** $i^{35}-i^{24}+i^{18}$

89 $\frac{12+i}{i}$ **90** $\frac{18-3i}{i}$ **91** $\frac{4+2i}{6+i}$

92 $\frac{1+i}{-2+4i}$ **93** $\frac{4}{2-3i}$ **94** $\frac{6}{\sqrt{2}-i}$



هەنگاوی جۆراوجۆر تەوژمی کارەبا کاتێک بە تەنێکی دیاریکراودا دەڕوات ڕووبەڕووی بەرگرییەک دەبێتەوە کە بەئۆم دەپێورێت. ئەندازیارە کارەباییەکان بینیان کە ئەم بەرگرییە بە Z دەردەبڕێت. بە بەکارهێنانی ژمارە ئاوێتەکان زانایانی فیزیا وای دادەنێن کە ئەم بەرگرییە گشتییە بۆ سوڕێکی کارەبایی پێکدێت لە دوو سووڕی هاوڕێک بەرگرییەکانیان Z_1 و Z_2 ن هاوتای بەرگری سووڕێکی کارەباییە. کە بەرگرییەکەی $Z_{eq}=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$

95 بەرگری گشتی سووڕە کارەباییەکە بدۆزەوە کە لەدوو سووڕی هاوڕێك پێکهاتوون بەرگرییەکەیان $Z_1=3+2i$ و بەرگری دووەمیان $Z_2=1-2i$

96 بەرگری گشتی سووڕە کارەباییەکە بدۆزەوە کە لەدوو سووڕی هاوڕێك پێکهاتوون بەرگری یەکەمیان $Z_1=2+2i$ و بەرگری دووەمیان $Z_2=4-i$

ڕوونیبکەوە دەستەواژەکە هەمیشە دروستە یان هەندێك جار دروستە یان هەمیشە نادروستە. ئەگەر دەستەواژەکە هەندێك جار نادروست بوو نموونەیەك بهێنەوە لەسەر بارێك کەتێیدا دروست بێت، نموونەیەکی تر لەسەر ئەو بارەی کە تێیدا نادروستە. ئەگەر دەستەواژەکە هەمیشە نادروست بوو نموونەیەك بهێنەوە هەمیشە نادروست بێت بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت.

97 سەرجەمی هەر ژمارەیەکی ئاوێتە $a+bi$و ئاوەڵەکەی ژمارەیەکی ڕاستییە.

98 جیاوازی نێوان ژمارەیەکی ئاوێتە $a+bi$ $(b\neq0)$ و ئاوەڵەکەی ژمارەیەکی ڕاستییە.

99 ئەنجامی لێکدانی ژمارەیەکی ئاوێتە $a+bi$ $(b\neq0)$لە ئاوەڵەکەی ژمارەیەکی ڕاستی موجەبە.

100 ئەنجامی لێکدانی ژمارەیەکی خەیاڵی bi $(b\neq0)$ لە یەکێکی تر di $(d\neq0)$ژمارەیەکی ڕاستی موجەبە.

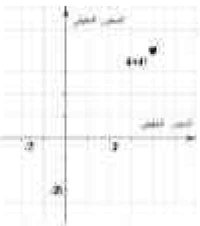
101 **هەڵە لە شیکردنەوە** ئەمەی خوارەوە دوو هەوڵدانە بۆ نووسینی ژمارە ئاوێتەی $\frac{3}{2+i}$ بە سادەترین شێوە. کام هەوڵیان هەڵەیە؟ هەڵەکە ڕوونبکەوە.

أ
$$\frac{3}{2+i}=\frac{3}{2+i}\times\frac{(2+i)}{(2+i)}$$
$$=\frac{6+3i}{4+i^2}$$
$$=\frac{6+3i}{3}=2+i$$

ب
$$\frac{3}{2+i}=\frac{3}{2+i}\times\frac{(2-i)}{(2-i)}$$
$$=\frac{6-3i}{4-i^2}$$
$$=\frac{6-3i}{5}$$

102 **بیری ڕەخنەگر** بۆچی بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە یەکسانە بە بەهای ڕووتی ئاوەڵەکەی؟ تواندنی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی وەڵامەکەت.

103 **بنوسە** لە پەیوەندی نێوان جیاوازی نێوان دوو دووجا و $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ و ئەنجامی لێکدانی ژمارەیەکی ئاوێتە و ئاوەڵەکە بکۆڵەوە.

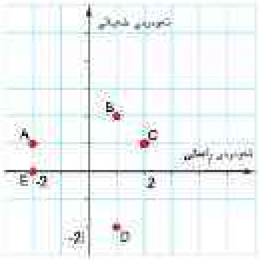


104 فێربوویت چۆن دوو ژمارەی ئاوێتە بە ڕوونکردنەوەیی کۆبکەیتەوە.

أ سێ جووت ژمارەی ئاوێتە بدۆزەوە کەسەرجەمی هەرجوتێك بکاتە $4+4i$

ب کرداری کۆکردنەوەی هەریەکەیان لەهەمان ڕووتەختی ئاوێتە بەڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

ج ئەوەی دەستتکەوتووە باسیبکە.



وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 105 و 106.

105 کام خاڵ لە وێنەکە ژمارەی ئاوێتەی $1-2i$ دەنوێنێت.

(أ) خاڵی A (ب) خاڵی B (ج) خاڵی C (د) خاڵی D

106 ئەو ژمارە ئاوێتەیەی کە خاڵی E دەینوێنێت کامەیە.

(أ) -2 (ب) 2 (ج) $-2i$ (د) $2i$

107 کام لەم ژمارە ئاوێتانەی خوارەوە سادەترین شێوەی بڕی $(2-5i)-(2+5i)$ یە؟

(أ) $10i$ (ب) $4+10i$ (ج) $-10i$ (د) $4-10i$

108 کام لەم ژمارە ئاوێتانەی خوارەوە سادەترین شێوەی بڕی $(-5+3i)^2$ یە؟

(أ) $16-15i$ (ب) $16-30i$ (ج) $34-15i$ (د) $34-30i$

بەرەنگاری و فراوانکردن

109 ئەوەی فێری بوویت لە هێزەکانی یەکەی خەیاڵی i بەکاربێنە بۆ شیکاری ئەم پرسیارە.

(أ) ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە و شێوازێك پوختەبکە.

$i^1=$ ■	$i^0=$ ■	$i^{-1}=$ ■	$i^{-2}=$ ■	$i^{-3}=$ ■	$i^{-4}=$ ■	$i^{-5}=$ ■

(ب) ئەو شێوازەی دەستتکەوتووە پەیوەندی بە هێزەکانی توانی سالبی یەکەی خەیاڵی i ەوە هەیە ڕوونبکەوە. ئەو بەهایانەی کە لەتوانادایە ئەم هێزانە وەربیگرن چین؟

(ج) i^{-12} و i^{-37} و i^{-90} بەسادەترین شێوە بنووسە.

شێوەی گشتی ئەنجامی هەریەکە لەم دووکردارەی خوارەوەی سەر ژمارە ئاوێتەکە بنووسە.

110 $(a+bi)(c+di)$

111 $\frac{a+bi}{c+di}$

پێداچوونەوەی لوولپێچی

112 پارە ئەم خشتەیەی خوارەوە خەرجی هەفتانەی خواردنی بەیانیانی دڵسۆز دەنوێنێت لەماوەی هەفتەدا. پێدراوەکان بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە ڕاستەهێڵی نزیکترین نواندن بۆئەم خاڵانە بکێشە و هاوکێشەکەی بنووسە. (وانەکە)

ژمارەی ژەمەکان	5	7	3	5	6	2	4	5
تێچوون بەهەزاران دینار	10	13	8	9	8	5	10	11

لاسەنگەکە بە جەبری شیکاربکە

113 $3x^2-6x\le 0$

114 $10<x^2-4x-11$

115 $-6\ge 2x^2+7x-21$

116 $3-x^2<7-5x$

دیاریبکە ئەم ئەخشانە ئەخشەیەکی دووجا دەنوێنن یان نا ڕوونیبکەوە.

117

x	-2	-1	0	1
y	5	-1	-3	-1

118

x	0	2	4	6
y	18	10	2	-6

بەشی 3

ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

$$Q=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}3&-5&2\\-4&1&3\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}6&-8&4\\-10&2&4\end{bmatrix}$$

بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر توانرا.

1 $P-2Q$ **2** $0.2Q$

3 $\frac{1}{2}R-\frac{1}{3}P$ **4** $\frac{1}{2}(2P+R)$

پێدراوەکانی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیاری 5 تا 7

لە هەڵمەتی پاککردنەوەی سەیرانگایەك خوێندکارانی پۆلی یازدەهەم 125 قووتوی ساردی و 45 کارتۆنیان کۆکردەوە. خوێندکارانی پۆلی دە 95 قووتوی ساردی و 65 کارتۆنیان کۆکردەوە.

5 ڕیزکراوەی A بەکاربێنە بۆ پیشاندانی پێدراوەکانی سەرەوە

6 ڕیزکراوەیDبنووسە جیاوازی کۆکردنەوەی هەردوو پۆلەکە نەربخا

7 لە ڕۆژی داهاتودا هەرپۆلێك دووتەوەندەی لەهەر جۆرێکی ڕۆژی یەکەم کۆکردەوە. ڕیزکراوەیەك بنووسە ئەمە ڕونبکاتەوە.

$$C=\begin{bmatrix}4&0&1\\0&2&1\\-1&1&3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&1&3\\-2&-1&4\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}-1&2\\0&-2\\-3&1\end{bmatrix}$$

بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر پێناسەکراوبوو.

8 AB **9** CA **10** AC **11** BC

12 A^2 **13** C^2 **14** $(BA)^2$

15 ئەم دوو خشتەیەی خوارەوە نرخی بلیتەکان بە دینار فرۆشراوەکانی سێ ڕۆژ ڕوونەکاتەوە.

نرخی بلیتەکان		
	گەورە	منداڵ
سێشەممە	5 000	2 500
چوارشەممە	7 500	4 250
پێنجشەممە	9 000	5 750

بلیتە فرۆشراوەکان			
	سێشەممە	چوارشەممە	پێنجشەممە
گەورە	67	196	245
منداڵ	104	75	154

أ پێدراوەکانی هەر خشتەیەك لەڕیزکراوەیەك ڕێکبخە.

ب لێکدانی ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆدۆزینەوەی داهاتی ڕۆژانە.

ج داهاتی ڕۆژانەی فرۆشتنی بلیتی گەورە و فرۆشتنی بلیتی منداڵان بدۆزەوە.

ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆدۆزینەوەی وێنەی چوارلای $A(-2,-1)$ ، $B(-1,3)$ ، $C(2,4)$ ، $D(0,0)$ بەپێی ئەم جێگۆڕکێیانە:

16 ڕاکێشانی 2 یەکە بۆلای ڕاست و یەك یەکە بۆسەرەوە

17 گەورەکردنی چوارلایەکە بە هاوکۆلکەی 1.5

18 بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$باسی جێگۆڕکێکە بکە

19 بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەی$\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$باسی جێگۆڕکێکە بکە

20 ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ بەکاربێنە بۆ جێگۆڕکێی سێگۆشەی $A(-1,-2)$ ، $B(0,1)$ ، $C(3,-2)$ وێنەی سێگۆشەکە و وێنەی شێوەکەی بکێشە. جۆری جێگۆڕکێکە دیاربکە.

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

21 $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ **22** $\begin{bmatrix}3&2\\6&4\end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix}-0.5&3\\-1&6\end{bmatrix}$ **24** $\begin{bmatrix}4&0&1\\0&2&1\\-1&1&3\end{bmatrix}$

25 $\begin{bmatrix}2&3&-1\\-1&5&3\\3&-1&-6\end{bmatrix}$ **26** $\begin{bmatrix}3&2&-1\\5&-3&2\\9&-13&8\end{bmatrix}$

ڕێسای کرامەر بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی هەر سیستمێکی هێڵی.

27 $\begin{cases}x+y=9\\x-y=1\end{cases}$ **28** $\begin{cases}2x+5y+21=0\\7y+47=6x\end{cases}$

29 $\begin{cases}4.5x+3y=10.5\\3x+2y=7\end{cases}$ **30** $\begin{cases}5x-8y=7+7z\\6x-4y+10z=-34\\2x+4y=29+3z\end{cases}$

31 $\begin{cases}x-y+z=5\\y-x-z=2\\x-y+z=7\end{cases}$ **32** $\begin{cases}y-2.4x=0.8\\3x+0.5z=2.25\\3.5y+z=8.5\end{cases}$

33 خاڵی یەکتربڕینی دووڕاستەهێڵی $2x+3y=8$ و $y=x+1$ بدۆزەوە

أ ڕیزکراوەی هاوکۆلکەکان بنووسە سنووردەرەکەی هەژماربکە

ب سیستمەکە شیکاربکە بە بەکارهێنانی ڕیسای گرامر

هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

34 $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

35 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

36 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

38 $\begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

39 $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

سیستمە هێڵییەکە بە بەکارهێنانی ڕیزکراوەکان بنووسە پاشان شیکاریان بکە

40 $\begin{cases} \frac{3}{2}x = 20+y \\ x+6y=80 \end{cases}$

41 $\begin{cases} x=1+y \\ x+y=9 \end{cases}$

42 $\begin{cases} 2x+9=2z \\ 5x+y+32=7z \\ 2(3x+y)=8z-39 \end{cases}$

43 $\begin{cases} 2x+9=2z \\ 5x+y+32=7z \\ 2(3x+y)=8z-39 \end{cases}$

44 دوکانێکی فرۆشتنی دیارییەکان دیاری بۆ کڕیارەکانی پێشکەش دەکات. دیارییەکی بچووک کە نرخەکەی 5000 دینارە دەدات بەو کڕیارەی کە بەهای کڕینەکانی لە نێوان 25 000 دینار و 74 999 دینار دایە. دیارییەکی مام ناوەندی 8 000 دیناری دەدات بەو کڕیارەی کە بەهای کڕینەکانی لەنێوان 75 000 و 149 999 دینارە دیارییەکی گەورە کە بەهای 12 500 دینارە پێشکەش بەو کڕیارە دەکات کە بەهای کڕینەکەی لە 150 000 دینار کەمتر نەبێت. دوکانەکە دیاری پێشکەش کرد کە بەهایان گەیشتە 102 دینار. ژمارەی دیارییە بچووکەکان 6 ئەوەندی ژمارەی دیارییە گەورەکان بوو.

أ سیستمی هاوکێشەکان بنووسە ئەم پرسیارە دەرببڕێت.

ب ڕێسای گرامەر بەکاربێنە بۆ شیکاری سیستمەکە و دیاریکردنی ژمارەی دیارییەکان لەهەر جۆرێك.

هاوکێشەکە شیکاربکە

45 $x^2=-81$

46 $6x^2+150=0$

47 $x^2+6x+10=0$

48 $x^2+12x+45=0$

49 $x^2-14x+75=0$

50 $x^2-22x+133=0$

هاوەڵی ژمارە ئاوێتەکە بدۆزەوە.

51 $5i-4$

52 $3+i\sqrt{5}$

بەهای ڕووت هەژماربکە

53 $|-3i|$

54 $|4-2i|$

55 $|12-16i|$

56 $|7i|$

بڕەکە لەسەر شێوەی $a+bi$ بنووسە

57 $(1+5i)+(6-i)$

58 $(9+4i)-(3+2i)$

59 $(5-i)-(11-i)$

60 $-5i(3-4i)$

61 $(5-2i)(6+8i)$

62 $(3+2i)(3-2i)$

63 $(4+i)(1-5i)$

64 $(-7+4i)(3+9i)$

65 i^{32}

66 $-5i^{21}$

67 $\frac{2+9i}{-2i}$

68 $\frac{5+2i}{3-4i}$

69 $\frac{-12+26i}{2+4i}$

70 $\frac{8-4i}{1+i}$

بەشی
3

تاقیکردنەوەی بەش

پێدراوەکانی خشتەکە بەکاربێنە بۆشیکارکردنی پرسیاری 1 تا 4

	پلەی یەکەم	پلەی دووەم	پلەی سێیەم	کۆی خاڵەکان
	خەڵاتەکان			
ڤیان	5	1	2	41
شاناز	3	5	1	42
شیرین	3	1	4	29

1 ڕیزکراوەیەک بەکاربێنە پێدراوەکانی خشتەکە دەربخات

2 جۆری ڕیزکراوەکە چییە؟

3 بەهای دانەی a_{31} چەندە؟

4 ناونیشانی ئەو دانەیەی بەهایەکەی 2 چەندە؟

ڕیزکراوەکان لە پرسیاری 5 تا 10 بەکاربێنە ئەنجامەکان هەژماربکە ئەگەر توانرا.

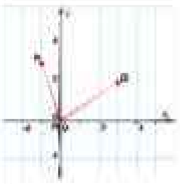
$$G=\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}4&-2&0\\-1&1&-2\end{bmatrix},E=\begin{bmatrix}2&3\\-1&0\\4&1\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}7\\0\\-2\end{bmatrix},J=\begin{bmatrix}1&-5&6\end{bmatrix},H=\begin{bmatrix}-2&1\\3&0\\5&-1\end{bmatrix}$$

5 $E+F$ **6** EF **7** FE

8 H^2 **9** G^3 **10** FK

ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ جێگۆڕکێی سێگۆشەی PQR بە جێگۆڕکێی دیاریکراو (جێگۆڕکێی سنوردار)



11 ڕاکێشانی دوو یەکە بۆ سەرەوە یەک یەکە بۆلای ڕاست.

12 گەورەکردنێک بە هاوکۆلکەی $\frac{3}{2}$

13 جێگۆڕکێکردن بە $\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$ ڕیزکراوەی و وێنەکەی باسبکە

سنووردەری ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

14 $\begin{vmatrix}4&0\\0&-3\end{vmatrix}$ **15** $\begin{vmatrix}0.25&1\\2&8\end{vmatrix}$

16 $\begin{vmatrix}3&-1\\-2&-1\end{vmatrix}$ **17** $\begin{vmatrix}1&-2&3\\3&-1&-3\\2&1&5\end{vmatrix}$

سیستمەکە بە ڕێسای کرامەر شیکاربکە

18 $\begin{cases}x+2y=1\\3x-y=10\end{cases}$ **19** $\begin{cases}x+3z=3+2y\\3x+22=y+3z\\2x+y+5z=8\end{cases}$

ئەگەر توانرا هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەکە بدۆزەوە.

20 $\begin{bmatrix}2&0.7\\4&1.4\end{bmatrix}$ **21** $\begin{bmatrix}3&-1\\1&3\end{bmatrix}$

22 $\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}$ **23** $\begin{bmatrix}3&2&-1\\2&3&-5\\1&4&2\end{bmatrix}$

24 نرخی $2.5\,kg$ هەنجیر و $1.5\,kg$ خورما 14420 دیناره نرخی $3.5\,kg$ هەنجیر و $1\,kg$ خورما 16 910 دیناره ڕیزکراوەکان بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی نرخی $1\,kg$ لەهەر جۆرێکیان.

سیستمە هێڵییەکان بەشێوەی ڕیزکراوە بنووسە، پاشان شیکاریان بکە

25 $\begin{cases}6x+y=2\\3x-2y+1=0\end{cases}$ **26** $\begin{cases}5x-2y=3\\2.5x-y=1.5\end{cases}$

27 $\begin{cases}x+2y=3.5\\3x=2.7+y\end{cases}$ **28** $\begin{cases}2x-z=3+y\\x+2=y+5\\4z+x+y=1\end{cases}$

بڕەکەی بەشێوەی $a+bi$ بنووسە

29 $(1-2i)-(5+2i)$ **30** $(6-2i)(2-2i)$

31 $-2i^{15}$ **32** $\frac{1-8i}{4i}$

هاوکێشەکە شیکاربکە

33 $x^2+25=0$ **34** $x^2+12x=-40$

35 $(x-1)^2+7=0$ **36** $2x^2-x+5=0$

ئاوەڵی ژمارە ئاوێتەکە بدۆزەوە.

37 $5+3i$ **38** $6-7i$ **39** $-2+i\sqrt{2}$

بەشی 3

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 تەمەنی هیوا دووساڵ کەمترە لە چوارئەوەندی تەمەنی هێرش، تەمەنی سەردار 6 ساڵ زیاترە لەنیوەی تەمەنی هیوا. هێمای x بۆتەمەنی هێرش و هێمای y بۆتەمەنی هیوا دابنێ. کام لەم برانە تەمەنی سەردار دەنوێنێت؟

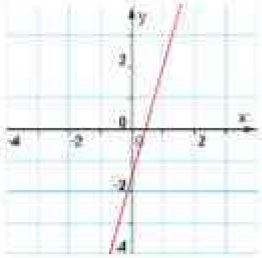
أ) $\frac{1}{2}x+6$

ب) $2x+5$

ج) $4x+\frac{1}{2}y+4$

د) $\frac{1}{2}(4x+2)-6$

2 وێنە ڕوونکردنەوەییەکە ڕاستەهێڵێك دەردەخات کە هێڵی سنووری ناوچە شێکاری لاسەنگەیەکی هێڵییە، ئەم دوو جووتە ڕێکخراوە(21, 83) و(16, 62) سەربە کۆمەڵە شێکارەکەی نین. کام لەمانە دروستە؟



أ) هێڵی سنوور پێویستە خاڵخاڵ بێت، ناوچەی سەرەوەی هێڵەکە ڕەنگکراوبێت.

ب) پێویستە هێڵی سنوور نەپساو بێت، ناوچەی سەرەوەی هێڵەکە ڕەنگکراوبێت.

ج) پێویستە هێڵی سنوور خاڵخاڵ بێت، ناوچەی ژێرەوەی هێڵەکە ڕەنگکراوبێت.

د) پێویستە هێڵی سنوور نەپساو بێت، ناوچەی ژێرەوەی هێڵەکە ڕەنگکراوبێت.

3 کام بڕەی ڕیزکراوی یەکسانە بە $\begin{bmatrix}2 & -4\\ 11 & 14\end{bmatrix}$ ؟

أ) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -8\\ 22 & 28\end{bmatrix}$

ب) $2\begin{bmatrix}0 & -6\\ 9 & 12\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}2 & -4\\ 11 & 14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix}-6 & 17\\ 8 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & -13\\ -3 & 4\end{bmatrix}$

4 خێرایی فڕۆکەی$X-43A$کە ئاژانسی بۆشایی ئاسمانی ئەمریکی (ناسا) پەرەیپێدا گەیشتە 7 ماك واتە حەوت ئەوەندی خێرایی دەنگ. ئەمەش مانای ئەم فڕۆکەیە 16 میل لە 12 چرکەدا دەبڕێت. کام یەکێك لەم نەخشانەی خوارەوە ئەو دوورییە دەنوێنێت کە فڕۆکەکە بەپێی کات بڕیویەتی کاتێك بەخێرایی 7 ماك دەفڕێت.

أ) $f(s)=16x+12s$

ب) $f(s)=\frac{3}{4}s$

ج) $f(s)=16s$

د) $f(s)=1\frac{1}{3}s$

5 دلشاد هاوبەشی کۆنگرەیەکی کرد. لە کۆنگرەکەدا بەشداری چەند وەرشەیەکی کاری کرد. دلشاد هەستا بە هەڵسەنگاندنی ئەو وەرشەکارانەی کە بەشداری تێداکردبوو بە پێدانی هەریەکێکیان هەڵسەنگاندنێك لە 1 – 10 پێکهاتووە ئەم خشتەیەی خوارەوە ماوەی هەر وەرزشکارێك وهەڵسەنگاندنی دلشاد بۆی ڕوونەکاتەوە.

ژمارەی خولەکەکان	53	93	48	120	32
هەڵسەنگاندن	7	4	5	9	8

هاوکۆلکەی پەیوەستی پەیوەندی نێوان ماوەی وەرزشکارەکە و هەڵسەنگاندنی دلشاد بۆی چەندە؟ نزیکیبکەوە بۆ نزیکترین بەش لەسەد؟

أ) 0.01

ب) 0.12

ج) 0.88

د) 0.13

6 $M=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 3 & 7\end{bmatrix}$ و $N=\begin{bmatrix}-1 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 6\end{bmatrix}$، کام لەمانەی خوارەوە ڕیزکراوەی $2MN$ دەنوێنێت؟

أ) $\begin{bmatrix}-24 & 184 & 0\\ -12 & 124 & 192\end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix}-12 & 92 & 0\\ -6 & 62 & 96\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}-24 & -12\\ 184 & 124\\ 0 & 192\end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix}-12 & -6\\ 92 & 62\\ 0 & 96\end{bmatrix}$

7 ئەم یەکتربڕینانەی خوارەوە لەگەڵ تەوەرەکان سەر بەکام ڕووتەختن. پۆتانەکان(20, 0, 0)، (0, 40, 0) ، (0, 0, 5)

أ) $20x+40y+5z=0$

ب) $20x+40y+5z=1$

ج) $4x+8y+z=5$

د) $2x+y+8z=40$

8 کام لەمانەی خوارەوە یەکسانە بە بڕی $\frac{5(6-8i)}{2-i}$ ؟

أ) $-20+10i$ ب) $15-8i$

ج) $15-40i$ د) $20-10i$

9 کام لەمانە هەڵگەڕاوەی ئەم ڕیزکراوەیە $\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ ؟

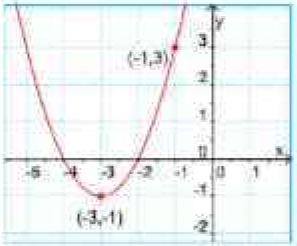
أ) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}2 & 4\\ -4 & -2\end{bmatrix}$

10 کام لەمانەی خوارەوە هاوکێشەی ئەخشە ڕوونکراوەکەیە.

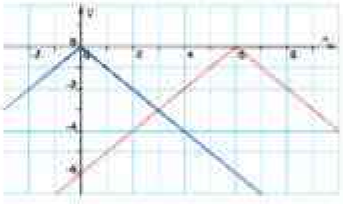
أ) $y=(x-3)^2-1$ ب) $y=(x+3)^2-1$

ج) $y=(x-1)^2-3$ د) $y=(x+1)^2-3$



کورتە وەڵام

11 ڕوونکردنەوەی ئەم دووئەخشەیە $f(x)=-|x|$ و $g(x)=f(x-h)$ بپشکنە. بەهای h چەندە؟



12 ڕیزکراوە بەکاربێنە بۆ جێگۆڕکێکردنی سێگۆشەی ABC کاتێك $A(-1, 0)$، $B(4, 3)$، $C(2, -1)$ بێت.

أ) $A'B'C'$ وێنەی ڕاکێشراوی ABC بێت. یەك یەکە بۆلای ڕاست و 4 یەکە بۆ سەرەوە. پۆتانی سەرەکانی سێگۆشەی $A'B'C'$ بدۆزەوە.

ب) $A''B''C''$ وێنەی وێنەدانەی $A'B'C'$ بێت بە دەوری تەوەری دووەم. پۆتانی سەرەکانی سێگۆشەی $A''B''C''$ بدۆزەوە.

13 سنووردەری ڕیزکراوەی $\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -1\\ 0.4 & 10\end{bmatrix}$ بدۆزەوە.

14 ئەم خشتەیەی خوارەوە کرێی وەستانی ئۆتۆمبێلەکانە لە گەراجی فڕۆکەخانەیەك. بە پێی ماوەی وەستانەکەیان. لاری ئەو ئەخشە هێڵییەی کرێی وەستانی بە دینار دەنوێنێت چەندە؟ بە پێی ماوەی وەستان بە کاتژمێر؟

ماوە	1	3	5	7
کرێ	3350	5050	6750	8450

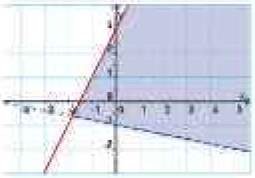
15 کام بەهای گۆڕاوی c وا لەم سستەمە هێڵییە دەکات بێ سنووربێت.

$$\begin{cases}2y-x+10=0\\ 3x-6y-c=16\end{cases}$$

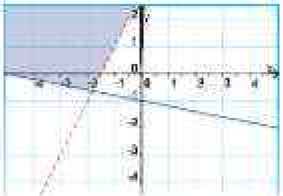
وەڵامی ڕاستەوخۆ

16 سیستمی ئەو لاسەنگانە بنووسە کە ئەم شێوانەی خوارەوە ڕوونکردنەوەییەکەیان دەنوێنێت.

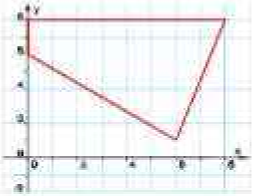
أ)



ب)



17 لێکنەچوونی نێوان دوو سیستمەکە لە پرسیاری پێشوودا ڕوونبکەوە. وێنەی ڕوونکردنەوەیی خوارەوە ناوچەی گونجاو پرۆگرامێکی هێڵی ڕووندەکاتەوە.



أ) مەرجەکانی ئەم پرسیارە بنووسە.

ب) گەورەترین بەها بۆ ئەخشەی بەسوودی $P=3x-4y$ لەم پرسیارەدا بدۆزەوە.

درێژە وەڵام

18 هاوکێشەی هێڵی $2x-3y=-15$ بەکاربهێنە.

أ) ڕوونبکەوە چۆن ئەم هاوکێشەیە دەنووسیت بە شێوەی لاری - یەکتربڕین.

ب) ئەو هۆیە چییە کەوا دەکات شێوەی لاری-یەکتربڕین باشترین شێوەبێت بۆ نووسینی ئەم جۆرە هاوکێشانە پێش کێشانی ئەو ڕاستەهێڵەی دەینوێنێت.

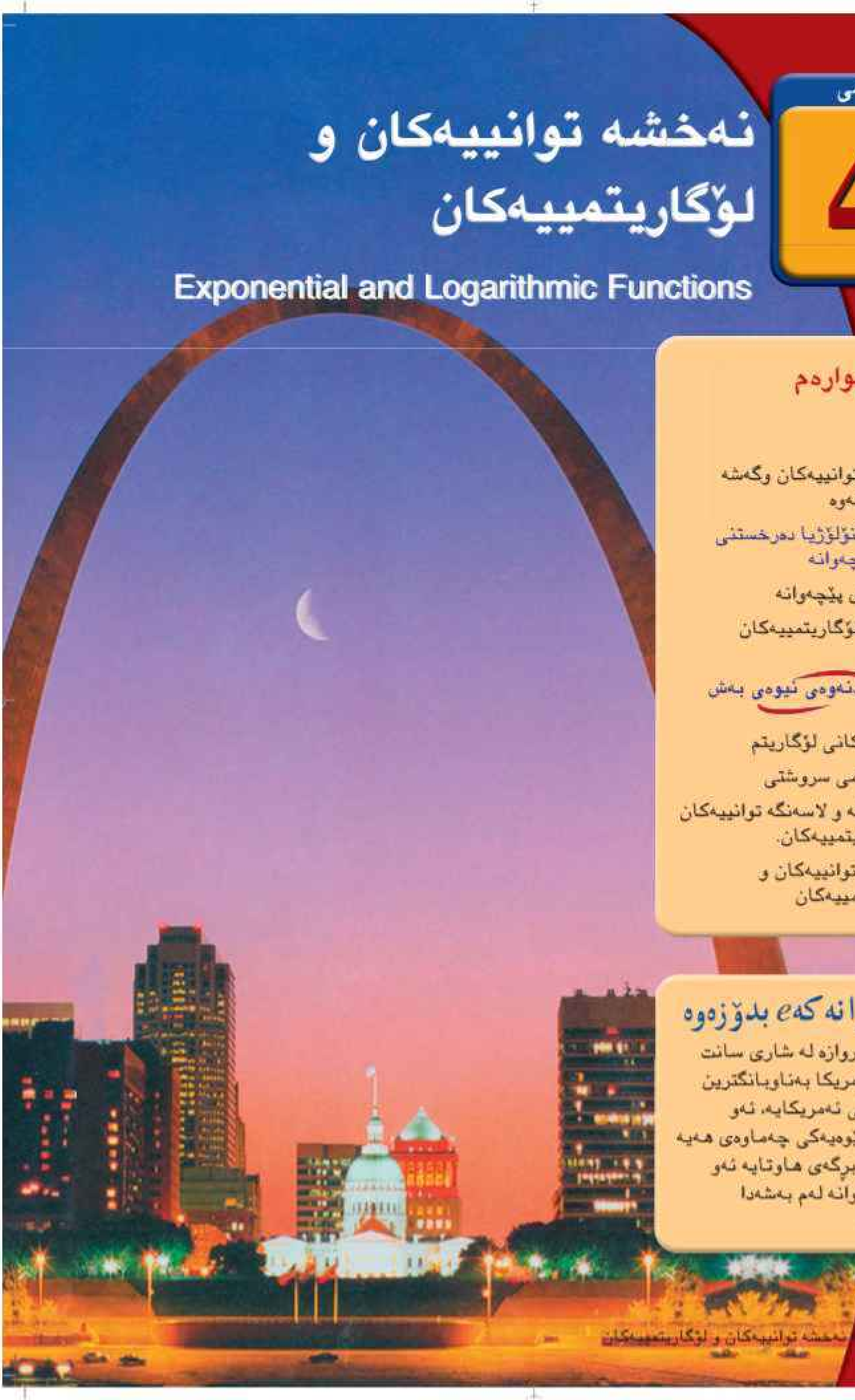
ج) هەنگاوەکانی کێشانی ئەو ڕاستەهێڵەی ئەو هاوکێشە دەنوێنێت. هەنگاو بە هەنگاو بنووسە.

بەشی

4

نەخشە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان

Exponential and Logarithmic Functions



بەشی چوارەم

وانەکان

1-4 نەخشە توانییەکان وگەشە وپووکانەوە

لاپەڕەی تەکنۆلۆژیا دەرخستنی نەخشەی پێچەوانە

2-4 نەخشەی پێچەوانە

3-4 نەخشە لۆگاریتمییەکان

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

4-4 سیفەتەکانی لۆگاریتم

5-4 لۆگاریتمی سروشتی

6-4 هاوکێشە و لاسەنگە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان.

7-4 نموونە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان

لە کەوانە کە e بدۆزەوە

کەوانەی دەروازە لە شاری سانت لویس لە ئەمریکا بەناوبانگترین ئادگارەکانی ئەمریکایە، ئەو کەوانەیە شێوەیەکی چەماوەی هەیە هاوشێوەی بڕگەی هاوتایە ئەو جۆرە چەماوانە لەم بەشەدا دەخوێنیت.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

هەر زاراوەیەک بەو پێناسەی لەلای چەپدا هاتووە ببەستەوە.

1 نەگۆڕ

2 تەختە

3 پەیوەندی

4 گۆڕاو

أ هێمایەکە بۆ نواندنی ژمارەیەک بۆی هەیە بەها جیاوازەکان وەربگرێت

ب کۆمەڵە ژمارەیەکی بەکارهاتووە لە ژماردن و پێچەوانەکەیان.

ج پەیوەندییەکە هەر بەهایەک لە بەهایەکانی گۆڕاوی ئازاد تەنها بە یەک بەهای گۆڕاوی پەیوەست دەبەستێتەوە.

د ڕادەیەکە گۆڕاوەکانی تێدا نییە.

هـ کۆمەڵێک جووتە ڕێکخراوە.

سیفەتەکانی هێز

ئەم بڕانەی خوارەوە بەسادەترین شێوە بنووسە.

5 $x^2(x^3)(x)$ 6 $3y^{-1}(5x^2y^2)$ 7 $\frac{a^8}{a^2}$ 8 $y^{15} \div y^{10}$

9 $\frac{x^2y^5}{xy^6}$ 10 $\left(\frac{x}{3}\right)^{-3}$ 11 $(3x)^2(4x^3)$ 12 $\frac{a^{-2}b^3}{a^4b^{-1}}$

سوودی سادە

یاسای سوودی سادەی $I = Prt$ بەکاربێنە. کاتێک I بۆ سوود هێما دەکرێت، و P هێمای گوژمە بنەڕەتییە، بەڵام r هێمای « ڕێژەی سوودی ساڵانەیە، t هێمایە بۆ ماوە بەساڵ.

13 سوودی گوژمەی 30 ملیۆن دینار بدۆزەوە، بۆ دوو ساڵ خرابێتە کار بەسوودی ساڵانەی 3%.

14 سوودی گوژمەی 2 ملیۆن دینار بدۆزەوە، بۆ دوو ساڵ خرابێتە کار سوودی 000 90 دیناری بەدەستهێناوە.

15 کاروان بڕە پارەیەکی بۆ ماوەی سێ ساڵ بە سوودی سادەی 6% قەرزکرد بەهای ئەو قەرزە چەندە؟ ئەگەر بزانیت کاروان ئەو بڕە پارەیەی لەسەری بوو داویەتەوە کە 5310 ملیۆن دینار بوو.

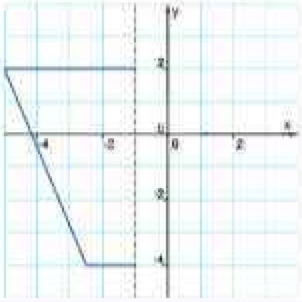
شیکارکردنی هاوکێشە بەپێی گۆڕاوێک

بەهای گۆڕاوی x بە پێی گۆڕاوەکانی تر هەژماربکە.

16 $3x - y = 4$ 17 $y = -7x + 3$ 18 $\frac{x}{2} = 3y - 4$ 19 $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

هاوجێبوون

20 وێنەی بەرامبەر دروستبکە، بەبەکارهێنانی تەوەرە سوورەکەی هاوجێبوون تەواوبکە.



شێوەی زانستی

بە شێوەی زانستی بنووسە.

21 7 000 000 000 22 0.0000000093 23 16.75

بەشی 4

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

خوێندووتە

- بەکارهێنانی سیفەتەکانی هێز بۆ نووسینی بڕێك بە سادەترین شێوە.
- جیبەجێکردنی کردارە پێچەوانەکان.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی نەخشە هێڵییەکان و دووجاکان و ڕادەرەکان لە خۆ دەگرێت.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- نەخشە توانییەکان.
- لۆگاریتمەکان و نەخشە پێچەوانەکان.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی نەخشە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان لە خۆدەگرێت.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربهێنیت

- بۆ شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی سوودی ئاوێتە لە خۆدەگرن.
- لە بواری زانستی وەك زیندەزانی و کۆمەڵناسی ، کاتێك پێدراوەکان کۆ دەکرێنەوە و ڕێکدەخرێن و شیدەکرێنەوە.
- لە قۆناغی بەرزتردا، کە ئامار و بیرکاری کار وەردەگرێت.

زاراوەکان Vocabulary

Asymptote	دەرکەنار
Base	بنچینە
Common logarithm	لۆگاریتمی ئاسایی
Exponential equation	هاوکێشەی توانی
Inverse function	پێچەوانەی نەخشە
Logarithmic equation	هاوکێشەی لۆگاریتمی
Logarithmic function	نەخشەی لۆگاریتمی
Natural logarithm	لۆگارتمی سروشتی

ڕۆشناییەك لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێك لەم زاراوانەدا ڕابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیڕەوبکە:

1. دەتوانیت بیر لە **بنچینە** بکەیتەوە. وەك ئاوەڵی توان، کام ژمارە بنچینەیە لە $1000 = 10^3$
2. **لۆگاریتمی دەیی** (ئاسایی) بریتییە لە توان لە هێزی ژمارە 10. چۆن بەهای لۆگاریتمی ئاسایی ژمارە 1000 دەبینیت.
3. لە کوێدا، پێشبینی دۆزینەوەی نەزانراوی x لە **هاوکێشەیەکی توانیدا** دەکەیت.
4. دابەشکردن بریتییە لە کرداری پێچەوانەی لێکدان. چۆن پێشبینی کاریگەری نەخشەی پێچەوانە بۆ نەخشەی پێدراو دەکەیت.
5. بنچینەی **لۆگاریتمی سروشتی** بریتییە لە ژمارە e، کام بەهای نەگۆڕی تر بە پیت هێما دەکرێت.
6. Asymptote وشەیەکی یۆنانییە واتە بەیەك نەگەیشتن. چۆن پەیوەندی نێوان چەماوەیەك و **هێڵی دەرکەنارەکەی** دەبینیت؟

بەشی
4

بیرکاری به خوێندنەوە و نووسین

ستراتیژیەتی نوسینەوە: شێوازی خۆت بەکاربهێنە

کاتێك بیرۆکەیەکی دژوار لە بیرۆکەکانی بیرکاری دەخوێنێت، دووبارە بیرۆکەکە بە شێوازی خۆت بنووسەوە. ئەمەش یارمەتیت دەدات بۆ تێگەیشتنی ئەوەی دەیخوێنێت بە شێوەیەکی باشتر. لەوانەیە بەسوود تربێت بۆ ڕوونکردنەوەی بیرۆکەکە باشتر وایە نموونەیەکی تایبەت بە خۆت پیشکەش بکەیت بۆ ڕوونکردنەوەی بیرۆکەکە.

پلەی ڕادەدار بەبەکارهێنانی ڕادەی بەرزترین پلە دیاری دەکرێت. ڕادەداری یەك گۆڕاو بەشێوەی گشتییەکەی نوسراوە. کاتێك ڕادەکانی بەریزکردنی سەربەرەوژێری پلەکانی نوسرابێت. بەو شێوەیەش کاتێك ڕادەدارێك بە شێوە گشتییەکەی نووسراوە ئەوا پلەی ڕادەی یەکەم دەبێتە پلەی ڕادەدارەکە. هاوکۆلکەکەی ڕادەی یەکەم دەبێت بە هاوکۆلکەی سەرەکی ڕادارداڕەکە.

ڕادەدارەکان

1. پلەی ڕادەدار پلەی بەرزترین ڕادەیە
2. شێوەی گشتی ڕادەکان بەریزێکی سەربەرەو ژێر بە پێی پلەکانی نوسراوە.
3. لە شێوەی گشتیدا پلەی ڕادەی یەکەم بریتییە لە پلەی ڕادەدارەکە.
4. هاوکۆلکەی ڕادەی یەکەم بریتییە لە هاوکۆلکەی سەرەکی

هاوکۆلکەی ڕادەی یەکەم بریتییە لە هاوکۆلکەی سەرەکی

نموونە: شێوەی گشتی $2x^4 - 5x^3 + 3x - 9x + 10$

پلەی ڕادەدارەکە : **4**

هاوکۆلکەی سەرەکی: **2**

بنووسە برگەی پێشوو بنووسە بە بەکارهێنانی ڕستەی کورت بۆ ڕوونکردنەوەی بیرۆکەی گرنگ کە ڕادەدارەکانی تێدابێت.

دڵنیابوون باسی نموونەیەك بکە، دەق و بیرکاری بەیەکەوە ببەستێتەوە.

هەوڵبدە

ئەم برگەیەی دێت بخوێنەوە و دووبارە بە شێوازی خۆت بینووسەوە:

لە سەلمێنراوی ڕەگی ناڕێژەییدا هاتووە. کە ڕەگە ناڕێژەییەکانی هاوکێشەیەك هاوکۆلکەکانی ژمارەی ڕێژەیی بن ناوەڵی یەکتری دەبن. بۆ نموونە ئەگەر بزانیت $\sqrt{2}+1$ ڕەگێکە لە ڕەگەکانی هاوکێشەی $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$ دەوترێت $\sqrt{2}-1$ ش ڕەگێکە لە ڕەگەکانی. بیرت بێت ژمارە ڕاستییەکان دوو جۆرن، ژمارە ڕێژەییەکان و ژمارە ناڕێژەییەکان دەتوانیت سەلمێنراوی ڕەگی ڕێژەیی و سەلمێنراوی ڕەگی ناڕێژەیی بەیەکەوە بەکاربهێنێت بۆ دۆزینەوەی هەموو ڕەگەکانی هاوکێشەی $P(x) = 0$.

1-4 نەخشە توانییەکان، و گەشە و پووکانەوە (گەڕانەوە)

Exponential Functions, Growth and Decay

ئامانجەکان

• برە توانییەکان بۆ تواندنی بارەکانی گەشەو پووکانەوە دەنووسێت. و بەهای ئەم برانە هەژمار دەکات.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەوانەی شتە دەگمەنەکان کۆدەکەنەوە، دەتوانن نەخشەی توانی بەکاربێنن بۆ داڕشتنی نموونەیەک، کە بەهای ئەو شتانەی کۆیدەکەنەوە بینوێنێت. وەک ئامێرە دەگمەنەکانی مۆسیقا (نموونە 2).

زاراوەکان
Vocabulary

نەخشەی توانی
Exponetial function

بنچینە
Base

دەرکەنار
Asymptote

گەشەی توانی
Exponential growth

پووکانەوەی توانی
Exponential decay

لەدەقی یاسای مۆر Moore کە لە پیشەسازی بژمێردا بەکاردێت هاتووە. ژمارەی ترانزیستەرەکان کە پێکهاتەکانی بژمێرێك لە خۆ دەگرێت هەموو ساڵێك ئەوەندەی خۆی زیاد دەکات. ئەم خشتەیەی خوارەوە ژمارەی ترانزستەرەکان بە نزیکەیی ڕووندەکاتەوە کە پێکهاتەکانی بژمێرەن لە سەرەتای دروستبوونی ئەم پیشەسازییەوە.

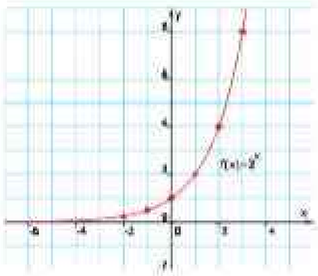
ژمارەی ترانزستەرەکان لە پێکهاتەکەدا							
ساڵ	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
ژمارە	60	120	240	480	960	1920	3840

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

دەتوانرێت ئەو گەشەبوونە کە هەموو ساڵێك دوو ئەوەندە دەبێت، بەبەکارهێنانی نەخشەیەك توانەکەی گۆڕاوێك لە خۆ بگرێت بنوێنرێت. ئەم نەخشانە پێیان دەوترێت **نەخشەی توانی**، نەخشەی بنەڕەتی بۆ **نەخشە توانییەکان Exponential functions** بریتییە لە نەخشەی $f(x)=b^x$، کاتێك **Base** b ژمارەیەکی نەگۆڕ و x گۆڕاوێکی سەربەخۆ بێت.

بنچینە　　توان

$f(x)=b^x$ و $b>0, b\neq 1$



وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی توانی بنەڕەتی دیاردەکات $f(x)=2^x$ مەودای ئەم نەخشەیە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستیە مووجەبەکان $\{y / y>0\}$

لەبیرت بێت

لە پەیوەندی $y=b^x$ ، y گۆڕاوی بەستراوە بە گۆڕاوی x چونکە بەهای y بە بەهای x دیاریدەکرێت.

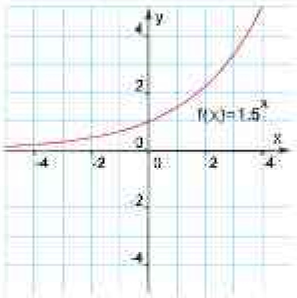
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

سەرەنجبدە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەرەبەرە نزیك دەبێتەوە لە تەوەری یەکەم هەرچەندە بەهای x کەمبکات، دیسان سەرەنجبدە ڕوونکردنەوەکەی بەر تەوەری یەکەم ناکەوێت و لە سەرەوەی دەمێنێتەوە بەهای بڕی 2^x بە موجەب دەمێنێتەوە بەهای x هەرچەند بێت. تەوەرەی یەکەم بریتییە لە **دەرکەناری ئاسۆیی** بۆ ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=2^x$ **دەرکەنار Asymptote** ڕاستەهێڵێکە، هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بەرەبەرە لێی نزیکەدەبێتەوە هەرچەندە بەهای x زۆر گەورەبێت یان زۆر بچووکبێت.

هەرنەخشەیەکی وەك $f(x)=ab^x$، کاتێك $a>0$ و $b>1$ بریتییە لە نەخشەیەکی **گەشەی توانی Exponential growth** بەهاکەی زیاددەکات بەزیادبوونی بەهای x بەڵام کاتێك $0<b<1$ ئەوا نەخشەکە $f(x)=ab^x$ بریتییە لە نەخشەی **پووکانەوە Exponential decay** بەهایەکەی بە زیادبوونی بەهای x کەمدەکات.

نموونــــه 1 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە توانییەکان

دیاریبکە، ئایا ئەم نەخشەیە، نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان نەخشەیەکی توانی پووکانەوەی توانییە پاشان وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە؟



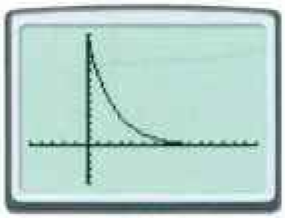
أ $f(x)=1.5^x$

هەنگاوی 1 بەهای بنچینە بدۆزەوە

$f(x)=1.5^x$ بنچینە1.5گەورەترە لە 1 نەخشەکە بریتییە لە نەخشەیەکی گەشەی توانییە

هەنگاوی 2 بەبەکارهێنانی خشتەکە، وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.4	0.8	1	1.5	2.3	3.4	5.1



ب $f(x)=30(0.8)^x$

هەنگاوی 1 بەهای بنچینەیی بدۆزەوە.

$f(x)=30(0.8)^x$ بنچینە0.8بچوکترە لە 1 نەخشەکە بریتییە لە نەخشەیەکی کەمبوونی توانی.

هەنگاوی 2 بەبەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی، وێنەی نەخشەکە بکێشە.

خاڵی چاودێری

1. دیاریبکە ئایا نەخشەی $f(x)=5(1.2)^x$ نەخشەیەکی توانی گەشەی توانییە یان نەخشەیەکی پووکانەوەی توانییە؟ وێنەی ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

دەتوانیت گەشە یان پووکانەوە بەبەکارهێنانی ڕێژەی سەدی نەگۆڕ بۆ گەشە و پووکانەوە بەبەکارهێنانی ئەم ڕێسایە بنوێنیت؟

گۆژمەی بنەڕەتی — ژمارەی ماوەکاتییەکان

$$A(t)=a(1\pm r)^t$$

گۆژمەی کۆتایی — تێکرای گۆڕان

بنچینەی نەخشەکەی سەرەوە $1+r$ پێی دەوترێت هاوکۆلکەی زیادبوون بە هەمان شێوە بە بنچینەی $1-r$ دەوترێت هاوکۆلکەی کەمبوون.

لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار

گەشەو پووکانەوە

کاتێك بەهای نەخشەکە بە تێکڕایەکی نەگۆڕ زیاد دەکات. وەك %7 مانای ئەوەیە لێکدانی%7 + %100 واتە لە%107 بدە. لە شێوەی دەیی ئەمەش دەگۆڕین بە لێکدان لە 1+0.07 واتە 1.07.

کاتێك بەهای نەخشەکە بە تێکڕایەکی نەگۆڕ کەمدەکات. وەك %12 مانای ئەوەیە لێکدانی %12 − %100 واتە لە %88 بدە لە شێوەی دەیی لێکدانی 0.12 − 1 واتە 0.88.

نموونــــــه 2 جێبەجێکردنی ئابووری

گۆڤەند لە ساڵی 2000 دا گیتارێکی دەگمەنی کڕی مێژووەکەی دەگەڕایەوە بۆ ساڵی 1959، 12 ملیۆن دیناری پێدا. شارەزایان وایان خەمڵاندن کە نرخەکەی ساڵانە بەرێژەی % 14 زیاد دەکات. بەبەکارهێنانی خشتەی خوارەوە ئەو ساڵە بدۆزەوە کە تییێدا نرخی گیتارەکە دەبێتە 60 ملیۆن دینار.

هەنگاوی 1 نەخشەیەك بنووسە گۆڕانی نرخی گیتارەکە بنوێنێت.

$f(t)=a(1+r)^t$ نەخشەی گەشەی توانییە

$=12(1+0.14)^t$ 12 لەجیاتی a و 0.14 لە جیاتی r دابنێ.

$=12(1.14)^t$

هەنگاوی 2 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

کاتێك وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەکی توانی بەبەکارهێنانی ڕوونکردنەوەیی دەکیشێت، پێویستە پەنجەرەکە بگونجێنێت تا ئەو خاڵەی بەکاریدەهێنێت دەربکەوێت (شاشەکە و الێبکرێت وێنەکە بەباشی دەربکەوێت).

هەنگاوی 3 ڕوونکردنەوەکە بەکاربێنە بۆ خەملاندنی ئەو ساڵەی نرخی گیتارەکە بەبێت 60 ملیۆن دینار.

قرمانی TRACE بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای t کاتێك $f(t)=60$.

نرخی نەخشەکە دەگاتە 60 کاتێك $t=12.29$ نرخی گیتارەکە دەگاتە 60 ملیۆن دینار پاش 12.29 ساڵ لە کڕینی واتە لە ساڵی 2012 .

> **یارمەتی**
>
> لە بژمێرەی ڕوونکردنەوەییدا لە جیاتی x هێمای t بەکاربێنە.
>
> $y_1=12\,000*1.14\hat{}x$

خاڵی چاودێری

2. ژمارەی ئەهەنگە کویرەکانی ئوسترالیا 350 ئەهەنگ بوو لە ساڵی 1981 دا، ساڵانە بە ڕێژەی %5 ژمارەیان زیاد دەکات. نەخشەیەکی توانی بنووسە ئەم زیادبوونە بنوێنێت. پاشان خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو ساڵەی ژمارەی ئەهەنگەکان دەگاتە 550 ئەهەنگ.

نموونــــــه 3 جێبەجێکردنی لەسەر پووکانەوە

نرخی بارهەڵگرێکی نوێ 28 ملیۆن دینارە. ساڵانە نرخەکەی بە ڕێژەی %6 دادەبەزێت نەخشەیەکی توانی بنووسە بۆ ئەم دابەزینە. پاشان خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو ساڵەی نرخی بارهەڵگرەکە دەگاتە 20 ملیون دینار.

هەنگاوی 1 نەخشەیەك بنووسە گۆڕانی نرخی بارهەڵگرەکە بنوێنێت.

$f(t)=a(1-r)^t$ نەخشەی کەمبوونی توانی

$=28\ (1\text{-}0.06)^t$ 28 لەجیاتی a و 0.06 لە جیاتی r دابنێ.

$=28(0.94)^t$

هەنگاوی 2 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

کاتێك وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە توانییەکە بەبەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی دەکێشێت. پێویستە خەسلەتەکانی پەنجەرەکە دەستکاری بکەیت بۆ ئەوەی ئەو خاڵەی بە کاریدەهێنێت دەربکەوێت. فەرمانی TRACE بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای t کاتێك

$f(t)=5$

هەنگاوی 3 ڕوونکردنەوەییەکە بەکاربێنە بۆ خەمڵاندنی بەهای ئەو ساڵەی نرخی بارهەڵگرەکە دەگاتە 5 ملیۆن دینار

بەهای نەخشەکە بەنزیکەیی دەبێتە 5 کاتێک $t = 17.3$. نرخی بارهەڵگرەکە دەگاتە 5 ملیۆن دینار پاش 17.3 ساڵ لە کڕینی.

خاڵی چاودێری

3. ماتۆر سکیلێك نرخەکەی یەك ملیۆن دینارە. ساڵانە بە ڕێژەی 15% نرخەکەی دادەبەزێت نەخشەیەکی توانی بۆ نواندنی ئەم دابەزینە بنووسە پاشان خشتەکە بەکاربیهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو ساڵەی نرخەکەی دەگاتە نیوەی نرخە بنەڕەتییەکەی.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بژمێر بەکاربێنە بۆ بەراورد کردن لە نێوان دوو بەهای 1.01^{500} و 0.99^{500} ئەوەی پێی گەیشتی باسبکە.
2. لە بارە جیاوازەکانی نێوان ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $f(x)=1.1^x$ و $g(x)=0.9^x$ وتووێژبکە کاتێك $x=0$ لە هەریەکەیان چی ڕوودەدات.
3. باسی نەخشەی $f(t)=a(1-r)^t$ بکە کاتێك $r>0$ باسی نەخشەکە بکە کاتێك $r<0$
4. ڕێکخەر بە ئەم خشتەیەی خوارەوە دروست بکە و تەواویبکە. بەراوردی نێوان گەشەی توانی و پووکانەوەی توانی بکە.

فێربە

$f(x)=ab^x$ کاتێك $a>0$	گەشە	پووکانەوە
بەهای b		
شێوەی گشتی ڕوونکردنەوەکە		
نەخشەکە لە زیادبوونی بەهای x چی بەسەردێت		
نەخشەکە بە کەمبوونی بەهای x چی بەسەردێت		

1-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ناڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ئەگەر بنچینەی نەخشەیەکی توانی ژمارەیەك بێت لەنێوان 0 و 1 دا ئەوا نەخشەکە نەخشەیەکی ؟ (گەشەی توانی یان پووکانەوەی توانییە)

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە، ئایا نەخشەکە نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان پووکانەوەی توانییە.

2 $f(x)=32(0.5^x)$ 3 $f(x)=0.5(1.2^x)$ 4 $f(x)=0.4\left(\frac{3}{4}\right)^x$

بڕوانە نموونە 2

5 **زیندەزانی** دەفرێکی چاندنی بەکتریا 150 بەکتریای تێدایە. لەو جۆرانەی کە دوو ئەوەندەی لێدێت پاش هەر کاتژمێرێك.

أ نەخشەی $f(t)$ بنووسە زۆربوونی ژمارەی بەکتریاکان دەنوێنێ.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

ج خشتەکە بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی ژمارەی بەکتریاکان پاش 10 کاتژمێر.

بڕوانە نموونە 3

6 **فیزیا** لەبەرزی 25 m تۆپێکی تۆی نەرم بۆ سەر زەویەکی ڕەق بەربدرایەوە چەند جارێك بەرەو سەرەوە هەڵبەزیەوە. هەرجارێك دەگەیشتە $\frac{2}{5}$ ی بەرزی جاری پێشوو.

أ نەخشەی $f(n)$ بنووسە ئەو بەرزییە بنوێنێت کە تۆپەکە لە هەر جارێکدا دەیگاتێ.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەو نەخشەیە بکێشە.

ج پاش چەند جار بەرزییەکەی لە 1 m کەمتر دەبێت؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

دیاریبکە ئایا نەخشەکە نەخشەیەکی گەشەی توانییە یان پووکانەوەی توانییە پاشان وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
7–9	1
10	2
11	3

7 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ **8** $f(x)=\frac{1}{3}(1.3)^x$ **9** $f(x)=10(2.7)^x$

10 **شەمەندەفەرەکان** شتومەکە گواستراوەکان بە هۆی شەمەندەفەرەوە لە ئەمریکا گەیشتە 580 ملیار تەن/میل لە ساڵی 1960 دا، ئەم هێندە ساڵانە بە ڕێژەی 2.32% زیاد دەکات لە و ساڵەوە.

أ نەخشەیەك بنووسە زیادبوونی ساڵانەی شتومەکە گواستراوەکان بە هۆی شەمەندەفەرەکانەوە بنوێنێت. (1960 = ساڵی سفر)

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

ج لە چ ساڵێکدا شتومەکە گواستراوەکان لە هەزار ملیار تەن/میل زیاتر دەبێت؟

11 **پزیشکی** هێندی ئەنسۆلینی بەکارهاتوو بۆ ڕێکخستنی ڕێژەی شەکر لە خوێندا بە تکێڕای 5% بە نزیکەیی لە هەر خولێکدا کەم دەکات ئەو هێندەی مرۆڤ پێویستی پێیەتی بە نزیکەیی دەگاتە 10 یەکە.

أ نەخشەی $f(t)$ بنووسە هێندی ئەو ئەنسۆلینە بە پێی کات بنوێنێت. کە لە خوێندا ماوەتەوە پاش ئەوەی نەخۆشەکە 10 یەکەی وەرگرت.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

ج هێندی ئەنسۆلینی ماوە لە خوێندا پاش 10 خولەك بخەمڵێنە.

د پاش چەند خولەك هێندی ئەنسۆلین لە لەشدا بۆ نیوە دادەبەزێت.

دیاریبکە ئەم نەخشانە توانین یان نا.

12 $f(x)=2(x)^{10}$ **13** $f(x)=0^x$ **14** $f(x)=1(0.5)^x$

15 لە ساڵی 1626 کۆمەڵێك لە کۆچبەرانی ئەڵمانی دوورگەی مانهاتنیان کڕی ، کە ئەمڕۆ بەشێکە لە شاری نیویۆرك. لە بڕی کەلوپەلێك نرخەکەی 24 دۆلاری ئەو کاتەبوو. وادابنێ ئەم پارەیە بە سودێکی ئاویتەی ساڵانە ڕێژەکەی 3.5% بێت دانرا بڕی ئەو پارەیە لە ساڵی 2008 دا دەبێتە چەند؟

16 **تەکنەلۆژیا** هێندی زانیارییە هەڵگیراوە ئەلیکترۆنیەکان لە ساڵی 2002 دا گەیشتە نزیکەی 5 ئەکزا بایت یان 5×10^{18} بایت. توێژینەوەرەکان ئەو هێندەیان بە دوو ئەوەندەی هەڵگیراوەکانی ساڵی 1999 خەمڵاند. وایدابنێ گەشەی هێندی زانیارییەکان بەو شێوازە بەردەوام بوو. نەخشەیەك بنووسە گەشەی هێندی زانیارییە هەڵگیراوە ئەلیکترۆنیەکان بنوێنێت لە سەرەتای ساڵی 1999.

17 **بزمێر** نرخی بزمێرەکان ساڵانە بە ڕێژەی 30% کەم دەکات. کاوە بزمێرێکی بە یەك ملیۆن دینار کڕی. نەخشەیەك بنووسە نرخی بزمێرە کە بەپێی کات بە ساڵانە بنوێنێت، وە لە دواییدا خشتەیەك دروستبکە بۆ دیارکردنی لە چ ساڵێك نرخی ئەم بزمێرە دەبێتە نیوەی نرخی بنەڕەتییەکەی.

ئەم خشتەیە بۆ هەر نەخشەیەك تەواو بکە بەهایەکان نزیکبکەوە لە نزیکترین بەش لە سەد.

	x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
18	$f(x)=2.2^x$									
19	$g(x)=0.4^x$									

20 ئەگەر $A=P(1.015)^n$ ڕیسایەك بێت بۆ بڕی ئەو قەرزەی کە خاوەن کارتێکی متمانەوە وەریبگرێت. کاتێك A بڕی ئەو پارەیەکە خاوەن کارتی متمانە پێی قەرزدارە پاش n مانگ. p هێمای بڕی پارەی دراو بێت؟

أ وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە کاتێك بڕی پارەی بنەڕەتی یەك ملیۆن دیناربێت.

ب پاش ساڵێك بڕی پارەکە دەبێتە چەند؟

ج کەی بڕە پارەکە دەگاتە 000 300 1 دینار؟

21 **فرۆشراوەکان** فرۆشراوەکانی مانگانەی یەکێك لە کێڵگە پەلەوەرییەکان لە مانگی کانوونی دووەمدا گەیشتە ئەو پەڕی 000 12 مریشك. بەڵام فرۆشراوەکانی لە مانگەکانی دواتردا مانگانە بە ڕێژەی%20 دابەزی.

أ خاوەن کێڵگەکە دوای شەش مانگ لە دوای مانگی کانوونی دووەمەوە چەند مریشکی فرۆشتوە.

ب پاش چەند مانگ فرۆشراوەکانی ئەم کێڵگەیە لە 1000 مریشك کەمتر بوو؟

22 **بانکەکان** بانکەکان یاسایەك بۆ هەژمارکردنی ترخی گوژمەی سپێردراو بەکاردەهێنن یاساکە بریتییە لە $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ کاتێك A گوژمەی ئێستا و p گوژمەی بنەڕەتی سپێردراو و r هێمای تێکڕای سوودی ساڵانە و t هێمای ماوەیە بە ساڵ و n هێمای ژمارەی ماوەکانی ئەو ساڵەیە کە تێیدا پارەکەی پاشەکەوت کردووە. واتە هەژماری سوود و زیادکردنی بۆ گوژمەی سپێردراو بێت. خەسرەو 5 ملیۆن دیناری بە سوودی ساڵانەی%5سپارد بۆ ئەوەی لە هەروەرزێکدا (4 جار لە ساڵێکدا) پاشەکەوتەکەی هەژماربکرێت.

أ بڕە پارەکە پاش 5 ساڵ دەبێتە چەندە؟

ب کەی گوژمەی سپێردراو لە 10 ملیۆن دینار تێپەڕ دەکات؟

ج **چی دەبێت ئەگەر ....؟** خەسرەو پاش 5 ساڵ چەند قازانج دەکات، ئەگەر پاشەکەوتەکە مانگانە بکرێت لە جیاتی ئەوەی وەرزی بکرێت.

23 **بیری ڕەخنەگر** پۆوتانی خاڵی هاوبەشی ڕوونکردنەوەیی ئەم دوونەخشەیە چییە $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ و $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ ؟

ئەو مەودایەی کە بەرامبەر بواری [0, 10] لە هەریەك لەم نەخشانەی دێن بدۆزەوە.

24 $f(x)=3^x-2^x$ 25 $f(x)=100(0.9)^x$ 26 $f(x)=\frac{3}{4}(2)^x$

27 **زەویناسی** ڕادون − 222($Radon-222$) گازێکە لە خۆڵ و بەردەوە دەردەچێت. لە وانەیە ئەم گازە لە تەلارەکاندا کۆببێتەوە و مەترسی دروست بکات لەسەر ئەو کەسانەی هەڵیدەمژن. ڕادۆن − 222 دەگەڕێتەوە دەبێتە پۆلۆنیۆم ($Polonium$) یان قورقوشم.

أ ڕیژەی سەدی ڕۆژانەی گەڕانەوەی ڕادۆن −222 بدۆزەوە.

ب نەخشەیەك بنووسە هێندی ڕادۆن − 222 ماوە بنوێنێت پاش t ڕۆژ لە هێندێکی بنەڕەتی برەکەی $500mg$ بێت.

ج پاش 14 ڕۆژ هێندەکە چەندی لێدەمێنێتەوە ؟

28 **خەملاندنەکان** ژمارەی دانیشتوانی زەوی لە ساڵی 2000 دابە 6.1 ملیار کەس خەملێندرا. هەروەها ڕێژەی زیادبوونی ساڵانە بە1.4% خەملێندرا، نەخشەیەك بنووسە گەشەی ژمارەی دانیشتووانی زەوی بەپێی ساڵەکان پاش 2000 (2000 = ساڵی 0) بنوێنێت، وەبەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ژمارەی دانیشتوانی زەوی ساڵی 2005 چەندبوو.

29 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** کام لەم دووبڕانە x^3 یان 3^x خێراتر زیاد دەکات بەزیادبوونی بەهای x ؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

30 **بنووسە** باسی بارێك بکە کە دەتوانرێت بنوێنرێت بەبەکارهێنانی نەخشەیەکی توانی. نەخشەیەك بنووسە ئەوەی دەینوێنێت بۆ هەر بەهایەك تیپدا ڕوونکرابێتەوە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

31 کام لەم نەخشانەی دێن نەخشەی پووکانەوە توانییە؟

Ⓐ $f(x)=0.9(1.001)^x$ ㅤ Ⓙ $f(x)=0.5(2)^x$

Ⓑ $f(x)=1.5\left(\frac{10}{11}\right)^x$ ㅤ Ⓓ $f(x)=\left(\frac{1}{0.5}\right)^x$

(أ) $f(x)=0.9(1.001)^x$

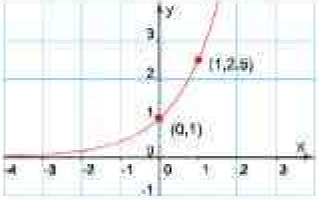
(ج) $f(x)=0.5(2)^x$

(ب) $f(x)=1.5\left(\frac{10}{11}\right)^x$

(د) $f(x)=\left(\frac{1}{0.5}\right)^x$

32 کام لەمانەی خوارەوە بەهای b دەنوێنێت. کاتێك نەخشەی $f(x)=ab^x$ نەخشەیەکی پووکانەوەی توانی بێت؟

33 **کورتە وەڵام** بەهایەکانی a و b چەندن لە نەخشەی $f(x)=ab^x$ کە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر نوێنراوە.



34

0.6%

(أ) $f(x)=89\ \ 443(1.6)^x$

(ج) $f(x)=89\ \ 443(1.06)^x$

(ب) $f(x)=89\ \ 443(1.006)^x$

(د) $f(x)=89\ \ 443(1.0006)^x$

بەرەنگاری و فراوانکردن

35 **بیری رەخنەگر** لە بیرت بێت کە نەخشە زۆر ڕادەدارەکانت بە پێی پلەکانیان پۆلێن کردووە بۆچی باس لە پلەی نەخشەی توانی ناکەیت؟

خشتەیەك بۆ شیکاری هەر لاسەنگەیەك بەکاربهێنە. وەڵامەکەت نزیکبکەوە:

36 $1.15^x \geq 3$ ㅤ **37** $0.97^x < 0.5$ ㅤ **38** $5 < 1.5^x < 6$

39 بەراورد لە نێوان ڕوونکردنەوەیی هەردوو نەخشەی $y=x^2$ و $y=2^x$ بکە. کاتێك $-10 < x < 10$ ژمارەی خاڵەکانی یەکتربڕین چەندە؟ پۆوتانی ئەو خاڵانە بدۆزەوە.

40 **زیندەزانی** لێکۆڵەروان ژمارەیەك مێشوولەیان لە یەك ئەکردا، لە ناوچەیەکی سارد دۆزیەوە. دوای توانەوەی سەهۆڵەکە ژمارەیان $10^{\frac{1}{2}d+2}$ بوو. کاتێك d ژمارەی ڕۆژەکان بێت پاش تواندنەوەی سەهۆڵەکە ژمارەی مێشوولەکان لە ئەکرێکدا دوای تواندنەوەی سەهۆڵەکە چەندە؟ کاتی خایەنراو چەندە پاش توانەوەی سەهۆڵەکە هەتا ژمارەی میشوولەکان لە هەر ئەکرێکدا دوو ئەوەندەی لێبێت؟ (ئەکریەکەیەکی ڕووبەرە و یەکسانەبە $4\ 047m^2$).

41 لەنەخشەی $f(x)=b^x$دا بۆچی بواری بەها گونجاوەکانی بنچینە تەنها ماوەی $\{b / b>0;\ b\neq 1\}$ دەبێت.

پێداچوونەوەی لولپێچی

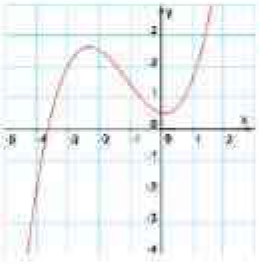
بەبەکارهێنانی بژمێریی ڕوونکردنەوەیی، وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە. بوار و مەودا و ئەو جیگۆڕکێیەی ڕێگە بە کێشانی وێنە ڕوونکردنەوەییەکە دەدات بەهۆی ڕوونکردنەوەیی نەخشە بنەڕەتییەکانەوە. (پۆلەکانی پێشوو)

42 $f(x)=\sqrt{x-3}$ **43** $f(x)=-x^2+1$ **44** $f(x)=2x^3$ **45** $f(x)=x-4$

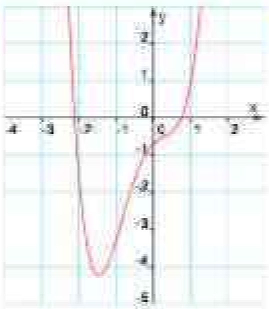
46 **بۆ خۆشی** هەڤاڵ و شیرینی خوشکی سیدی یارییان کڕی هەڤاڵ 3 یاری نوێ و دوو یاری کۆنی بە 235 000 دینار کڕی، بەڵام شیرین یارییەکی نوێ و 4 یاری کۆنی بە 195 000 دینار کڕی، نرخی هەریەکە لە یارییە نوێیەکان و یارییە کۆنەکان بدۆزەوە (پۆلەکانی پێشوو).

لە پرسیارەکانی 47 – 49 هەریەك لە مانەی خوارەوە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەکی ڕادەدارە، دیاریبکە ئایا پلەی ئەم نەخشانە تاکن یان جووتن. هاوکۆڵکەی سەرەکیان موجەبە یان سالب (پۆلەکانی پێشوو).

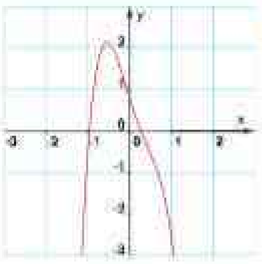
47



48



49



دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەکان

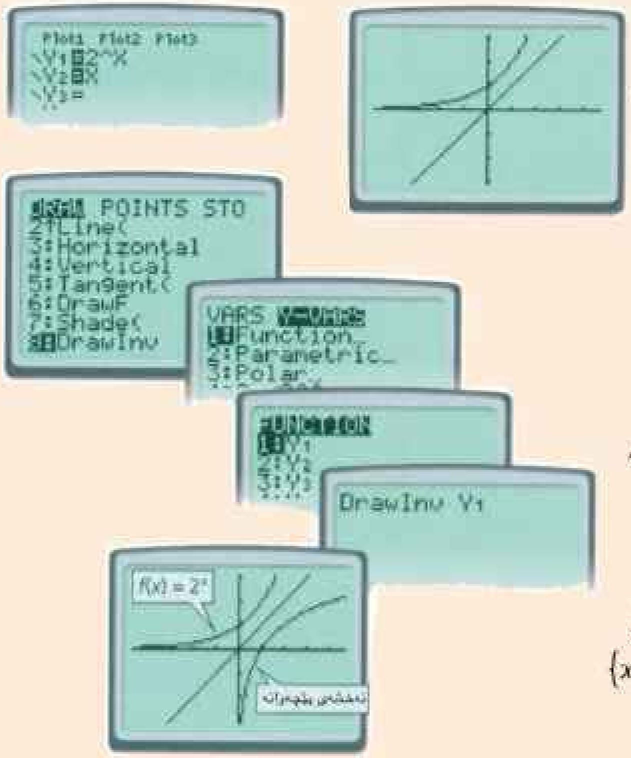
Explore Inverses of Functions

لایەرەی تەکنۆلۆژیا

دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ دۆزینەوە پێچەوانەی نەخشەکان و پەیوەندییەکەی بە نەخشەی هێڵی $f(x)=x$ بەکاربهێنیت.

چالاکی

لەمەودوا وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=2^x$ و ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکەی دەکێشین.



1. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=2^x$ و ڕاستەهێڵی $y=x$ بکێشە. بەبەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی و دیاریکردنی پەنجەرەی دەبی بۆ بەجێهێنانی ئەم دوو نەخشە تۆماربکە و پاشان دوگمەی ZOOM دابگرە **4: ZDecimal** هەڵبژێرە.

2. فرمانی **DrawInv** بەکاربهێنە بۆ بەدەستهێنانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی پەیوەندییەکە. ئەم کارە جێبەجێدەکرێت بە داگرتنی دوگمەی 2nd و PRGM پاشان **8:DrawInv** هەڵبژێرە. بۆ هەڵبژاردنی **Y1** دوگمەی VARS دابگرە و بەشێوەی ئاسۆیی بجووڵێنە هەتا **Y-VARS** **1: Function** هەڵبژێرە پاشان **1:Y1** لە کۆتاییدا دوگمەی ENTER دابگرە.

لەشاشەکە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە $f(x)=2^x$ و پێچەوانەکەی و ڕاستەهێڵی $y=x$ دەردەکەوێت. سەرنجبدە پێچەوانەی پەیوەندییەکە، نەخشەیە کە بوارەکەی $\{x/x>0\}$ و مەوداکەی R دەبێت.

هەوڵبدە

وێنەی ڕوونکردنەوەیی خشتەی $f(x)=x^2$ و ڕوونکردنەوەی $f(x)=x$ بکێشە.

1. بەراوردبکە لە نێوان بواری نەخشەی $f(x)=x^2$ و مەوداکەی لە لایەک، بواری پێچەوانەی پەیوەندییەکە و مەوداکەی لە لایەکی تر. ئایا پێچەوانەی پەیوەندی بۆ نەخشەی $f(x)=x^2$ نەخشەیە؟

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^3$ و نەخشەی $f(x)=x$ بکێشە

2. بەراورد بکە لەنێوان بواری نەخشەی $f(x)=x^3$ و مەوداکەی لە لایەک و بواری پێچەوانەی پەیوەندییەکەی و مەوداکەی لە لایەکی تر ئایا پێچەوانەی پەیوەندی بۆ نەخشەی $f(x)=x^3$ نەخشەیە؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

3. **دەستەواژەیەک بنووسە** دەستەواژەیەک دەربارەی پەیوەندی نێوان بواری نەخشەو مەوداکەی لە لایەک و بواری پێچەوانەی پەیوەندی و مەوداکەی لە لایەکی تر بنووسە.

4. **دەستەواژەیەک بنووسە** دەستەواژەیەک دەربارەی پەیوەندی نێوان ڕوونکردنەوەی نەخشە و ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە.

2-4 پێچەوانەی نەخشە
Inverse function

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

دەتوانرێت پێچەوانەی نەخشە بۆ دۆزینەوەی نرخی شتومەک پێش بەکلاکردنەوەی بەکاربهێنرێت (نموونەی 5)

ئامانجەکان

- پەیوەندییەکی پێچەوانەی پەیوەندییەک بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت و جیای دەکاتەوە
- دۆزینەوەی نەخشەیەک بۆ پێچەوانەی نەخشە

زاراوەکان
Vocabulary

پێچەوانەی پەیوەندی
Inverse relation

پێچەوانەی نەخشە
Inverse function

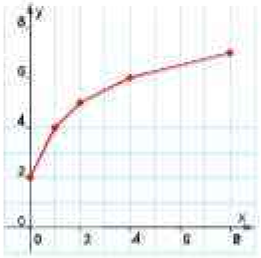
لە پۆلە بنەڕەتییەکان فێربویت، لێدەرکردن کردارێکی پێچەوانەی کۆکردنەوەیە واتە جێبەجێکردنی لێدەرکردن ئەنجامەکانی جێبەجێکردنی کۆکردنەوە لادەبات. بۆ نموونە: دژە کۆکردنەوەی ژمارە 3 بریتییە لە 3 − و دژە لێکدانی 5 بریتییە لە $\frac{1}{5}$ ،

دەتوانیت کرداری پێچەوانە لەسەر پەیوەندییەکان و نەخشەکان جێبەجێبکەیت. بۆ دەستکەوتنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ پێچەوانەی پەیوەندی **Inverse relation** هەر پەیوەندییەک، وێنەی ڕوونکردنەوەیی پەیوەندییەکە بکێشە بە وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەرەی $x = y$، ئەمەش هاوتای گۆڕینی شوێنەکان لە نێوان پۆتانی x ، y لە جووتە ڕێکخراوی هەر خاڵێک لە ڕوونکردنەوەی پەیوەندییەکەدا.

نموونە 1 وێنەی ڕوونکردنەوەیی پەیوەندییە پێچەوانەکە

پەیوەندیی ئەم نەخشەیە بنوێنە و خاڵەکانی بەیەکتر بگەیەنە. پاشان پێچەوانەی پەیوەندییەکەی بنوێنە و بوار و مەودای هەریەکە لە دوو پەیوەندییەکە دیاریبکە.

x	0	1	2	4	8
y	2	4	5	6	7

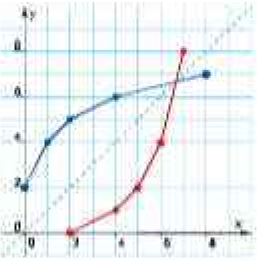


خشتەکە بەخاڵ بنوێنە، بەهێڵێکی گونجاو بەیەکیان بگەیەنە

ئاڵوگۆڕ لە نێوان دوو تەوەرەی x و y لە جووتە ڕێکخراوی هەرخاڵێکدا، لە ڕوونکردنەوەی پەیوەندییەکە دابکە.

x	2	4	5	6	7
y	0	1	2	4	8

وێنەی هەر خاڵێك بکێشە بە وێنەدانەوەی بە دەوری ڕاستەهێڵی $y = x$ بە هێڵێکی گونجاو خاڵە دەستکەوتووەکان بەیەك بگەیەنە.



بواری نەخشەکە: $\{x / 0 \le x \le 8\}$

مەودای نەخشەکە: $\{y / 2 \le y \le 7\}$

بواری پێچەوانەی نەخشەکە $\{x / 2 \le x \le 7\}$

مەودای پێچەوانەی نەخشەکە $\{y / 0 \le y \le 8\}$

لە بیرت بێت

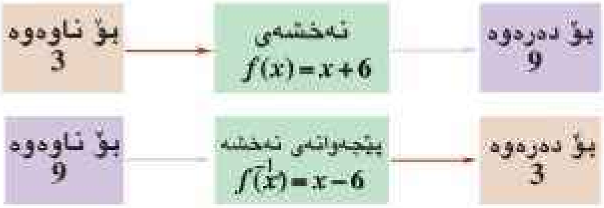
پەیوەندی: بریتییە لەکۆمەڵە جووتە ڕێکخراوێك.
نەخشە: بریتییە لەو پەیوەندییەی کە هەر بەهایەکی x بەتەنها یەك بەهای y دەبەستێتەوە

خاڵی چاودێری

نەخشەکە بنوێنە و خاڵەکان بگەیەنە، پاشان پێچەوانەی پەیوەندییەکە بنوێنە بوارو مەودای هەریەك لە دوو پەیوەندییەکە دیاریبکە.

x	1	3	4	5	6
y	0	1	2	3	5

کاتێك پەیوەندییەکە دەبێت بە نەخشە، پێچەوانەکەی پەیوەندییکە بە $f^{-1}(x)$ هێما دەکرێت ئەمەش ناکاتە هەڵگەڕاوەی $f(x)$. ئەو دوو نەخشەیەی یەکتری هەڵدەوەشێنن پێیان دەوترێت **پێچەوانەی نەخشە Inverse functions** و هەریەکەیان پێچەوانەی نەخشەکەی تریان دەبێت.



بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەکە، کردارە پێچەوانەکان بەکاربهێنە. هەرچەندە نەخشەی $f(x)$ ژمارە 6 دەخاتە سەر x ئەوا پێچەوانەی نەخشەکە $f^{-1}(x)$ ، ژمارە 6 لە x دەردەکات

نموونــــە 2 نووسینەوەی پێچەوانەی نەخشە بەبەکارهێنانی کردارە پێچەوانەکان

کردارە پێچەوانەکان بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەکان بەکاربهێنە بۆ نەخشەی $f(x)=2x$

$f(x)=2x$ لە نەخشەی $f(x)$ ژمارەی x لێکدانی 2 دەکرێت.

$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$ لە پێچەوانەی نەخشەی $f^{-1}(x)$ ژمارە x دابەشی 2 دەکرێت

پاسادانی بکە. ژمارە 7 وەك ژمارەی تێکردن بەکاربهێنە.

$f(x)=2x$

$f(7)=2(7)$ 7 لە جیاتی x لە پێچەوانەی نەخشەکەدا دابنێ.

$=14$

ژمارەی دەرچوو لە جیاتی x لە پێچەوانەی نەخشەکەدا دابنێ.

$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$

$f^{-1}(14)=\frac{14}{2}$ 14 لە جیاتی x دابنێ

$=7$

پێچەوانەی نەخشە $f^{-1}(x)$ کاریگەری نەخشەی $f(x)$ لادەبات.

خاڵی چاودێری

2. کردارە پێچەوانەکان بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەی هەر نەخشەیەك بەکاربهێنە.

أ $f(x)=\frac{x}{3}$

ب $f(x)=x+\frac{2}{3}$

نموونــــە 3 نووسینەوەی پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەیەکی فرە هەنگاو

کردارە پێچەوانەکان بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەی $f(x)=\frac{x}{4}-5$ بەکاربهێنە

$f(x)=\frac{x}{4}-5$ نەخشەی $f(x)$ ژمارەی x دابەشی 4 دەکات، لە پاشاندا 5 لە ئەنجامەکە دەردەکات.

$f^{-1}(x)=4(x+5)$ بۆ لابردنی 5 - پێویستە 5+ بخرێتە سەر x پاشاندا لە 4 ی بدە بۆ لابردنی کاریگەری دابەش 4 .

پاسادان بکە

$$f(40)=\frac{40}{4}-5=10-5=5 \qquad f^{-1}(5)=4(5+5)=4(10)=40\ ✓$$

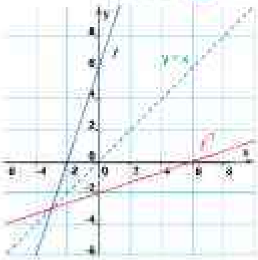
خاڵی چاودێری

3. بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەی $f(x)=5x-7$ کردارە پێچەوانەکان بەکاربهێنە.

دەتوانیت پێچەوانەی نەخشە بە ڕێگای ئاڵوگۆڕکردنی x و y لە ڕێسای نەخشەکەدا پاشان y بەپێی x هەژماربکە.

نموونـــــە 4 نووسینەوەی پێچەوانەی نەخشە و کێشانی ڕوونکردنەوەییەکەی.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=3x+6$ بکێشە، پاشان پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.



$y=f(x)$ بنووسە و وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ بکێشە.	$y=3x+6$
ئاڵوگۆڕ لە نێوان x و y بکە	$x=3y+6$
x بەپێی y بدۆزەوە	$x-6=3y$
	$\frac{x-6}{3}=y$
پێچەوانەی نەخشەکە بە شێوەی ... $=y$ بنووسە	$y=\frac{x-6}{3}$
$y=f^{-1}(x)$ بنووسە	$f^{-1}(x)=\frac{x-6}{3}$
سادەیکە پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە.	$=\frac{1}{3}x-2$

خاڵی چاودێری وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{2}{3}x+2$ بکێشە. پاشان پێچەوانەی نەخشەکە وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

هەر جارێك ویستت کردارێك لابەیت، بە هەنگاوەکانتدا بگەڕێوە دواوە بە دەستپێکردن لە ئەنجامەکەوە هەتا گەیشتن بەچوونەناوی سەرەکی. لەم بارەدا دەتوانیت پێچەوانەی نەخشە بەکاربهێنیت.

نموونـــــە 5 جێبەجێکردن لە بازرگانیدا

بازرگانێك ئامێریکی وێنەگرتنی بە 140 103 دینار فرۆشت. ئەم برە پارە نرخی ئامێرەکە و زیادکردنی 3000 دینار نرخی کاغەزی بەرگ تێگرتنەکەی کەبازرگانەکە دایناببوو %8 نرخی باجەکەی بوو. کڕیارەکە ئامێرەکەی بەدڵ نەبوو فرۆشیارەکە چۆن ئەو برە پارەیەی دەیگەڕێنێتەوە بۆ کڕیار هەژماردەکات.

هەنگاوی 1 نەخشەکە بنووسە کە بڕی تێچوونی بە پێی نرخی ئامێرەکە p دەنوێنێت.

$c(p)=1.08(p+3000)$ · تێچوون وەك نەخشەیەك بە پێی نرخی ئامێرەکە

هەنگاوی 2 پێچەوانەی ئەو نەخشەیە بنووسە کە نرخی ئامێرەکە بە پێی تێچوونەکەی دەینوێنێت.

	$c(p)=1.08(p+3000)$
بەشینەوەی بکە	$c(p)=1.08p+3240$
3240 لە هەردوو لا دەربکە	$c(p)-3240=1.08p$
دابەشیکە بۆ جیاکردنەوەی p	$\frac{c(p)-3240}{1.08}=p$

هەنگاوی 3 بەهای پێچەوانەی نەخشەکە هەژماربکە کاتێك $c=103\,140$

$$p=\frac{103\,140-3240}{1.08}=92\,500$$

بازرگانەکە پێویستە 500 92 دینار بداتەوە بە کڕیار

پاسەدانیکە

بە لەجیاتی دانان	$c(p)=1.08(925\,00+3000)$
	$=1.08(95\,500)$
	$=103\,140$

بیرت بێت

لەکاتی شیکارکردنی پرسیارێکی ژیانی ڕۆژانەدا ئاڵوگۆڕ لەنێوان گۆڕاوی ئازاد و گۆڕاوی پەیوەست ناکرێت، چونکە هەریەکەیان تایبەتمەندی خۆی هەیە.

خاڵی چاودێری بۆ ئامادەکردنی چا $\frac{1}{6}$ کەوچکێك لە چا بۆ هەر کوپێك ئاو، و یەك کەوچك لە چا بۆ قۆرییەك ئاو بەکاربهێنە، پێچەوانەی نەخشە بۆ دیاریکردنی ژمارەی کوپەکان کاتێك 7 کەوچك چا بەکارهاتبێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەنجامی ئاڵوگۆڕکردنی نێوان x و y باسبکە، بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشەی $f(x) = x$ لە بەکارهێنانی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ دا، چۆن پێشبینی ئەو ئەنجامەت دەکرد؟
2. نموونەیەک بهێنەوە، بۆ نەخشەیەک پێچەوانەی پەیوەندییەکەی نەخشەبێت و نموونەیەکی تر پێچەوانەی پەیوەندییەکەی نەخشە نەبێت.
3. چیت دەستدەکەوێت کاتێک پێچەوانەی نەخشە دەدۆزیەوە بۆ پێچەوانەی نەخشەی $f(x)$؟

بۆ دەرەوە ⟶ نەخشەکە ⟶ بۆ ناوەوە

4. ئەم خشتەیەی بەرامبەر بکێشە و تەواوی بکە. نموونەیەک بێنەوە لەسەر نەخشەی $f(x)$ بۆناو و بۆ دەر و پێچەوانەی نەخشەکە بۆ $f(x)$

بۆ دەرەوە ⟶ پێچەوانەی نەخشەکە ⟶ بۆ ناوەوە

2-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لەکاتی ئاڵوگۆڕکردنی نێوان x و y هەردەم ئەنجامەکەی ___?___ پێچەوانەیە (پەیوەندی یان نەخشەی)

بڕوانە نموونە 1

وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە بکێشە کە بەم خشتانە نوێنراون پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە بوارو مەودای هەریەکە لە دوو پەیوەندییەکە دیاریبکە

2

x	1	2	3	4
y	1	2	4	8

3

x	3	4	1	−1
y	−1	−2	−4	−4

بڕوانە نموونە 2

کردارە پێچەوانەکان بۆ نووسینی پێچەوانەی نەخشە بەکاربهێنە.

4 $f(x) = x+3$ **5** $f(x) = 4x$ **6** $f(x) = \frac{x}{2}$ **7** $f(x) = x-2\frac{1}{2}$

بڕوانە نموونە 3

8 $f(x) = 5x-1$ **9** $f(x) = \frac{x}{2}+3$ **10** $f(x) = 3-\frac{1}{2}x$

11 $f(x) = \frac{1}{2}(3-3x)$ **12** $f(x) = 4(x+1)$ **13** $f(x) = \frac{3x-5}{2}$

بڕوانە نموونە 4

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە. پاشان پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە و وێنە ڕوونکردنەوەکەی بکێشە.

14 $f(x) = 5-2x$ **15** $f(x) = \frac{x}{4}+2$ **16** $f(x) = 10+0.6x$

بڕوانە نموونە 5

17 **باری کەش وهەوا** نەخشەی $C = \frac{5}{9}(F-32)$ بەکاردێت بۆ گۆڕینی پلەکانی لە پێوەری فەهرەنهایت بۆ پێوەری سەدی پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە کە پلەکانی گەرما لە پێوەری سەدی بۆ پێوەری فەهرەنهایت دەگۆڕێت. $16°$ پلەی سەدی بۆ پلەکانی فەهرەنهایت بگۆڕە

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشە بکێشە کەبەم خشتانە نوێنراون پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی پەیوەندییەکە بکێشە، بوار و مەودای هەریەکە لە دوو پەیوەندییەکە دیاریبکە

18

x	−1	2	3	5
y	1	3	5	5

19

x	−4	−2	0	2	4
y	−2	−1	0	1	2

راهێنانی ئازاد	
بۆ شیکاری ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
19–18	1
22–20	2
25–23	3
28–26	4
29	5

کرداره پێچەوانەکان بۆ نووسینی پێچەوانەی نەخشە بەکاربهێنە.

20 $f(x)=0.825x$ **21** $f(x)=x-1\frac{3}{4}$ **22** $f(x)=\frac{x}{0.25}$

23 $f(x)=21-32x$ **24** $f(x)=145+12.5x$ **25** $f(x)=\frac{1}{5}x+12$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەر نەخشەیەك لەمانەی خوارەوە بکێشە و پاشان پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە و وێنەی ڕوونکردنەوەکە بکێشە.

26 $f(x)=\frac{4}{5}(x-15)$ **27** $f(x)=2-\frac{x}{3}$ **28** $f(x)=1.21x$

29 **فێربوون** نموونەی هێڵی ژمارەی هەڵگرانی بەکالۆریۆس لە یەکێك لە وڵاتە گەورەکاندا ساڵانە 19 500 کەس زیادەکات دەخەمڵێنێت، لە ساڵی 2001 دا ژمارەی هەڵگرانی بەکالۆریۆس 1.28 ملیۆن کەس بوو، پێچەوانەی نەخشەکە بەکاربهێنە، بۆ خەملاندنی ئەوەی دوای ساڵی 2001 چەند ساڵی تر دەخایەنێت تا ژمارەیان دەگاتە 1.7 ملیۆن کەس.

30 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** وێنەی ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە کە بە دوو خاڵی(2,9) (3,4) تێپەر دەبێت.

أ لاری ڕاستەهێڵەکە چەندە؟

ب لاری ڕاستەهێڵی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە چەندە؟

31 **فیزیا** پلەی کوڵانی ئاو لەسەر ڕووی دەریا 100 پلەی سەدییە.
$f(x)=100-3.37x$ نەخشەی پلەی کوڵانی ئاوە لە بەرزی x km لە ئاستی ڕووی دەریاوە دەنوێنێت.

أ پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە.

ب ئەو بەرزاییە چەندە کە پلەی کوڵانی ئاوتێیدا لە 90 پلەی سەدی کەمتر دەبێت وەڵامەکەت بۆ نزیکترین 10 m مەتر نزیکبکەوە.

ج پلەی کوڵانی ئاو لە سەر لوتکەی شاخی لۆتس لە نیپاڵ 71.3 پلەی سەدییە، بەرزی ئەم لوتکە لە ئاستی ڕووی دەریا و بەمەتر بدۆزەوە؟

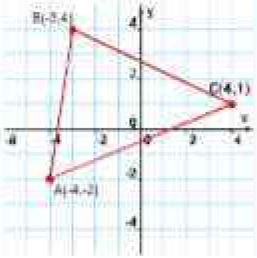
بەرواردییە

فیزیا

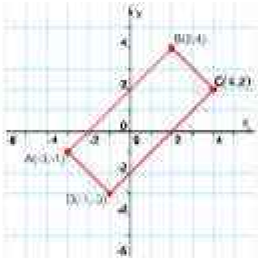
شاخەوانەکان لە بەرزایی سەرەکەش لە ڕووی دەریاوە دەتوانن چایی کوڵاو بخۆنەوە چونکە پلەی گەرمی نزمە.

ئەندازە سەری ئەم شێوازە ئەندازەییانە بدۆزەوە کە پێچەوانەی پەیوەندییەکە دەنوێنێت.

32



33



34 **بیری ڕەخنەگر** پەیوەندی پێچەوانەی نەخشەی $f(x)=3$ چییە؟ ئایا ئەم پەیوەندییە پێچەوانەی نەخشەیە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

35 **بنووسە** لە پێشبڕکێی تێپەڕاندنی بۆرییەکان، هەڵۆ لە ماوەی 12.59 چرکە 10 m ی بڕی وا دابنێ هەڵۆ ماوەکەی بە خێراییەکی نەگۆڕ بڕیوە. ئەو نەخشە بنووسەکە کە ماوەی بڕاو بەپێی کات دەنوێنێت. پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە و بۆ هەژمارکردنی کاتی خەیاڵکراو لە بڕینی ماوەی 25 m بە خێرایی نەگۆڕ بەکاربهێنە.

36 نرخی بلیتی چوونە ژوورەوە بۆ سێرکی جیهانی 22 000 دینارە. ئەگەر بە هۆی کارتی متمانە پارەکە بدرێتە سێرکەکە گوژمەکە بەبڕی 3 500 دینارە زیاد وەردەگرێت، ژمارەی بلیتە کڕاوکان هەر چەند بن.

أ نەخشەیەك بنووسە، ئەو بڕە پارەی بە هۆی کارتی متمانەوە دەدرێت بنوێنێت، بە پێی ژمارەی بلیتە کڕاوەکان n.

ب پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە و بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی بلیتە کڕاوەکان بەهۆی کارتی متمانەوە، ئەگەر بزانیت بڕی تێچوونەکەی 157 500 دینار بووە

ج ئایا لە تواناداییە تێچوونی کڕینی چەند بلیتێك بە هۆی کارتی متمانەوە 332 500 دینار بێت؟

37 هەڵە لە شیکردنەوە دوو خوێندکار هەستان بەدۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ کامیان هەڵەیە؟ هەڵەکە دیاریبکە.

أ
$f(x)=\frac{1}{2}x+1$
$f^{-1}(x)=2(x-1)$

ب
$f(x)=\frac{1}{2}x+1$
$f(x)=2x-1$

38 **بنووسە** ئەوەی لە نەخشەکە و ڕوونکردنەوەکەیدا ڕوودەدات دەربخە. کاتێك ئاڵوگۆڕ لە نێوان پۆوتانی هەر خاڵێك دەکرێت.

39 **بیری ڕەخنەگر** ئایا دەگونجێت پێچەوانەی پەیوەندییەکە بۆ پەیوەندییەك نەخشە نەبێت و ببێت بە نەخشە؟ بە نموونە وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

40 **کڵاوەکان** پێوانەی کڵاو بە پێی چێوەی سەر نەخشەیەکی هێڵییە پێوانەی کڵاوی سەرێك چێوەکەی 55 cm بێت بریتییە لە 17.5 و پێوانەی کڵاوی سەرێك چێوەکەی 57 cm بریتییە لە 18 .

أ نەخشەیەکی هێڵی بۆ پێوانەی کڵاوێك s بە پێی چێوەی سەرێك c بنووسە؟

ب پێچەوانەی پەیوەندییەکەی بدۆزەوە. ئایا نەخشەیە؟ چی دەنوێنێت؟

ج کڵاوێکت دۆزییەوە پێوانەکەی 18.5 چێوەی سەری خاوەنەکەی چەندە؟

دیاریبکە، ئەگەر ئەم وتانە، هەمیشە ڕاستە، یان هەندێك جار ڕاستە یان هەمیشە هەڵەیە.

41 پێچەوانەی جووتە ڕێکخراوێك خاڵێك لە سەر وێنە ڕوونکردنەوەییەکە دەنوێنێت، کە بریتییە لەو جووتە ڕێکخراوەی وێنەکەی و وێنەدانەوەی خاڵەکەیە بەدەوری ڕاستەهێڵی $y=x$

42 پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەیەکی هێڵی، نەخشەیەکی هێڵییە.

43 پێچەوانەی نەخشە بۆنەخشەیەکی هێڵی لارییەکەی موجەب بێت، دەکاتە نەخشەیەکی هێڵی لارییەکەی سالبە

44 پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەیەکی هێڵی لارییەکەی گەورەتر بێت لە 1 ، بریتییە لە نەخشەیەکی هێڵی لارییەکەی بچوکترە لە 1

45 پێچەوانەی پێچەوانەی خاڵێك بریتییە لە هەمان خاڵ.

46 پێچەوانەی پەیوەندی بۆ نەخشەی $y=k$ کاتێك k ژمارەیەکی نەگۆڕبێت، نەخشە نییە.

47 **چوونە ژێر ئاو** (غوص) ئەو کەسەی ئەم یارییە ئەنجام دەدات، دەزانێت پەستانی ئاو (بەکیلۆ پاسکاڵ kpa دەپێورێت)، بەزیادبوونی قووڵایی ئاو (بەمەتر دەپێورێت) زیاددەکات، کە ژێر دەریاوانەکە پێی دەگات وێنەی بەرامبەر تایبەتە بە ئاوی سازگار.

أ پەستان وەك نەخشەیەك بە پێی قوڵی بنووسە.

ب بە شێوەیەکی گونجاو بوار و مەودای ئەم نەخشەیە دیاریبکە.

ج پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی لقی أ بدۆزەوە.

د ئایا قووڵاییەك هەیە لە نەخشەکە، بە هەمان ژمارە بۆ قوڵی و پەستان دەردەبڕێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

48 کام لەمانەی خوارەوە پێچەوانەی نەخشەیە بۆ نەخشەی $f(x)=4x-\frac{3}{4}$

أ $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$ ب $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+3$

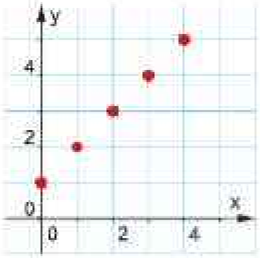
ج $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+3$ د $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$

49 هێمن بۆ چاکردنی ئۆتۆمبێلەکەی 175 000 دینار بۆ نرخی پارچەی یەدەکی، 35 000 دینار بۆ هەر کاتژمێرێکی کە لە چاککردنەوەدا پێدەچێت، پارەدەدات. ئەم نەخشەیە $f(x) = 175\,000 + 35\,000x$ ڕێسای هەژمارکردنی تێچوونی چاککردنەوەی ئۆتۆمبێلەکە بە پێی ژمارەی کاتژمێرەکان کە بۆ چاکردنەوەی دەیخایەنێت کام لەمانەی خوارەوە پێچەوانەی نەخشەکە دەنوێنێت؟

أ) ژمارەی کاتژمێرەکان بە پێی تێچوون.
ب) تێچوون بە پێی ژمارەی کاتژمێرەکان.
ج) کرێی کاتژمێری چاککردنەوە بە پێی تێچوون
د) تێچوون بە پێی کرێی کاتژمێری چاککردنەوە.

50 کام خاڵ پێچەوانەی خاڵی $(5,-2)$ دەبێت؟

أ) $(-5,2)$ ب) $(5,2)$ ج) $(-2,5)$ د) $(2,-5)$



51 **کورتە وەڵام** خشتەیەک دروستبکە، پێچەوانەی پەیوەندی بۆ ئەو پەیوەندییەی لە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر دایە بنوێنێت.

بەرەنگاری و فراوانکردن

پێچەوانەی نەخشە بۆ هەر نەخشەیەک لەمانە بدۆزەوە کاتێک $y = f(x)$

52 $y = mx + b$ **53** $ax + by = c$ **54** $y - y_1 = m(x - x_1)$

x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

55 ئەو پەیوەندییەی لە خشتەی بەرامبەر پێناسەکراوە بەڕوونکردنەوەیی بنوێنە پاشان وێنەی هەر خاڵێك بە وێنەدانەوەی بەدەوری ڕاستەهێڵی $y = x$ بکێشە بۆ دەستکەوتنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی پەیوەندییەکە. ئەگەر هاوکێشەی بنەڕەتی $y = x^2$ بێت. بە شێوەی جەبری بسەلمێنە کە هاوکێشەی پێچەوانەی پەیوەندییەکە بریتییە لە $x = y^2$

56 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** چی دەڵێت دەربارەی نەخشەیەکی هێڵی لارییەکەی و لاری پێچەوانەی نەخشەکە یەکسانن.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە و پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە

57 $y = 3$ **58** $y = x^3$ **59** $y = 2^x$

پێداچوونەوەی لولپێچی

نرخی پشك	
ڕۆژ	گۆڕان لە نرخدا
1	−230
2	+2580
3	−640
4	+1270
5	−2120

60 **بازرگانی** چەند پشکێك، بە بڕی 45 180 دینار کڕا، بۆ هەر پشکێك ئەم خشتەی بەرامبەر گۆڕانی نرخی پشکەکە پاش کڕینی دەنوێنێت. (پۆلەکانی پێشوو)

أ) بەهای ئەم پشکانە لە کەمەوە بۆ زۆر ڕیز بکە، لەو نرخەوە کە لە ڕۆژی 0 ـە وەکە ڕۆژی کڕینە.

ب) مەودای نرخەکان بە بەکارهێنانی زمانی کۆمەڵەکان بنووسە.

نەخشەیەکی ڕادەدار لە کەمترین پلەی لە تواناداا بوو دا بنووسە، کە هاوکۆڵکەی سەرەکی 2 و سفرکانی ئەم ژمارە پێدراوانە بێت.

61 $1, 2, -3$ **62** $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$ **63** $2, 1, -1$ **64** $9, 8, -3$

دیاریبکە، نەخشەکە گەشەیە یان پووکانەوەیە، پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە (وانەی 4-1)

65 $f(x) = 15\left(\frac{89}{100}\right)^x$ **66** $f(x) = \frac{1}{25}(0.5^x)$

67 $f(x) = 2(1.1^x)$ **68** $f(x) = 0.01(1.9^x)$

3-4 نەخشە لۆگاریتمییەکان

Logarithmic functions

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

لۆگاریتم بۆ پێوانی ترشی ئاو(PH) بەکاردێت

ئامانجەکان

- شێوەی هاوتای نەخشەی توانی و نەخشەی لۆگاریتمی دەنووسێت و بەهاکەی هەژمار دەکات.

زاراوەکان
Vocabulary

لۆگاریتم
Logarithm

لۆگاریتمی ئاسایی
Common Logarithm

نەخشەی لۆگاریتم
Logarithmic Function

چەند جار دینارێک چەند جارە بکەیت دەبێتە 8 دینار؟ دەتوانیت ئەمە بە هاوکێشەیەک بنوێنیت $8 = (2^x)$ لەوانەیە بتوانیت ئەم هاوکێشەیە بە هزری شیکار بکەیت، ئەگەر لە بیرت بێت کە $8 = 2^3$ کەواتە پێویستە یەک دینار 3 جار چەندجارە بکەیت بۆ ئەوەی 8 دینارت دەستکەوێت.

چەند جار دینارێک چەند جارە بکەیت بۆ ئەوەی ببێتە 512 دینار؟ دەتوانیت ئەم پرسیارە شیکاربکەیت، ئەگەر بتوانیت هاوکێشەی $512 = 2^x$ شیکار بکەیت. بەبەکارهێنانی کرداری پێچەوانەی کرداری بەرزکردنەوەی ژمارەیەکی دیاریکراو بۆ هێزێک (توانێکی) دیاریکراو. ئەو کردارە پێچەوانەیە بریتییە لە هەژمارکردنی لۆگاریتمی. **لۆگاریتم** بریتییە لە توانی ئەو هێزەی کە بەرز دەکرێتەوە بۆ ژمارەیەکی (بنچینەیەکی) دیاریکراو بۆ ئەوەی بەهای دیاریکراوت دەستکەوێت، دەتوانیت هاوکێشەی توانی بە شێوەی هاوکێشەی لۆگاریتمی بنووسیت و بە پێچەوانەوە.

خوێندنەوە

$\log_b a = x$ بەم شێوەیە بخوێنەوە: x یەکسانە بە لۆگاریتمی a بە بنچینە b سەرەنجبدە لۆگاریتم بریتییە لە توان.

هاوکێشەی لۆگاریتمی	هاوکێشەی توانی
$\log_b a = x$	$b^x = a$

$b > 0, b \neq 1$

نموونە 1 گۆڕین لە شێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگاریتمی

هەر هاوکێشەیەکی توانی بەشێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

	هاوکێشەی توانی	هاوکێشەی لۆگاریتمی
أ	$2^6 = 64$	$\log_2 64 = 6$
ب	$4^1 = 4$	$\log_4 4 = 1$
ج	$5^0 = 1$	$\log_5 1 = 0$
د	$5^{-2} = 0.04$	$\log_5 0.04 = -2$
هـ	$3^x = 81$	$\log_3 81 = x$

بنچینەی توان دەبێتە بنچینەی لۆگاریتم، توانی هێز بریتییە لە لۆگاریتم، هێزی هەر ژمارەیەک جگە لە سفر دەکاتە 1 لەوانەیە توان (یان لۆگاریتم) سالب بێت. لەوانەیە لۆگاریتم (یان توان) گۆڕاو بێت.

خالی جاوەبزی

1. ئەم هاوکێشە توانییانە بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە

أ $9^2 = 81$ ب $3^3 = 27$ ج $x^0 = 1 (x \neq 0)$

نموونە 2 گۆڕین لە شێوەی لۆگاریتمی بۆ شێوەی توانی.

هاوکێشەی لۆگاریتمی بەشێوەی توانی بنووسە

	هاوکێشەی لۆگاریتمی	هاوکێشەی توانی
أ	$\log_{10} 100 = 2$	$10^2 = 100$
ب	$\log_7 49 = 2$	$7^2 = 49$
ج	$\log_8 0.125 = -1$	$8^{-1} = 0.125$
د	$\log_5 5 = 1$	$5^1 = 5$
هـ	$\log_{12} 1 = 0$	$12^0 = 1$

بنچینەی لۆگاریتم دەبێتە بنچینەی هێز
لۆگاریتم بریتییە لە توانی هێز، لەوانەیە لۆگاریتم سالب بێت

خاڵی چاودێری

2. هاوکێشەی لۆگاریتمی بە شێوەی توانی بنووسە.

أ $\log_{10} 10 = 1$ ب $\log_{12} 144 = 2$ ج $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

لۆگاریتم توانە. ئەمەش ڕێگات پێدەدات، یاسایەکانی هێز لەسەر لۆگاریتمەکان جیبەجێبکەیت. لەوانەیە ئەو سیفەتانەی خوارەوەت سەرەنجدابێت، لە دوا نموونەدا.

فێربە

هەندێک سیفەتی لۆگاریتمەکان

b هەر بنچەینەیەک بێت کاتێک $b > 0$ و $b \neq 1$.

شێوەی لۆگاریتمی	شێوەی توانی	نموونە
لۆگاریتمی b بنچینەی b $\log_b b = 1$	$b^1 = b$	$\log_{10} 10 = 1$ $10^1 = 10$
لۆگاریتمی 1 $\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$ $10^0 = 1$

تێبینی:
ئەگەر $1 > b > 0$
ئەوا $\log_b =$
ژمارەیەکی سالب
کاتێک $n > 0$

لۆگاریتمی ئاسایی لۆگاریتمی بنچینە 10. ئەگەر بنچینەی لۆگاریتم دیاری نەکرابێت، ئەوا 10 یە نموونە $\log 5 = \log_{10} 5$

نموونە 3 هەژمارکردنی بەهای لۆگاریتم بە هزری.

بەهای ئەمانەی خوارەوە بە هزری هەژماربکە.

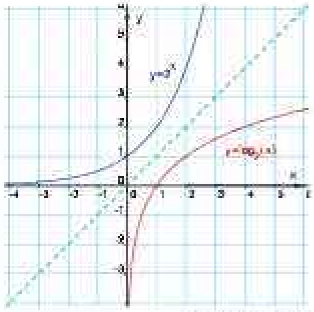
أ
$\log 1000$
$10^? = 1000$
$10^3 = 1000$
$\log 1000 = 3$

ب
$\log_4 \frac{1}{4}$
$4^? = \frac{1}{4}$
$4^{-1} = \frac{1}{4}$
$\log_4 \frac{1}{4} = -1$

خاڵی چاودێری

3. بەهزری بەهای ئەم بڕانە بدۆزەوە.

أ $\log 0.00001$ ب $\log_{25} 0.04$

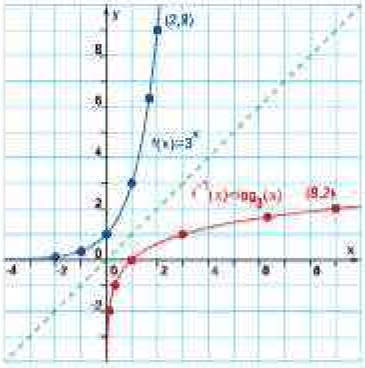


لەبەر ئەوەی لۆگاریتم پێچەوانەی توانە، ئەوا پێچەوانەی نەخشەیەکی توانی وەک $y=2^x$ بریتییە لە نەخشەی لۆگاریتمی $y=\log_2 x$، پێویستە لە بیرتبێت کە بواری هەریەک لە دوو نەخشەکە بریتییە لە مەودای نەخشەکەی تر، مەودای هەریەکیان بریتییە لە بواری ئەویتریان.
بواری نەخشەی $y=2^x$ بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان R و مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارەی ڕاستییە موجەبەکان $\{y|y>0\}$ لەوەوە دەردەچێت کە بواری نەخشەی لۆگاریتمی $y=\log_2 x$. بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییە موجەبەکان $\{x|x>0\}$ و مەوداکەی کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە R .

نموونــــە 4 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە لۆگاریتمییەکان

بەها دراوەکانی گۆڕاوی x بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە. بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە دیاریبکە.

أ $f(x)=3^x$ ، $x=-2,-1,0,1,2$



وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=3^x$ بەبەکارهێنانی خشتەی بەهایەکان بکێشە.

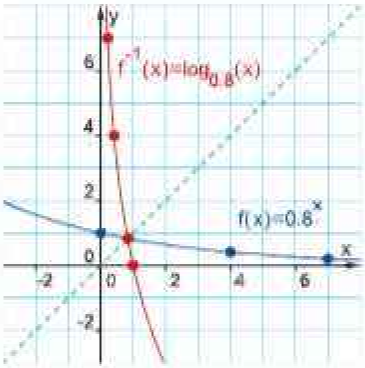
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

بۆ ئەوەی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە $f^{-1}(x)=\log_3 x$ بکێشێت x، $f(x)$ لە خشتەی سەرەوەدا ئاڵوگۆڕ بکە

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f^{-1}(x)=\log_3 x$	-2	-1	0	1	2

بواری پێچەوانەی $f^{-1}(x)$ بریتییە لە $\{x|x>0\}$ و مەوداکەی R .

ب $f(x)=0.8^x$ ، $x=-3,0,1,4,7$



وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=0.8^x$ بەبەکارهێنانی خشتەی بەهایەکان بکێشە.

x	-3	0	1	4	7
$f(x)=0.8^x$	2	1	0.8	0.4	0.2

بۆ ئەوەی وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەی $f(x)^{-1}=\log_{0.8} x$ بکێشیت x و $f(x)$ ئاڵوگۆڕ بکە لە خشتەی سەرەوە.

x	2	1	0.8	0.4	0.2
$f^{-1}(x)=\log_{0.8} x$	-3	0	1	4	7

بواری پێچەوانەی نەخشەی $f^{-1}(x)$ بریتییە لە $\{x|x>0\}$ و مەوداکەی R ە.

4. بەهایەکانی $x=-2,-1,1,2,3$ بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ بەکاربهێنە پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی پێچەوانەی نەخشەکە، و بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە دیاریبکە.

نموونـــه 5 جێبەجێکردن لەسەر ژینگە

کیمیازانان بە شێوەی دووبارە بوونەوە سامپلەکانی باران بۆ دیاریکردنی ترشییەکەی تاقیدەکەنەوە، واتا دیاریکردنی خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین(H^+)تێیدا. ترشی ئاوی باران بەبەکارهێنانیpH بە پێی ئەم نەخشە دەپێورێت: $pH = -\log\left[H^+\right]$ کاتێک $\left[H^+\right]$ خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجینە کە بە مۆڵ لەیەک لیتر لە ئاوی باران دەپێورێت. pH ی ئاوی باران لە هەر شوێنێک بدۆزەوە.

آ شوێنی A کاتێک خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین 0.0000316 مۆڵ لە لیتر بێت.

$$pH = -\log\left[H^+\right]$$

$$pH = -\log(0.0000316)$$ لە جیاتیدابنێ

بژمێر بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی بەهای لۆگاریتمی بەبنچینە 10 دوگمەی log دابگرە. pHی ئاوی باران لە شوێنی A بە نزیکەیی بریتییە 4.5.

ب شوێنی B کاتێک خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین دەگاتە 0.0000009 مۆڵ لە لیتر.

$$pH = -\log\left[H^+\right]$$

$$pH = -\log(0.0000009)$$

بژمێر بە کاربهێنە بۆ دۆزینەوەی لۆگاریتمی بنچینە 10 دوگمەی log دابگرە. pH ئاوی باران لە شوێنی B بریتییە لە 6 بەنزیکەیی.

خاڵی چاودێری

5. pH چای سارد دەگاتە چەند، خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین تێیدا 0.000158 مۆڵ لە لیترێک بێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەو هۆیە چییە کەوا دەگات$\log_b b$ بکاتە 1 ژمارەی موجەبی b هەر چەندێک بێت جگە لە 1 .
2. ڕوونبکەوە ئایا $\log_a b$ و $\log_b a$ یەکسانن. پاڵپشتی وەڵامەکەت بکە
3. ڕێکخەربە هێڵکاری بەرامبەر دروستبکەو تەواوی بکە.

هێربە

پێناسە	سیفەتەکانی
نەخشەی لۆگاریتمی	
نموونەکان	دژە نموونە

3-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ناڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لۆگاریتم لە هاوکێشەی توانی $a^x = b$ بریتییە لە ___؟

بڕوانە نموونە 1

هاوکێشەی توانی بە شێوەی لۆگاریتم بنووسە.

2 $2.4^0 = 1$ 3 $4^{1.5} = 8$ 4 $10^{-2} = 0.01$ 5 $3^x = 243$

بڕوانە نموونە 2

هاوکێشەی لۆگاریتمی بە شێوەی توانی بنووسە

6 $\log_4 0.0625 = -2$ 7 $\log_x(-16) = 3$ 8 $\log_{0.9} 0.81 = 2$ 9 $\log_6 x = 3$

بڕوانە نموونە 3

بە هزری ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە

10 $\log_7 343$ 11 $\log_3 \frac{1}{9}$ 12 $\log_{0.5} 0.25$ 13 $\log_{1.2} 1.44$

بڕوانە نموونە 4

وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە، بەبەکارهێنانی بەها پێدراوەکان. پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە.

14 $x = -2, -1, 0, 1, 1.5$ ؛ $f(x) = 5^x$

15 $x = -2, -1, 0, 1, 2$ ؛ $f(x) = 0.5^x$

بڕوانە نموونە 5

16 **کیمیا** بۆ لێکۆڵینەوەی هێزی ترشی گیراوەیەک، کیمیازانان نەخشەی $pOH = -\log\left[OH^-\right]$ بەکاردێنن کاتێک $\left[OH^-\right]$ هێما دەکرێت بۆ خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆکسید کە بە مۆڵ لە لیترێک دەپێورێت. بەهای pOH ی ئاوێک چەندە خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆکسید تێیدا 0.000000004 بێت؟

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
20–17	1
24–21	2
28–25	3
30–29	4
31	5

ڕاهێنانی ئازاد

ئەم هاوکێشە توانییانە بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە

17 $x^{2.5} = 32$ 18 $6^x = 216$ 19 $1.2^0 = 1$ 20 $4^{-1} = 0.25$

ئەم هاوکێشە لۆگاریتمییانە بە شێوەی توانی بنوسە.

21 $\log_5 625 = 4$ 22 $\log_2 x = 6$ 23 $\log_{4.5} 1 = 0$ 24 $\log_\pi \pi = 1$

بەهزری بەهای ئەمانە هەژماربکە

25 $\log_2 1$ 26 $\log 0.001$ 27 $\log_4 64$ 28 $\log_{0.1} 100$

ئەم بەها پێدراوانە بۆ گۆڕاوی x بەکاربهێنە، بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە، پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە دیاریبکە.

29 $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ؛ $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$

30 $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ؛ $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

تێبینی

ئەگەر بژمێرت ئەبێ
$\log(0.000000004)$
≈ -8.4

31 **باخچەکان** ڕەنگی گوڵەکانی ئورتانسیا دیاریدەکرێت بە پێی بەهای pH ی خاکەکەی.

$6<pH<6.5$

$5.5<pH<6$

$5<pH<5.5$

ڕێکخەری باخچەیەک خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجینی لە خاکی باخچەکە پێوا، و بینی دەکاتە 0.0000006 مۆڵ لە لیترێک. ئایا ئەو خاکە گوڵی ئورتانسیای شینی لێ دەڕوێت؟

32 **کارتی متمانە** لە هەندێک کارتەکانی متمانەدا، نەخشەی $n = \frac{\log A - \log P}{\log(1.0175)}$ هەژمارکردنی ژمارەی n لەو مانگانەی کە بەسەر سپاردنی گوژمەی بنەڕەتی P تێپەڕیوە، تا پارەکەی دەگاتە ئەو بڕەی ئێستای A و وا دابنێ ئەو پارەکەی لەو کاتەوە هیچ بڕێکی نەچۆتەسەر و لەم ماوەیەدا کارتەکە بەکارنەهاتووە.

أ ئاوات گوژمەی 1 000 000 دیناری دانا و حسابی ئێستای کارتەکەی 1 210 260 دینارە. چەند مانگ بەسەر سپاردنی گوژمەی بنەڕەتی تێپەڕیوە؟

ب ئەو پارە چەند مانگی تری پێویستە بۆ ئەوەی لە 1 420 000 دینار تێپەڕێت.

ج تێبینی چی لە وەڵامەکانی دوو پرسیاری پێشوو دەکەیت؟

33 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بەهای b چەندە، ئەگەر زانیت $\log_a b = 0$ ؟ ئەمە ڕوونبکەوە

34 **دەنگەکان** ئاستی توندی دەنگ L بە پێوەری لۆگاریتمی دەپێورێت، بەبەکارهێنانی نەخشەی $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$، کاتێک L هێمای ئاستی توندی دەنگ بێت کە بەدیسیبل Decibel پێوراوە، و هێمای I توندی دەنگەکە بێت، هەروەها I_0 هێما بێت بۆ توندی دەنگی گوێچکەی خۆی

دەنگ	توندی
هەڵفرینی فڕۆکە	$10^{15} I_0$
دریل	$10^{12} I_0$
وشککەرەوەی قژ	$10^{7} I_0$
چرپە (دەنگێکی نزم)	$10^{3} I_0$
دەنگی جوولەی پەلکەدار	$10^{2} I_0$
دەنگی گوێچکە خۆی	I_0

أ ئاستی توندی هەر دەنگێک لە خشتەی بەرامبەر دیاریبکە.

ب ئاستی توندی دەنگ لە یەکێک لە جۆرەکانی مۆسیقای توند 110 دیسیبلە ئەو دەنگە لە کوێ دادەنێیت بۆ ئەوەی خشتەکە بەڕێکی بمێنێتەوە.

ج **چی دەبێت ئەگەر...؟** دیسبل دەیەکی یەکە پێوانەییەکی ترە، کە بریتییە لە بل Bel

35 **بیری ڕەخنەگر** ئەگەر n ژمارەیەکی ڕاستی بێت و 10^n بە شێوەی ڕەنووس نووسرا بێت ئایا $\log 10^n$ یەکسانە بە ژمارەی سفرەکان لە 10^nدا، پاڵپشتی وەڵامەکەت بەنموونەیەک بکە.

36 **خەمڵاندن** بە سوود وەرگرتن لە $\log 100 = 2$ و $\log 1000 = 3$ هەریەک لە $\log 200$ و $\log 500$ بخەمڵێنە.

37 **خواردن** خشتەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی جۆری هەر شەربەتێک بەزانینی خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین لە لیترێکی ئەو شەربەتە.

شەربەت	مۆڵ pH
لیمۆ	2.0 – 2.6
هەرمێ	2.9 – 3.2
پرتەقاڵ	3.3 – 4.1
تەماتە	4.1 – 4.6

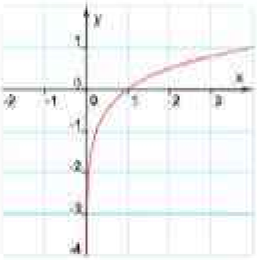
أ 0.00014 مۆڵ لە لتر

ب 0.0081 مۆڵ لە لتر

ج 0.00074 مۆڵ لە لتر

38 **بنووسە** هۆی چییە کە $\log_0 3$ و $\log_1 3$ پێناسە نەکراون

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە



39 ئەم ڕوونکردنەوەی بەرامبەر هی کام لەم نەخشانەیە.

أ $f(x) = \log x$

ب $f(x) = \log_4 x$

ج $f(x) = \log_2 x$

د $f(x) = 2^x$

40 کام لەم هاوکێشە لۆگاریتمییانە هاوتای $2^7 = 128$ دەبێت؟

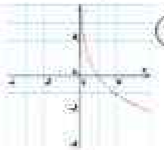
(أ) $\log_7 2 = 128$　(ج) $\log_2 7 = 128$

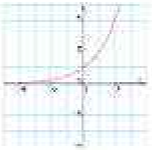
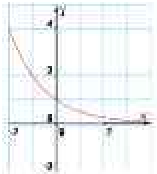
(ب) $\log_2 128 = 7$　(د) $\log_7 128 = 2$

41 کام لەمانەی خوارەوە باشترین خەملێندراوی بەهای $\log 50$ دەبێت؟

(أ) 1.7　(ب) 2.5　(ج) 5　(د) 10

42 کام لەم ڕوونکردنەوانە باشترین نواندە بۆ نەخشەی $f(x) = \log_{0.5} x$ ؟

(أ)

(ب)

(ج)

(د)


43 **کورتە وەڵام** بەهای $\log_2 64$ بدۆزەوە.

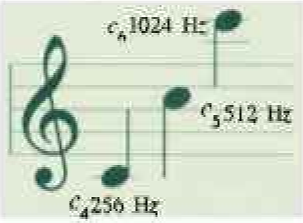
بەرەنگاری و فراوانکردن

44 وێنەی ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $\log_7 x$ و $\log_{0.7} x$ بکێشە باسی جیاوازی نێوان دوو نەخشەکە بکە، بە پشتبەستن بە ڕوونکردنەوەکانیان.

45 بەهای $\log_3 9$ و $\log_3 27$ و $\log_3 243$ هەژماربکە دەستەواژەیەك لە بارەی پەیوەندی نێوان ئەم سێ بڕە لۆگاریتمییانە بنووسە، بەبەکارهێنانی گۆڕاوەکان گشتاندن بکە.

46 بسەلمێنە $\log_7 7^{2x+1} = 2x+1$ لەگەڵ نووسینی هەر هەنگاوێك

47 **مۆزیك** پێوەری مۆسیقا پێوەری لۆگاریتمییە. لەو پێوەرەدا دەتوانین لەرلەرەی هەر نۆتەیەك بە ژمارەی لەرلەرەکان لەهەر چرکەیەکدا دەرببڕین، یان ژمارەی هێرتزەکان بە هێزێك لە هێزەکانی ژمارە 2 دەربېرین.



(أ) لەرلەرەی نۆتەی C_7 بە شێوەی توانی و بە شێوەی لۆگاریتمی هەژماربکە.

(ب) ئەو نۆتەیە چییە کە لەرلەرەکەی دەگاتە 32 هێرتز؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە، وا دابنێ بەهای هەموو گۆڕاوەکان سفر نین (پۆلەکانی پێشوو)

48 $\left[\left(2a^4\right)\left(5b^2\right)\right]^2$

49 $\dfrac{8s^2t^6}{4st^8}$

50 $-2t^2\left(5st^{-1}\right)$

51 $7a^{-2}b^3\left(3ab+4a^{-1}b^2\right)$

52 **بیناکاری** کاتی دروستکردنی بینایەك، بەردێك لەبەرزی $7\,m$ کەوتە خوارەوە، نەخشەی $h(t) = h_0 - 4.9t^2$ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ئەو کاتەی دەیخایەنێت تاوەکو بەردەکە دەگاتە زەوی، با h هێمایی بەرزی بەردەکە بێت بەمەتر پاش t چرکە لە کەوتنی و h_0 هێمای بەرزی بنەڕەتی بێت بە مەتر پێش کەوتنی (قۆناغەکانی پێشوو).

خشتەی بەهایەکانی هەر نەخشەیەك تەواوبکە. بەهایەکان بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

	x	-2	-1	0	1	2
53	$f(x) = 1.7^x$					
54	$f(x) = 0.6^x$					
55	$f(x) = 0.3^x$					

بەشی

4

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1-4 نەخشەکانی توانی و گەشەو پووکانەوە

دیاریبکە ئایا هەریەک لەم نەخشانە نەخشەی گەشەکردن یان نەخشەی پووکانەوەیە

1 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ **2** $f(x)=\frac{1}{5}(0.2)^x$ **3** $f(x)=14(1.4)^x$ **4** $f(x)=6.4\left(1\frac{3}{8}\right)^x$

5 وا دابنێ ژمارەی بەکتریاکانی چاندنێکی بایەلۆجی لە ڕۆژی دوو شەممە دەگاتە 1000 و ژمارەکەی بە ڕێژەی 50% ڕۆژانە لە و کاتەوە زۆر دەبێت

أ نەخشەیەک بنووسە ژمارەی گەشەکردنی بەکتریاکان بە پێی کات بنوێنێت (هەژمارکردن بەپێ ڕۆژ بێت)

ب وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەو نەخشەی نووسیوتە بکێشە، بۆ خەمڵاندنی ژمارەی بەکتریاکان لە دووشەممەی داهاتوودا بەکاربهێنە.

2-4 پێچەوانەی پەیوەندی و پێچەوانەی نەخشە

بەڕوونکردنەوەیی ئەو پەیوەندییە بنوێنە کە بەهایەکانی لە خشتەکەدا هاتووە، پاشان پێچەوانەی پەیوەندییەکان بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە

6

x	-1	0	1	2	3
y	0	4	8	12	16

7

x	0	1	2	3	4
y	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$1\frac{2}{3}$

ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەک بکێشە. پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە و ڕوونکردنەوەکەی بکێشە

8 $f(x)=x+2.1$ **9** $f(x)=\frac{3}{4}-x$ **10** $f(x)=5x+4$ **11** $f(x)=0.4\left(\frac{x}{2}+1.5\right)$

12 تێچوونی چاککردنەوەی بژمێری میران 000 210 دینارە، نرخی پارچەی یەدەگ و 000 55 دینار بۆ کرێی هەر کاتژمێرێکی کار. نەخشەی $f(x)=55\,000x+21\,0000$ تێچوونی چاککردنەوەی بژمێر بەپێی ژمارەی کاتژمێری خایەنراو بۆ چاککردنەوە دەنوێنێت. پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە، و بۆ دۆزینەوەی ژمارە کاتژمێرە خایەنراوەکانی چاککردنەوەی بژمێرەکەی میران بەکاربهێنە، ئەگەر زانیت تێچوونەکە گەیشتە 500 402 دینار.

3-4 نەخشە لۆگاریتمییەکان

هەریەک لەم هاوکێشە توانییانە بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە

13 $3^2=9$ **14** $17.6^0=1$ **15** $2^{-2}=0.25$ **16** $0.5^x=0.0625$

هەریەک لەم هاوکێشە لۆگاریتمیانە بە شێوەی توانی بنووسە

17 $\log_4 64=3$ **18** $\log_{\frac{1}{5}} 25=-2$ **19** $\log_{0.99} 1=0$ **20** $\log_a x=5$

21 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^x$ بکێشە، بەبەکارهێنانی بەهایەکانی $x=-1,0,2,3$ وێنەی ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە

4-4 سیفەتەکانی لۆگاریتم

Properties of Logarithm

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

زانایانی بوومەلەرزە لۆگاریتم بەکار دەهێنن بۆ هەژماری ئەو ووزەیەیی لە بوومەلەرزەکان دەربەچێت (نموونەی 6).

ئامانجەکان

- سیفەتەکانی لۆگاریتم بۆ نووسینی برە لوگاریتمییەکان بە سادەترین شێوە بەکاردێنێت.
- لۆگاریتم بە بنچینەیەکی دیاریکراو دەگۆرێت بۆ لۆگاریتم بە بنچینەییەکی تر.

دەتوانرێت ئەخشەی لۆگاریتمی $pH = -\log\left[H^+\right]$ دەربرین بۆ هەژماری ئەو pHـەی لەوانەی پێشوو ناسیت بە شێوەی توانی $\left[H^+\right] = 10^{-pH}$. لەبەر ئەوەی لۆگاریتم بریتییە لە توان، ئەوا سیفەتەکانی هێز سیفەتەکانی لۆگاریتم دروستدەکات.
بیرتبێت، بۆ ئەوەی دوو هێز لە یەکتر بدەیت هەمان بنچینەیان هەبێت دوو توانەکە کۆبکەوە $b^m b^n = b^{m+n}$

فێربە و

سیفەتەکانی ئەنجامدانی لێکدان لە لۆگاریتم

m و n دوو ژمارەی موجەب بن، و b هەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت $(b>0$ و $b\neq1)$

بەنووسین	ژمارە	لە جەبر
لۆگاریتمی ئەنجامی لێکدان دەکاتە سەرجەمی لۆگاریتمەکانی هاوکۆلکەکان	$\log_3 1000 = \log_3(10\times100)$ $= \log_3 10 + \log_3 100$	$\log_b(mn) = \log_b(m) + \log_b(n)$

دەتوانرێت ئەو سیفەتەی سەرەوە بە ئاراستەی پێچەوانە بەکاربهێنرێت، بۆ نووسینی سەرجەمی لۆگاریتم کە هەمان بنچینەیان هەیە. وەک یەک لۆگاریتم، دەتوانرێت بە سادەترین شێوە بینووسین.

نموونە 1 کۆکردنەوەی لۆگاریتمەکان

ئەم برە وەک یەک لۆگاریتم بنووسە.

$$\log_4 2 + \log_4 32$$

$\log_4(2\times32)$	بۆ کۆکردنەوەی دوو لۆگاریتم دوو
$\log_4 64$	سادەبکە.
3	بیر بکەرە $4^3 = 64$

خاڵی جاودێری

1. ئەم برە وەک یەک لۆگاریتم بنووسە. ئەگەر توانرا سادەی بکە.

أ $\log_5 625 + \log_5 25$ ب $\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

بیرت بێت بۆ ئەوەی دو هێز دابەشبکەیت، هەمان بنچینەیان هەبێت توانەکان لەیەکتر دەربکە $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ لەبەر ئەوەی لۆگاریتم توانە، ئەوا لێدەرکردنی لۆگاریتمییەکان لەیەکتر کە هەمان بنچینەیان هەیە بریتییە لە دۆزینەوەی لۆگاریتمی ئەنجامی دابەشکردنی دوو هێز هەمان بنچینەیان هەبێت.

فێربە

سیفەتی ئەنجامی دابەشکردنی لۆگاریتم

m و n دوو ژمارەی هەرچۆنێکی موجەب بن، و b هەر ژمارەیەکی راست بێت b $(b>0$ و $b\neq 1)$

بەنووسین	ژمارە	لە جەبر
لۆگاریتمی ئەنجامی دابەشکردن بریتییە لە ئەنجامی لێدەرکردنی لۆگاریتمی بەشدراو لە لۆگاریتمی بەشکراو	$\log_5\left(\frac{16}{2}\right)=\log_5(16)-\log_5(2)$	$\log_b\left(\frac{m}{n}\right)=\log_b(m)-\log_b(n)$

ئاگاداربە!

هەروەک چۆن ناتوانرێت a^5b^3 سادە بکەیتەوە هەروەها ناتوانیت برێکی لۆگاریتمی سادە بکەیتەوە ئەگەر بنچینەکانیان جیاوازبێت.

نموونـــــە 2 لێدەرکردنی لۆگاریتمەکان

$\log_2 32-\log_2 4$ وەک یەک لۆگاریتم بنووسە، و ئەگەر کرا سادەیبکە.

$\log_2 32-\log_2 4$

$\log_2\left(\frac{32}{4}\right)$ بۆ لێدەرکردنی دوو لۆگاریتمەکە، دوو ژمارەکە دابەشبکە سادە بکە

$\log_2(8)$

3 لە بیرتبێت $2^3=8$

خالی جاوديرى

2. بنووسە $\log_7 49-\log_7 7$ وەک یەک لۆگاریتم بنووسە (ئەگەر کرا)

لەبەر ئەوەی دەکرێت ئەنجامی لێکدانی لۆگاریتم هەژمار بکرێت، دەتوانرێت لۆگاریتمی هێزەکان هەژماربکرێت.

فێربە

سیفەتی لۆگاریتمی هێز

a و b دوو ژمارەی موجەب بن، کاتێک $b\neq 1$ و p ژمارەیەکی راستی بێت.

بەنووسین	بەژمارە	لە جەبر
لۆگاریتمی هێز بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی توانی هێز لە لۆگاریتم بەهەمان بنچینە	$\log 10^3$ $\log(10\times10\times10)$ $\log 10+\log 10+\log 10$ $3\log 10$	$\log_b a^p=p\log_b a$

رۆشنایی

لەبیرت بێت $\log j+\log a+\log m=\log jam$

نموونـــــە 3 سادەکردنی لۆگاریتمی هێزەکان

ئەم برانە بە شێوەی ئەنجامی لێکدان بنووسە، ئەگەر کرا سادەی بکە.

أ $\log_3 81^2$

$2\log_3 81$

$2(4)$ لەبەر ئەوەی $\log_3 81=4$

8 $3^4=81$

ب $\log_5\left(\frac{1}{5}\right)^3$

$3\log_5\frac{1}{5}$

$3(-1)$ لەبەر ئەوەی $5^{-1}=\frac{1}{5}$

-3

خالی جاوديرى

3. هەر برێک بە شێوەی ئەنجامی لێکدانی بنووسە. ئەگەر کرا سادەیبکە

أ $\log 10^4$ ب $\log_5 25^2$ ج $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^5$

لەبەرئەوەی کردارەکانی هێز و لۆگاریتم دووکرداری پێچەوانەن، کەواتە هەریەکیان ئەنجامی ئەوی تریان لا دەبات.

سیفەتە پێچەوانەکانی هێز و لۆگاریتم

ئەگەر b هەر بنچینەیەک بێت و $b>0$ و $b\neq 1$

نموونە	لەجەبر
$\log_{10}10^{7}=7$	$\log_{b}b^{x}=x$
$10^{\log_{10}2}=2$	$b^{\log_{b}x}=x$

نموونە 4 ناسینەوەی پێچەوانەکان

بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە

أ
$$\log_8 8^{3x+1}$$
$$\log_8 8^{3x+1}$$
$$3x+1$$

ب
$$\log_5 125$$
$$\log_5 5^{3}$$
$$3$$

ج
$$2^{\log_2 27}$$
$$2^{\log_2 27}$$
$$27$$

خاڵی چاودێری 4. أ $\log 10^{0.9}$ بە سادەترین شێوە بنووسە ب $2^{\log_2(8x)}$ بە سادەترین شێوە بنووسە

زۆربەی بژمێرەکان لۆگاریتمی ئاسایی (بنچینە 10) یان لۆگاریتمی سروشتی بنچینە e هەژماردەکەن سەیری وانەی 4-5 بکە، دەتوانیت لۆگاریتم لە بنچینەیەکەوە بۆ لۆگاریتم بە بنچینەیەکی تر بە پێی ئەم یاسایەی خوارەوە بگۆڕێت.

یاسای گۆڕینی بنچینەی لۆگاریتم

ئەگەر a هەر بنچینەیەکی موجەب بێت کاتێک $a\neq 1$ و b هەر بنچینەیەکی موجەب بێت کاتێک $b\neq 1$

نموونە	لەجەبر
$\log_4 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 4}$	$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$

نموونە 5 گۆڕینی بنچینەی لۆگاریتم

بەهای $\log_4 8$ هەژماربکە

ڕێگای یەکەم گۆڕینی بنچینە بۆ 10

$$\log_4 8=\frac{\log 8}{\log 4}$$
$$\approx\frac{0.0903}{0.602}$$ بژمێر بەکاربێنە
$$=1.5$$

ڕێگای دووەم گۆڕینی بنچینە بۆ 2 چونکە دوو هێزی ژمارە 2 ـە.

$$\log_4 8=\frac{\log_2 8}{\log_2 4}=\frac{3}{2}$$
$$=1.5$$

خاڵی چاودێری 5. أ بەهای $\log_9 27$ هەژماربکە ب بەهای $\log_8 16$ هەژماربکە.

پەیڕەی لۆگاریتمی بۆ پێوانی ئەو هێندانەی کە بەهایەکەی دەکەوێتە بوارێکی زۆر فراوانەوە بەکاردێت، وەک توندی دەنگ و ئاستی توندییەکەی یان ئەو ووزەی لە بومەلەرزەیەک دەردەچێت.

نموونــــە 6 جێبەجێکردن لە زەویناسیدا

پسپۆڕانی زەویناسی پێوەری ڕێختەر بەکاردەهێنن، بۆ دەربڕینی ئەو ووزەی کە لە بوومەلەرزەکان دەردەپەڕێت. ئەو پەیوەندییەی هێزی بومەلەرزەیەک M و ئەو وزەی لێی دەردەپەڕێت E بەیەکەوە دەبەستێتەوە بریتییە لە $M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$ لە ساڵی 1964 دا بوومەلەرزەیەک بە هێزی 9.2 پلەی ڕەختەر لە ئالاسکای ئەمریکای باکوری دا هیندی ئەو وزەی لە بوومەلەرزەکە دەردەپەڕێت بدۆزەوە.

لە جیاتدانێ	$9.2 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$
هەردوو لا لە $\frac{3}{2}$ بدە	$\left(\frac{3}{2}\right)9.2 = \log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$
سادەیکە	
سیفەتی ئەنجامی دابەشکردنی لۆگاریتم بەکاربهێنە	$13.8 = \log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$
پێچەوانەی هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە	$13.8 = \log E - \log 10^{11.8}$
پێناسەی لۆگاریتم بەکاربهێنە	$13.8 = \log E - 11.8$
بژمێرە بەکاربهێنە.	$25.6 = \log E$
	$10^{25.6} = E$
	$3.98 \times 10^{25} = E$

ئەو وزەی لە بوومەلەرزەکە دەرپەڕیوە گەیشتووتە 3.98×10^{25} ئەرگز (ergs)

ڕۆشنایەکی بەسوود

پێوەری ڕێختەر پێوەرێکی لۆگاریتمییە بۆ هەر زیاد بوونێکی 1 لە و پێوەرە بەرامبەر دەرچوونی وزەی چەند جارەی 10 یە.

خاڵی جاودێری

دوو بوومەلەرزە هێزەکانیان گەیشتە 9.2 پلە و 8 پلە بە پێوەری ڕێختەر، ئەو وزەی بوومەلەرزەی یەکەم دەریدەپەڕێنێت چەند ئەوەندەی وزەی بوومەلەرزەی دووەمە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. چۆن بەبەکارهێنانی بژمێر وێنەی ڕوونکردنەوەیی $y = \log_5 x$ دەکێشیت؟
2. چۆن $10^{25.6}$ت دۆزینەوە لە نموونە 6 بە بەکارهێنانی سیفەتەکانی هێز؟
3. چی ڕوودەدات، کاتێک یاسای گۆڕینی بنچینە جێبەجێ دەکەیت لە $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ کاتێک $x = a$؟
4. ڕێکخەر بە خشتەی بەرامبەر دروستبکە و تەواویبکە. بەشێوازی خۆت سیفەتە بەیەک بەستراوەکانی هێز و لۆگاریتم ڕوونبکەوە.

سیفەتەکانی هێزەکان	سیفەتەکانی لۆگاریتم

فێربە

4-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بڕوانە نموونە 1 بڕەکە وەك یەك لۆگاریتم بنووسە. ئەگەر کرا سادەیبکە.

1 $\log_5 50+\log_5 62.5$ **2** $\log 100+\log 1000$ **3** $\log_3 3+\log_3 27$

بڕوانە نموونە 2 بڕەکە وەك یەك لۆگاریتم بنووسە. ئەگەر کرا سادیبکە.

4 $\log_4 320-\log_4 5$ **5** $\log 5.4-\log 0.054$ **6** $\log_6 496.8-\log_6 2.3$

بڕوانە نموونە 3 ئەگەر کرا سادەیبکە

7 $\log_8 8^2$ **8** $\log_3 3^5$ **9** $\log_7 49^3$ **10** $\log_{\frac{1}{2}}(0.25)^4$

بڕوانە نموونە 4

11 $\log_2 2^{\frac{x}{2}+5}$ **12** $2.5^{\log_{2.5}19}$ **13** $\log_4 1024$ **14** $\log_2(0.5)^4$

بڕوانە نموونە 5 بەهای بڕەکە هەژماربکە.

15 $\log_9\left(\frac{1}{27}\right)$ **16** $\log_8 32$ **17** $\log_5 10$ **18** $\log_2 27$

بڕوانە نموونە 6

19 **زەویناسی** پەیوەندییەك هێزی بومەلەرزەیەك M بەوزەی E کەلێوەی دەردەپەڕێت بەیەکەوە دەبەستێتەوە، کە بریتییە لە $M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$ ئەو وزەی بومەلەرزەی تایگون دەریدەپەڕێنێن چەند ئەوەندەی وزەی بومەلەرزەی نیو مەدریدە لە 1881 .

بەناوبانگترین بومەلەرزەکانی ئەمریکای باشوور		
شوێن	ساڵ	M
نیومەدرید	1881	8.1
نیومەدرید	1812	8.0
فورت تایگون	1957	7.9
سان فرانسیسکۆ	1906	7.8
دۆڵی ئەباترە	1892	7.8

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
22–20	1
25–23	2
28–26	3
31–29	4
34–32	5
35	6

بڕەکە وەك لۆگاریتمی تاقانە بنووسە. ئەگەر کرا سادەیبکە.

20 $\log_8 4+\log_8 16$ **21** $\log 2+\log 5$ **22** $\log_{2.5} 3.125+\log_{2.5} 5$

23 $\log 1000-\log 100$ **24** $\log_2 16-\log_2 2$ **25** $\log_{1.5} 6.75-\log_{1.5} 2$

ئەگەر کرا سادەبکە.

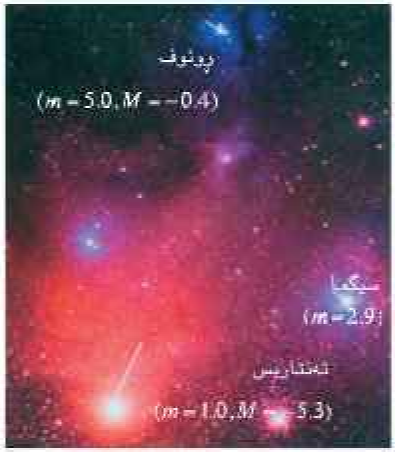
26 $\log_2 16^3$ **27** $\log(100)^{0.1}$ **28** $\log_5 125^{\frac{1}{3}}$

29 $\log_3 3^{7+x}$ **30** $3^{\log_3 4.52}$ **31** $\log_9 6561$

بەهای بڕەکە هەژماربکە

32 $\log_{\frac{1}{2}} 16$ **33** $\log_{25} 125$ **34** $\log_4 9$

35 **دەنگ** پاش چەند سکاڵایەك دەرکەوت کە دەنگی مۆسیقای ئەو ئاهەنگەی لە دەرەوە دەکرێت، ئاستی توندییەکەی 5 دیسیبل بەرزترە لە ساوەی ڕێپێدراو کە 100 دیسیبلە. ئاستی توندی دەنگ بە پەیوەندی $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ هەژماردەکرێت، کاتێك I هێمای توندی دەنگەکە و I_0 هێمای توندی بەرگوێکەوتن بێت. توندی دەنگی ساوەپێدراو دەکاتە چەند ئەوەندەی توندی دەنگی مۆسیقای ئاهەنگەکان کە لە دەرەوە دەکرێت؟



36 **گەردوون** جیاوازی نێوان ڕووی دیاری ئەستێرەیەك m و ڕووە ڕاستەقینەکەی M بە بەکارهێنانی پەیوەندی $m-M=5\log\frac{d}{10}$ دەپێورێت، کاتێك d هێمای دووری نێوان ئەستێرەکە و زەوی بێت کە بە (فەرسەخی ئەستێرەیی) Parsec دەپێورێت.

[أ] دووری ئەستێرەی ئەنتاریس Antares لەزەوی بدۆزەوە.

[ب] ئەستێرەی سیگاسکۆ Sigma Sco 225 فەرسەخی ئەستێرەیی لە زەوییەوە دوورە. دووری ڕاستەقینەی ئەم ئەستێرەیە بدۆزەوە؟

[ج] دووری ئەستێرەی ئەنتاریس لە زەوی چەند ئەوەی دووری ئەستێرەی ڕۆنۆف Rho Oph دەبێت ؟

ڕۆشنایی

فەرسەخی ئەستێرەیی بریتییە لە یەکەی پێوانەییەك کە دەکاتە 3.3 ساڵی ڕووناکی.

هاوکێشە توانییەکە بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

37 $b^{m+n}=b^m b^n$

38 $b^{m-n}=\frac{b^m}{b^n}$

39 $(b^m)^n=b^{mn}$

سادەبکە ئەگەر کرا.

40 $\log_2 32-\log_2 128$

41 $\log 0.1+\log 1+\log 10$

42 $2-\log_{11}121$

43 $\log_{\frac{1}{2}}2+\log_{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}}$

44 $7^{\log_7 7}-\log_7 7^7$

45 $\frac{10^{\log 10}}{\log 10^{10}}$

46 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** سیفەتەکانی لۆگاریتم، و بەهای $\log 2\approx 0.301$ بەکاربهێنە. بۆ هەژماری.

[أ] $\log 20$ [ب] $\log 200$ [ج] $\log 2000$

47 **کیمیا** پسپۆڕانی کیمیا ئامۆژگاریمان دەکەن، کە pHی ئاوی مەلەوانی پێویستە لە نێوان 7.0 و 7.6 بێت. پەیوەندی $pH=-\log\left[H^+\right]$ بۆ نووسینی بڕێك جیاوازی لە خەستی ئایۆنەکانی هایدرۆجین بۆ دوو بەهای pHی دیاریکراو بەکاربهێنە.

48 **فرەهەنگاوەکان** لە شوێنێکی دیاریکراو، 143 جۆرە ئاژەڵ دەژین کە لەوانەیە لەناوبچن، و ژمارەکەی ساڵانە 4% کەمدەکات.

[أ] نەخشەیەکی توانی بنووسە، ژمارەی ئاژەڵەکان لەو شوێنەدا بە پێی ژمارەی ساڵەکان بنوێنێت.

[ب] نەخشەیەکی لۆگاریتمی بنووسە، ژمارەی ساڵەکان بە پێی ژمارەی ئاژەڵەکان بنوێنێت.

[ج] زنجیرەی ئەو دوگمانە بنووسە، کە بۆ تێگردنی نەخشە لۆگاریتمییەکە لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاریدەهێنێت.

[د] پاش چەند ساڵ ژمارەی ئاژەڵەکان لەو شوێنەدا لە 30 کەمتر دەبێت؟ بۆ نزیکترین ساڵ نزیکبکەوە.

49 **پارەدان** کالایەك نرخەکەی 000 40 دینارە، ساڵانە نرخەکەی بەڕێژەی 8% زیاددەکات. بڕێکی لوگاریتمی بنووسە، و بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ژمارەی ساڵە پێویستەکان بۆ ئەوەی نرخی کالایەکە بکاتە 000 50 دینار. (یارمەتی: بڕەکە بە شێوەی توانی بنووسە).

50 یەکێك لە بانکەکان بە ڕێژەی 19.2% سوودی ساڵانە دەدات بەوکەسانەی پارە لەو بانکە دادەنێن. نەخشەی $A=P(1.016)^n$ بۆ هەر ژمارکردنی بەهای ئێستا A بۆ گوژمەی بنەڕەتی دەنوێنرێت پاش n مانگ لە دانانی پارەکە.

[أ] 000 500 دینار لەو بانکە دانرا. بڕێکی لۆگاریتمی بنووسە، و بەکاربیهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی مانگەکان بۆ ئەوەی پارەکە بکاتە دوو ئەوەندەی خۆی .

[ب] دوای چەند مانگ ئەو گوژمەیە دوو ئەوەندەی خۆی دەبێت؟

[ج] ئایا کاریگەری کاتەکە لە سەر گوژمەیە دەبێت، تا بەهاکانی دوو ئەوەندە بێت.

بژمێری ڕوونکردنەوەیی یاسای گۆڕینی بنچینەکان و بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە.

51 $y=\log_5 x$ **52** $y=2\log_5 x$ **53** $y=\frac{\log_{12} x}{3}$

54 **بنووسە** چۆن ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y=\log_{16} x$ دەکێشیت بەبەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی؟

55 **بیری ڕەخنەگر** بەهای نزیکەیی هەر بڕێك بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $\log_{12} 20\approx 1.2$ $\log_{12} 33\approx 1.4$

أ $\log_{12} 1.65$ ب $\log_{12} 660$ ج $\log_{12} 400$

56 **بیری ڕەخنەگر** پەیوەندییەکی گرنگ هەیە، لە نێوان لۆگاریتم و شێوەی زانستی بۆ نووسینی ژمارەکان.

أ لۆگاریتمی 2.5 بدۆزەوە

ب لۆگاریتمی بارستایی کەشتی تایتانیك بدۆزەوە، وەڵامەکە لەگەڵ وەڵامی لقی أ بەراورد بکە.

ج **دەستەواژەیەك بنووسە** بارستایی شێرێك 2.5×10^2 kg لۆگاریتمی ئەو ژمارەیە بدۆزەوە. وەڵامەکەت لەگەڵ وەڵامەکانی دوو لقی أ و ب بەکاربهێنە، بۆ ئەوەی ڕوونیبکەیتەوە، چۆن لۆگاریتمی ژمارەیەکی نووسراو بە شێوەی زانستی دەدۆزییەوە.

د دەستەواژەیەك بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی لۆگاریتمی بارستایی پارچە پارەیەك کە دەکاتە 2.5×10^{-3} kg ئایا دەستەواژەکە بۆ ئەو ژمارانەی بە شێوەی زانستی توان سالب نووسراون ڕاستە؟

وایدابنێ $b>0$ و $b\neq 1$. دیاریبکە، ئایا دەستەواژانە هەردەم ڕاستە، هەندێك جار ڕاستە، هەردەم هەڵەیە.

57 دەتوانین لۆگاریتم بنچینە b بگۆڕین بۆ لۆگاریتمێك بنچینەکەی ژمارەیەکی ڕێژەیی تر بێت.

58 لۆگاریتمی بنچینە، 6 بۆ هێزێك لە هێزەکانی ژمارە 6 دەکاتە توانی ئەو هێزە.

59 ئەگەر لۆگاریتمی ژمارەی 1 بۆ بنچینە b لە ژمارەیەك دەربکرێت، ژمارەکە هەر خۆی دەمێنێتەوە.

60 دەشێت بنچینەی لۆگاریتم ژمارەیەکی سالب بێت.

61 لۆگاریتمی دووجای ژمارەیەك دەکاتە دوو ئەوەندەی لۆگاریتمی ئەو ژمارەیە.

62 دەتوانین لۆگاریتمی بنچینە جیاواز کۆبکەینەوە، بێ ئەوەی پێویستمان بە گۆڕانی بنچینەکانیان هەبێت.

63 دەتوانین $\frac{\log_b 16}{\log_b 8}$ سادەبکەین.

64 لۆگاریتمی لۆگاریتمی ژمارەیەك دەکاتە ژمارەکە خۆی.

65 **هەڵە لە شیکردنەوە** لە خوارەوە دوو ڕێگای سادەکردنی $\log 80+\log 20$ هاتووە. کامیان هەڵەیە؟

أ
$\log 80+\log 20=\log(80\times 20)$
$=\log 1600$
$=\log(16\times 10^2)$
$=\log 16+\log 10^2$
$=\log 16+2$

ب
$\log 80+\log 20=\log(80+20)$
$=\log 100$
$=\log(10^2)$
$=2\log 10$
$=2$

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

66 کام لەم دوو یەکسانبوونانە هەڵەیە؟

(أ) $\log 140-\log 35=\log 4$ (ب) $\frac{\log 140}{\log 35}=\log 4$

(ج) $\log 35+\log 4=\log 140$ (د) $\log\frac{140}{35}=\log 4$

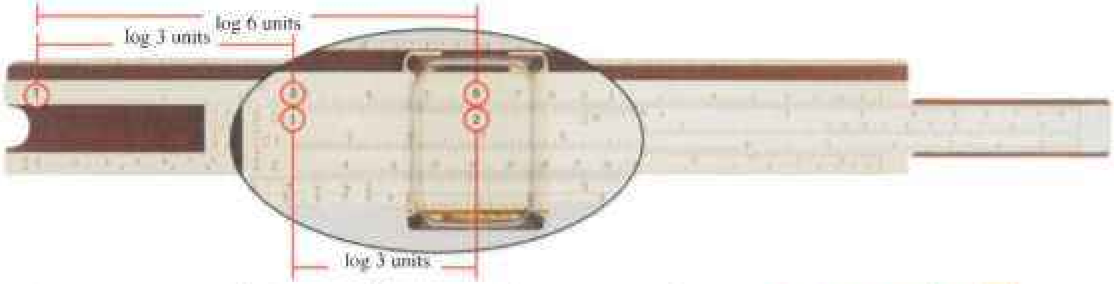
67 $\log_9 x^2 + \log_9 x$ بە سادەترین شێوە بنووسە

(أ) $\log_9\left(x^2+x\right)$ (ب) $\log_9(3x)$ (ج) $3\log_9 x$ (د) $3\left(x^2+x\right)$

68 کام بڕی لۆگاریتمی دەکاتە **$\log 6$** ؟

(أ) $\log 3+\log 2$ (ب) $\log 3+\log 3$ (ج) $\log 3\times\log 2$ (د) $\log 3\times\log 3$

بەرەنگاری و فراوانکردن



69 **مێژووی بیرکاری** پێش دەرکەوتنی بژمێرەکان، ئەندازیارەکان و خوێندکارانی زانستی بۆ ماوەیەکی زۆر جۆرە ڕاستەیەکیان بۆ جێبەجێکردنی هەژمارکردنە ئالۆزەکان بەکارهێنا. ئەو ڕاستەیە دوو هێڵی ژمارەیی بەکاردەهێنێت، هەریەکەیان لەسەر ئەوەی تریان دەخلسکێت، و پێوەری هەریەکێکیان لۆگاریتمە کە ڕێگا بەبەکارهێنانی سیفەتەکانی لۆگاریتم دەدات، بۆ لێکدان و دابەشکردنی ژمارەکان.

أ لە وێنەکە چۆن ئەنجامی لێکدانی 2 لە 3 ڕوووندەکاتەوە؟

ب چۆن ئەو سیفەتە لۆگاریتمی ئەنجامی لیکدان دەنوێنێت؟

بواری ئەخشەکە بدۆزەوە

70 $f(x)=\log(x^2-4)$ **71** $f(x)=\log x-\log(x-1)$ **72** $f(x)=\log\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$

73 $f(x)=\log\left(\frac{1}{x}\right)^2$ **74** $f(x)=-\sqrt{\log(x+1)}$ **75** $f(x)=\sqrt{-2\log(-x)}$

76 بیسەلمێنە $\log_b a^p = p\log_b a$ **77** $\log_9 3^{2x}$ سادەبکە

شیکاربکە

78 $\log_x 25=2$ **79** $\log_x(-8)=3$ **80** $0=\log_x 1$

پێداچوونەوەی لولپێچی

شیکاربکە (قۆناغەکانی پێشوو)

81 $4(x+1)=3(2x-6)$ **82** $-20+8n=n+29$ **83** $8\left(n+\frac{3}{4}\right)=10n-4$

ژمارەکە بە پێی i بنووسە (وانەی)

84 $3\sqrt{-16}$ **85** $-\frac{1}{2}\sqrt{-40}$ **86** $4\sqrt{-8}$ **87** $\sqrt{-125}$

هاوکێشە توانییەکە بەشێوەی لۆگاریتمی بنووسە (وانەی 4 – 3)

88 $5^3=125$ **89** $10^{-1}=1$ **90** $36^{0.5}=6$ **91** $4^x=256$

بەهای بڕەکە هەژماربکە (وانەی 4 – 3)

92 $\log_{12} 1$ **93** $\log_5 25$ **94** $\log_{16} 4$ **95** $\log_{625} 0.04$

5-4 لۆگاریتمی سروشتی

Natural Logarithm

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

زانایان لۆگاریتمی سروشتی و مێژوو بەکاریۆن بۆ دیاریکردنی تەمەنی پاشماوەی ئاژەڵە کۆنەکان بەکاردێنن (نموونەی 4).

ئامانجەکان

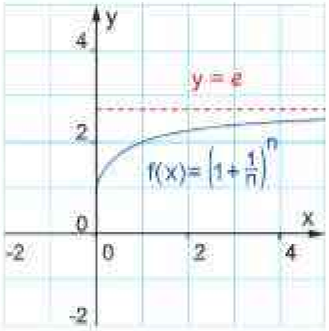
- ژمارەی e بەکاردێت بۆ نووسینی نەخشەی توانی کە چەند بارێکی ژیانی ڕۆژانە دەنوێنێت
- وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە دەکێشێت.
- ئەو هاوکێشە و پرسیارانە شیکار دەکات کە ژمارەی e و لۆگاریتمی سروشتی لەخۆدەگرن

زاراوەکان
Vocabulary

لۆگاریتمی سروشتی
Natural logarithm

نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی
Natural logarithm function

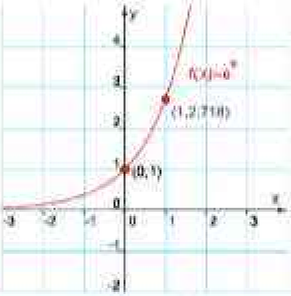
لە بیرت بێت یاسای سوودی ڕێژەیی بریتییە لە $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ کاتێك p هێمای گوژمەی بنەڕەتی و A هێمای بڕە پارەی ئێستایە و r هێمای تێکڕای سوودی ساڵانەیە، و t هێمای ژمارەی ساڵەکانەوە بێت و n هێمایە بۆ ژمارەی ئەو جارانەی کە ئەو حسابەی تێدا لە ساڵێکدا پاشکەوت دەکرێت. وا دابنێ تۆ یەك دینارت لە حسابەکەت داناوە، سوودێك بە تێکڕای ساڵانەی 100% دەدرێت $(r=1)$، و حسابەکە n جار لە ساڵێك پاشکەوت دەکرێت. گوژمەکە پاش ساڵێك دەبێتە $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$، وادابنێ ژمارەی جارەکان n زیاد دەکات، تاوەکو زۆر گەورە دەبێت لەوکاتەدا دەتوانیت باسی پاشەکەوتی بەردەوام بۆ حسابەکەت بکەیت، ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ تاقیبکەوە. ئەو نەخشەیە دەرکەناری ئاسۆیی هەیە، کاتێك بەهای نەخشەکە لە...2.7182818 نزیکدەبێتەوە لەو کاتەی n لە $+\infty$.



نزیکدەبێتەوە بیرکاری زانان بە پیتی e هێمای دەکەن، کە ژمارەیەکی ناڕێژەییە وەك ژمارە π.

ئەو نەخشە توانییانەی کە بنچینەکانیان e یە هەمان ئەو سیفەتانەی نەخشەیەکی توانی هەیە. و ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=e^x$ بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی توانی تر دەچێت، وەك $f(x)=3^x$.

بواری نەخشەی $f(x)=e^x$ بریتییە لە R و مەوداکەی بریتییە لە $\{y/y>0\}$



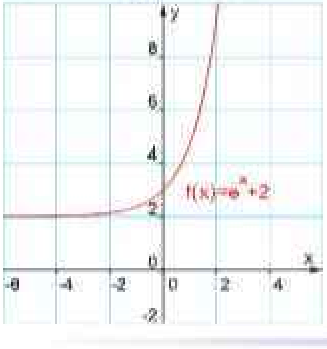
پارمەتی

ڕوونکردنەوەی نەخشە $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ یارمەتیت دەدات بۆ ئەوەی ببینیت بەهایەکانی $N_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ بەرەبەرە زیاتر لە ژمارەی e نزیك دەبێتەوە.

نەخشەی $f(x)=e^x$ پێیدەگوترێت: نەخشەی توانی سروشتی کە ڕۆڵێکی گرنگ لە مێژووی بیرکاری دەنوێنێت.

Natural exponential funcio

نموونە 1 کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە توانییە سروشتییەکان.



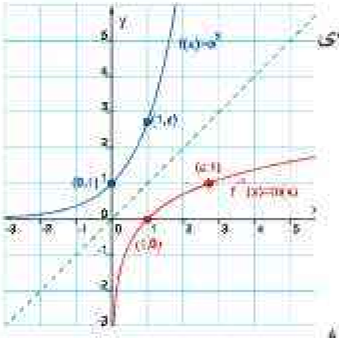
وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=e^x+2$ بکێشە.

خشتەی بەهایەکانی ئەو نەخشەیە دروستبکە، لەبەرئەوەی ژمارەی e ژمارەیەکی ڕێژەیی نییە، پێویستە بەهایەکانی نەخشەکە نزیك بکەیتەوە بۆ دەیەك بۆ نموونە.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)=e^x+2$	2.0	2.1	2.4	3	4.7	9.4	22.1

خاڵی جاودێری

1. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=e^x-3$ بکێشە.



لۆگاریتمی سروشتی Natural logarithm بریتییە لە و لۆگاریتمەی بنچینەکەی e بێت. هێمای ln بۆ لۆگاریتمی سروشتی بەکاردێت ئەو لوگاریتمە هەمان سیفەتەکانی لۆگاریتمی ئاسایی (دەیی) و لۆگاریتمەکانی تری هەیە.

نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی Natural logarithm function

$f(x)=\ln x$ بریتییە لە پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی توانی سروشتی کە نەخشەیەکی لۆگاریتمییە بە بنچینەی e
بوارەکەی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییە موجەبەکانە و مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان، ڕوونکردنەوەکەشی بریتییە لە ڕوونکردنەوەی بەرامبەر.

نموونــــە 2 سادەکردنی بڕە توانییەکان و لۆگاریتمییە سروشتییەکان

بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە

أ $\ln e^{-2t}$

$\ln e^{-2t}=-2t$

ب $e^{\ln(x-1)}$

$e^{\ln(x-1)}=x-1$

ج $e^{5\ln x}$

$e^{5\ln x}=e^{\ln x^5}=x^5$

خاڵی چاودێری

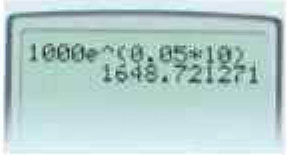
2. بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە

أ $\ln e^{3.2}$ ب $e^{2\ln x}$ ج $\ln e^{x+4y}$

بگەڕێنەوە بۆ یاسای سوودی ئاوێتە، یاسایەکە دەبێتە $A=pe^{rt}$ کاتێک پاشەکەوتکردنەکە بەردەوام دەبێت.

نموونــــە 3 جێبەجێکردن لە ئابووریدا

یەك ملیۆن دینار بۆ ماوەی 10 ساڵ بە تێکرایی سوودی ساڵانەی 5% دانرا بۆ ئەوەی پاشەکەوتکردنی حسابەکە بە شێوەیەکی بەردەوام بێت حسابەکە پاش ئەو 10 ساڵە دەبێتە چەند؟



یاسا	$A=pe^{rt}$
لە جیاتیدانان	$A=1000\ 000\ e^{0.05\times10}$
بژمێریەکاربهێنە	$A\approx1\ 648\ 720$

پاش 10 ساڵ حسابەکە دەبێتە 720 648 1 دینار بە نزیکەیی.

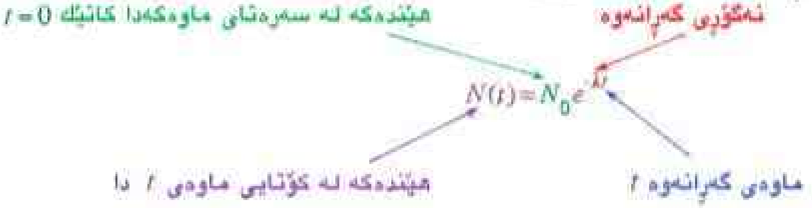
تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ: $e^{0.5}\approx1.648720$

خاڵی چاودێری

3. 100 000 دینار دەبێتە چەند پاش 8 ساڵ، ئەگەر زانیت ئەو گوژمەیە لە حسابی پاشەکەوتی بەردەوامدا، بە سوودی تێکڕای ساڵانەی 3.5% دانرا؟

زانایان چەمکی نیوەتەمەن بەکاردەهێنن بۆ لێکۆڵینەوەی هەندێك مادە و بە تایبەتی تیشکدارەکان. نیوەتەمەنی مادەی **half - life** بریتییە لە و ماوەی مادەکە پێویستیەتی بۆ شیبوونەوەی نیوەی ئەو مادەیە یان گۆڕانی بۆ شتێکی تر. نەخشەی خوارەوە بۆ کرداری گەڕانەوەی سروشتی بەکاردێت.



نموونـــــه 4 جێبەجێکردن لە سەر ئاژەڵە لە ناوچووەکان

زانایەکی بەردینی، لە کالیفۆرنیا گیانلەبەرێکی بەبەردبووی دۆزییەوە بە ناوی (دووکەڵبەشمشێری) ، کە ئاژەڵێکی لە ناوچووە لە پۆلی پشیلەکان بوو، دوای ئەنجامدانی شیکردنەوە لە سەریەبەرد بووەکە، دەرکەوت کە **15%** ی کاربۆن 14 لاشەکەی پیکهێناوە. تەمەنی ئەو پاشماوەیە بدۆزەوە، ئەگەر زانیت نیوەتەمەنی کاربۆن **14** بریتییە 5730 ساڵ.

هەنگاوی 1 نەگۆڕی گەڕانەوە بۆ کاربۆن 14 بدۆزەوە.

نەخشەیەکی پووکانەوە سروشتییە	$N(t)=N_0e^{-kt}$
لەجیاتی دابنێ	$\frac{1}{2}=1\times e^{-k\times 5730}$
سادەبکە و لۆگاریتمی سروشتی هەردوو لا وەربگرە	$\ln 2^{-1}=-5730k$
$\ln 2^{-1}=(-1)\ln 2=-\ln 2$	$-\ln 2=-5730k$
	$k=\frac{\ln 2}{5730}\approx 0.00012$

هەنگاوی 2 یاسای گەڕانەوە بەکاربهێنە و هاوکێشە پەیدابووەکە شیکاربکە.

نەخشەی پووکانەوە لەجیاتی دابنێ	$N(t)=N_0e^{-0.00012t}$
هەردوو لا دابەشی *100* بکە	$15=100\times e^{-0.00012t}$
سادەبکە و لۆگاریتمی سروشتی هەردوو لا وەربگرە	$0.15=e^{-0.00012t}$
سادەبکە	$\ln 0.15=\ln e^{-0.00012t}$
شیکاربکە	$\ln 0.15=-0.00012t$
	$t=-\frac{\ln 0.15}{0.00012}=15809.3$

650 mg

ئەو پاشماوەیە دەگەڕێتەوە بۆ 15 800 ساڵ بەنزیکەیی

ئاگاداربە!

ln هێمای لۆگاریتمی سروشتییە بەڵام log هێمای لۆگاریتمی ئاساییە (واتە بنچینە 10)

خاڵی چاودێری

4. شیبوونەوەی mg650 لە کرۆمیۆم51 بۆ ئەوەی ببێتە 200 mg چەند ساڵ دەخایەنێت، ئەگەر بزانیت نیوە تەمەنی کرۆمیۆم51 نزیکەی 28 ڕۆژە.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. دوو ژمارەی e و π لە چی لە یەکتر دەچن و لە چیدا جیاوازن.
2. ئەوەی e و $\ln$ بەیەکتر دەبەستێتەوە ڕوونبکەوە.
3. ڕێکخەریە ئەم خشتەیەی خوارەوە دروستبکە، پاشان تەواوی بکە. خانەکانی خشتەکە پڕبکەوە بۆ ئەوەی خاڵە لەیەکچوون و خاڵە جیاوازەکانی هەردوو لۆگاریتمەکە ڕوونبێتەوە. شێوەی گشتی بنووسە بە نموونە پاڵپشتی بکە ئەگەر پێویست بوو سادەی بکە.

	لۆگاریتمی ئاسایی	لۆگاریتمی سروشتی
بنچینە		
شێوەی لۆگاریتمی		
شێوەی توانی		
$\log_b 1$		
$\log_b b$		
$\log_b b^x$		
$b^{\log_b x}$		

هێربە

5-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لۆگاریتمی سروشتی ژمارەی x بە شێوەی نەخشەیەک بە پیتی x بنووسە ئەو نەخشەیە پێ دەوترێت ـــ؟ـــ (لۆگاریتمی سروشتی، لۆگاریتمی دەبی)

بڕوانە نموونە 1

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە

2 $f(x)=e^x-4$ **3** $f(x)=-e^x$ **4** $f(x)=4-e^x$ **5** $f(x)=e^{1-x}$

بڕوانە نموونە 2

بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە

6 $\ln e^1$ **7** $\ln e^{x-y}$ **8** $\ln e^{\left(-\frac{x}{3}\right)}$ **9** $e^{\ln 2x}$ **10** $e^{3\ln x}$

بڕوانە نموونە 3

11 **ئابووری** ڤیان 000 750 7 دیناری لە حسابی پاشەکەوتی بەردەوام دانا، بەسوودی تێکڕای ساڵانەی 4% بەهای حسابەکە پاش 5 ساڵ دەبێتە چەند؟

بڕوانە نموونە 4

12 **فیزیا** تەکنتیوم Technetuim - 99m ماددەیەکی تیشکدەرە بۆ وێنە کێشانی ماسولکەکانی دڵ و پەیکەری ئێسک بەکاردێت. نیوەتەمەنی ئەو ماددەیە نزیکەی 6 کاتژمێرە ئەگۆڕی پووکانەوەکە ئەو ماددە بدۆزەوە نەخشەی پووکانەوەی $N(t)=N_0e^{-kt}$ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ئەوەی دەمێنێتەوە لە 250 mg لەو ماددیە پاش 24 کاتژمێر.

ڕاهێنان و شیکاری پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
16–13	1
20–17	2
21	3
22	4

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە

13 $f(x)=e^x+1$ **14** $f(x)=e^x-1$ **15** $f(x)=1-e^x$ **16** $f(x)=10-e^x$

بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە

17 $\ln e^0$ **18** $\ln e^{2x}$ **19** $e^{\ln(x+2)}$ **20** $e^{4\ln x}$

21 **ئابووری** حسابی دڵشاد لە بانکێك 000 565 7 دیناری تێدایە دڵشاد لەو حسابە 000 000 5 دیناری بەکارهێنا بۆ حسابی تێکڕای سوودی ساڵانەی3.5% کە پاشەکەوتی دەکات، بە شێوەی بەردەوام کۆی گشتی حسابی دڵشاد دوای سێ ساڵ دەبێتە چەند؟

22 **ژینگە** ساڵی 1986، کورەی ئەتۆمی چەرنۆبیل لە ئۆکرانیا تووشی ڕوداوێك هات، بووە هۆی پەرتبوونی هێندێکی زۆر لە پلۆتۆنیۆم. نیوە تەمەنی ئەو ماددەیە دەگاتە 110 24 ساڵ. ئەگۆڕی گەرانەوەی ئەو ماددەیە بدۆزەوە، نەخشەی پووکانەوەی $N(t)=N_0e^{-kt}$ بەکاربهێنە بۆ هەژماری ئەوەی دەمێنێتەوە لە 20g لەو ماددەیە دوای 000 5 ساڵ.
پاش چەند ساڵ هێندە پاشماوەکە لە و بیست گرامە دەبێتە یەك گرام؟

23 **بزمێر** بەهای نزیکراوەیی هەریەك لە $\ln 10$ و $\log e$ بدۆزەوە.

أ چۆن ئەو دوو ژمارەی دەستتکەوتوە بەیەکتر دەبەسترێن؟

ب ڕێسای گۆڕینی بنچینە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت بەکاربهێنە.

24 ڕوونیبکەوە $\ln x=\ln 10\times \log x$.

25 **فرەھەنگاو** لە یاسای نیوتن بۆ ساردکردنەوە داھاتووە: پلەی گەرمی شلەیەك کەمدەکات بە پێی نەخشەی توانی $T = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$، کاتێك T_0 هێمای پلەی گەرمی بنەڕەتی بێت، و T_s هێمای پلەی گەرمی دەوروبەری شتەکەیە و k هێمای ژمارەیەکی نەگۆڕە و t هێمای کاتە. کاتێك کات بە خولەك دەپێورێت $k = 0.283$، قاوەخانەیەك پلەی گەرمی تێیدا 21 پلەی سەدی بێت، قاوەیەك پێشکەش میوانانی دەکات پلەی گەرمییەکەی 96 پلەی سەدی بێت. ئارەزوو مەندانی قاوە ئامۆژگاریمان دەکات کە قاوە لە 60 پلەی سەدی بەنزیکەیی بخورێتەوە.

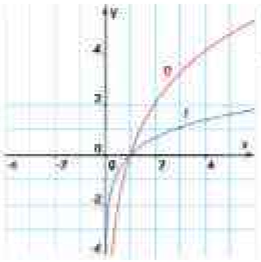
أ میوانەکە پێویستە چەند خولەك چاوەڕێ بکات پێش خواردنەوەی قاوەکەی؟

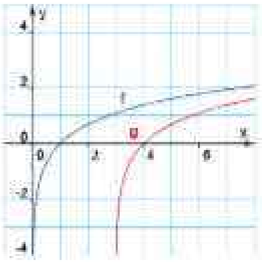
ب وەلامەکەی پێشوو دەبێتە چەند؟ ئەگەر پلەی گەرمی قاوەخانەکە ببێتە 30 پلەی سەدی؟

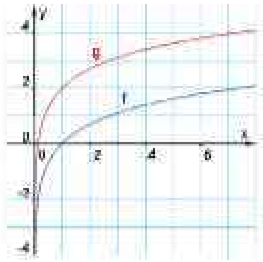
ج ڕوونکردنەوەی نەخشەی ساردکردنەوە بکێشە، لە دوو باری پێشوودا، بەڕوونکردنەوەیی ژمارەی خولەکەکان بدۆزەوە بۆ ئەوەی پلەی گەرمی قاوەکە یەکسان بێت بە پلەی گرمی قاوەخانەکە.

26 وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم دوو نەخشە $y = \frac{\ln x}{\ln 6}$ و $y = \frac{\log x}{\log 6}$ بکێشە بەراوردی نێوان دوو ڕوونکردنەوەکە بکە وبەراوردی نێوان هەریەکیان لەگەڵ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y = \log_6 x$ بکە.

نەخشە پەیدا بووەکان لە گۆڕینی نەخشەی $f(x) = \ln x$ بەیەکێك لەم ڕوونکردنەوەی دێت بیبەستەوە.

أ


ب


ج


27 $g(x) = \ln(x-3)$ **28** $g(x) = 3\ln x$ **29** $g(x) = \ln x + 2$

30 **ژینگە** یەکێك لەو ڕێکخراوانەی گرنگی بە ژینگە دەدات لە کەنەدا، ژمارەی ئاژەڵەکانی (ڕنە) کە لە دۆڵی ڕووباری جۆرج دەژین خەملاندنی، کە گەیشتە 700 4 سەر لە ساڵی 1954 دا، ئەو ژمارەیە بە توان زیادکرا تا گەیشتە 472 000 سەر لە ساڵی 1984 .

أ نەخشەی توانی $N(t) = N_0 e^{kt}$ بەکاربهێنە. کاتێك N_0 هێمای ژمارەی بنەڕەتی ئاژەڵەکانە و t هێمای کاتە و $N(t)$ هێمای ژمارەی ئاژەڵەکانە دوای t ساڵ و k ڕێژەی زیادبوونی ساڵانە بێت، بەهای k بدۆزەوە

ب چی دەبێت ئەگەر...؟ ئاژەڵەکان زیادیان کرد بەهەمان شێوە، لە ساڵی 2012 ژمارەکەی دەگاتە چەند؟

31 **ئەنینەوە** کارمەندانی تەندروستی گشتی نەخشەی $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ بەکاردەهێنین بۆ پێوانی مەودای بڵاوبوونەوەی پەتایەك لە کۆمەلگا.

أ ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشە بکێشە.

ب ئەو نەخشە چەند دەرکەناری هەیە.

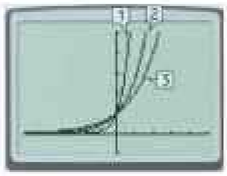
ج لە ژیانی ڕۆژانە دا نەونەخشەچی دەگەیەنێت لە بارەکانی بڵاو بوونەوەی پەتا.

دەروازەیەك

زانستی گیانەوەران

ئاژەڵی ڕنە ئاژەڵێکی کێوییە لە دۆڵی ڕووباری جۆرج، یەکێکە لە گەورەترین ڕەوەی ئەم جۆرە لە جیهاندا ژمارەیان لەساڵی 1993 نزیکەی 776 000 سەربوو

32 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** لە شێوەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=2^x$ و $g(x)=10^x$ و $h(x)=e^x$ بەردەکەوێت.



أ ڕوونکردنەوەی هەریەك لەم نەخشانە جیابکەوە.

ب پۆتانی خاڵی هاوبەشی لە نێوان سێ ڕوونکردنەوەدا دیاریبکە.

ج چی وا لەو خاڵە دەکات لە نێوان ئەو سێ ڕوونکردنەوەیەدا هاوبەش بێت؟

33 **بنووسە** بەراوردی نێوان پاشەکەوتی حسابی بانکێك بە شێوەی بەردەوام و پاشەکەوتی ڕۆژانە بکە. حسابەکە چەند قازانج دەکات ئەگەر پاشەکەوتەکە بەردەوام بێت، لە جیاتی ئەوەی ڕۆژانە بێت. لەگەڵ وەلامەکەت نموونەیەك بهێنەوە.

34 ژمارەی کێڵگەکانی وڵاتێك گەیشتە 500 33 کێڵگە لە ساڵی 1990 ولەساڵی 2000 گەیشتە 800 30 کێڵگە.

أ بەهای k لە نەخشەی $N(t)=N_0e^{kt}$ بدۆزەرەوە. بۆ ئەوەی سامپڵێکت (نموونەیەك) بۆکەمبوونەوەی ژمارەی کێڵگەکان دەستکەوێت.

ب سامپڵەکە بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی ژمارەی کێڵگەکان لەساڵی 2010 .

ج تێکرای ڕووبەری کێڵگەکان لەماوەی 1990 - 2000 لە 1209بۆ 1279 دۆنم زیادی کرد نەخشە-یەکی توانی بدۆزەوە کە ڕێگا دەدات بە خەمڵاندنی تێکرای ڕووبەری کێڵگەکان لە ساڵی 2010 .

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

35 کام کۆمەڵە بڕ ڕێکخراوان لە بچووکەوە بۆ گەورە؟

أ $\ln 1 , \log 10 , \ln 10 , \log e$ ج $\ln 10 , \ln 10 , \log e , \ln 1$

ب $\ln 10 , \log 10 , \log e , \ln 1$ د $\log e , \ln 10 , \log 10 , \ln 1$

36 کام بڕ یەکسان نییە بە x کاتێك $x \neq 0$ ؟

أ $e^{\ln x}$ ب $\ln e^x$ ج $x\ln e$ د $x+\ln e$

37 کام بڕ یەکسانە بە $\log 50$ ؟

أ $\ln 50 \div \ln 10$ ب $\ln(50 \div 10)$ ج $\ln 50 + \ln 10$ د $(\ln 50)\times(\ln 10)$

38 **کورتە وەلام** بڕێك بنووسە یەکسان بێت بە $-\ln x$ بە بێ بەکارهێنانی نیشانەی سالب.

بەرەنگاری و فراوانکردن

39 چەندجار لە ساڵێکدا پێویستە بۆ دانانی حسابی بانکێك بە تێکرایی سوودی ساڵانە 8% بۆئەوەی نرخەکەی 99.9% ی نرخەکەی بێت ئەگەر دانانەکە بەردەوام بێت؟ ئایا گۆڕان لە تێکرای سوودەکە وەلامەکە دەگۆڕێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

40 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}$ باسی ئەو ڕوونکردنەوەیە بکە بوار و مەودای نەخشەکە دیاریبکە.

41 وەلامی ئەم پرسیارانەی دێت بدەوە کە پەیوەندی بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\ln x$ هەیە.

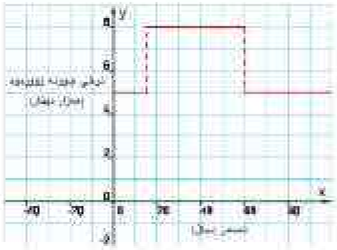
أ کام نەخشە ڕوونکردنەوەییانە دەنوێنرێت، بە وێنەدانەوەی نەخشەی $f(x)$ بەدەوری تەوەرەی دووەم.

ب کام نەخشە ڕوونکردنەوەییانە دەنوێنرێت، بە وێنەدانەوەی نەخشەی $f(x)$ بەدەوری تەوەرەی یەکەم.

ج کام نەخشە ڕوونکردنەوەییانە دەنوێنرێت، بە وێنەدانەوەی نەخشەی $f(x)$ بەدەوری هەردوو تەوەرەکە بەدوای یەك.

د ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ و هەرسێ وێنەدانەوەکەی لەهەمان ڕووتەختی پۆتانەکان بکێشە ئەو دەرکەنارانە دیاریبکە لە هەر چوار ڕوونکردنەوەکە هاوبەشن.

پێداچوونەوەی لولپێچی



42 **بۆ خۆشی** لەم ڕوونکردنەوەی بەرامبەردا نرخی چوونە ژوورەوەی باخچەی ئاژەڵان بە پێی تەمەنی سەردانکەر دەنوێنێت. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بۆ نواندنی هەر بارێك لەمانەی خوارەوە. ئەو جێگۆڕکێیە دیاریبکە، کە ڕێگە بە دەستکەوتنی بە پێی ڕوونکردنەوەی بەرامبەر دەدات (پۆلەکانی پێشوو)

أ پێش کاتژمێر 5:00 ی پاش نیوەڕۆ نرخەکان بۆ نیوە کەم دەکرێنەوە.

ب بۆ هەر چەشنە تەمەنێك بەرزترین ڕادە بۆ 3 ساڵ کەمکرایەوە.

ج هەموو نرخەکان دوو ئەوەندەکران.

نەخشەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=-2x^2+3x-4$ بنووسە بۆ هەر یەکە لەم جێگۆڕکێیانەی خوارەوە. (پۆلەکانی پێشوو)

43 ڕاکێشانی 5 یەکە بۆ سەرەوە.

44 ڕاکێشانی دوو یەکە بۆ لای چەپ.

45 وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری یەکەم.

46 کشانی ئاسۆیی هاوکۆڵکەی 2 بێت.

ئەم برانە بەبەکارهێنانی یەك لۆگاریتم بنووسە وەڵامەکەت بە سادەترین شێوە دەربڕە.

47 $\log_2 8+\log_2 \frac{1}{2}$

48 $\log_4 64-\log_4 1$

49 $\log_3 243-\log_3 2187$

50 $\log_5 25+\log_5 125$

51 $\log_8 8+\log_8 \frac{1}{8}$

52 $\log x^2+\log x$

6–4 هاوکێشە و لاسەنگە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان

Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities

ئامانجەکان

- هاوکێشە و لاسەنگە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان شیکار دەکات.
- ئەو پرسیارانە شیکار دەکات کە هاوکێشە و لاسنگە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان لە خۆدەگرێت.

زاراوەکان
Vocabulary

هاوکێشەی توانییەکان
Exponential Equation

هاوکێشەی لۆگاریتمی
Logarithmic Equation

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

پێوەرە توانییەکان بەکاردێت، بۆ پێوانی ڕووناکی لە کردارەکانی وێنەگرتن (ڕاهێنانی 40).

هاوکێشەی توانی Exponential Equation هاوکێشەیەکە بڕێك یان زیاتری تێدایە و نەزانراوێکی توانی تێدایە بۆ ئەوەی هاوکێشەیەکی توانی شیکار بکەیت:

- هەوڵبدە بە شێوەیەك بینووسیتەوەکە هەموو هێزەکان هەمان بنچینەیان هەبێت.
  ئەگەر $b^x = b^y$ ئەوا $x = y$ $(b \neq 1 ، b \neq 0)$
- لۆگاریتمی هەردوو لای هاوکێشەکە بەکاربهێنە.
  ئەگەر $a = b$ ئەوا $\log a = \log b$ ، $(a > 0 \quad b > 0)$

نموونە 1 شیکارکردنی هاوکێشە توانییەکان

شیکار بکە و پاسادانبکە

أ $8^x = 2^{x+6}$

$(2^3)^x = 2^{x+6}$ بنووسە وەك هێزی بۆ ئەوەی هەمان بنچینەت

$2^{3x} = 2^{x+6}$ دەستکەوێت بۆ ژمارکردنی هێزی هێز، دوو توانەکە لە

$3x = x + 6$ یەکتر بدە لە بەر ئەوەی بنچینەکان وەك یەکن، دوو

$x = 3$ توانەکە یەکسانن.

پاسادانبکە

8^x	2^{x+6}
8^3	2^{3+6}
8^3	2^9
512 ✓	512

شیکارەکە $x = 3$

ب $5^{x-2} = 200$

$\log 5^{x-2} = \log 200$ لەبەر ئەوەی 200 هێز نیە لە هێزەکانی 5 ، لۆگاریتمی هەردوو لا وەربگرە.

$(x-2)\log 5 = \log 200$

$x - 2 = \frac{\log 200}{\log 5}$ سیفەتی لۆگاریتمی هێز بەکاربهێنە هەردوو لا بەسەر log5 دابەشبکە

$x = 2 + \frac{\log 200}{\log 5} \approx 5.292$

پاسەدانبکە بژمێر بەکاربهێنە

شیکار بریتییە لە $x \approx 5.292$

ڕۆشنایی

کاتێك وەڵامێکی نزیکراوە لە کرداری پاسادانکردن بەکاردەهێنیت، وەڵامی تەواوت بۆ دەرناچێت بەڵکو ئەنجامێکی گونجاوت بۆ دەردەچێت.

حاڵی جاودێری

1. شیکاربکە و پاسەدانبکە

أ $3^{2x} = 27$ ب $7^{-x} = 21$ ج $2^{3x} = 15$

نموونـــــه 2 جێبەجێکردن لەسەر دراو (پارە)

دەتوانیت لە نێوان دەستکەوتنی ئۆتۆمبیلێك نرخەکەی 20 ملیۆن دینار یان دەستکەوتنی یەك دینار لە ڕۆژی یەکەم و دوو ئەوەندەی دەستتکەوتووە لە ڕۆژی دواتر و هەروەها * یەکێکیان هەڵبژێرێت. ئەگەر دووەمت هەڵبژارد، لە چ ڕۆژێك گوژمەیەکی زیاتر لە نرخی ئۆتۆمبیلەکە دەستدەکەوێت؟

لە ڕۆژی یەکەم یەك دینار 2^0ت دەستدەکەوێت و لە ڕۆژی دووەم 2^1 دینار و هەروەها ئەوا 2^{n-1} دینارت لە ڕۆژی n دەستدەکەوێت. بۆ دەستکەوتنی وەڵام لاسەنگەکە شیکار بکە.

$$2^{n-1} > 20\ 000\ 000$$

$2^{n-1} > 2 \times 10^7$ — 20 ملیۆن بە شێوەی زانستی بنووسە

$\log(2^{n-1}) > \log(2 \times 10^7)$ — لۆگاریتمی هەردوو لا وەربگرە

$(n-1)\log 2 > \log 2 + \log 10^7$ — سیفەتی هێز و سیفەتی ئەنجامی لێکدان بە کاربهێنە .

$(n-1)\log 2 > \log 2 + 7$ — $\log 10^7 = 7$

$n - 1 > \dfrac{\log 2 + 7}{\log 2}$ — هەردوو لا دابەشی $\log 2$ بکە بژمێر بەکاربهێنە

$n > \dfrac{\log 2 + 7}{\log 2} + 1$ — وەڵامەکەت نزیککەوە و بۆ نزیکترین ژمارەی تەواوی لەلای سەرەوە

$n > 25.26$

لە ڕۆژی بیست و شەشەمەوە، ئەوەی دەستت دەکەوێت زیاترە لە نرخی ئۆتۆمبیلەکە. ساغبکەوە. لەبەر ئەوەی $2^{26-1} = 2^{25} = 33\ 554\ 432$ لە ڕۆژی بیست و شەشەمەوە 33 55 44 32 دینارت دەستدەکەوێت، ئەوەش زیاترە لە نرخی ئۆتۆمبیلەکە.

تێبینی

ئاساییە خوێندکار بەراوردی نێوان کۆی ئەوەی دەستدەکەوێت لەگەڵ نرخی ئۆتۆمبیلەکە بکات واتە ئەمە شیکار بکات.

$2^0 + 2^1 + 2^2 ... +$

$2^{n+1} > 20 \times 10^6$

$\Longrightarrow n = 24$

تێبینی

ئەگەر بژمێرت پێ نەبێ:

$\log 2 \approx 0.30$

$\log 3 \approx 0.47$

$\log 5 \approx 0.69$

حاڵی حاڵیبوون

2. لە نموونەی 2 وا دابنێ ئەو گوژمەی هەر ڕۆژێك وەریدەگرێت 3 ئەوەندەی ئەو گوژمەیە لە ڕۆژی پێشتر وەریدەگرێت لە جیاتی دوو ئەوەندە. لە کام ڕۆژ ئەوەی وەریدەگرێت لە ملیار دینار زیاترە؟

هاوکێشەی لۆگاریتمی Logarithmic Equation هاوکێشەیەکە بڕێکی لۆگاریتمی یان زیاتری تێدایە و نەزانراوێك لەخۆ دەگرێت. دەتوانیت هاوکێشە لۆگاریتمیەکان بەبەکارهێنانی سیفەتی لۆگاریتمی شیکار بکەیت.

نموونـــــه 3 شیکارکردنی هاوکێشەی لۆگاریتمی

شیکاربکە

أ $\log_3(x-5) = 2$

$3^{\log_3(x-5)} = 3^2$ — 3 بەکاربهێنە وەك بنچینەیەکی هاوبەش بۆ هەردوو لا .

$x - 5 = 9$ — پێچەوانەبوونەوە لە نێوان هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە سادەبکە

$x = 14$

ب $\log 45x - \log 3 = 1$

$\log\left(\dfrac{45x}{3}\right) = 1$ — سیفەتی لۆگاریتمی ئەنجامی دابەشکردن بەکاربهێنە دابەشبکە.

$\log(15x) = 1$

$10^{\log(15x)} = 10^1$ — 10 وەك بنچینەیەکی هاوبەشی هەردوولا بەکاربهێنە

$15x = 10$ — پێچەوانەبوونەوە لە نێوان هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە سادەبکە.

$x = \dfrac{2}{3}$

لە بیرت بێت

پێداچوونەوەی سیفەتەکانی لۆگاریتم بکە لەوانەی 4-4 دا

ج

$\log_4 x^2 = 7$

$2\log_4 x = 7$ — سیفەتی لۆگاریتمی هێزی

$\log_4 x = \frac{7}{2}$ — هەردوولا دابەشی 2 بکە.

$x = 4^{\frac{7}{2}}$ — پێناسەی لۆگاریتم

$x = (2^2)^{\frac{7}{2}}$ — $4 = 2^2$ سابیعبکە

$x = 2^7 = 128$

د

$\log x + \log(x+9) = 1$

$\log x(x+9) = 1$ — سیفەتی ئەنجامی لێکدانی لۆگاریتم بەکاربهێنە

$10^{\log x(x+9)} = 10^1$ — 10 وەك بنچینەی هاوبەش بۆ هەردوو لا بەکاربهێنە

$x(x+9) = 10$ — پێچەوانەبوونەوە لە نێوان هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە.

$x^2 + 9x - 10 = 0$ — راڤەکان لە یەکتربدە و کۆیانبکەوە

$(x-1)(x+10) = 0$ — شیتەڵبکە

$x - 1 = 0$ یان $x + 10 = 0$ — سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە

$x = 1$ یان $x = -10$ — شیکار

ساغبکەوە

$\log x + \log(x+9)$	1
$\log 1 + \log(1+9)$	1
$\log 1 + \log 10$	1
$0 + 1$	1
$0 + 1$	1 ✓

$\log x + \log(x+9)$	1
$\log(-10) + \log(-10+9)$	1 ✗

$\log(-10)$ پێناسە نەکراوە

کەواتە شیکارەکە بریتییە لە $x = 1$

ئاگاداربە!

هەمووکات شیکارەکان ساغبکەوە چونکە لەوانەیە شیکاری نامۆ بێتە ناو شیکارەکان.

خاڵی چاودێری

3. شیکاربکە

أ $3 = \log 8 + 3\log x$

ب $2\log x - \log 4 = 0$

نموونــــه 4

بەکارهێنانی خشتەکان و جەبر بۆ شیکارکردنی هاوکێشە و لاسەنگە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان.

بۆ شیکارکردن خشتەیەك یان جەبر بەکاربهێنە

أ $2^{2x} = 1024$

بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە(2X)^2 لە پێش Y1 و 1024 پێش Y2 بنووسە.

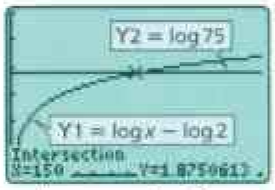
لە وێنە ڕوونکردنەوەییەکە بۆ پۆتانی یەکەمی خاڵی یەکتربڕینی دوو ڕوونکردنەوەیەکە بگەڕێ.

لەخشتەکەدا لە بەهای x بگەڕێ کە وادەکات $Y1 = Y2$

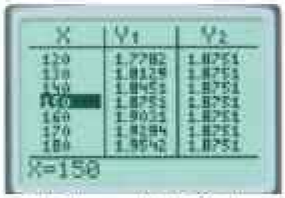
شیکار بریتییە $x = 5$

ب $\log x - \log 2 \le \log 75$

بژمێرە بەکاربهێنە $\log x - \log 2$ لە پێش Y1 و log75 لە پێش Y2 بنووسە.



لە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەدوای پۆوتانی یەکەمی خاڵی یەکتربڕینی دوو ڕوونکردنەوەییەکە بگەڕێ.



لەخشتەکەدا بۆ بەهایەکانی x بگەڕێ کەوادەکەن $Y1 \le Y2$.

کۆمەڵەی شیکار بریتییە لە $\{x/x \le 150\}$

ساغیکەوە: جەبر بەکاربهێنە.

$\log x - \log 2 \le \log 75$

$\log \frac{x}{2} \le \log 75$ سیفەتی ئەنجامی دابەشکردنی لۆگاریتم بەکاربهێنە

$10^{\log \frac{x}{2}} \le 10^{\log 75}$ 10 وەك بنچینەیەکی هاوبەشی بۆ هەردوو لا بەکاربهێنە.

$\frac{x}{2} \le 75$ پێچەوانەبوونەوە لە نێوان هێز و لۆگاریتم بەکاربهێنە.

$x \le 150$ ✓ سادەیکە.

خاڵی جاودێری

4. خشتەیەك یان جەبر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی:

أ $2^x = 4^{x-1}$ ب $2^x > 4^{x-1}$ ج $\log x^2 = 6$

بیربکەوە و تاوتوێکە

1. بۆچی دەرئەنجامی ئەوە دەکەبێت، ئەگەر $\log a = \log b$ ئەوا $a = b$ کاتێك $a > 0$ و $b > 0$؟

2. تەنها هەنگاوی یەکەم بۆ شیکارکردنی ئەمانەی دێن دیاربکە.

أ $\log x^5 = 10$ ب $\log 2x + \log 2 = 1$

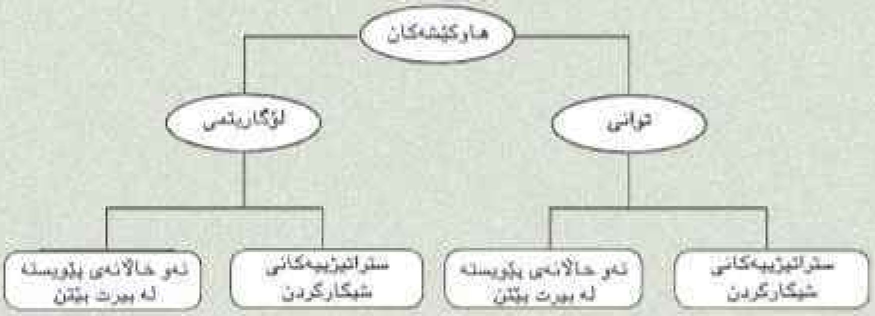
ج $x^4 = 100$ د $\log(x + 1000) = 2$

هـ $\log(x+4) + \log x = 2$ و $\log_6(x+6) = 3$

3. ڕوونیبکەوە چۆن دەتوانرێت هاوکێشەیەکی لۆگاریتمی شیکارێکی سالبی هەبێت. بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە و ئەگەر دەکرێت نموونەیەك بهێنەوە.

4. ڕێکخەربە ئەم هێڵکارییەی خوارەوە دروستبکە و تەواوییکە. بەشێوازی خۆت ئەو ستراتیژانە و خاڵانە بنووسەکە پێویستە لە بیرت بێت کە تایبەتن بە هاوکێشەی توانی و لۆگاریتمی.

فێربە



6-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** دەتوانیت شیکاری هاوکێشەی ______ بکەیت، بەوەرگرتنی لۆگاریتم بۆ هەردوولا (توانی یان لۆگاریتمی)

بڕوانە نموونە 1

شیکاریکە و پاسادانیکە.

2 $4^{2x} = 32^{\frac{1}{2}}$ **3** $9^x = 3^{x-2}$ **4** $2^x = 4^{x+1}$

5 $4^x = 10$ **6** $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **7** $2.4^{3x+1} = 9$

بڕوانە نموونە 2

8 **دانیشتوان** ژمارەی دانیشتوانی لادێیەك 3400 کەسە، و بەڕێژەی %3 ساڵانە زیاددەکات. دەتوانیت پشت بەنەخشەی $P = 3400(1+0.03)^t$ ببەستێت بۆ تواندنی ژمارەی دانیشتوان بە پێی کات t کاتێك P هێمای ژمارەی دانیشتوان پاش t ساڵ بێت دوای چەند ساڵ ژمارەی دانیشتوان لە 100 000 کەس تێدەپەڕێت.

بڕوانە نموونە 3

شیکاریکە و پاسادانیکە

9 $\log_2(7x+1) = \log_2(2-x)$ **10** $\log_6(2x+3) = 3$

11 $\log 72 - \log\left(\frac{2x}{3}\right) = 0$ **12** $\log_3 x^9 = 12$

13 $\log_7(3-4x) = \log_7\left(\frac{x}{3}\right)$ **14** $\log 50 + \log\left(\frac{x}{2}\right) = 2$

15 $\log x + \log(x+48) = 2$ **16** $\log\left(x+\frac{3}{10}\right) + \log x + 1 = 0$

بڕوانە نموونە 4

خشتەیەك و وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ شیکاری:-

17 $2^{2x+1} = 256$ **18** $2^x 3^x \le 7776$ **19** $2\log x^4 = 16$ **20** $x > 10\log x$

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی زیاتر	
بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
26–21	1
27	2
33–28	3
36–34	4

شیکاریکە و پاسادانیکە

21 $2^{x-1} = \frac{1}{64}$ **22** $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8^{x-1}$ **23** $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = 125^{\frac{x}{2}}$

24 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 1.6$ **25** $(1.5)^{x-1} = 14.5$ **26** $3^{\frac{x}{2}+1} = 12.2$

27 **دەرمان** پەرستارێك حەبێکی ئارامکەرەوەی دابە نەخۆشێك، 325mg ئەسپرینی تێدایە. نەخشەی $A = 325\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$ بۆ دیاریکردنی هێندی ئەسپرینی A ماوە لە خوێنی نەخۆشەکە دوای t خولەك لە وەرگرتنی حەبەکە. لاسەنگەیەکی لۆگاریتمی بنووسە و شیکاریبکە، بۆ دیاریکردنی ژمارەی خولەکە پێویستەکان بۆ ئەوەی هێندی ئەسپرینەکە لە 50mg کەمتربێت.

شیکاریکە

28 $\log_3(7x) = \log_3(2x+0.5)$ **29** $\log_2\left(1+\frac{x}{2}\right) = 4$

30 $\log 5x - \log(15.5) = 2$ **31** $\log_5 x^4 = 2.5$

32 $\log x - \log\left(\frac{x}{100}\right) = x$ **33** $2 - \log 3x = \log\left(\frac{x}{12}\right)$

خشتەیەك یان جەبر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی

34 $2\times 3^{x-1} = 162$ **35** $4x \le 2^{x+1}$ **36** $\log(2x-17) + \log x \ge 2$

37 $\log x = \log(x^2 - 12)$ شیکاربکە وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

38 $5^{2x} = 100$ شیکاربکە وەڵامەکەت نزیکبکەوە بۆ نزیترین بەشی سەدی.

39 $5^{x-2} = 64$ بە زیاتر لە ڕێگایەك شیکاری بکە.

40 **مۆزیك** لەرەلەری هەر ئاوازێك (بە هێرتز) لە ئاوازەکانی پیانۆ بە پەیوەندییەك لەگەڵ شوێنی دووگمەکەی (کلیلەکەی) لە سەر تەختەی کلیلەکان بە پێی نەخشەی $f(n) = 440 \times 2^{\frac{n}{12}}$ دەنوێنرێت، کاتێك n ژمارەی ئەو کلیلانەیە کە ئەو کلیلە لە کلیلی مەرکەزی جیادەکاتەوە (n سالب دەبێت ئەگەر کلیلەکە لە لای چەپی کلیلە مەرکەزیکەوە بێت، و موجەب دەبێت ئەگەر لە لای ڕاستی بێت) شوێنی کلیلەکە بدۆزەوە بۆ ئاوازێك لەرەلەرەکەی 110 هێرتزە.

41 **پارەدان** وا دابنێ 000 250 دینار بە بانکێك سپێردرا بە سوودێکی ئاویتە تێکڕاکەی%4.5 بێت لە وەرزێکدا پاشەکەوتی حسابی وەرزی (4 جار لە ساڵێکدا) دەگرێت یاسای $A = P(1+r)^n$ بەکاردێت بۆ هەژماری ئەوەی گوژمە بنەڕەتییەکە p دەیگاتێ، کە سپێردرابوو لە حسابی سوودی ئاوێتەیەك تێکڕاکەی r بێت لەوەرزێکدا، دوای تیپەڕبوونی n وەرز لە سپاردنی ئەو یاسایە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی وەرزە پێویستەکان، بۆ ئەوەی گوژمەکە بەلای کەمی ببێتە 000 500 دینار (یارمەتی: یەکەمجار هەردوو لای هاوکێشەکە بەسەر p دابەشبکە).

42 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** چەند ژمارەی ڕاستی دەبنە شیکاری $\log x^2 < 2\log x$ ؛ بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ وێنەی هەردوو ڕوونکردنەوەییەکە بەکاربهێنە، پاسەدانی وەڵامەکەت بکە. دوو ڕوونکردنەوەکە چی نیشاندەدات بۆ وەڵامەکە.

43 **هەڵە لە شیکاردا** لە کاتی شیکارکردنی هاوکێشەی $\log x + 4 = 8$ ، دانا وەڵامی ، 999999 دەستکەوت. هەڵەی دانا لە کۆێیە؟

44 **بنووسە** باسی دوو ڕێگا بکە، دەتوانیت بەکاریان بهێنێت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەیەکی توانی. نموونەیەك بهێنەوە، ڕوونیبکاتەوە کە هەر ڕێگایەکیان کەی بەکاردەهێنرێت.

پەروازەیەك

مۆزیك

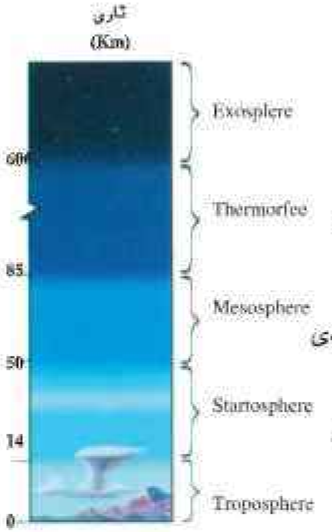
پیانۆ دادەنرێت بە ئامێرێکی مۆزیکی ژێدار و دەهۆڵی لە یەك کاتدا چەکوشی بچووك بۆ دانراوە لە ژێیەکان دەدات.

45 دەتوانیت نەخشە $N(t) = 119(0.987)^t$ بۆ دیاریکردنی ژمارەی کێڵگەکانی پەلەوەر بەهەزاران لە یەکێك لە ولاتەکان بە پێی ژمارەی ساڵەکانی t دوای ساڵی 1980

أ ئایا ژمارەی کێڵگەکان زیادیکردووە لە ساڵی 1980 یان کەمیکردووە، چۆن ئەوەت زانی؟

ب ژمارەی کێڵگەکان ساڵی 1980 و ساڵی 2000 لە و وڵاتەدا چەند بوو؟

ج بە پێی نەخشەکە کەی ژمارەی کێڵگەکان بەنزیکەیی دەبێتە 000 80 کێڵگە؟



46 **کەشناسی** لە چینێکی بەرگەی هەوادا، پلەی گەرمی نەگۆڕەو دەکاتە $-57°$ ، دەتوانرێت پشت بە نەخشەی $P(h) = 128(10)^{-0.0682h}$ ببەستین وەك هاوکێشەیەك بۆ پێوانی پەستانی هەوای p (بە کیلۆ پاسکاڵ kpa پێورابێت). بە پێی بەرزی h (بەکیلۆ مەتر پێورابێت) لە ڕووی زەوییەوە پەستانی هەوا لەو چینە لە نێوان $2.55\ kpa$ و $22.9\ kpa$ دەبێت.

أ کەمترین بەرزی و زۆرترین بەرزی لەو چینەدا چەندە بۆ ئەوەی هاوکێشەکە ڕاستبێت؟

ب چی دەبێت ئەگەر...؟ پەستانی کەش لە ڕووی دەریا $101\ kpa$ بەنزیکەیی بێت، ئەگەر ئەو هاوکێشەی سەرەوەت بەکارهێنا بۆ دیاریکردنی پەستانی کەش لە ڕووی دەریا، ئایا بەهایەکی گەورەتر یان بچووکترت لە بەها ڕاستەقینەکەی دەستدەکەوێت. ئەمە ڕوونبکەوە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

47 شیکاری هاوکێشەی $b^x = c$ دەکاتە چی؟

أ $x = \frac{\log b}{\log c}$ ب $x = \frac{\log c}{\log b}$ ج $x = \frac{\log b}{c}$ د $x = \frac{\log c}{b}$

48 شیکاری هاوکێشە $\log(x-21) = 2 - \log x$ بکە.

أ $x = 4$ ب $x = \frac{25}{4}$ ج $x = \frac{21}{2}$ د $x = 25$

49 کام بڕە گەورەترین بەها وەردەگرێت کاتێك $p = 5$ و $q = 2$ ؟

أ $\log 2p - \log 3q$ ب $2\log q - 3\log p$ ج $\log p^2 - \log q^3$ د $\log p - \log q$

بەرەنگاری و فراوانکردن

50 ئایا دەتوانرێت هاوکێشەی $x = \log_x x$ شیکار بکرێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

51 هاوکێشەی $x = 0.125^{\log_8 5}$ بەجەبری شیکار بکە.

52 کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $\log_3 36 - \log_3 x > 1$ بدۆزەوە؟ بژمێری زانستی بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی لاسەنگەکە بە ڕوونکردنەوەیی.

پێداچوونەوەی لولپێچی

53 **وێنەگرتن** نرخی شوشتنەوەی وێنەیەکی پێوانە $24cm \times 20cm$ 750 دینارە، نرخی شوشتنەوەی وێنەیەکی پێوانە $15cm \times 10cm$ 350 دینارە، سێوی 5250 دیناری لایە. هێمای x بەکاربهێنە بۆ ژمارەی وێنەکانی پێوانەی یەکەم، و y بۆ ژمارەی وێنەکانی پێوانەی دووەم *(وانەی 2 − 1)*

أ لاسەنگەیەك بنووسە بۆ ژمارەی ئەو وێنانەی کە سێوی دەتوانێت لە هەرجۆرێك بیشواتەوە.

ب لاسەنگەکە بەڕوونکردنەوەیی شیکاربکە. سێوێ دەتوانێت چەند جۆری دووەم بشواتەوە، ئەگەر زانیت 4 وێنە دەرکەوت لە جۆری یەکەم؟

سنووردەری ڕێزکراوەکە بدۆزەرەوە *(وانەی 3 − 4)*

54 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ **55** $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ **56** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ **57** $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

دژە کردارەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی پێچەوانەی نەخشکە *(وانەی 4 − 2)*

58 $f(x) = 4x + 3$ **59** $f(x) = 6(x-2)$ **60** $f(x) = \frac{x}{3} + 9$ **61** $f(x) = \frac{7x-1}{5}$

4–7 نموونە توانییەکان و لۆگاریتمییەکان Exponential and Logarithmic Models

ئامانجەکان

- بەکارهێنانی ئەخشەی توانی و لۆگاریتمی بۆ دۆزینەوەی نموونەکان بۆ پێدراوەکان.
- نموونە توانییەکان ولۆگاریتمییەکان بەکاردێت بۆ شیکردنەوە و دارشتنی پێشبینییەکان

زاراوەکان Vocabulary

لێژ بوونەوەی توانی (الانحدار الاسی) Exponential Regression

لێژبوونەوەی لۆگاریتمی (الانحدار اللوغاریتمی) Logarithm Regression

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەو کەسانەی بەردە بەنرخەکان مشتوماڵ دەکەن دەزانن کە بەهای خشڵە هاوشێوەکان بە پێی پەیوەندییەکی توانی بەبارستاییەکەیەوە دەبەسترێتەوە (نموونە 2)

دەتوانرێت بۆ شیکردنەوەی پێدراوەکان شێوازێك یان پەیوەندییەك دەربکەوێت کە لە نێوان دوو هێنددا دووبارە دەبێتەوە. سەیری خشتەی خوارەوە بکە بۆ بەهایەکانی ئەخشەی $f(x) = 2(3^x)$.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	2	6	18	54

× 3 × 3 × 3 × 3

سەرەنجبدەکە ڕێژەی هەر بەهایەك لە بەهایەکانی y بۆ بەهای پێش خۆی نەگۆڕە. هەر بەهایەك لەو بەهایانە، جگە لە بەهای یەکەم، دەکاتە سێ ئەوەندەی بەهایەکەی پێش خۆی، و هەروەها، ئەوا ڕێژەی بەهای ئەخشەی بەرامبەر بەهای x ـە کە هەمان ماوە لە یەکێکیان جیادەکاتەوە، ڕێژەیەکی نەگۆڕە دەتوانرێت ئەم جۆرە پێدراوانە بە ئەخشەیەکی توانی $f(x) = ab^x$ بنوێنرێت.

نموونە 1 جیاکردنەوەی پێدراوە توانییەکان

دیاریبکە ئەخشەی f ئەخشەیەکی توانییە یان نا. ئەگەر توانییە. ڕێژەی نەگۆڕەکەی بدۆزەرەوە کاتێك $f(x) = ab^x$

أ

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

جیاوازی یەکەم +2 +2 +2 +2

ئەخشەکە ئەخشەیەکی هێڵییە.

ب

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

جیاوازی یەکەم $+\frac{1}{2}$ +1 +2 +4

ڕێژەکان $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$

ئەخشەکە ئەخشەیەکی توانییە و ڕێژە نەگۆڕەکەی بریتیە لە 2

لەبیرت بێت

ئەخشەی هێڵی وەك نموونەیەك بەکاردێت بۆ پێدراوەکان جیاوازییە یەکەمەکانی نەگۆڕ بێت. هەروەها ئەخشەی دووجا وەك نموونەیەك بەکاردێت بۆ پێدراوەکان جیاوازیە دووەمەکانی نەگۆڕبێت.

خۆت تاقیبکەرەوە

1. ئەخشەی f ئەخشەیەکی توانییە یان نا. ئەگەر توانییە ڕێژە نەگۆڕەکەی بدۆزەرەوە کاتێك $f(x) = ab^x$

أ

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$2.\overline{6}$	4	6	9	13.5

ب

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	2	7	12	17

پێشتر بژمێری ڕوونکردنەوەیت بەکارهێنا بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی هێڵی کە پێدراوە هێڵییەکان دەنوێنێت. واتە کرداری **لێژبوونەوەی هێڵیت** ئەنجامدا، بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاردێت بۆ دۆزینەوەی **نموونەی توانی** کە پێدراوەتوانییەکان دەنوێنێت. کاتێک دڵنیا دەبێت پێدراوەکان توانین. **ExpReg** (Exponential Regression) لە بژمێری ڕوونکردنەوەیدا بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی نوێ بۆ ئەوپێدراوانە، کرداری دۆزینەوەی نموونەی توانی بۆ نواندنی کۆمەڵێک پێدراو پێیدەوترێت کرداری **لێژبوونەوەی توانی Exponential Regression** نموونە توانییەکان کە بژمێری ڕوونکردنەوەیی درووستی دەکات ، تەنها نەخشەی جۆری $f(x) = ab^x$ دەگرێتەوە وە هەروەها کشانەوەی ئەم نەخشانە لە بژمێرەکە ناکرێت

نموونـــــە 2 جێبەجێکردن لە مشتومالکردنی خشڵەکان

خشتەی بەرامبەر بارستایی ژمارەیەک پارچە ئەڵماس و نرخەکەی بەنزیکەیی دەردەخات. نموونەیەکی توانی بۆ ئەو پیدارِوانە بدۆزەوە. ئەو نموونەی دۆزیتەوە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی بارستایی ئەڵماسێک نرخەکەی 2325 هەزار دیناربێت.

هەنگاوی 1 پێدراوەکان لە دوو لیست لە ناوبژمێرەکە تۆماربکە.

نرخی ئەڵماس	
بارستەیی (قیرات)	نرخ دینار
0.5	920 000
1.0	1 160 000
2.0	1 500 000
3.0	2 150 000
4.0	2 900 000

فرمانی لێژبوونەوەی توانیExpReg بەکاربهێنە بژمێرەکە نموونەیەکی توانی ئەو پێدراوانەت دەداتێ، بریتییە لە نەخشەی توانی $V(w) = 805462.6\ (1.38)^w$ کاتێک V هێمای نرخی ئەڵماسەکەیە، W هێمایە بۆ بارستەییەکەی کە بەقیرات پێوراوە.

هەنگاوی 2 بەڕوونکردنەوەیی پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنیە.

و وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە. بۆ دڵنیابوون لەوەی نموونەیەکی بۆ ئەو پێدراوانە دروستکردووە ڕێسای نەخشەکە بەرامبەرY1 لە شاشە = Y بنووسە، دووگمەیVARS دابگرە و**Statistics : 5** هەڵبژێرە پاشان ENTER دابگرە. بجولێ بۆ EQ : 1 Reg EQ هەڵبژێرە.

$V = 2\ 325\ 000$ 2 325 000 تۆماربکە بەرامبەرY2 لەوێنەی نەخشەی فەرمانی یەکتربڕین لە بژمێر بەکاربهێنە. لەوانەیە پێویستت بە ڕێکخستنی دووریەکانی شاشەکە هەبێت بۆ ئەوەی خاڵی یەکتربڕین دەربکەوێت.

لەبیرت بێت

ئەگەر لەسەر شاشەی بژمێر r^2 و r ت نەبینی کاتێک لێژبوونەوە هەژمار دەکەیت. دووگمەی CATALOG دابگرە 2nd پاشان 0 دابگرە و Diagnosticon هەڵبژێرە.

خاڵی جاودێری

2. دابەزینی توانی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونە بۆ پێدراوەکانی خشتەی خوارەوە، کەی ژمارەی بەکتریاکان دەبێتە 2000 بەکتریا.

کات (خولەک)	0	1	2	3	4	5
ژمارەی بەکتریا	200	248	312	390	489	610

دەتوانرێت زۆر لە پێدراوکانی ژیانی ڕۆژانە بە نەخشەی لۆگاریتمی بنوێنریت. دەتوانیت **لێژبوونەوەی لۆگاریتمی Logarithmic Regression** بۆ دۆزینەوەی نەخشە بەکاربهێنرێت.

هێزی تەقینەوە	
هێز	TNT تەن
2.0	
3.0	
4.0	
5.0	

نموونــــــە 3 جێبەجێکردن لە فیزیادا

لە خشتەی بەرامبەر هێزی تەقینەوە، بە پێوەری ڕێختەر دەردەکەوێت، بۆ هێندێکی دیاریکراو لە ماددەی TNT ، نەخشەی لۆگاریتمی سروشتی بدۆزەوە، کە دەبێتە نموونەیەك بۆ ئەو پێدراوانە. ئەو نموونەی دۆزیتەوە بەکاربهێنە، بۆ خەملاندنی هێندە تەقێنراوەکان لە ماددەی TNT تەقینەوەکەی بکاتە بومەلەرزەیەك بەهێزی 6.5 بە پێوەری ڕێختەر. پێدراوەکان لە دوو لیستدا تۆماربکە.

لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی پاشان فەرمانی لێژبوونەوەی لۆگاریتمی بەکاربهێنە. دوگمەی STAT دابگرە CALC پاشان **9 : LnReg** هەڵبژێرە.نەخشەی $R(x) = 2 + 0.29\ln x$ نموونەیەکی لۆگاریتمییە پێدراوەکانی نەخشەکە پێکدەهێنێت. کاتێك R هێزی بوومەلەرزەکان بێت بە پێوەری ڕێختەر و t هێندی تەقێنداوەکانی ماددەی TNT بە چەندها تەن بێت. بەهای r^2 دەریدەخات نموونەکە گونجاوە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە. فرمانی یەکتربڕین لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی x کاتێك $y = 6.5$ هێزی تەقاندنەوەکانی ماددەی TNT بەبارستایی 5.3 ملیۆن تەن بەنزیکەیی دەکاتە هێزی تەقینەوەی بوومەلەرزەیەك بەهێزی 6.5 بە پێوەری ڕێختەر.

خاڵی چاودێری

3. لێژبوونەوەی لۆگاریتمی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەك کە نموونەیەك لە پێدراوەکانی خشتەکە دروست بکات. کەی خێراییەکە دەگاتە 8 m/s مەتر لە چرکەیەکدا؟

7	6	5	4	3	2	1	خولەك
5.6	5.3	4.9	4.3	3.5	2.5	0.5	خولەك (m / s)

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. چۆن دەزانیت کە ئایا دەکرێت پێدراوەکان بە نموونەیەکی توانی بنوێنێت، کاتێك بە شێوەی $f(x) = ab^x$ بنووسرێت.
2. ڕوونبکەوە بۆچی پێدراوەکان لە باری دوو خاڵەکە بەس نییە بۆ ئەوەی پێت بڵێت پێدراوەکان لۆگاریتمین یان توانین.
3. ڕێکخەر بە ئەم هێڵکارییەی خوارەوە دروستبکە و تەواوبکە. ئەو هەنگاوانە دیاریبکە بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی توانی یان نموونەیەکی لۆگاریتمی.

فێربە

7-4 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ______ بەکەڵکە کاتێك دەتوانرێت پێدراوەکان بەنەخشەی $f(x)=ab^x$ بنوێنرێت (لێژبوونەوەی توانی یان لێژبوونەوەی لۆگاریتمی).

بڕوانە نموونە 1

ئایا نەخشەی f نەخشەیەکە لە جۆری $f(x)=ab^x$ ئەگەر وایە، ڕێژە ئەگۆڕەکە دیاریبکە

2

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-2\frac{5}{7}$	-1	11	95	683

3

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	27	18	12	8	$5\frac{2}{3}$

4

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	5	1	-3	-7	-11

5

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$2\frac{1}{4}$	3	4	$5\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{9}$

بڕوانە نموونە 2

6 **فیزیا** لەو خشتەیەی خوارەوە دەردەکەوێت، پلەی گەرمی کوپە چایەکە چەند لە پلەی گەرمی ژوورەکە زیاترە، کاتێك سارد دەبێتەوە. نموونەیەکی توانی بدۆزەوە، ئەو پێدراوانە بنوێنێت. نموونەکە بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی ژمارەی خولەکی خایەندراو پێش ئەوەی جیاوازی نێوان پلەی گەرمی کوپەکەو ژوورەکە بۆ کەمتر لە 4 پلە.

جۆن چایەکە سارد دەبێتەوە					
کات بە خولەك	0	1	2	3	4
پلەکانی گەرمای زیاتر لەپلەی گەرمی ژوورەکە	55	48	43	38	33

بڕوانە نموونە 3

7 **ئەندامبوون** لەم خشتەیەی خوارەوە زیادبوونی ژمارەی ئەندامانی یانەیەکی کۆمەڵایەتی مانگانە دەردەکەوێت. نموونەیەکی لۆگاریتمی بدۆزەوە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت، نموونەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی مانگە پێویستەکان بۆ ئەو یانەیە بۆ ئەوەی ژمارەی ئەندامەکانی بگاتە 8000

بوون بە ئەندام لەیانەکە					
کات بەمانگ	6	18	42	90	150
ژمارەی ئەندامەکان	3000	4000	5000	6000	7000

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

دیاریبکە ئایا f نەخشەیەکی توانییە لە جۆری $f(x) = ab^x$ ، ئەگەر وایە، ڕێژە ئەگۆڕەکەی دیاریبکە

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆ شیکاری ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
11-8	1
12	2
13	4

8

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	1.25	1	0.75	0.5	0.25

9

x	−5	−3	1	3	5
$f(x)$	20	6	2	12	30

10

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	0.667	1	1.5	2.25	3.375

11

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−16	−8	−4	−2	−1

12 **زانستە کۆمەڵایەتییەکان** خشتەی بەرامبەرت زیادبوونی ژمارەی شۆفێرەکان لە یەکێك لە وڵاتەکان لە ساڵی 1980 تا ساڵی 2000 دەردەخات، نموونەیەکی توانی بۆ تواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە. نموونەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەو کاتەی ژمارەی بەشداربووان لەو وڵاتە لە 120 ملیۆن تێدەپەڕێت.

زیادبوونی ژمارەی شوفێرەکان			
ساڵەکانی دوای 1970	10	20	30
ژمارە (بەملیۆن)	14.6	22.5	35.3

13 **گەیاندن** خشتەکەی خوارەوە زیادبوونی ژمارەی بەشداربوون لە ئینتەرنێت لە یەکێك لە وڵاتەکان لە ساڵی 1990 تا ساڵی 2000 دەردەخات، نموونەیەکی توانی بۆ تواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە. نموونەکە بەکاربهێنە بۆ دیارکردنی ئەو کاتەی ژمارەی شوفێرەکان لە 100 ملیۆن تێدەپەڕێت.

ژمارەی بەشداربووانی ئینتەرنێت											
ساڵەکانی دوای 1990	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ژمارە بە (ملیۆن)	4.4	5.5	6.6	7.3	9.1	8.5	8.7	11.1	15.7	19.6	23.6

14 **ژینگە** زانیاریەکان لە بارەی باڵندەی (غەرنوق) کە هەڕەشەی لە ناو چونیان لێ دەکرێت ژمارەکەی دەستی بەزیادبوون کرد. خشتەکەی خوارەوە زیادبوونی ئەو ژمارەیەمان لە ماوەی 55 ساڵ دەردەخات نموونەیەکی لۆگاریتمی بدۆزەوە، زیادبوونی ژمارەی ئەو باڵندانە بنوێنێت. کەی ژمارەیان دەگاتە 500 باڵندە؟

ژمارەی باڵندەکانی غەرنوق					
ژمارە	18	40	85	120	185
ساڵەکان دوای 1940	5	22	40	47	57

دیاریبکە ئایا پێدراوەکانی خشتەکە توانین. ئەگەر وایە لێژبوونەوەی توانی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونەیەك ئەمە بنوێنێت

15

x	1	2	3	4
$f(x)$	11	95	683	4799

16

x	−1	0	2	3
$f(x)$	4	2	0.5	0.25

17 **بیری ڕەخنەگر** پێدراوکان لە بارەی جۆرە باڵندەیەك لە ئەفریقیا ئەوە دەگەیەنێت کە ژمارەیان کەمدەکات لە ساڵی 1930 بەوە بەلایەنی زۆرەوە زیاتر نیو ملیۆن کەمدەکات، بەڵام ئەمڕۆ ئەو کەمبوونە لە 15 000 کەمترە، پێدراوی تری پێویست چییە، بۆ ئەوەی بڕیاربدەیت، کە ئەم لێژبوونەوەیە توانییە؟

18 **ژینگە** لێکۆڵینەوەیەك وا دەگەیەنێت کە ئەستووری بەفر لە بەهاردا لە یەکێك لە ناوچە ساردەکان کاردەکاتە سەر تێکڕایی مانەوەی گۆلك لە ژیاندا. ئەگەر ئەستووری بەفرەکە 5000 mm بێت تێکڕاکە دەبێتە نزیکەی 0.9%، و ئەگەر ئەستووری بەفرەکە 6700 mm بێت تێکڕاکەی دەبێتە 0.3% کەچی ئەستووری بەفرەکە 8250 mm بێت تێکڕاکە دەبێتە 0.17%، ئەخشەیەکی توانی بدۆزەوە بۆ نواندنی ئەو پێدراوانە. نموونەکە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ڕێژەی مانەوەی گۆلك لە ژیاندا کاتێك ئەستووری بەفرەکە 4000 mm بێت.

19 **تەکنەلۆژیا** خشتەی بەرامبەر، زیادبوونی فرۆشتنی ئامێرەکانی هێدفۆن لە پشووی هاویندا دەردەخات. وایدابنێ فرۆشتنی ئەو ئامێرانە بە ڕێکی زیاددەکات. ئەخشەیەکی توانی بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بنووسە، ئەخشەکە بۆ خەملاندنی فرۆشتنەکان بەکاربهێنە، بۆ سێ ساڵی داهاتوو.

20 **دەستەواژەیەك بنووسە** خشتەی بەهای ئەخشەیەکی بەهایەکانی 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 بۆ گۆڕاوی سەربەخۆی جیاوازییە یەکەمەکان و دووەمەکان و سێیەمەکان بدۆزەوە. دەستەواژەیەك بنووسە لە بارەی جیاوازییەکان لە n ڕادەدا وایدابنێ کە بواری ئەخشەکە بریتییە لە ژمارە سروشتییەکان.

21 **بنووسە** چۆن دەزانیت کە کۆمەڵەی پێدراوەکان توانییە و هێڵی یان دووجایی یان سێجای نییە.

22 پێدراوەکانی ئەم خشتەی خوارەوە بەکاربهێنە.

x	0	2	3	4	5	6
y	18	32	43	57	76	101

أ کامیان پێدراوەکانی خشتەکە بە شێوەیەکی باشتر دەنوێنێت ئەخشەیەکی توانی یان ئەخشەیەکی لۆگاریتمی؟ ئەمە ڕوونبکەوە

ب ئەگەر ڕیزی دووەم لە خشتەی پێشوو $\log y$ لە خۆبگرێت لە جیاتی y، کام ئەخشە لە پێدراوەکانی خشتەی نوێ بە شێوەیەکی باشتر دەنوێنێت. ئەخشەی توانی یان ئەخشەی هێڵی؟ ئەمە ڕوونبکەوە

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

23 کام لەم بارانەی خوارەوە دەتوانرێت بە ئەخشەیەکی توانی بنوێنرێت؟

(أ) تێچوونێك بەهایەکەی 100 000 دینار مانگانە بەرز دەبێتەوە.

(ب) ڕووبەری چوار گۆشەیەك درێژی لایەکی دە ، دە ، زیاد دەکات.

(ج) دوای هەر خولێك نیوەتیرەی برغویەك بە زیاد بوونی پانییەکەی بە ڕێژەی 10% زیاددەکات.

(د) ژمارەی دانیشتوان بە چەند جارەبوونەوەی کات، چەند جار دەبێتەوە.

24 کام لەم کۆمەڵە ژمارانەی خوارەوە توانین؟

(أ) (3,12.5),(2,2.5),(1,0.5),(0,0.1)

(ب) (3,20),(2,7),(1,0),(0,−1)

(ج) (3,3.5),(2,2),(1,0.5),(0,−1)

(د) (3,26),(2,11),(1,2),(0,−1)

25 **کورتە وەڵام** ژمارەی نەزانراو لە خشتەکەدا بدۆزەوە ئەگەر بزانیت پێدراوەکانی توانین.

x	0	1	2	3
y	2	3.5	■	10.71875

بەرەنگاری و فراوانکردن

26 نەخشەیەکی توانی ڕوونکردنەوەی بە دوو خاڵی $(2,48)$ و $(4,300)$دا دەڕوات بدۆزەوە. هەنگاوەکانت ڕوونبکەوە.

27 **زینگە** سەناریا لەیەکێك لە تاقیگەکانی کیمیا کاردەکات، هەڵمێکی ژەهراوی هەڵمژی لە ئەنجامی، تێکچوونی ئامێرێك. لە شیکردنەوەی خوێنەکەیدا پاش 4 کاتژمێر لە ڕووداوەکە دەرکەوت، ماددەی تۆکسین Toxine ی ژەهراوی بە ڕێژەی $0.01006 mg / cm^3$ لە خوێنەکەیدا هەیە، لە شیکردنەوەیەکی تر دوای 2 کاتژمێر دوای شیکردنەوەی یەکەم دەرکەوت ڕێژەی تۆکسین بوو بە $0.00881 mg / cm^3$ وایدابنێ هێندی تۆکسین لە خوێنەکەیدا بە شێوەی توانی بە پێ کات دەگۆڕێت.

أ نەخشەیەکی توانی بدۆزەوە،پێدراوەکان بنوێنێت.

ب تۆکسین هەرەشە لە تەندروستی مرۆڤ دەکات ئەگەر ڕێژەکەی$0.015 mg / cm^3$ لە خوێن زیاد بکات. ئایا ئەو هێندە تۆکسینەی کە سەناریا هەڵیمژی هەرەشە لە تەندروستی دەکات؟

ج سەناریە دەتوانیت دەست بە کاری ڕۆژانەی خۆی بکاتەوە، کاتێك تێکڕایی تۆکسین لە خوێنەکەی$0.00010 mg / cm^3$ کەمتر بێت. ژمارەی کاتژمێری پیویست (بەنزیکردنەوە بۆ نزیکترین کاتژمێر) هەژماربکە بۆ ئەوەی بچێتەوە سەرکاری ڕۆژانەی خۆی.

پێداچوونەوەی لولپێچی

شیکاربکە *(وانەی پیشوو)*

28 $|-5x| = 45$ **29** $|x+4| = 0$ **30** $|2x-4| = 3$ **31** $2|2x|+1 = 10$

سفرەکانی هەر نەخشەیەك بەبەکارهێنانی شیتەڵکردن بدۆزەوە *(وانەی پیشوو)*

32 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **33** $f(x) = 3x^2 + 24x$

34 $f(x) = 2x^2 + 10x + 12$ **35** $f(x) = x^2 + 9x - 36$

شیکار بکە و ساغبکەوە *(وانەی 4-6)*

36 $\frac{1}{64} = 4^{x+3}$ **37** $81^x = 3^{x+4}$ **38** $8^{\frac{x}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ **39** $216^x = 6^{2x}$

بەشی

4 ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

1 جۆرە ڤیتامینێك لە خوێندا بە ڕێژەی 15% لە کاتژمێرێکدا کەمدەکات.

أ) ئایا ئەم نەخشەیەی ئەم بارەدەنوێنێت نەخشە-یەکی ڕوو لەزیاد بوونە یان ڕوولە کەمبوون؟

ب) ئەگەر بڕی ئەم جۆرە ڤیتامینە $400\ mg$ بێت. نەخشەیەك بنووسە بڕی ماوەی ڤیتامینەکە پاش T کاتژمێر بنوێنێت.

ج) وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە و بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی بڕی مانەوەی ڤیتامینەکە پاش 7 کاتژمێر

هەر نەخشەیەك لەمانە نەخشەی گەشەیە یان نەخشەی پووکانەوەیە دیاریبکە

2 $f(x) = 0.5(1.25)^x$

3 $f(x) = 0.5\left(\frac{3}{2}\right)^x$

4 $f(x) = 2.5(0.25)^x$

5 $f(x) = 2(1 + 0.25)^x$

ئەم بێدراوانە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 6 بۆ 9

ژمارەی خوێندکاران لە یەکێك لە قوتابخانەکاندا بە ڕێژەی 2% ساڵانە زیاد دەکات، لەپێنج ساڵی کۆتایدا. ژمارەی خوێندکارەکان ئەم ساڵ گەیشتە 765 قوتابی.

6 ئایا ئەو نەخشەی ئەو بارە دەنوێنێت نەخشەی گەشەیە یان نەخشەی پووکانەوەیە.

7 وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشەبکێشە.

8 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بەکاربهێنە، بۆ خەملاندنی ژمارەی خوێندکارەکان پاش 5 ساڵ.

9 کەی ژماری خوێندکارانی قوتابخانەکە لە 1000 خوێندکار تێپەڕ دەکات؟

10 ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \frac{4}{5} - 3x$ بکێشە. پێچەوانەی نەخشەکەی بنووسە وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە.

11 ئەو پەیوەندییەی بە خشتەکە نوێنراوە بە شێوەی ڕوونکردنەوە بکێشە.

x	−1	0	1	2	3
y	1	0.2	0.04	0.008	0.001

پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، و ئەو خشتەیە بنووسە کە دەیتوێنێت.

ئەم پێدراوانە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 12 و 13 بەکاربهێنە.

کەمبوونەوەی ژمارەی دانیشتوانی شارێك بە ڕێژەی 3% لە چاو ژمارەی ساڵی ڕابردوو.

12 بڕێك بنووسە ژمارەی دانیشتوانی شارەکە ئەم ساڵ P_T بەپێی ژمارەیان بۆ ساڵی ڕابردوو P_L بنوێنێت.

13 بڕێك بنووسە ژمارەی دانیشتوانی شارەکە بۆ ساڵی ڕابردوو P_L بەپێی ژمارەیان بۆ ئەم ساڵ P_T بنوێنێت.

14 نەخشەی $M = \frac{5}{8}K$ ڕێگە بە گۆڕینی ماوەکان لە کیلۆمەتر بۆ میل بە شێوەی نزیکراوەیی دەدات. پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە و بەکاربهێنە، بۆ گۆڕینی 25 میل بۆ کیلۆمەتر.

15 ئەم یەکسان بوونە $27 = 19^{1.5}$ بە شێوەی لۆگاریتمی بنووسە.

16 بەهای بڕەی $\log_4 64$ چەندە؟

17 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = 0.6^x$ بکێشە. و وێنە ڕوونکردنەوەی هەڵگەڕاوەی نەخشەکە بکێشە، و مەوداکەی دیاریبکە.

ئەمانە لە شێوەی توانیەوە بۆ شێوە لۆگاریتمی بگۆڕە.

18 $3^5 = 243$ **19** $1 = 9^0$ **20** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$

ئەمانە لە شێوەی لۆگاریتمی بۆ شێوە توانییەوە بگۆڕە.

21 $\log_2 16 = 4$ **22** $\log 10 = 1$

23 $2 = \log_{0.6} 0.36$

بەهای ئەم بڕانە بە هزری هەژماربکە

24 $\log_7 49$ **25** $\log_{0.5} 0.25$

26 $\log_{12}\left(\frac{1}{12}\right)$ **27** $\log 0.01$ **28** $\log_2 1$

29 خشتەیەك بۆ بەهاکانی نەخشەی $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ درووستبکە، و وێنەی ڕوونکردنەوەی پێچەوانەی نەخشەکە بکێشە، بەبەکارهێنانی خشتەی بەهایەکان، بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە دیاریبکە.

ئەم بڕە لۆگاریتمییانە بە سادەترین شێوە بنووسە

30 $\log 25 + \log 40$

31 $\log_5 25 - \log_5 25$

32 $\log_2 8 + \log_2 16$

33 $\log 100 + \log 1000$

34 $\log_2 128 - \log_2 2$

35 $\log 10 - \log 0.1$

36 $\log 10^5 + \log 10^4$

بەهای بڕەکان بدۆزەوە

37 $\log_3 8^2$

38 $\log_5 25^2$

39 $\log_5 16$

40 ئەمڕۆ ئاستی توندی دەنگ میوزیك لە یانەی لاوان بە 10 دیسیبل Decibel لەوەی دوێنێ بەرزتربوو نەخشەی $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ بەکاردەهێنرێت بۆ پێوانی ئاستی توندی دەنگی مۆزیك L ، کاتێك I هێمای توندی دەنگ بە W / m^2 دەپێورێت. هێمای I_0 بۆ توندی بەرگوێ کەوتن. توندی دەنگی مۆزیك دوێنێ چەند ئەوەندەی توندی دەنگی مۆزیك ئەمڕۆیە؟

شیکاری ئەم هاوکێشەیە بکە

41 $5^x = 50$

42 $\log_9 x^2 = 5$

43 $3^{x-1} = \frac{1}{9}$

شیکاری ئەم لاسەنگەیە بکە

44 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le 64$

45 $\log x^{\frac{5}{2}} > 2.5$

46 پەیوەندی $A = P(1+r)^n$ بۆدیاریکردنی بەهای داراوی حسابی بانکی بە کاردێت، کە تێیدا گوژمەی بنەڕەتی P بە سوودی ساڵانە و تێکڕای r پاش n ساڵ لە سپاردنی گوژمەکە. هەکار 250 000 دیناری لە بانکی دانا، کەی نرخی حسابە کە دەبێتە 500 000 دینار ئەگەر بزانیت ڕێژەی سوودی ساڵانە بریتییە لە 4%؟

47 ئەم بڕە بەسادەترین شێوە بنوسە. $e^{\ln(2x+1)}$

48 سەیران 5 ملیۆن دینار لە حسابێك بە تێکڕای سوودی ساڵانە 6% سپارد، بۆ ئەوەی پاشکەوت کردنەکە بەردەوام بێت. حسابەکەی پاش 5 ساڵ دەبێتە چەند؟

49 جۆرێك لە باڵندە ساڵی 1940 ژمارەیان 22 باڵندە بوو. بەردەوام بەزیاد بوونی توانی هەتا ساڵی 2003 گەیشتە 194 باڵندە.

أ نەخشەی گەشەی توانی بەکاربهێنە $P(t) = P_0 e^{kt}$ P_0 هێمای ژمارەی بنەڕەتی و $P(t)$ ژمارەکانییەتی لە کاتی t دا بۆ دیاریکردنی تێکڕای زیادبوون k.

ب بەچەند ژمارەی ئەم باڵندانە دەخەمڵێنیت ئەگەر زیادبوونەکەی بەهەمان شێوە بەردەوام بێت؟

50 ئەم خشتەیەی خوارەوە زیادبوونی ژمارەی جۆرێك لە دارەکانی بەهارات دەنوێنێت بۆ ماوەی 6 ساڵ لە کێڵگەیەکی نموونەییدا. بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەکی لۆگاریتمی کە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت. ئەو ساڵەی ژمارەی دارەکان دەبێتە 70 دار بخەمڵێنە.

ساڵ	1	2	3	4	5	6
ژمارە	14	30	40	46	53	55

ئەم خشتەی خوارەوە زیادبوونی ژمارەی باڵندەکان لە پۆلێك باڵندە لە جۆری دەگمەن دەنوێنێت. کە لە شوێنێکی دیاریکراودا دەژی لە ماوەی 55 ساڵانی کۆتایی.

ساڵەکان لە دەستکردن بەتۆمارکردنی ژمارەکان	ژمارەی باڵندەکان
5	18
22	22
40	85
57	185

51 ExpReg لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی توانی بۆ پێدراوەکانی خشتەکە.

52 LnReg لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی لۆگاریتمی بۆ پێدراوەکانی خشتەکە.

53 بەراوردبکە لەنێوان دوو بەهای r^2 کە بۆ دوو نەخشەکە دەگەڕێتەوە. کام لەم دوو نەخشانە باشترین نموونەیە لە نواندنی پێدراوەکانی خشتەکەدا؟ بۆچی؟

بەشی

4

تاقیکردنەوەی بەش

دیاریبکە، نەخشەکە گەشەی توانییەیان نەخشەی پووکانەوەی توانییە. پاشا وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە

1 $f(x) = 0.4^x$ **2** $f(x) = 1.3\left(\frac{2}{5}\right)^x$

3 $f(x) = \frac{7}{8}(1.1)^x$ **4** $f(x) = 50(1 + 0.04)^x$

5 تارا ئۆتۆمبێلێکی بە 13 500 000 دینار کڕی. وادابنێ نرخی ئۆتۆمبیلەکە ساڵانە بە ڕێژەی 15% دادەبەزێت. نەخشەی توانی بنووسە کە ببێتە نموونەیەك بۆ دیاریکردنی نرخی ئۆتۆمبیلەکە بە پێی کات (ساڵ)، وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشە بکێشە، کەی نرخی ئۆتۆمبێلەکە لە 3 000 000 دینار کەمتر دەبێت؟

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە، پاشان پێچەوانەی نەخشەکەی بنووسە، ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە

6 $f(x) = x - 1.06$

7 $f(x) = \frac{5}{6}x - 1.06$

8 $f(x) = 1.06 - \frac{5}{6}x$

9 $f(x) = \frac{1}{4}\left(1.06 + \frac{5}{6}x\right)$

ئەمانە بە شێوەیەکی تر بنووسە (توانی یان لۆگاریتم)

10 $16^{\frac{1}{4}} = 2$ **11** $16^{-0.5} = \frac{1}{4}$

12 $\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3$ **13** $\log_{81}\frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$

بەهای بێدراوی x بەکاربهێنە بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە، پاشان پێچەوانەی نەخشەکە بنووسە، و وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بوار و مەودای پێچەوانەکەی نەخشەکەی دیاریبکە

14 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x ; x = -1, 0, 2, 4$

15 $f(x) = 2.5^x ; x = -1, 0, 1, 2, 3$

16 $f(x) = 5^{-x} ; x = -1, 0, 1, 2, 3$

بە سادەترین شێوە بنووسە

17 $\log_4 128 - \log_4 8$

18 $\log_2 12.8 + \log_2 5$

19 $\log_3 243^2$

20 $5^{\log_5 x}$

شیکاربکە

21 $3^{x-1} = 729^{\frac{x}{2}}$

22 $5^{1.5-x} \leq 25$

23 $\log_4(x + 48) = 3$

24 $\log(6x^2) - \log 2x = 1$

25 دەتوانیت نەخشەی $y = D(0.95)^x$ بەکاربهێنێت وەك نموونەیەك بۆ هەژمارکردنی ئەوەی دەمێنێتەوە لەو ڤیتامینە شلەی لە لەشی مرۆڤ دوای خواردنەوەی. D هێمای بڕی ڤیتامینی شلی خوراوەیە.
y هێمای بڕی ڤیتامینی ماوەیە بە ملیلتر پاش x خولەك یەکێك 15m ڤیتامینی شلی خوارەوە. چەند کاتی دەوێت بۆ ئەوەی ڤیتامینەکەی لەشی لە 5ml کەمتربێت.

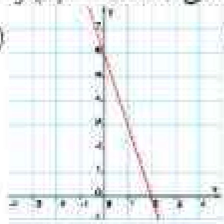
26 نیوەی تەمەنی پلۆتۆنیۆم دەگاتە 239 و 24 000 ساڵ پەیوەندی $\frac{1}{2} = e^{-kt}$، t نیوەی تەمەنی مادەکەیە، k نەگۆڕی پووکانەوەیە، لە 100g پلۆتۆنیۆم پاش 5 ساڵ چەند دەمینێتەوە؟

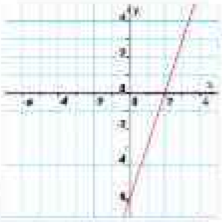
27 لێژبوونەوەی لۆگاریتمی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەك بۆ لیکۆڵینەوەی ژمارەی تیمساحەکان، لە کۆمەڵە کە دا لەبێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر. کاتێك y هێمای گۆڕاوی ژمارەی تیمساحەکانە، x هێمای گۆڕاوی کاتە بە ساڵ.

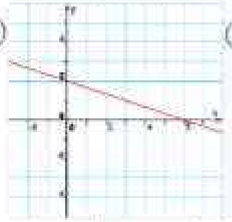
ژمارە	50	62	78
ساڵ	1	2	3

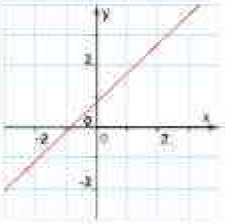
بەشی
4
تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 کام ڕوونکردنەوە پیچەوانەی نەخشە دەنوێنێت بۆ نەخشەی $f(x) = -3x + 6$.

أ


ب


ج


د


2 کام لەمانەی خوارەوە سادەترین شێوەیە بۆ بڕەی $\log_5 12 - \log_5 4$ ؟

(أ) $\log_5 48$ (ب) $\log_5 8$ (ج) $\log_5 16$ (د) $\log_5 3$

3 بەهای x چەندە لە هاوکێشەی $\log_4 (x-1)^3 = 9$؟

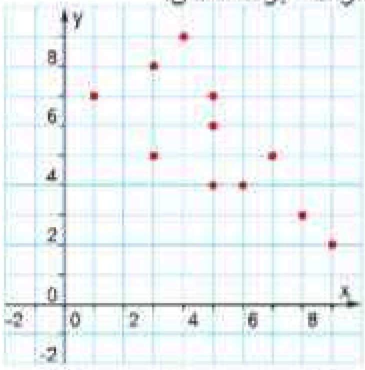
(أ) 27 (ب) 64 (ج) 65 (د) 81

4 کام لەمانە نەخشەی پەیدابووە لە ڕاکێشانی نەخشەی بنەڕەتی $f(x) = \ln x$ دوو یەکە بۆلای ڕاست و 7 یەکە بۆ خوارەوە پاشان فراوانبوونی ئاسۆیی هاوکۆلکەی 6 بێت؟

(أ) $g(x) = 6\ln x$ (ج) $g(x) = 6\ln(x+2)+7$

(ب) $g(x) = \ln\left(\frac{x}{6}-2\right)-7$ (د) $g(x) = 6\ln\left(\frac{x}{6}+2\right)+7$

5 کام لەمانەی خوارەوە هاوکێشەی ڕاستەهێڵی باشترین نواندنە بۆ خاڵەکان.



(أ) $y = -\frac{10}{11}x + 10$ (ج) $y = -\frac{11}{10}x + 1$

(ب) $y = \frac{10}{11}x + 10$ (د) $y = \frac{11}{10}x + 1$

6 کام لەمانەی خوارەوە هاوکۆلکەی $P(x) = 8x^3 + 16x^2 + x + 2$

(أ) $4x - 1$ (ب) $2x + 3$ (ج) $x + 2$ (د) $3x - 3$

7 کام نەخشە لە مانەی خوارەوە سفرەکانی 1- و 0 ؟

(أ) $f(x) = x^2 + x - 1$ (ج) $f(x) = x^2 + x$

(ب) $f(x) = x^2 - x$ (د) $f(x) = -x^2 + x$

8 هاوکۆلکەی پەیوەستی بۆ دووکۆمەڵە پێدراو بریتییە لە 0.24- لە کاتێکدا ڕاستەهێڵی باشترین نواندن تەوەرەی دووەم لە $y = 10$ دەبڕێت. کام لەمانەی خوارەوە مەرج نیە ڕاست بێت؟

(أ) تا بەهایەکانی کۆمەڵەیەك زیاد بکات بەهایەکانی کۆمەڵەکەی تر کەم دەکات.

(ب) لە ڕاستەهێڵی باشترین نواندندا بەهایەکانی، y کەمدەکات بەهایەکانی x ی بەرامبەر، کە لە 10 کەمتر دەبێت.

(ج) ڕاستەهێڵی باشترین نواندن نموونەیەکی باشە بۆ پێدراوەکان.

(د) ئەو ڕاستەهێڵەی باشترین نواندنە، لاریەکەی سالبە.

9 کام لەم برگەهاوتایانەی خوارەوە سەرەکەی $(-2, -3)$

(أ) $y = x^2 + 4x + 1$ (ج) $y = x^2 - 4x + 1$

(ب) $y = x^2 + 4x - 1$ (د) $y = x^2 - 4x - 1$

10 کام لەمانە یەکسانە بە $3(x+y)^4$

(أ) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

(ب) $3x^4 + 12x^3y + 18x^2y^2 + 12xy^3 + 3y^4$

(ج) $81x^4 + y^4$

(د) $3x^4 + 3y^4$

11 لاری ڕاستەهێڵی $y = mx + b$ موجەبە و بەکتربڕینی ستوونی 5 . لاری ڕاستەهێڵەکە دەست بە کەمبوونەوە دەکات کام لەمانە هەڵەیە؟

(أ) یەکتربڕینی ئاسۆیی ڕاستەهێڵە نوێیەکە کەمترە لە یەکتربڕینی ڕاستە هێڵە بنەڕەتییەکە.

(ب) ڕاستەهێڵی نوێ ڕاستەهێڵی بنەڕەتی تەنها لە (0, 5) دا دەبڕێت.

(ج) لاری ڕاستەهێڵی نوێ گەورەترە لە 0 .

(د) ڕاستەهێڵی نوێ تەریبە بە ڕاستەهێڵی بنەڕەتی.

ڕیزکراوەی $N=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی دوو ڕاهێنانی 12 ، 13

12 دانەی n_{21} چەندە؟

(أ) 2 (ب) -3 (ج) 4 (د) -6

13 کام لەمانە هەڵگەراوەی ڕیزکراوی N

(أ) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ \frac{3}{2} & -2\end{bmatrix}$

کورتە وەڵام

14 دانەی ونبوو چەندە؟

$$\begin{pmatrix}5 & 8\\ 4 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\square & 2\\ -6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-28 & 10\\ -2 & 8\end{pmatrix}$$

15 بەهای $\log_{625} 2.5$ چەندە؟

16 یاسای هاوکێشەی دووجا بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ڕەگی موجەب بۆ نەخشەی $f(x)=x^2+2.6x-7.31$

17 دووبارە بوونەوەی ڕەگی 2 لەم هاوکێشەیەدا چەندە؟ $x^3-8x^2+20x-16=0$

18 جێگۆڕکێی نەخشەی بنەڕەتی $f(x)=x^2$ بۆ نەخشەی $g(x)=\frac{1}{2}(5x)^2-4$ کرا هاوکۆلکەی چوونەوەیەکەی چەندە؟

19 کام هێز لە هێزەکانی 2 یەکسانە بە؟ 268435456

کورتە وەڵام

20 یەکێك لە خوێندگاکان بژمێری چاپەکۆنەکانی خستە مەزاد بۆ فرۆشتن ودابینکردنی بە گوژمەی لە 5 200 000 دینار کەمتر نەبێت خوێندنگا کە نرخی بژمێری 500 000 دینارو نرخی ئامێری چاپی بە 50 000 دینار دیاریکرد خوێندنگاکە بەهیوای 5 بژمێر بۆ هەردوو ئامێری چاپ بەلایەنی کەمەوە بفرۆشێت.

(أ) سیستەمی لاسەنگەی هێڵی بنووسە پرسیارەکە بنوێنێت x ژمارەی بژمێرەکان y ژمارەی ئامێری چاپەکانە.

(ب) بە شێوەی ڕوونکردنەوەیی سستەمی ئەو لاسەنگانەی نووسیوتە بنوێنە

21 ڕادیۆم - 226 (Radium - 226) بۆ چارەسەری پزیشکی بەکاردەهێنرێت نیوەی تەمەنی ئەم ماددە 1620 ساتە.

(أ) بەهای k بدۆزەوە کەسەر بەڕادیۆم – 226

(ب) 100 g لە ڕادیۆم –226 پاش 3240 ساڵ چەندی لێدەمێنێتەوە؟ وەڵامەکەت نزیك بکەوە بۆ نزیکترین گرام.

22 زریان 26 شەتڵی سنەوبەری هەیە. دەیەوێت لە دووری یەکساندا، بیانڕوێنێت، بە دەوری باخچەیەکی چوار گۆشە درێژی لایەکی 21 مەتر بێت، لە هەر گۆشەیەکی شەتڵێك دەڕوێنێت.

(أ) زۆرترین ژمارەی لە تواناداَبووی شەتڵەکان کە بتوانیت بیڕوێنێت چەند؟

(ب) ماوەی نێوان دوو شەتڵ چەندە؟

23 ماوە لە ئەنجامی دابەشکردنەکە بدۆزەرەوە. $2x^5+6x^4-10x^3-2x^2+54x+14$ بەسەر $x-4$

درێژە وەڵام

24 ئەم خشتە ژمارەی کاتژمێرەکان دەنوێنێت کە خوێندکارەکە هەموو ئێوارەیەك بۆ بە جێهێنانی ئەرکی ماڵەوە دەیخایەنێت بۆ هەندێك لە پۆلەکان.

پۆل (x)	4	6	8	10	12
ژمارەی کاتژمێرەکان (y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3

(أ) دیاریبکە ئەم پێدراوانە توانییە.

(ب) پێدراوەکانی خشتەکە بە شێوەی ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

(ج) پاسەدانی ئەوە بکە نەخشەی $f(x)=\frac{1}{16}(\sqrt{2})^x$ نموونەیەك بۆ پێدراوەکان دەنوێنێت.

(د) خوێندکاری پۆلی سێ یەم خوێندنی هەموو ئێوارەیەکی چەند دەخایەنێت؟

بەشی

5

سیفەتی نەخشەکان

Properties of Functions

بەشی پێنجەم

وانەکان

1-5 نەخشەی پەلدار

لاپەڕەی تەکنۆلۆژیا

2-5 جێگۆڕکێی نەخشەکان

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

3-5 کردارەکان لەسەر نەخشەکان

4-5 نموونە بیرکارییەکان

خاشاکەکانی بۆشایی

گەشتەکانی بۆشایی ئاسمان لە پاش خۆیان زیاتر لە 28 000 پارچە خاشاکیان جێهێشتووە، لە بۆشاییدا مەلەدەکەن. دەتوانیت ئەو ئاراستەی کە زیادبوونی ژمارەی ئەو خاشاکانەی دەیگرنە بەر شیبکەیتەوە بە بەکارهێنانی نەخشەکان و ڕوونکردنەوەکانیان

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

هەر زاراوەیەک بە پێناسەکەی لای چەپ ببەستەوە.

1 ڕاکێشان
2 لاری
3 لێژبوونەوە
4 پەیوەستی

أ لێکۆڵینەوەیەکی ئامارییە بۆ پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو.
ب تێکڕای نەگۆڕ بۆ گۆڕانی نەخشەی هێڵی.
ج ڕێژە لەنێوان دوو کۆمەڵە لە پێوانەکان.
د جێگۆڕکێی ئەندازەیی هەر خاڵێك لە خاڵەکانی شێوە ئەندازەییەکەیان بۆ ڕوونکردنەوەیی بەهەمان ماوە و ئاڕاستە دەجولێنێت.
هـ پێوانەی هێزی پەیوەندی هێڵی نێوان دوو گۆڕاو و ئاڕاستەکانیانە.

پێکەوە بەستنی دەق و جەبر

هاوکێشەیەک بنووسە هەر بارێك لەمانە بنوێنێت.

5 تێچوونی بەکرێگرتنی ستۆدیۆی تۆمارکردن کاتژمێری یەکەم 30 000 دینارەو 20 000 دینار بۆ هەر کاتژمێرێکی زیادە

6 تانکییەکی ئاو 30 گاڵۆن ئاوی تێدایە، ترومپایەک 8 گالون ئاو زیاد دەکاتە سەری بۆ هەر خولەکێك.

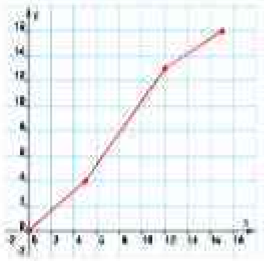
هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان

وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهای داواکراو

7 $f(6)$

8 $f(15)$

9 بەهای x کاتێك $f(x)=2$



10 بەهای x کاتێك $f(x)=9$

11 لاری پارچە ڕاستەهێڵی نێوان $x=6$ و $x=14$.

12 لاری پارچە ڕاستەهێڵی نێوان $x=14$ و $x=18$.

لێکدانی دوو ڕادەدارەکان

لێکبدە، پاشان بە سادەترین شێوە بنووسە.

13 $(x-6)(x+4)$

14 $(6-x)(4-x)$

15 $(5x+8)(2x-7)$

16 $(x^2-7)(4x+5)$

17 $(3x^2+8)(7x^2+8)$

18 $(x-8)(x+8)$

نووسینی بڕی ڕادەدارەکان بەسادەترین شێوە

ئەمانە بە سادەترین شێوە بنووسە

19 $8(3x^5)-(2x)^3(5x^2)$

20 $5(x+3)^2-6(x+3)$

21 $3x(4-x^3)-6x^2(x+4)$

22 $3x^3(x^2+4)^2-x(x^4-5)$

بەشی 5

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

خوێندووتە

- ئەخشە جیاوازەکان و ڕوونکردنەوەکانیان و هاوکێشەکانیان.
- جێگۆڕکێی زۆر لە ئەخشەکان.
- جێبەجێکردنی کردارە جیاوازەکان لەسەر برە جیاوازەکان.
- بەکارهێنانی ئەخشە هێڵییەکان و دووجاکان و توانەکان بۆ دروستکردنی نموونەی بیرکارییانە. بارەکانی ژیانی ڕۆژانە بنوێنێت.

لەم بەشەدا

لەمەودوا فێردەبیت

- نواندنە جیاوازەکانی ئەخشەکە.
- جێگۆڕکێی ئەخشە بنکە پەلدارەکان.
- ئەنجامدانی کردارەکان لەسەر ئەخشەکان.
- دروستکردنی نموونە بیرکارییەکان بە بەکارهێنانی ئەخشە جیاوازەکان.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربهێنیت

- لە قۆناغەکانی داهاتوو کە جیاکاری و تەواوکاری و ئامار دەخوێنێت.
- لە خوێندنی وانەکانی تری وەک تەندروستی و فیزیا و کیمیا و ئابووریدا.
- لە دەرەوەی خوێندنگا بۆ داڕشتنی نموونەی پێدراوەکان و جێبەجێکردنی پێشبینییەکان، لە بوارە جۆر بەجۆرەکانی وەک وەرزش و گەشت و بازەڕگانی کردن.

زاراوەکان — Vocabulary

زاراوەکان	Vocabulary
ئاوێتەکردنی ئەخشەکان	Composition of functions
ئەخشەی یەک بۆ یەک	One-to-one function
ئەخشەی ڕێسا پەلدار	Piecewise function
ئەخشەی پلەدار	Step function

ڕۆشنایییەک لەسەر زاراوەکان

بۆ ڕاهاتن لەگەڵ هەندێک زاراوەی هاتوو لەم بەشەدا، ئەم هەنگاوانە بەبڕەوبکە

1. لە واتاکانی وشەی **ئاوێتە** کۆمەڵە شتێک پێکەوە دابنرێن، چۆن وشەی ئاوێتە بەو واتایە بەکاردێت بۆ تێگەیشتنت لە **ئاوێتەکردنی ئەخشەکان** لە بیرکارییدا.
2. ئەگەر سەیری پلەکانی پەیژە بکەیت لە لەتیشتەوە، ئایا ئەوە دەبینیت وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەخشە دەنوێنێت؟ تا چ ڕادەیەک لە ڕوونکردنەوەی **ئەخشەڕێسا پەلدار** دەچێت؟
3. پێناسەی ئەخشەت لەبیربێت، بۆ چوونت لەسەر **ئەخشەی یەک بۆ یەک** چییە؟ نموونەیەک لە بیرکارییدا بهێنەوە و نموونەیەکی ژیانی ڕۆژانە بۆ ئەخشەی یەک بۆ یەک و نموونەیەکی تر بۆ ئەخشەیەک یەک بۆ یەک نەبێت.
4. پلەکانی پەیژە تەریبن و بەیەکەوە نەبەستراون. چی تێدەگەی لە دەستەواژەی ئەخشەی پلەدار

بەشی
5

بیرکاری
بە خوێندنەوە و نووسین

ستراتیژی خوێندنەوە: پرسیارەکان بخوێنەوە بۆئەوەی تێبگەیت

پرسیارەکە چەندجارێك بخوێنەوە، بۆئەوەی لە بیرۆکەی پرسیارەکە تێبگەیت پاشان پرسیارەکە بە شێنەیی و بە وردی بخوێنەوە بۆ دیاریکردنی داواکراو لەکاتی خوێندنەوەدا هێڵ بەژێر زانیارییەکان بکێشە – کلیلەکانی دەقی پرسیارەکە هەنگاوی جۆراوجۆر بێت، بیکە بەچەند بەشێك، پاشان پلان بۆ شیکارکردنەکەی دابڕێژە

دۆزینەوەی بۆشایی نەخشەی $f(x)=\frac{7}{2}\sqrt{x}$ ڕێسایەکە بۆ خەملاندنی ئاسۆ بەکیلۆمەتر کاتێك چاوی بینەر لە بەرزی x مەتر لە ڕووی زەوی بێت. دەتوانیت وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشیت بۆ بەرامبەرەکەت لەسەر مەریخ بەکێشانێکی ئاسۆیی هاوکۆلکەکەی $\frac{9}{5}$ بێت. نەخشەی دووری ئاسۆ لە مەریخ بنووسە و بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی دووری ئاسۆ لە کەشتییەوانی بۆشایی سەر مەریخ، لەڕووی هەسارەکەوە 6 مەتر چاوی بەرز دەکاتەوە.

هەنگاو	پرسیار	وەڵام
1	بیرۆکەی پرسیارەکە چییە؟	جێگۆڕکێی نەخشەی ڕەگی دووجا بە گۆڕینی هاوکۆلکەکانی.
2	پرسیارەکە داوای چ وەڵامێك دەکات؟	• نووسینەوەی نەخشەکە بۆ تێخستنی هاوکۆلکەکەی نوێ. • هەژمارکردنی بەهای نەخشە نوێیەکە کاتێك x بەهایەکی دیاریکراوە وەردەگرێت.
3	ئەم زانیارییانە – کلیلی پێویست بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە چین؟	• نەخشەی $f(x)=\frac{7}{2}\sqrt{x}$ دووری لەسەر زەوی دەنوێنێت. • نەخشەی سەر مەریخ بریتییەلە کشانی نەخشەی زەوی بەهاوکۆلکەی $\frac{9}{5}$. • کەشتییەوانی بۆشایی لەسەر ڕووی مەریخ 6 مەتر چاوی بەرزدەکاتەوە.
4	پلانم چییە بۆ شیکارکردنی ئەو پرسیارە فرە هەنگاوە؟	• نووسینی نەخشەی دووری ئاسۆیی لەسەر مەریخ. • هەژمارکردنی بەهاکەی کاتێك $x=6$

هەوڵبدە

بۆ هەر پرسیارێك خشتەیەك بۆ هەنگاوەکانت دروستبکە (هەروەك لەسەرەوە دیارە)

1. درێژی لاکێشە $x + 5$، پانی $x + 4$ مەتر بێت خشتەیەکی ڕێژەیی بنووسە، ڕێژەی ڕووبەری لاکێشەکە بۆ چێوەکەی بنوێنێت. بوار و مەودای گونجاو بۆئەم خشتەیە دیاریبکە.

2. نەخشەی $d=\frac{\sqrt{3.5w}}{2.54\pi}$ نموونەیەکە بۆ هەژمارکردنی تیرەی گوریس (بەسانتیمەتر) کە پێویستە بۆ بەرزکردنەوەی w تەن، گوریسێك تیرەکەی 3.5 cm بێت بارستایی چەن تەن زیاتر دەتوانێت بەرزبکاتەوە لە گوریسێکی تر تیرەکەی 5.1 cm بێت؟

1–5 نەخشە ڕێسا پەلدارەکان

Piecewise Functions

ئامانجەکان

- نەخشەی ڕێسا پەلدار دەنوسێت و وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی دەکێشێت.
- نەخشە ڕێسا پەلدارکان بۆ باسکردنی باری ژیانی ڕۆژانە بەکاردەهێنێت.

زاراوەکان Vocabulary

نەخشەی ڕێسا پەلدار
Piecewise function

نەخشەی پلەدار
Step function

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت نەخشەی بنکە پەلدار بەکاربهێنیت بۆ نواندنی توانای پێشبڕکێکار لە پێشبڕکێی سیانی (نموونە 4).

نەخشەی ڕێسا پەلدار Piecewise Function بریتییە لە کۆبوونەوەی نەخشەیەک یان زیاتر کە **لقەکانی**، ڕێسای ئەو نەخشە لە بەشێکەوە بۆ بەشێکی تر بوارەکەی دەگۆڕێت بۆ نموونە. نرخی بلیتی چوونەژوورەوەی مۆزەخانەی نیشتمانی بە جیاوازی تەمەنەکان دەگۆڕێت، بە جۆرێك کە بۆهەر چەشنە تەمەنێك نرخێك دیاریدەکرێت بەم شێوەیە. بەهای ئەم نەخشەیە نرخی بلیتی چوونە مۆزەخانە کە بەپێی تەمەن دەنوێنێت، ئەگۆڕە لەمەودای هەر بەشێکدا کە بوارەکەی چەشنە تەمەنێك دەنوێنێت، بەهایەکان بە پێی جیاوازی بەشەکان جیاوازدەبن. (نرخی بلیتەکان بە پێی تەمەنەکان جیاوزا دەبن).

نموونە 1 جێبەجێکردن لە بواری خۆشیدا

خشتەیەک بۆ نواندنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەرت دروستبکە. پاشان بە وشە باسیبکە

هەنگاوی 1 خشتەیەك دروستبکە.

لەبەرئەوەی سەری پارچە ڕاستەهێڵەکانی ناو وێنە ڕونکردنەوەییەکە بوارەکە دەکەن بە سێ بەشەوە. خاڵی سەرەکان و ئەو خاڵانەی لێوەی نزیکە بۆ دیاریکردنی ئەو بەشانە بەکاربهێنە.

نرخی بلیتی چوونەژوورەوە	
تەمەن	نرخ
لە 5 بۆ 12	5000
لە 13 بۆ 54	9000
لە 54 گەورەتر	6500

بواری نەخشەکە بۆ سێ بەش دابەش دەکرێت

تەمەنەکانی لە 12 کەمتر ⟵ $[5, 13)$

تەمەنەکانی لە 13 کەمتر نەبێ و لە 55 کەمتر بێت ⟵ $[13, 55)$

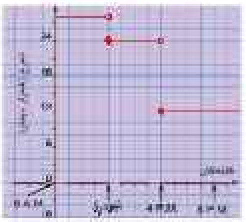
تەمەنەکانی کەمتر نەبێت لە 55 ⟵ $[55, \infty)$

هەنگاوی 2 باسکردنی بە وشە بنووسە.

بەشەکانی بوار و نرخەکان بەپێی خشتەکە بەکاربهێنە.

تەمەنی کوڕێك لە 12 ساڵ بەرەو خوار بۆ نرخی بلیتەکەی 5000 دینار دەدات بەڵام ئەوەی لە 13 ساڵ کەمتر نەبێت و لە 54 ساڵ زیاتر نەبێت بۆ بلیتەکەی 9000 دینار دەدات. ئەوەی لە 55 ساڵ کەمتر نەبێت 6500 دینار دەدات.

نرخی بلیتی چوونەژوورەوە



خاڵی چاودێری

1. خشتەیەک دروستبکە وێنە ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر بنوێنێت، پاشان باسکردنی بە وشە بنووسە.

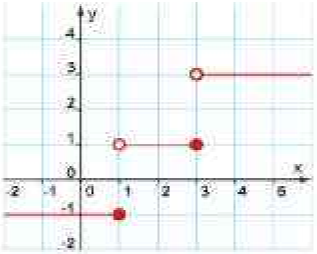
دەتوانیت نەخشەی ڕێسا پەلدار بە نووسینی نەخشەیی دەرببڕێت وەك نەخشەی نموونە 1، بەم شێوەیە دەنووسرێت.

$$f(x)=\begin{cases}5000 & 0<x<13\\ 9000 & 13\le x<55\\ 6500 & x\ge 55\end{cases}$$

لق

بەم شێوەیە دەخوێنرێتەوە، $f(x)$ یەکسانە بە 5000 کاتێك x گەورەتر لە 0 و بچوکتر لە 13 بێت، 9000 کاتێك x کەمتر نەبێت لە 13 و کەمتر لە 55 بێت، 6500 کاتێك x کەمتر نەبێت لە 55.

بۆ دیاریکردنی بەهای نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بۆنەو بەهایەی دەیدرێتێ، لقەکەی دیاریبکە، پاشان ڕێسای نەخشەی ئەو بەشە بەکاربهێنە.



جۆرێك لە نەخشەی بنکە پەلدار سیفەتێکی گرنگیان هەیە لە بەهایەکەی نەگۆڕە لەهەر بەشێك لە بەشەکانیدا. بەم نەخشانە دەوترێت نەخشەی پلەدار **Step Function**.

نموونە لەسەر نەخشەی پەلدار:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\le 1\\ 1 & 1<x\le 3\\ 3 & x>3\end{cases}$$

بۆ تێگەیشتنت لەهۆکاری ناونانی نەخشەکە بە پلەدار، بە وردی سەرنجی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بدە.

نموونە 2

هەژمارکردنی بەهاکانی نەخشەی ڕێسا پەلدار

بۆهەر نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بەهای بەرامبەر $x=-2$ و $x=5$ بدۆزەوە.

أ

$$f(x)=\begin{cases}-5 & x\le 0\\ 4 & 0<x\le 3\\ 12 & x>3\end{cases}$$

$f(-2)=-5$ لەبەرئەوەی $-2<0$، ئەو لقەی بەرامبەر $x\le 0$ بەکاربهێنە

$f(5)=12$ لەبەرئەوەی $5>3$، ئەو ئەلقەی بەرامبەر $x>3$ بەکاربهێنە

ب

$$f(x)=\begin{cases}3x+4 & x<5\\ x^2-3 & x\ge 5\end{cases}$$

$f(-2)=3(-2)+4=-2$ لەبەرئەوەی $-2<5$، ئەو ئەلقەی بەرامبەر $x<5$ بەکاربهێنە

$f(5)=5^2-3=22$ لەبەرئەوەی $5\le 5$، ئەو ئەلقەی بەرامبەر $x\ge 5$ بەکاربهێنە

خاڵی چاودێری

2. بۆ هەر نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بەهای بەرامبەر $x=-1$ و $x=3$ بدۆزەوە.

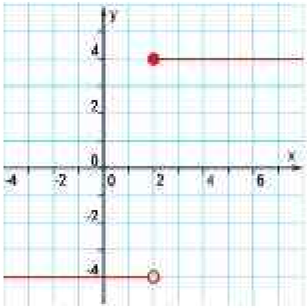
أ $$f(x)=\begin{cases}12 & x<-3\\ 15 & -3\le x<6\\ 20 & x\ge 6\end{cases}$$

ب $$f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & x<0\\ 5x-2 & x\ge 0\end{cases}$$

نموونــــه 3 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەیی بنکە پەلدار

وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەر نەخشەیەك بكێشە.

أ $f(x)=\begin{cases}-4 & x<2\\ 4 & x\ge 2\end{cases}$

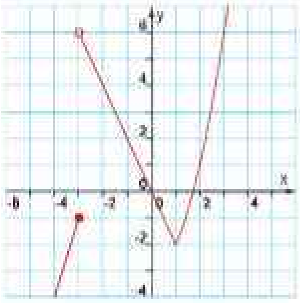


ڕوونکردنەوەی نەخشەکە لەدوو بەش پێکدێت و هەریەکەیان نیو ڕاستەهێڵە لەبەرئەوەی $x=2$ بواری نەخشەکە دەکات بەدوو بەشەوە، بەهای نەخشەکە لەو بەهایەدا هەژماربکە. بە بەکارهێنانی دوو لقی بنکەکەی. لەبەرئەوەی $f(x)=-4$ کاتێك $x<2$ وێنەی خاڵی $(2,-4)$ لە شێوەی بازنەیەکی بچوك کراوەی بکێشە، پاشان بە دەستپێکردن لەم خاڵەوە وێنەی نیو ڕاستەهێڵەکە بە ئاسۆیی بۆلای چەپ بکێشە. لەبەرئەوەی $f(x)=4$ کاتێك $x\ge 2$ وێنەی خاڵی $(2,4)$ لە شێوەی بازنەیەکی بچوکی پڕکراوە بکێشە، و بەدەستپێکردن لەم خاڵەوە نیو ڕاستەهێڵەکە بە ئاسۆیی بۆلای ڕاست بکێشە.

ب $g(x)=\begin{cases}3x+8 & x\le -3\\ -2x & -3<x<1\\ x^2-3 & x\ge 1\end{cases}$

x	$3x+8$	$-2x$	x^2-3
−4	−4		
−3	−1	6	
−2		4	
−1		2	
0		0	
1		−2	−2
2			1
3			6

نەخشەکە لەدووبەشی هێڵی و بەشێکی دووجا پێکدێت. بواری نەخشەکە لە $x=-3$ و $x=1$ بەش دەبێت. خشتەی بەهایەکان بۆ وێنە کێشانی ڕوونکردنەوەیی هەرلقێك بەکاربهێنە.



بازنەیەکی پڕ لە $(-3, -1)$ و بازنەیەکی بەتاڵ لە $(-3, 6)$ دیاریبکە بە شێوەیەك لەسەر ڕوونکردنەوەکە بەهای نەخشەکە لە $x=-3$ بەڕوونی دیاربێت.
پێویست بە دانانی خاڵ لەسەر $(1, -2)$ ناکات. چونکە ڕوونکردنەوەی دوو لقەکە لەم خاڵەدا بەیەك دەگەن.

خاڵی چاودێری
3. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بكێشە.

أ $f(x)=\begin{cases}4 & x\le -1\\ -2 & x>-1\end{cases}$

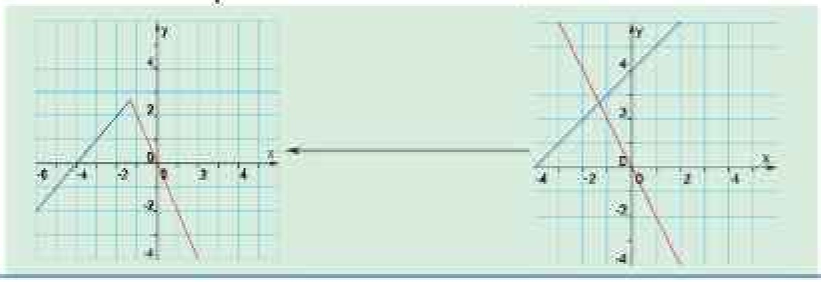
ب $f(x)=\begin{cases}-3x & x<2\\ x+3 & x\ge 2\end{cases}$

سەرنجبدە نەخشەی ڕێسا پەلدار مەرج نییە نەخشەیەکی بەردەوام بێت، واتە ڕوونکردنەوەکەی خاڵی لێکدابڕاوی تێدایە. بۆ نووسینی ڕێسای نەخشەی ڕێسا پەلدار یەکەمجار دیاریبکە لە کوێدا بواری نەخشەکە بەش دەبێت، پاشان ڕێسای هەر بەشێك بنووسە پاش ئەوە ڕێساکان لە نووسینی نەخشەیدا کۆبکەوە.

لە خوێنکارەوە بۆ خوێنکار وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە ڕێسا پەلدارەکان

کاتێك وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی ڕێسا پەلدار دەکێشم، وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەر لقێك دەکێشم، هەروەکو نەخشەیەکی سەربەخۆ،پاشان ئەم بەشە ڕوونکردنەوەییە کە بەهایەکانی x ی دەکەوێتە دەرەوەی بەشەکە دەسڕمەوە.

نموونە
$$f(x)=\begin{cases} x+4 & x<-2 \\ -2x & x\geq -2 \end{cases}$$



نموونە 4 جێبەجێکردن لەسەر وەرزش

ئالان بەشداری لە پێشبڕکێی سیانی بەدرێژی **153 km** کرد. لەیەك کاتژمێر دا **3 km** مەلەی کرد و **120 km** بەسواری پاسکیل لە ماوەی **4** کاتژمێردا بڕی. پاشان**30 km** بۆماوەی **3** کاتژمێر ڕایکرد. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بۆئەو دوورییەی ئالان بەپێی کات بڕیویەتی. پاشان نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بۆئەو ڕوونکردنەوە بنووسە.

هەنگاوی 1 خشتەیەك دروستبکە پێدراوەکان کورتبکاتەوە. یاسای پەیوەندی نێوان خێرایی و کات و دووری بڕاو بەکاربهێنە، بۆ دیاریکردنی تێکڕای خێرایی ئالان لەهەر قۆناغێکی پێشبڕکێکەدا.

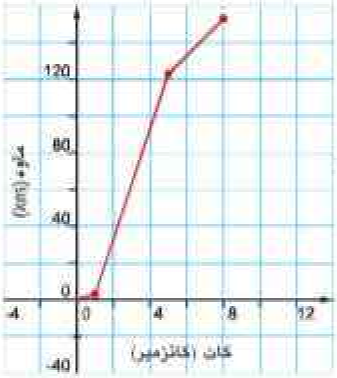
خوێندنی ئالان لە پێشبڕکێی سیانی			
قۆناغ	کات	دووری	خێرایی
مەلەوانی	1	3	3
پاسکیل سواری	4	120	30
ڕاکردن	3	30	10

هەنگاوی 2 لەبەرئەوەی کات گۆڕاوێکی ئازادە، دیاریبکە لە کوێدا بواری نەخشەکە بەش دەبێت بە بەکارهێنانی پێدراوەکانی کات.

مەلەوانی $0\leq t\leq 1$ یەك کاتژمێر مەلەی کردووە

پاسکیل سواری $1<t\leq 5$ 4 کاتژمێر ڕایکردووە

ڕاکردن $5<t\leq 8$ 3 کاتژمێر ڕایکردووە



هەنگاوی 3 وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی دروستبکە.

پاش کاتژمێرێك، ئالان $3\ km$ بڕی . هەتاکو ئەوەی بڕیویەتی لە کۆتایی قۆناغی دووەم (پاش 5 کاتژمێر) $123\ km$ بڕی لە کۆتاییدا $153\ km$ تەواوکرد لە 8 کاتژمێردا.

ئاگاداربە!

دەتوانرێت پەیوەندی $d=vt$ بنووسرێت، بەشێوەی $v=\frac{d}{t}$ بۆ دۆزینەوەی تێکڕای خێرایی

هەنگاوی 4 نەخشەی هێڵی بۆهەر لقێك بنووسە.

شێوەی لاری – خاڵ بەكاربهێنە

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مەلەوانی $d = 3t$ — $m=3$ و خاڵی $(0, 0)$ بەكاربهێنە

بە پاسكیل $d = 30t - 27$ — $m=30$ و خاڵی $(5, 123)$ بەكاربهێنە

ڕاكردن $d = 10t + 73$ — $m=10$ و خاڵی $(8, 153)$ بەكاربهێنە

نووسینی نەخشەیی بۆئەم نەخشە بریتییە لە:

$$d(t) = \begin{cases} 3t & 0 \le t \le 1 \\ 30t - 27 & 1 < t \le 5 \\ 10t + 73 & 5 < t \le 8 \end{cases}$$

خاڵی جاودێری

4. ڕێباز لە یەكێك لە چێشتخانەكانی پایتەخت ئیش دەكات، بۆهەر كاتژمێرێكی ئیش 8000 دینار وەردەگرێت، كاتێك كاتژمێرەكانی ئیشكردنی هەفتەیەكی لە 40 كاتژمێر تێپەڕنەكات، و 12 000 دینار وەردەگرێت بۆهەر كاتژمێرێكی ئیشكردن زیاد لە 40 كاتژمێر تێپەڕنەكات. وێنەیەكی ڕوونكردنەوەیی بكێشە، دەستكەوتنی ڕێباز بەپێی ژمارەی كاتژمێرەكانی ئیشكردن لە هەفتەیەكدا بنوێنێت، ئەگەر بزانیت ناتوانیت زیاتر لە 60 كاتژمێر لە هەفتەیەكدا ئیش بكات. نەخشەیەكی ڕێسا پەلدار بۆئەو ڕوونكردنەوە بنووسە

بیربكەوە و تاوتوێبكە

1. ڕونبكەوە ئەگەر لە تواناداببێت نەخشەی پلەدار بەدەستبهێنرێت بەهایەكەی ئەگۆڕێت. لەهەر لقێك و ڕوونكردنەوەكەی نەپچڕاوبێت.

فێربە

2. ڕێكخەربە ئەم خشتەیەی خوارەوە دروستبكە و تەواویبكە. بۆهەر جوارچێوەیەك باسی بوار و مەودای هەموو نەخشەكە بنووسە و نموونەی بۆ بهێنەوە.

نەخشە	بوار	مەودا	نموونە
ڕێسا پەلدار			
پلەدار			

1-5 ڕاهێنانەکان

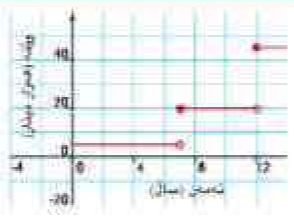
ڕاهێنانی ئاراستەکراو

1 پەیوەندی نێوان نەخشەی پلەدار و نەخشەی ڕێسا پەلدار ڕوونبکەوە

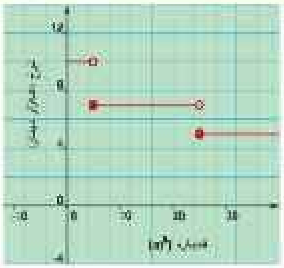
بڕوانە نموونە 1

خشتەیەک بۆهەر وێنەیەکی ڕوونکردنەوە بکێشە و بە وشە باسیبکە

2 باجی چوونە ژوور



3 نرخی خاکی کشتوکاڵی



بڕوانە نموونە 2

بەهای نەخشەکە هەژماربکە کاتێک $x = -6$ و $x = 3$

4 $$f(x)=\begin{cases}-8 & x\le -5\\ 0 & -5<x<6\\ 5 & x\ge 5\end{cases}$$

5 $$g(x)=\begin{cases}5x-9 & x<2\\ 4-x^2 & x\ge 2\end{cases}$$

بڕوانە نموونە 3

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە

6 $$f(x)=\begin{cases}7 & x<-2\\ -2 & x\ge -2\end{cases}$$

7 $$g(x)=\begin{cases}-2x+8 & x\le 4\\ \frac{1}{2}x & x>4\end{cases}$$

بڕوانە نموونە 4

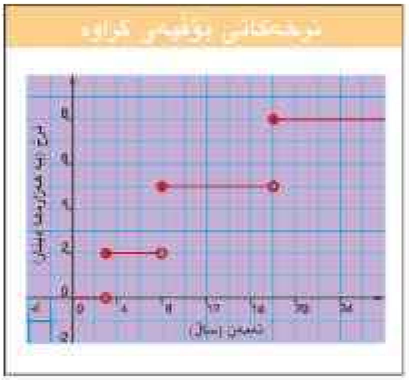
8 تێچوونی بەکرێ گرتنی کەشتییەکی بچوک 20 000 دینارە لە کاتژمێرێکدا بۆ 4 کاتژمێری یەکەم، و 3 000 دینارە بۆهەر کاتژمێرێکی زیادە، وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە، تێچوونی بەکرێگرتنی کەشتییەکە بۆ ژمارەی کاتژمێرەکان بنوێنێت، کە لە 8 کاتژمێر زیاتر نەبێت.

ڕاهێنان وشکیارکردنی پرسیارەکان

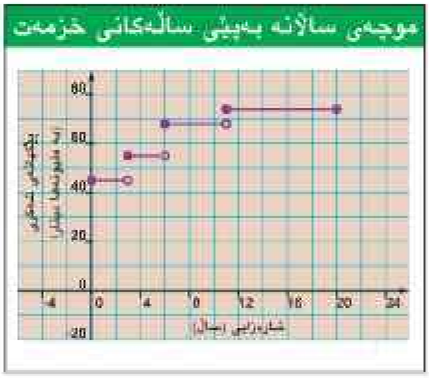
ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە
10-9	1
12-11	2
14-13	3
15	4

خشتەیەک دروستبکە بۆهەر وێنەیەکی ڕوونکردنەوە، پاشان بە وشە باسیبکە.

9



10



بەهای نەخشەکە هەژماربکە کاتێک $x=-2$ و $x=2$ و $x=6$.

11 $f(x)=\begin{cases} 9x-2 & x<-3 \\ x^2-3 & -3\le x<1 \\ 5 & x\ge 1 \end{cases}$

12 $f(x)=\begin{cases} 12-9x & x\le 0 \\ x^2+3x & 0<x<3 \\ 4^x & x\ge 3 \end{cases}$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

13 $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}x+1 & x<4 \\ \frac{3}{4}x-2 & x\ge 4 \end{cases}$

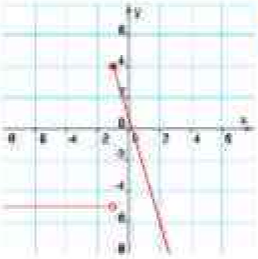
14 $g(x)=\begin{cases} -2x-5 & x<-2 \\ x^2-3 & x\ge -2 \end{cases}$

15 تێچوونی بڕینەوەی خوری مەڕ دەگۆڕێت، بە گۆڕانی بارستاکەی. ئەم خشتەی بەرامبەر نرخەکانی بڕینەوەی مەڕێکەکە، هۆشیار وەریدەگرێت. وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە، تێچوونی بڕینەوەی مەڕ بنوێنێت، بارستایی لە kg 60 زیاتر نەبێت. نەخشەیەکی بنکە پەلدار بنووسە ئەمە دەربڕێت.

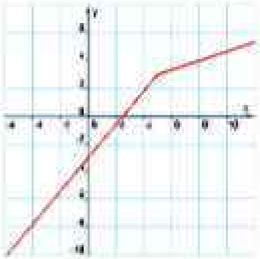
نرخی مەڕ بڕینەوە	
بارستایی (kg)	نرخ (دینار)
15 یان کەمتر	30 000
نێوان 15 و 50	50 000
50 یان زیاتر	75 000

بۆهەر وێنەیەکی ڕوونکردنەوە نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بنووسە.

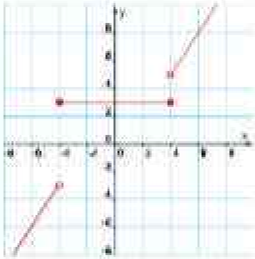
16



17



18



19 **گەراج** گەراجی ئۆتۆمبیل لە پایتەخت بۆهەر کاتژمێرێکی وەستان 6000 دینار وەردەگرێت، لەماوەی چوار کاتژمێری یەکەمدا، بۆهەر کاتژمێرێکی زیادە 3000 دینار وەردەگرێت. نەخشەی ڕێسا پەلدار بنووسە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی وەستانی ئۆتۆمبیل بەپێی ژمارەی کاتژمێرەکان.

20 **گەشت** هەڵۆ و توانا بە ئۆتۆمبیل لە سلێمانییەوە بۆ دهۆك ڕۆیشتن. ئەم وێنەی بەرامبەر ناوەندەی خێرایی ئۆتۆمبیلەکە بەپێی قۆناغەکان دەنوێنێتە بۆ ماوەی 30 خولەك لەناو شاردا بە ناوەندە خێرایی 45 km / h دەڕۆیشت پاشان ماوەی 3 کاتژمێر لە ڕێگای خێرا بە ناوەندەی خێرایی 90 km / h دەڕۆیشت، و 30 خولەك بە ناوەندە خێرایی 60 km / h دەڕۆیشت لە شاخ.

أ نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بنووسە ئەو دووریەی ئۆتۆمبیلەکە بڕیویەتی بەپێی کات بنوێنێت.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

ج **چی دەبێت ئەگەر ...؟** ماوەی گەشتەکە چەند دەخایەنێت ئەگەر ناوەندە خێرایی ئۆتۆمبیلەکە لە قۆناغی دووەم 75 km / h لە جیاتی 90 km / h بێت.

نەخشەی ڕووت بەشێوەی نەخشەی ڕێسا پەلدار بنووسە.

21 $f(x)=|x|$ **22** $g(x)=|x-4|$ **23** $h(x)=2|x|-4$

24 **خزمەتگوزاری** دەزگای هیوا بۆ نێراوە پۆستییەکان بۆ گەیاندنی هەر کیلۆگرامێك 11 000 دینار وەردەگرێت، بۆ ئەو نێراوانەی کێشیان لە 2kg تێپەڕ نەکات، و بۆ ئەو نێراوانەی کێشیان لە 2kg زیاترە 3000 دینار بۆهەر کیلۆگرامێك بۆنرخەکەی زیاددەکرێت.و وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بۆ تێچوونی گەیاندنی نامەیەك کێشەکەی لە 2kg زیاتر نەبێت. نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بنووسە ئەمە دەربڕێت.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە

25
$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & x\le 0\\ 2^x-4 & 0<x\le 3\\ 2x-2 & x>3\end{cases}$$

26
$$g(x)=\begin{cases}-3 & x\le 0\\ 3^x-4 & x>0\end{cases}$$

بوار و مەودای هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

27
$$g(x)=\begin{cases}-\frac{5}{2}x-2 & x\le -2\\ -x-5 & x>-2\end{cases}$$

28
$$h(x)=\begin{cases}x^2-2x-3 & x<4\\ 3x-7 & x\ge 4\end{cases}$$

29 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆچی نواندنی نەخشەی ڕێسا پەلدار باشترین نواندنە بۆ بەرزی سەرخەری کارەبایی لە زەوی پاش t چرکە لە بەرزبوونەوەی؟ ئایا دەتوانرێت بکرێت بە نەخشەی پلەدار؟

30 **بنووسە** هۆی چییە وا دەکات بەکارهێنانی نەخشەی ڕێسا پەلدار باشترین نواندنە بۆ بارەکانی ژیانی ڕۆژانە؟ دوو نموونە بەلایەنی کەمەوە لەناو وەڵامەکەت بهێنەوە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

31 یەکێك لە بریکارەکانی بەکرێدانی ئۆتۆمبیل لە ڕۆژێکدا 15 000 دینار وەردەگرێت، ئەگەر ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی ئۆتۆمبیلەکە دەیبڕێت لە 200 km تێپەڕنەکات. ئەگەر ئۆتۆمبیلەکە لە 200 km زیاتری بڕی لەسەر کرێگرتە پێویستە 50 دینار بۆهەر کیلۆمەترێکی زیاد بدات، کام لەم نەخشانەی خوارەوە تێچوونی بەکرێگرتنی ئۆتۆمبیلەکە بەپێی ژمارەی کیلۆمەترە بڕاوەکان لە ڕۆژێکدا دەنوێنێت؟

أ) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 50x & x>200\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}15\ 000x & 0\le x\le 200\\ 15\ 000x & x>200\end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 15\ 000+50(x-200) & x>200\end{cases}$

د) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 15\ 000+50x & x>200\end{cases}$

32 کام لەم نەخشانەی خوارەوە نەخشەی بەردەوامە؟

أ) $f(x)=\begin{cases}3x-4 & x<0\\ -1 & x\ge 0\end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases}5x-4 & x<3\\ 2x+5 & x\ge 3\end{cases}$

ج) $h(x)=\begin{cases}x^2 & x<-2\\ 2x & x\ge -2\end{cases}$

د) $(x)=\begin{cases}3x+4 & x\le -1\\ 3^x+4 & x>-1\end{cases}$

33 $f(-2)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=\begin{cases}1-5x & x<-5\\ 3-x^3 & -5\le x<-2\\ 5-x^2 & x\ge -2\end{cases}$

أ) 5- ب) 1 ج) 9 د) 11

بەرەنگاری و فراوانکردن

نەخشەی گەورەترین تەواو بریتییە لە نەخشەی $[x]$ کاتێك $f(x) = [x]$ هێمای گەورەترین ژمارەی تەواوە لە x زیاترنەبێت. بژمێری ڕوونکردنەوەیی هێمای $\mathbf{Int}(x)$ بۆ نواندنی ئەم نەخشە بەکاردەهێنێت. ئەگەر نرخی فووتویەك شەربەت 750 دینار بێت. ئەوا نەخشەی $f(x)=\mathbf{Int}\left[\frac{x}{750}\right]$ ژمارەی فووتوە شەربەتەکانت دەداتێ کە دەتوانیت بە x دینار بیکڕیت

34 نەخشەیەک بنووسە بۆ هەژمارکردنی ژمارەی قووتوی پەتاتەی سوورکراوە کە دەتوانیت بیکڕیت بە x دینار. ئەگەر بزانیت نرخی قوتویەک 650 دینارە، ئەم خشتە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ژمارەی قووتوە پەتاتە سوورکراوەکان کە دەتوانیت بە دەهەزار دینار بیکڕیت.

تێبینی: نەخشەی بچووکترین تەواو بریتییە لە $f(x) = \lfloor x \rfloor$ کاتێک $\lfloor x \rfloor$ هێمای کەمترین ژمارەی تەواوە لە x کەمتر نەبێت وەک $f(2.9) = f\lfloor 2.9 \rfloor = 3$

35 گەراجی ئۆتۆمبیل 4000 دینار وەردەگرێت بەرامبەر وەستانی ئۆتۆمبیلێک ماوەکەی لە یەک کاتژمێر تێپەڕنەکات. ئەگەر ماوەی وەستان لە کاتژمێرێک زیاتر بوو، گەراجە 1500 دینار وەردەگرێت بۆهەر کاتژمێرێکی زیادە، یان کەرتێک لە کاتژمێرێکی زیادە. نەخشەیەک بنووسە تێچوونی وەستانی ئۆتۆمبیل بەپێی کات t کاتژمێر بنوێنێت. ئەم نەخشە بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی وەستانی ئۆتۆمبیلێک بۆماوەی 5 کاتژمێر و 23 خولەک.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

36 نەندازە پەیوەندییەکی هێڵی هەیە لایەکانی چەندلا ڕێکە و کۆی پێوانەکانی گۆشەکانی ناوەوەی بەیەکەوە دەبەستێت، وەک لەم خشتەی خوارەوە دەردەکەوێت. نەخشەیەک بۆ دەربڕینی ئەم پەیوەندییە بنووسە. (وانەی 1 – 2)

ژمارەی لایەکان	3	4	5	6	8
سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە بەپلە	180	360	540	720	1080

دەرکەنارەکانی هەر نەخشەیەک و بوار و مەودای دیاریبکە (پۆلەکانی پێشوو)

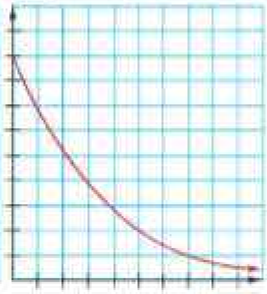
37 $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$

38 $f(x) = \frac{3}{x+2} + 1$

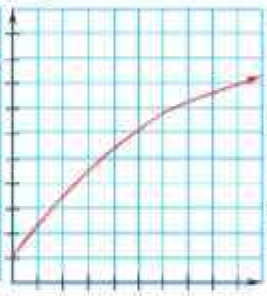
39 $f(x) = \frac{5}{x-3} + 1$

هەریەکە لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە، بارێک لەپرسیارەکانی خوارەوە (40 – 43) دەنوێنێت دیاریکە. (وانەی 5 – 1)

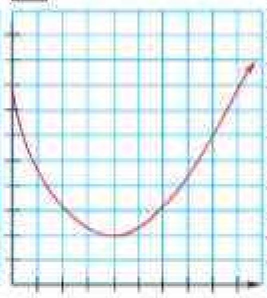
أ



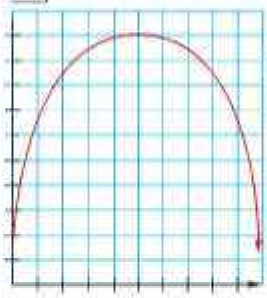
ب



ج



د



40 کۆمپانیایەک یەکێک لە بەرهەمەکانی لەبازاڕ خستەڕوو، بەبێ ئەوەی پڕوپاگەندەی بۆ بکات، قازانجی دابەزی؛ پاشان پڕوپاگەندەی بۆکرد قازانجی بەرزبووە.

41 دابەزینی نرخی بژمێر بەپێی کات.

42 دابەزینی قازانجی دوکانی ئایس کرێم لە زستان، بەڵام بەهار و پایز بەرزدەبێتەوە لەهاویندا زۆر بەرز دەبێتەوە.

43 پلەی گەرمی بەرزدەبێتەوە. لەنێوان کاتژمێر12:00 پاش نیوەڕۆ تا 5:00پاش نیوەڕۆ.

لایەرەی تەکنۆلۆژیا

دۆزینەوەی جیاوازییەکان و ڕێژەکان

بیرت بێت، هەردەم جێگیربوونی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان یارمەتیت دەدەن بۆ دیاریکردنی جۆری ئەو نەخشەیەی بەکاریدەهێنیت بۆ نواندنی کۆمەڵە پێدراوەکان. دەتوانیت بەرنامەی EXCEL ی بژمێر بۆ هەژمارکردنی جیاوازییەکان و ڕێژەکان بەخێرایی بەکاربهێنیت.

پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر بەکاربهێنە. بەرنامەی EXCEL بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی جیاوازییەکانی یەکەم و جیاوازییەکانی دووەم و ڕێژەکان. ئەگۆڕەکە دیاریبکە ئەگەر هەبوو.

x	5	6	7	8	9	10	11
y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4

سەرەتا سەردێری ڕیزەکان بخەرە ناوبژمێرەکە، وەک دیارە بیرت ئەچێت، جیاوازی نێوان بەهایەکانی x پێویستە یەکسان بن.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جیاوازییەکانی یەکەم		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جیاوازییەکانی دووەم							
5	ڕێژەکان							

1 هەژماری جیاوازییەکان بکە یاسای $=C2-B2$ لە خانەی C3 تۆماربکە بۆ هەژمارکردنی جیاوازی نێوان دوو بەهای یەکەم لە بەهایەکانی y ئەوەی لە C3 دایە لەبەرگرەوە بۆ خانەکان لە D3 هەتا H3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جیاوازییەکانی یەکەم		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جیاوازییەکانی دووەم			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	ڕێژەکان							

2 جیاوازییەکانی دووەم هەژماربکە یاسای $=D3-C3$ لە خانەی D4 تۆماربکە بۆ هەژمارکردنی جیاوازییەکانی دووەم ئەوەی لە D4 دایە لەبەرگرەوە بۆ خانەکان لە E4 تا H4.

3 ڕێژەکان هەژماربکە یاسای $=C2/B2$ لە خانەی C5 بۆ هەژمارکردنی ڕێژەی دوو بەهای یەکەمین لە بەهایەکانی y ئەوەی لە خانەی C5 لەبەربگرەوە بۆ خانەکانی D5 تا H5

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جیاوازییەکانی یەکەم		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جیاوازییەکانی دووەم			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	ڕێژەکان		3.40	1.94	1.61	1.45	1.36	1.30

لەمەی پێشوو دەردەکەوێت جیاوازییەکانی دووەم ئەگۆڕە

هەوڵبدە

بۆ هەریەکە لەم کۆمەڵە پێدراوانە بەرنامەی EXCEL بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی جیاوازییەکانی یەکەم و جیاوازییەکانی دووەم و ڕێژەکان. ئەگەر ئەگۆڕی تێدابوو دیاریبکە.

1

x	2	4	6	8	10
y	−20	124	364	700	1132

2

x	4	7	10	13	16	19
y	1.31	2.48	3.65	4.82	5.99	7.16

3

x	3	4	5	6	7
y	8.96	35.84	143.36	573.44	2293.8

4

x	1.5	3	4.5	6	7.5
y	−9	15	57	117	195

5 بیری ڕەخنەگر کام جۆر لە نەخشەکان گونجاوترە بۆ نواندنی پێدراوەکانی ڕاهێنانی 4؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

2-5

جێگۆڕکێی نەخشەکان

Transforming Functions

ئەگەر لە دانەوەی قەرزەکەت دوا بکەویت ئەوا لەبەردەم هاوکاران بڵاوی دەکەینەوە

داوای لێبووردن دەکەم لە دواکەوتنم لە دانەوەی بەشە قەرزەکانم چاوەڕوانی جێگۆڕکێم

ئامانجەکان

- ئەخشەکان جێگۆڕکێی پێدەکات.
- جێگۆڕکێی نەخشە دەناسێت.

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت جێگۆڕکێی نەخشەکان بەکاربهێنیت بۆ باسکردنی ئەو گۆڕانکارییانەی لە باجی تۆمار کردنی ناو لە زانکۆدا ڕوودەدات (نموونە 4)

لە وانەکان و پۆلەکانی پێشوودا فێربوویت چۆن نەخشە جیاوازەکان جێگۆڕکێ پێبکەیت، دەتوانیت نەخشەی ڕێسا پەلدار جێگۆڕکێ پێبکەیت بە جێگۆڕکێ کردنی هەر لقێك لە لقەکانی. ئەم خشتەی خوارەوە ڕێساکانی جێگۆڕکێی نەخشەکان کورت دەکاتەوە.

فێربە

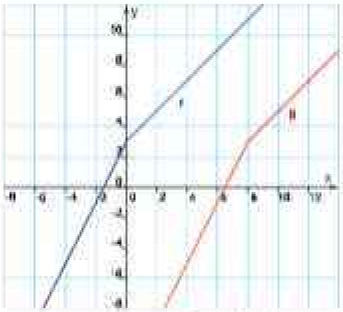
جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)$	
ڕاکێشانی ستوونی	ڕاکێشانی ئاسۆیی
$f(x)\to f(x)+k$ بۆلای سەرەوە ڕادەکێشرێت ئەگەر $k>0$ بۆلای خوارەوە ڕادەکێشرێت ئەگەر $k<0$	$f(x)\to f(x-h)$ بۆلای ڕاست ڕادەکێشرێت ئەگەر $h>0$ بۆلای چەپ ڕادەکێشرێت ئەگەر $h<0$
وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری یەکەم x - axis	وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری دووەم y - axis
$f(x)=-f(x)$	$f(x)\to f(-x)$
فراوانبوون یان چوونەوەیەکی ستوونی	فراوانبوون یان چوونەوەیەکی ئاسۆیی
$f(x)\to af(x)$ فراوانبوونە ئەگەر $a>1$ ، چوونەوەیەکە ئەگەر $0<a<1$	$f(x)\to f\left(\frac{1}{b}x\right)$ فراوانبوونە ئەگەر $b>1$ ، چوونەوەیەکە ئەگەر $0<b<1$

نموونە 1

جێگۆڕکێی نەخشە ڕێسا پەلدارەکان

نەخشەی $g(x)$ بەیدابوو لە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x+3 & x>0 \\ 2x+3 & x\le 0 \end{cases}$ بنووسە بە ڕاکێشانی 4 یەکە بۆلای ڕاست.

پێویستە هەرلقێك لە لقەکانی نەخشەکە 4 یەکە بۆلای ڕاست ڕابکێشرێت. $x-4$ لە جیاتی x لە ڕێسای نەخشەی $f(x)$ دابنێ، پاشان ڕێساکە بە سادەترین شێوە بنووسە.



$$g(x)=f(x-4)=\begin{cases} (x-4)+3 & x-4>0 \\ 2(x-4)+3 & x-4\le 0 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x-1 & x>4 \\ 2x-5 & x\le 4 \end{cases}$$

ساغبکەوە وێنەی ڕوونکردنەوەی هەردوو نەخشەکە لە ڕووتەختی بۆوتان بکێشە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت

ئاگاداربە!

ڕاکێشانی ئاسۆیی، ڕێسایەکانی نەخشەی بنکە پەلدار ماوەکانی بوارەکەی دەگۆڕێت بەڵام ڕاکێشانی ستوونی تەنها ڕێساکانی نەخشەکە دەگۆڕێت

خاڵی جاودێری

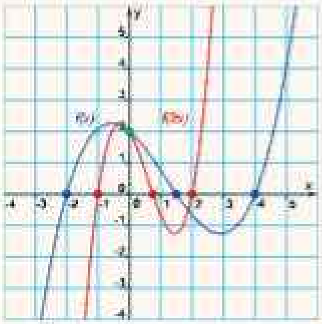
1. نەخشەی $g(x)$ بنووسە کە پەیدابوو بە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x-3 & x>0 \end{cases}$ بە کشانی (مط) ئاسۆیی هاوکۆلکەی 2 بێت.

لەکاتی جێگۆڕکێی نەخشە لەوانەیە یەکتربڕینەکانی لەگەڵ تەوەرەی پۆتانەکان بگۆڕێت و لەوانەشە نەگۆڕێت. کاتێك جێگۆڕکێیەکە پێناسە دەکرێت، دەتوانیت یەکتربڕینەکانی نەخشە – وێنە دیاریبکەیت.

فێربە

کاریگەرییەکانی جێگۆڕکێی لەسەر یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی و ستوونی نەخشەی $f(x)$

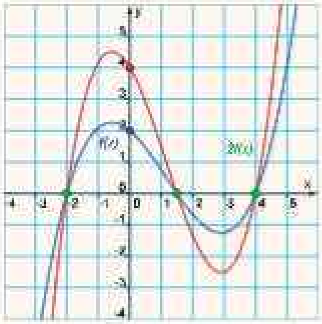
کشانی یان چوونەوەیەکی ئاسۆیی هاوکۆلکەی a بێت



یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی لە a دەدرێت

یەکتربڕینەکانی ستوونی ناگۆڕێت

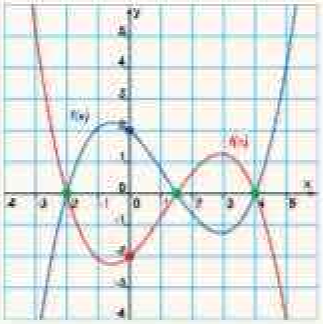
کشانی یان چوونەوەیەکی ستوونی هاوکۆلکەی b بێت



یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی ناگۆڕێت

یەکتربڕینەکانی ستوونی لە a دەدرێت

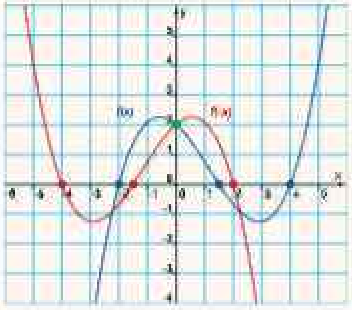
وێنەدانەوە بە دەوری تەوەرەی یەکەم



یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی ناگۆڕێت

یەکتربڕینەکانی ستوونی دەگۆڕێت بە دژەکەی

وێنەدانەوە بە دەوری تەوەرەی دووەم



یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی دەگۆڕێت بە دژەکەی

یەکتربڕینەکانی ستوونی ناگۆڕێت

نموونە 2 دیاریکردنی یەکتربڕینەکان

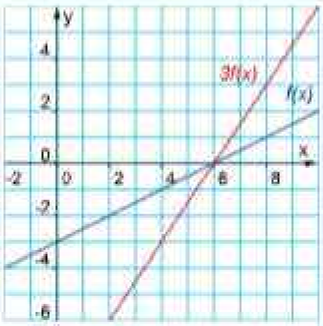
یەکتربڕینەکانی نەخشەی $f(x)$ دیاریبکە، پاشان یەکتربڕینەکانی نەخشەی $g(x)$ دیاریبکە، بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی.

أ $f(x)=\frac{1}{2}x-3$ ؛ $g(x)=3f(x)$.

یەکتربڕینەکانی نەخشە بنەڕەتییەکە دیاریبکە.

$$0=\frac{1}{2}x-3 \qquad f(0)=\frac{1}{2}(0)-3=-3$$

$$x=6 \qquad f(0)=-3$$

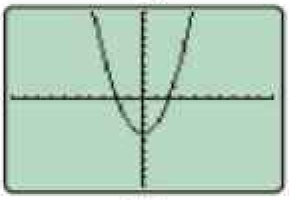


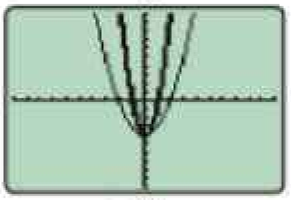
یەکتربڕینی ستوونی 3- و یەکتربڕینی ئاسۆیی 6 لەبەرئەوەی $g(x)$ کشانی ستوونییە بۆ نەخشەی $f(x)$ بە هاوکۆلکەی 3 کەواتە یەکتربڕینی ئاسۆیی ناگۆڕێت، بەڵام یەکتربڕینی ستوونی لە هاوکۆلکەی کشان دەدرێت کە (3)یە. یەکتربڕینی ستوونی بۆ نەخشەی $g(x)$ بریتییەلە 9-=(3-)3

ب $f(x)=x^2-4$ ؛ $g(x)=f(2x)$.

بە بڕەیی ڕوونکردنەوەیی دەردەکەوێت کە یەکتربڕینی ستوونی بۆ نەخشەکە بریتییە لە 4- و دوو یەکتربڕینی ئاسۆیی هەیە بریتین لە 2- و 2 لە نەخشەی $f(x)$ دا سەرنج بدە نەخشەی $g(x)$ بریتییە لە ئەنجامی چوونەوەیەکی ئاسۆیی نەخشەی $f(x)$ هاوکۆلکەی $\frac{1}{2}$ بێت. لەسەوە دەردەچێت یەکتربڕینی ستوونی ناگۆڕێت و هەر یەکتربڕینێکی ئاسۆیی لە $\frac{1}{2}$ دەدرێت. یەکتر بڕینەکانی ئاسۆیی بۆنەخشەی $g(x)$ بریتین لە 1- و 1.

ساغبکەوە لەسەر هەمان شاشە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)$ بکێشە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت.





خاڵی چاودێری

2. یەکتربڕینەکانی نەخشەی $f(x)$ دیاریبکە، پاشان یەکتربڕینەکانی نەخشەی $g(x)$ بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەکەی دیاریبکە.

أ $f(x)=\frac{2}{3}x+4$ $g(x)=-f(x)$ **ب** $f(x)=x^2-9$ $g(x)=\frac{1}{3}f(x)$

نموونە 3 ناوێتەکردنی جێگۆڕکێیەکان

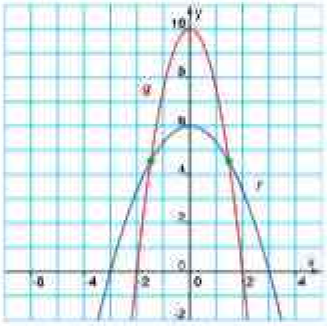
وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $g(x)=f\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)+4$

کاتێک $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+6$

هەنگاوی 1 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ بکێشە ڕوونکردنەوەی $f(x)$ تەوەرەی دووەم لە $(0,6)$ و تەوەرەی یەکەم لە $(-3,0)$ و $(3,0)$ دەبڕێت

هەنگاوی 2 هەر جێگۆڕکێیەک بەجیا تاقیبکەوە.

جێگۆڕکێی یەکەم بریتییە لە چوونەوەیەکی ئاسۆیی هاوکۆلکەی $\frac{2}{3}$ یە. پاش ئەم جێگۆڕکێیەکە یەکتربڕینی ستوونی ناگۆڕێت، وەک خۆی 6 دەمێنێت بەڵام یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی دەبێتە 2- و 2 . جێگۆڕکێی دووەم بریتییە لە ڕاکێشانی 4 یەکە بۆ سەرەوە، خشتەکە بۆ ڕوونکردنەوەی ڕاکێشانی هەرسێ خاڵەکە بەکاربهێنە.



خاڵەکانی یەکتربڕین	$(-2,0)$	$(2,0)$	$(0,6)$
وێنەی ڕاکێشانەکەی	$(-2,4)$	$(2,4)$	$(0,10)$

ساغبکەوە وێنەی ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $f(x)$ و $g(x)$ لە هەمان ڕووتەختی پۆتان بکێشە.

خاڵی چاودێری

3. وێنەی ڕونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)$ کاتێک $f(x)=2^x-4$ بێت.

نموونـــــە 4 جیێبەجیکردن لەسەر شیکارکردنی پرسیارەکان

سەرۆکایەتی یەکێک لە زانکۆکان نەخشەی بنکە پەلدار بەکاردەهێنێت بۆ دیاریکردنی باجی تۆمارکردنی خوێندکاران بەپێی ژمارەی کاتژمێرە وانەکان تیایدا تۆمارددەکەن.

ئەم نەخشەیە بریتییە لە

$$f(x)=\begin{cases}110\,000x & 0<x<12\\ 1\,320\,000 & 12\le x\le 18\\ 150\,000(x-18)+1\,320\,000 & x>18\end{cases}$$

سەرۆکایەتی زانکۆ بڕیاریدا بۆ وەرزی پایز باج بە ڕێژەی **10%** زیادبکرێت. هەروەها بڕیاریدا **750 000** دینار باج بخرێتە سەر هەر کەسێك ناوی تۆمار دەکرێت. نەخشەیەك بنووسە ڕێگە بە هەژمارکردنی باجی تۆمارکردن لە وەرزی پایز بە پێی x دەدات.

1 پرسیارەکە تێبگە

نەخشەی نوێ بە جێگۆڕکێی نەخشەی سەرەکی بە دوو جێگۆڕکێ دیاریدەکرێت زیادکردنی باجی تۆمارکردنی 10% پاشان خستنەسەری باجی کارە کارگێڕییەکان بڕەکەی 75 000 دینارە. دەتوانین باجی 10% بگۆڕین بۆ لێکدانی هەر لقێك لە لقەکانی نەخشە لە 110% یان 1.1 ئەوە دەگەینێت نەخشە بخرێتە ژێر کشانی ستوونی هاوکۆلکەکەی 1.1 بێت، بەڵام زیادکردنی باجی کارگێڕییەکان، واتە گۆڕینی نەخشەکە بە ڕاکێشانی بۆ سەرەوە بە بڕی 75 000 یەکە.

2 پلان دابنێ

جێگۆڕکێی یەکەم جێبەجێبکە، پاشان جێگۆڕکێی دووەم و نەخشەی پەیدابوو بنووسە.

3 شیکاریکە

دەستبکە بە دۆزینەوەی نموونەی باجەکان پاش زیادکردنی 10%.

$$g(x)=(1.1)f(x)=\begin{cases}(1.1)110\,000x & 0<x<12\\ (1.1)1\,320\,000 & 12\le x\le 18\\ (1.1)\left[150\,000(x-18)+1\,320\,000\right] & x>18\end{cases}$$

هەر لقێك لە 1.1 بدە

$$=\begin{cases}121\,000x & 0<x<12\\ 1\,452\,000 & 12\le x\le 18\\ 165\,000(x-18)+1\,452\,000 & x>18\end{cases}$$

ئێستا نموونەی باجەکان پاش زیادکردنی باجی کارگێڕییەکان بڕەکەی 75 000 دینارە بدۆزەوە.

$$h(x)=g(x)+75\,000=\begin{cases}121\,000x+75\,000 & 0<x<12\\ 1\,452\,000+75\,000 & 12\le x\le 18\\ 165\,000(x-18)+1\,452\,000+75\,000 & x>18\end{cases}$$

$$=\begin{cases}121\,000x+75\,000 & 0<x<12\\ 1\,527\,000 & 12\le x\le 18\\ 165\,000(x-18)+1\,527\,000 & x>18\end{cases}$$

4 ساغبکەوە

وەڵامەکەت بە بەکارهێنانی هەندێك لە بەهایەکانی ساغبکەوە. ئەگەر باجی سەرەکی بۆ 20 کاتژمێر 1 620 000 دینار بێت، بە زیادبوونی ئەو باجە 10% و خستنەسەری 75 000 دینار، ئەم باجە دەبێتە 1 857 000 دینار. بەهای نەخشە نوێیەکە بدۆزەوە کاتێك $x=20$.

$h(20)=165\,000(20-18)+1\,527\,000=330\,000+1\,527\,000=1\,857\,000$ ✓

خاڵی جاوتێژی

4. مۆزەخانەی زانستەکان 5 000 دینار باجی چوونەژورەوە وەردەگرێت، بۆهەر منداڵێك تەمەنی لە 12 ساڵ کەمتربێت، 7500 دینار وەردەگرێت بۆهەر کەسێك تەمەنی لە 12 ساڵ کەمتر نەبێت (12 ساڵی بەرەو سەرەوە) کارگێڕی مۆزەخانەکە بڕیاریدا نرخەکانی چونەژوورەوە 20% بەرزبکاتەوە، هەر بلیتێك 500 دینار بخاتە سەری. بۆ ئاسانکاری کڕین بەهۆی ئامێرەوە. نەخشەیەك بنووسە. نرخی نوێی چوونەژوورەوە بەپێی تەمەنی کڕیار بێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. کام لەم جێگۆڕکێیانە یەکتربڕینەکانی ستوونی ناگۆڕێت؟
2. ڕوونی بکەوە بۆچی خاڵی $(0 , 0)$ ناگۆڕێت لەژێر کاریگەری هەرکشانێك وهەر چوونەوەیەکێك.
3. ڕێکخەریە ئەم خشتەی خوارەوە دروستبکە و پاشان تەواوببکە. باسی کاریگەری هەر جێگۆڕکێیەك لەسەر یەکتربڕینەکان بکە.

فێربە

جێگۆڕکێ	یەکتربڕینی ئاسۆیی	یەکتربڕینی ستوونی
کشان یان چوونەیەکی ئاسۆیی بە هاوکۆڵکەی h		
کشان یان چوونەیەکی ستوونی بە هاوکۆڵکەی		
وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x		
وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری y		

2–5 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بڕوانە نموونە 1

ڕێسای نەخشەی $g(x)$ی پەیدابوو لە ئەنجامی جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x-3 & x\le 0 \\ 4x & x>0 \end{cases}$ بنووسە.

1 ڕاکێشانی 6 یەکە بۆلای چەپ

2 چوونەوەیەکی ئاسۆیی هاوکۆڵکەکەی $\frac{1}{4}$ بێت.

بڕوانە نموونە 2

یەکتربڕینەکانی نەخشەی $f(x)$ پاشان نەخشەی $g(x)$ دیاریکە بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی

3 $f(x)=4x+12$ ، $g(x)=\frac{1}{6}f(x)$

4 $f(x)=-x^2+16$ ، $g(x)=f(4x)$

بڕوانە نموونە 3

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ بکێشە پاشان جێگۆڕکێ بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)$

5 $f(x)=-x^2+1$ ، $g(x)=f(2x)-1$

6 $f(x)=|x-1|-2$ ، $g(x)=-2f(x)$

بڕوانە نموونە 4

7 **باجەکان** یەکێك لە حکومەتەکان پشت دەبەستێت بە نەخشەی $T(x)=\begin{cases} 0.02x & 0<x\le 10\ 000\ 000 \\ 0.05x & x>10\ 000\ 000 \end{cases}$ بۆدیاریکردنی باجی دەرامەت بەپێی داهاتی تاك x . حکومەت بڕیاری زیادکردنی باجێکی 20% دا و باجێکی بڕاوەی 100 000 دینار سەپاند، بۆهەر کەسێك باجی لەسەرە بیدات، نەخشەیەکی نوێ بۆ دیاریکردنی نرخی باج بەپێی داهات بنووسە.

جێبەجێکردنەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
پۆلێنکارکردنی پرسیارەکان	لەهاشای نموونە
10-8	1
16-11	2
18-17	3
19	4

ڕیسای نەخشەی $g(x)$ پەیدابوو لەئەنجامی جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ 4x & x\geq 1 \end{cases}$ بنووسە بەپێی ئەمانە:

8 جوونەوەیەکی ستوونی هاوکۆڵکەی $\frac{1}{4}$

9 کشانی ئاسۆیی هاوکۆڵکەی 2

10 ڕاکێشانی 3 یەکە بۆ خوارەوە

یەکتربڕینەکانی نەخشەی $f(x)$ پاشان نەخشەی $g(x)$ دیاریکە بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەکەی

11 $f(x)=-\frac{3}{2}x+9$ ؛ $g(x)=\frac{2}{3}f(x)$

12 $f(x)=x^2-25$ ؛ $g(x)=f\left(\frac{5}{3}x\right)$

13 $f(x)=-\frac{2}{5}x+2$ ؛ $g(x)=f(2x)$

14 $f(x)=x^2-3x-4$ ؛ $g(x)=-f\left(\frac{1}{3}x\right)$

15 $f(x)=3^x-1$ ؛ $g(x)=2f(x)-4$

16 $f(x)=x^3+8$ ؛ $g(x)=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)$ بکێشە، پاشان جێگۆڕکێ بەکاربێنە بۆ دیارکردنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x)$

17 $f(x)=\frac{1}{2}x+4$ ؛ $g(x)=3f(-x)$

18 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$ ؛ $g(x)=-f(2x)$

19 **کار** بۆهەژمارکردنی تێچوونی پێداویستییەکانی ئاهەنگی قوتابخانەکان، یەکێك لە کۆمپانیاکان پشت دەبەستێت بەم نەخشەیە. $c(n)=\begin{cases} 18\ 000n & n\leq 50 \\ 400\ 000+10\ 000n & n>50 \end{cases}$ کاتێك n ژمارەی کەسان بێت.

أ بەڕێوەبەری کۆمپانیاکە بڕیاریدا لە وەرزی زستان نرخەکان 10%دابەزێنێت. نەخشەی نوێ بۆ هەژمارکردنی تێچوونەکان بنووسە.

ب بەڕێوەبەری کۆمپانیاکە بڕیارێکی تریدا، بۆهەر کەسێك بڕی 2000 دینار دابەشکێنێت، نەخشەی نوێ بۆ هەژمارکردنی تێچوونەکان بنووسە.

پۆلیس لەهەندێك لە شارەکان کامێرای وێنەگرتن دادەنێن، بۆدیاریکردنی ئەو ئۆتۆمبیلانەی سەرپێچی دەکەن و سزایان دەدات.

20 **ئارامی هاتوچۆ** شارەوانی پایتەخت ئەو ئۆتۆمبیلانەی ڕادەی خێرایی دیاریکراو تێدەپەڕێنن سزادەدات، بەپێی ئەم خشتەی بەرامبەر

سزادانی تێپەڕاندنی خێرایی دیارکراو	
زیانە ڕۆیی (km / h)	سزادان (دینار)
10–1	30 000
15–11	50 000
20–16	100 000
25–21	150 000
26←	200 000

أ نەخشەیەك بۆ هەژمارکردنی نرخی سزادان بەپێی ماوەی تێپەڕاندن بنووسە

ب شارەوانی سزایەکی تر بڕەکەی 50 000 دینار دەسەپێنێت، ئەگەر هاتوو ڕادەی خێرایی لەو شوێنانەی قوتابخانەی تێدایە تێدەپەڕێنێت. نەخشەیەك بنوسە کە نرخی سزادان لەو شوێنانەی قوتابخانەی تێدایە دیارییکات.

ج **چی دەبێت ئەگەر ...؟** شارەوانی بڕیاریدا سزادان لەسەر ڕادەی خێرایی بە 15% زیادبکات نەخشەی نوێ بۆ دیارکردنی سزادان بنووسە.

21 **بیری ڕەخنەگر** وادابنێ ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ تەوەری x، n جار دەبڕێت.

أ چەندجار ڕوونکردنەوەی نەخشەی $bf(ax)$ تەوەری x دەبڕێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

ب ڕوونبکەوە بۆچی ناتوانیت ژمارەی ئەو حاڵانە دیاریکەیت کە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە $f(x-h)+k$ تەوەرەی x دەبڕێت.

22 **پارە** یەکێك لە بانکەکان ڕێگە بە هەڵگرانی ئەو کارتە بانکییەی دەریکردووە دەدات قەرز لە ئامێری ڕاکێشانی بانك گوژمەی 6000 دینار وەربگرێت، ئەگەر نرخی گوژمەی ڕاکێشراو 200 000 تێپەڕنەکات،و 3% نرخی گوژمەی ڕاکێشراو کاتێك لە 200 000 دینار زیاتربوو.

أ نەخشەیەك بنووسە، ئەو بڕە پارەی بانکەکە بەپێی گوژمەی ڕاکێشراو وەریدەگرێت بنوێنێت.

ب وادابنێ بانکەکە بڕیاریدا ئەوەی وەریدەگرێت 15% زیادبکات. نەخشەیەك بۆ ئەمە بنووسە.

23 خوێندکارەکان لە ئاهەنگی لەدایکبوونی یەکێك لە هاوڕێکەیان بە ڕیزێکی درێژ وەستابوون، خوێندکاری خانەخوێ ڕستەیەکی بەگوێی خوێندکاری یەکەم چپاند، و داوایلێکرد بە چپە بۆ خوێندکاری پاش خۆی بیگوازێتەوە، ئەویش ڕستەکەی بە گوێی پاش خۆیدا چپاند و داوایلێکرد بۆ خوێندکاری پاش خۆی بگوازێتەوە و بەم شێوەیە ... هەتا ڕستەکە گەیشتە خوێندکاری کۆتایی، بەدەنگی بیستراو بەرامبەر هەموو هاوڕێکانی ڕستەکەی گوتەوە. نەخشەی $T(n)=\begin{cases}3.5n & n\le 8\\ 5.4n-8 & n>8\end{cases}$ ڕێسایەکە بۆ هەژمارکردنی کاتی خەمڵێنراو بە چرکە بۆ گواستنەوەی ڕستەکە لە یەکەم خوێندکار تا دوا خوێندکار لە ڕیزەکەدا (n ژمارەی خوێندکارەکانە لە ڕیزەکەدا).

أ یارییەکە جارێکی تر دووبارەکرایەوە خوێندکارەکان لە یاریکردندا بە ڕێژەی 20% لە یەکەم جار خێراتربوون.

ب کاریگەری باشبوونی توانای خوێندکاران لەسەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی $T(n)$ باسبکە.

24 **تەکنەلۆژیا** مۆرفینگ Morphing تەکنەلۆژیای بژمێریە، ڕێگای بە گۆڕینی وێنەیەك بۆ وێنەیەکی تر دەدات وەك لە زنجیرە وێنەی سەرەوەدا دیارە. ئەم تەکنەلۆژیایە بەچەند خاڵێك لە وێنەکەوە بۆ وێنەیەکی تر دەگۆڕێت

أ وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکانی $f(x)=\left\{\frac{1}{2}x+4\right.$ کاتێك $1\le x\le 2$ و $g(x)=\left\{-x^2+6x-7\right.$ کاتێك $2\le x\le 4$ و $h(x)=\left\{-\frac{1}{2}x+7\right.$ کاتێك $4\le x\le 5$ لەهەمان ڕووتەختی پۆوتان بکێشە.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەمانە بکێشە $f_1(x)=-f(x)+8$ و $g_1(x)=-5g(x)+3$ و $h_1(x)=-h(x)+8$

بۆهەر نەخشەیەك نەخشەیەکی پەیدابوو لەئەنجامی جێگۆڕکێیەکەی بە جێگۆڕکێی دیاریکراو بنووسە

25 $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & x\le -3\\ -5x+3 & x>-3\end{cases}$ ، ڕاکێشانی 7 یەکە بۆ خوارەوە.

26 $f(x)=\begin{cases}3x^2 & x<1\\ -2x+4 & x\ge 1\end{cases}$ ، کشانی ستوونی هاوکۆلکەکەی 5 بێت.

27 **بەروبوومەکان** یەکێك لە جوتیارەکان بەر و بوومەکانی بە نرخێکی قایلکەر (مغرية) خستەڕوو.

أ وێنەیەکی ڕونکردنەوەیی بکێشە تێچوونی کڕینی هەندێك لەنێوان $0\ kg$ و $10\ kg$ بنوێنێت.

ب نەخشەی ڕێسا پەلدار بنووسە کەبتوانرێت لەهەژمارکردنی نرخی $x\ kg$ بەروبوومی کشتوکاڵی بەکاربهێنرێت.

ج **چی دەبێت ئەگەر...؟** لە کۆتایی ڕۆژ خستنە ڕوویەکی تری نیشاندا بۆ کڕیار بەرامبەر هەر کیلۆگرامێك دەیکڕێت یەك کیلۆگرام بەخۆڕایی بێت، وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی نەخشە نوێیەکە بکێشە ئەو جێگۆڕکێیەی نەخشەی بنەڕەتی پەیدای دەکات، باسیبکە.

28 **کار** یەکێك لە کۆمپانیاکانی فرۆشتنی بزمێر پشت بە نەخشەی $P(n) = -0.002n^2 + 19n - 9000$ دەبەستێت بۆ دیاریکردنی قازانجەکانی فرۆشتنی n بزمێردا. کۆمپانیاکە بۆ ساڵی داهاتوو پشت بە نەخشەی $R(n) = P(0.8n)$ دەبەستێت.

أ کاریگەری ئەم گۆڕانکارییانە لەسەر ژمارەی ئەو بزمێرانەی کۆمپانیاکە پێویستە بیفرۆشێت چییە بۆ ئەوەی زۆرترین قازانجی دەستکەوێت؟

ب ژمارەی بزمێرەکانی پێویستە بیفرۆشێت بۆ هێنانەدی بەرزترین ڕادەی قازانج بدۆزەوە.

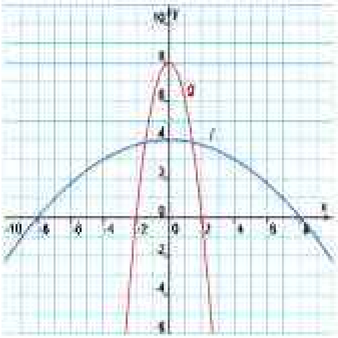
29 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** نەخشەیەکی هێڵی، یەکتربڕینە ئاسۆییەکەی یەکسانە بە 2 و یەکتربڕینە ستوونییەکەی یەکسانە بە 3 نەخشەکە بە شێوەی ستوونی فراوان بکرێت هاوکۆلکەی 2 بێت، پاشان 3 یەکە بۆ خوارەوە ڕابکێشرێت، وە بەشێوەی ئاسۆیی فراوانبکرێت هاوکۆلکەی 2 بێت، یەکتربڕینە نوێیەکانی نەخشە پاش جێگۆڕکێ چەندە؟

30 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆچی لە ڕاکێشانی ستووندا بواری نەخشەکە ناگۆڕێت بەڵام لە ڕاکێشانی ئاسۆییدا بوارەکەی دەگۆڕێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

31 **بنووسە** ئایا دەتوانرێت ڕوونکردنەوەیەکی پساو (بەیەکەوە نەبەستراو) بۆ ڕونکردنەوەیەکی نەپساو جێگۆڕکێ پێبکرێت، تەنها کشان و چوونەوەیەك بەکاربهێنرێت؟

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

32 کام لەمانەی خوارەوە بریتییە لە نەخشەی $g(x)$ لە وێنەی ڕونکردنەوەیی بەرامبەردا؟



أ $g(x) = 2f\left(\frac{1}{4}x\right)$ ج $g(x) = 2f(4x)$

ب $g(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4}x\right)$ د $g(x) = \frac{1}{2}f(4x)$

33 کام لەمانە نەخشەی $g(x) = f(4x)$ یە کاتێ $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 8 \\ x^2 & x \le 8 \end{cases}$

أ $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x > 2 \\ \frac{x^2}{16} & x \le 2 \end{cases}$ ج $g(x) = \begin{cases} 8x & x > 32 \\ 4x^2 & x \le 32 \end{cases}$

ب $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x > 8 \\ \frac{x^2}{16} & x \le 8 \end{cases}$ د $g(x) = \begin{cases} 8x & x > 2 \\ 16x^2 & x \le 2 \end{cases}$

34 یەکتربڕینی ستوونی نەخشەی $g(x) = \frac{3}{5}f(5x)$ بریتییە لە 15. یەکتربڕینی ستوونی بۆ نەخشەی $f(x)$ چەندە؟

أ 3 ب 9 ج 25 د 75

بەرەنگاری و فراوانکردن

35 **ئەندازە** نەخشەی $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 4 & x < 0 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & x \ge 0 \end{cases}$ بەکاربهێنە.

أ وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ بکێشە و یەکتربڕینەکانی دیاربکە. پاشان ڕووبەری ناوچەی دیاریکراو بە ڕوونکردنەوەی نەخشەکە و تەوەرەی یەکەم هەژماربکە.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x) = 4f(2x)$ بکێشە. پاشان ڕووبەری ناوچەی دیاریکراو بە ڕوونکردنەوەکە و تەوەرەی یەکەم هەژمار بکە.

36 نەخشەی $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ بەکاربهێنە.

أ یەکتربڕینی نەخشەی $g(x) = 3f\left(\frac{1}{2}x\right)$ دیاربکە ب یەکتربڕینی نەخشەی $h(x) = -g\left(\frac{1}{2}x\right)$ دیاربکە

پێداچوونەوەی لوولپێچی

37 **زەویناسی** لەنێوان ساڵی 1999 و 2002 دا 973 بومەلەرزە لە ولاتە یەکگرتووەکانی ئەمریکای داوە %43 ئەو بومەلەرزانە لە کالیفۆرنیای داوە بە نزیکی چەند بومەلەرزە لەو ماوەیە لە کالیفۆرنیای داوە. (پۆلەکانی پێشوو)

گەورەترین و بچووکترین بەها بۆهەر نەخشەیەک بدۆزەوە، پاشان بوار و مەودای نەخشەکە دیاریبکە (پۆلەکانی پێشوو)

38 $f(x)=4x^2-2x+8$

39 $g(x)=-3x^2+6x-9$

بەهای هەر نەخشەیەکی ڕێسا پەلداری خوارەوە کاتێک $x=-4$ و $x=0$ و $x=5$ هەژماربکە (وانەی 5−2)

40 $f(x)=\begin{cases}3 & x<1\\ x^2-4 & x\geq 1\end{cases}$

41 $g(x)=\begin{cases}5-2x & x<-3\\ 4+x & x\geq -3\end{cases}$

بەشی
5

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

1-5 نەخشە ڕێسا پەلدارەکان

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

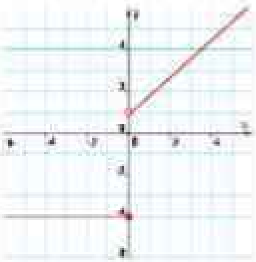
1 $f(x)=\begin{cases}3 & x<0\\ 2x+3 & x\ge 0\end{cases}$

2 $h(x)=\begin{cases}-x+1 & x<-3\\ -x & -3\le x<1\\ -x-1 & x\ge 1\end{cases}$

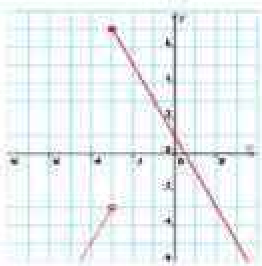
3 بەکرێ گرتنی پاسکیل بۆ گواستنەوە لە شاخ بۆ سێ کاتژمێری یەکەم 25 000 دیناری تێدەچێت، و 5000 دینار بۆهەر کاتژمێرێکی زیادە. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بۆ بەکرێگرتنی پاسکیل بۆ کاتێکی دیاریکراو لە 0 تا 8 کاتژمێر.

نەخشەیەکی ڕێسا پەلدار بۆهەر یەکێك لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە بنووسە.

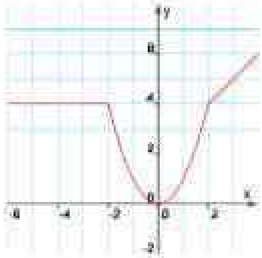
4



5



6



2-5 جێگۆڕکێی نەخشەکان

یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی و ستوونی بۆ نەخشەی $f(x)$ دیاریبکە، و دەرئەنجامی یەکتربڕینەکانی ئاسۆیی و ستوونی بۆ نەخشەی $g(x)$ بەبێ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی دیاریبکە.

7 $g(x)=-f\left(\frac{1}{2}x\right)$ ، $f(x)=2x-2$

8 $g(x)=2f(x)$ ، $f(x)=x^2-4$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی $g(x)$ بکێشە بە زانینی $f(x)$

9 $g(x)=2f(x)+3$ ، $f(x)=|x|-3$

10 $g(x)=-3f(x)$ ، $f(x)=x^2+1$

3-5 کردارەکان لەسەر نەخشەکان

Operations with Functions

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

کالاهێنەرەکان دەتوانن کردارەکان لەسەر نەخشە بەکاربهێنن بۆ دیاریکردنی تێچوونی ئەوەی بە دراوی بیانی دەیکڕن (نموونە 5)

ئامانجەکان

- کۆکردنەوە و لێدەرکردنی نەخشەکان و لێکدان و دابەشکردنیان.
- ئاوێتەکردنی نەخشەکان و هەژمارکردنی بەهای نەخشەی ئاوێتە

دەتوانیت کردارەکان لەسەر نەخشەکان ئەنجامبدەیت، وەك چۆن کردارەکان لەسەر ژمارەکان و بڕەکان ئەنجام دەدەیت. دەتوانیت نەخشەکان کۆبکەیتەوە و لە یەکتریان دەربکەیت و لێکیان بدەیت. ئەو کردارانەش لەسەر ڕێساکانیان ئەنجامدەدرێت.

فێربە

کردارەکان لەسەر نەخشەکان	
کردارەکە	**نووسینەوە**
کۆکردنەوە	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
لێدەرکردن	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
لێکدان	$(fg)(x)=f(x)\times g(x)$
دابەشکردن	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ کاتێك $g(x)\neq 0$

نموونە 1 کۆکردنەوە و لێدەرکردنی نەخشەکان

$f(x)=2x^2+4x-6$ ، $g(x)=2x-2$ هەر نەخشەیەك بدۆزەوە.

أ $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$=(2x^2+4x-6)+(2x-2)$$ لەجیاتی هەرنەخشەیەك ڕیساکەی دابنێ
$$=2x^2+6x-8$$ سادەبکە

ب $(f-g)(x)$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$=(2x^2+4x-6)-(2x-2)$$ لەجیاتی هەر نەخشەیەك ڕێساکەی دابنێ
$$=2x^2+4x-6-2x+2$$ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە
$$=2x^2+2x-4$$ سادەبکە

خۆت تاقیبکەرەوە / خاڵی چاودێری

1. $f(x)=5x-6$ ؛ $g(x)=x^2-5x+6$ ئەمانە بدۆزەوە.

أ $(f+g)(x)$ ب $(f-g)(x)$

کاتێك نەخشەیەك دابەشی نەخشەیەکی تر دەکەیت دڵنیابە لەهەر بوارێك لە ئەنجامی دابەشکردنەکە پەیدادەبێت.

نموونــــــە 2 لێکدان و دابەشکردنی نەخشەکان

$f(x)=2x^2+4x-6$: $g(x)=2x-2$ هەر نەخشەیەک بدۆزەوە.

أ $(gf)(x)$

$$(gf)(x)=g(x)\times f(x)$$

$=(2x-2)(2x^2+4x-6)$ ئەجیاتی هەر نەخشەیەک ڕێساکەی دابنێ

$=2x(2x^2+4x-6)-2(2x^2+4x-6)$ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە

$=4x^3+8x^2-12x-4x^2-8x+12$ لێکدانیکە

$=4x^3+4x^2-20x+12$ سادەبکە

ب $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$=\frac{2x^2+4x-6}{2x-2}$ ئەنجامی دابەشکردنەکە بەشێوەی کەرت بنووسە

$=\frac{2(x-1)(x+3)}{2(x-1)}$ بەتەواوەتی شیتەڵیکە سەرنجبدە $x\neq 1$

$=\frac{2(x-1)(x+3)}{2(x-1)}$ کورتیکەوە

$=x+3 \quad (x\neq 1)$ سادەبکە

خاڵی چاودێری

2. $f(x)=x+2$: $g(x)=x^2-4$ هەر نەخشەیەک بدۆزەوە.

أ $(fg)(x)$ **ب** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

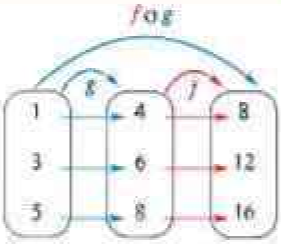
فێربە

ئاوێتەکردنی نەخشەکان

ئاوێتەکردنی نەخشەی f لەگەڵ نەخشەی g ، بریتییە لەو نەخشەی یەکەم بەم شێوە دەنووسرێت

$$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)$$

بواری نەخشەی ئاوێتە $(f\circ g)(x)$ بریتییە لە کۆمەڵە بەهای x لەبواری g دا، وادەکات لە $g(x)$ سەربە بواری f بێت.



بۆ هەژمارکردنی $f\circ g\ (1)$ یەکەمجار هەژماری $g\ (1)$ بکە:

$g(1)=4$

پاش ئەوە هەژماری $f\ (4)$ بکە

$f(4)=8$

کەواتە $(f\circ g)\ (1)=f(g\ (1))=f\ (4)=8$

خوێندنەوەی بیرکاری

نەخشەی ئاوێتە $(f\circ g)x$ یان $(f\circ g)$ بە f of g of x یان g of f of x دەخوێنرێتەوە

ڕێسای ڕیزبەندی کردارەکان لەسەر نەخشە هەمان ڕێسای ڕیزبەندی کردارەکانە لەسەر ژمارەکان و برەکان بۆ هەژماری $(f\circ g)(3)$ یەکەمجار $g\ (3)$ هەژماربکە، پاشان هەژماری بەهای f بکە، کاتێک بەهای بۆ ناوی $g\ (3)$ بێت.

نموونـــــە 3 هەژمارکردنی بەهای نەخشە ناوێتەکان

$f(x)=3x+1$ و $g(x)=x^3$ هەژماری هەر بەهایەك بکە

أ $f(g(2))$

هەنگاوی 1 هەژماری $g(2)$ بکە

$g(x)=x^3$ $\quad g(2)=2^3=8$

هەنگاوی 2 هەژماری $f(8)$ بکە

$f(x)=3x+1$ $\quad f(8)=3\times 8+1=25$

کەواتە $f(g(2))=25$

ب $g(f(2))$

هەنگاوی 1 هەژماری $f(2)$ بکە

$f(x)=3x+1$ $\quad f(2)=3\times 2+1=7$

هەنگاوی 2 هەژماری $g(7)$ بکە

$g(x)=x^3$ $\quad g(7)=7^3=343$

کەواتە $g(f(2))=343$

ئاگاداریە!

هێمای ناوێتەکردنی نەخشەی ($\circ$) و هێمای لێکدان ($\cdot$) تێکەڵاو مەکە
$(fg)(x) \neq f(g(x))$

خاڵی چاودێری

3. $f(x)=2x-3$ و $g(x)=x^2$ هەژماری هەر بەهایەك بکە.

أ $f(g(3))$ ب $g(f(3))$

دەتوانیت بڕە جەبریەکان وەك بەهای بۆناو نەخشە بەکاربهێنیت، وەك چۆن ژمارەکان بەکاردەهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕیسای نەخشەی ناوێتە $f(g(x))$ لەنەخشەی $f(x)$ لەجیاتی x بڕەی $g(x)$ دابنێ. پاشان ئەو بڕەی دەردەچێت بەسادەترین شێوەی بنووسە.

نموونـــــە 4 نووسینی نەخشەی ناوێتە

$f(x)=5x+2$ و $g(x)=\frac{2}{x-1}$ هەر نەخشەیەکی ناوێتە بنووسە و بوارەکەی دیاریبکە

أ $f(g(x))$

$f(g(x))=f\left(\frac{2}{x-1}\right)$ — لەجیاتی x ڕێسای نەخشەی g دابنێ

$=5\left(\frac{2}{x-1}\right)+2$ — ڕێسای f بەکاربهێنە. سەرنجبدە $x\neq 1$

$=\frac{10}{x-1}+2 \quad ; \ x\neq 1$ — سادەبکە

بواری نەخشەی $f(g(x))$ بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان جگەلە 1 یان $\{x|x\neq 1\}$ چونکە $g(1)$ پێناسە نەکراوە.

ب $g(f(x))$

$g(f(x))=g(5x+2)$ — لەجیاتی x ڕێسای نەخشەی f دابنێ

$=\frac{2}{(5x+2)-1}$ — ڕێسای نەخشەی g بەکاربهێنە، سەرنجبدە $x\neq$

$=\frac{2}{5x+1} \quad , \ x\neq -\frac{1}{5}$ — سادەبکە

بواری نەخشەی $g(f(x))$ بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان جگەلە $-\frac{1}{5}$ یان $\left\{x|x\neq -\frac{1}{5}\right\}$ چونکە $f\left(-\frac{1}{5}\right)=1$ و $g(1)$ پێناسە نەکراوە.

خاڵی چاودێری

4. $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\sqrt{x}+2$ نەخشەی ناوێتە بنووسە و بوارەکەی دیاریبکە

أ $f(g(x))$ ب $g(f(x))$

دەتوانیت ناوێتەکردنی نەخشەکان بەکاربهێنیت بۆ سادەکردنی زنجیرەیەك لە نەخشەکان.

نموونـــــه 5 جێبەجیکردن لەسەر کارگێڕی کار

دڵسۆز ماتۆڕسکیلێکی (سکوتر) کەنرخی بەیۆڕۆ بۆ دانراوە لە ئیتاڵیاوە دەهێنێت. تێچوونی گشتی هەر ماتۆڕسکیلێک%10باجی گومرگی و 75 یۆڕۆ بارکردنی دەچێتەسەر.

نرخی دراوەکان

بۆهەر 1000 دیناری عیراقی

دۆلاری ئەمریکی 0.84

ڕیاڵی سعودی 3.09

لیرەی لوبنانی 1260

یۆرۆی ئەوروپی 0.52

أ نەخشەیەکی ناوێتە بنووسە، نموونەیەک بنوێنێت، بۆ تێچوونی هەر ماتۆڕسکیلێک بەدینار بەپێی نرخەکەی یۆڕۆ(c)هەژماربکات.

هەنگاوی 1 نەخشەیەک بۆهەژمارکردنی تێچونی ماتۆڕسکیلێک بەیۆڕۆ بنوسە

$$E(c)=c+0.1c+75$$
$$=1.1c+75$$

هەنگاوی 2 نەخشەیەک بۆهەژمارکردنی تێچونی بە دینار بەپێی تێچونی بەیۆڕۆ بنووسە $R(c)=1920c$

1 یۆڕۆ = 1920 دینار بەکاربهێنە

هەنگاوی 3 نەخشەی ناوێتەی $R\left(E(c)\right)$ بدۆزەوە

$R(E(c))=1920E(c)=1920(1.1c+75)=2112c+144\ 000$ لەجیاتی دابنێ

ب هەژماری تێچونی ماتۆڕسکیلێک بەدینار بکە نرخەکەی **1200** یۆڕۆ بێت.

هەژماری بەهای نەخشەی ناوێتەی $R\left(E(c)\right)$ بکە کاتێک $c = 1200$

$$R\left(E(1200)\right)=2112\times1200+144\ 000=2\ 678\ 000$$

تێچونی گشتی ئەم ماتۆڕسکیلە 000 678 2 دینارە

خاڵی جاوەڕێ

5. یەکێک لە دوکانەکانی ئامێری مۆسیقی ئاشکرایکرد ئامێری عود بە ڕێژەی 20% دادەشکێنێت بۆئەو کڕیارانەی بەرگی عود دەکڕن لە دوکانەکەدا. داشکانێکی تری بۆ زیادکرا ڕێژەکەی 15% بۆهەر ئامێرێکی عود کە دەیکڕن.

أ نەخشەیەکی ناوێتە بنووسە بۆهەژمارکردنی نرخی کۆتایی بۆئەو کڕیارەی بەرگی عود دەکڕێت لەکاتی کڕینی ئامێرێکی عود دا نرخەکەی x دینارە.

ب ئالان یەکێکە لەو کڕیارانەی لەدوکانەکە زۆرترین شت دەکڕێت. عودێکی کڕی نرخەکەی 000 248 دیناربوو، ئالان ئەو بەرگەی لەو دوکانە بەچەند کڕیوە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ئەو هۆیەی وانەکات لە $(f+g)(x)=(g+f)(x)$ ڕوونبکەوە.
2. هەردوو نەخشەی $f(x)$ و $g(x)$ بدۆزەوە بەجۆرێک کە $f(g(x))=g(f(x)$
3. ڕێکخەربە ئەم خشتەیە دروستبکەوە و تەواوبکە، پاشان هەرکردارێک لەسەر دوو نەخشەکە بەرێگای ڕاست بنووسە.

فێربە

کردار	نووسین
کۆکردنەوەی دوو نەخشە	
لێدەکردنی دوو نەخشە	
لێکدانی دوو نەخشە	
دابەشکردنی دوو نەخشە	
ناوێتەکردنی دوو نەخشە	

3-5 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** ئاوێتەکردنی نەخشەکان بەچی لە کردارەکانی تر جیاوازە؟

پروانە نموونە 1

$f(x)=8x+13$ ، $g(x)=x^2-5x$ هەر نەخشەیەک بدۆزەوە.

2 $(f+g)(x)$ **3** $(f-g)(x)$ **4** $(g-f)(x)$

پروانە نموونە 2

$f(x)=2x^2+2x$ ، $g(x)=x+1$ هەر نەخشەیەک بدۆزەوە.

5 $(fg)(x)$ **6** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **7** $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

پروانە نموونە 3

$f(x)=3x^2$ ، $g(x)=7-x$ هەر بەهایەک بدۆزەوە.

8 $f(g(5))$ **9** $g(f(5))$ **10** $f(g(-2))$

پروانە نموونە 4

$f(x)=x^2$ ، $g(x)=2x-3$ ، $h(x)=\sqrt{x+1}$ هەر نەخشەیەک بدۆزەوە و بوارەکەی دیاریبکە

11 $f(g(x))$ **12** $g(f(x))$ **13** $f(h(x))$

پروانە نموونە 5

14 **ئابووری بەکاربەر** بۆ خوێندن لە زانکۆ، کرێکار ئەو پارەی وەریدەگرێت 10%ی پاشەکەوت دەکات و 50 000 دیناری تری دەخاتەسەر، پوختەی مانگانەی کرێکار وەریدەگرێت لە پاش داشکانی باج و سەرانە 80% ی موچە بنەڕەتی یەکەی پێکدەهێنێت.

أ نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە بۆ هەژمارکردنی ئەوەی کرێکار مانگانە پاشەکەوتی دەکات بەپێی مووچە بنەڕەتیەکی g .

ب ئەوەی کرێکار پاشەکەوتی دەکات هەژماربکە، ئەگەر بزانی مووچەی بنەڕەتی مانگانە 2 400 000 دینارە.

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
شیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە بکە
18-15	1
23-19	2
29-24	3
32-30	4
33	5

$f(x)=2x^2-8$ ، $g(x)=x^2+5x+6$ ، $h(x)=2x+4$ هەر نەخشەیەک بدۆزەوە.

15 $(f+g)(x)$ **16** $(f-g)(x)$ **17** $(f+h)(x)$ **18** $(g-h)(x)$

19 $(fg)(x)$ **20** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **21** $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ **22** $(gh)(x)$ **23** $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$

$f(x)=2\sqrt{x+3}$ ، $g(x)=-3x+1$ هەر بەهایەک بدۆزەوە.

24 $f(g(1))$ **25** $g(f(1))$ **26** $f(g(4))$

27 $g(f(6))$ **28** $f\left(g\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ **29** $g(f(97))$

$f(x)=4x+3$ ، $g(x)=\frac{x}{x+3}$ ، $h(x)=x^2-2$ هەر نەخشەیەکی ئاوێتە بدۆزەوە و بوارەکەی دیاریبکە.

30 $f(g(x))$ **31** $g(f(x))$ **32** $f(h(x))$

33 **کارەکان** بڕی تێچوونی کاشی کردنی ژوورێک 100 000 دینارە، بۆهەریەک پاردی دووجا 4000 دینار زیاد دەدات، بزانە (پارد یەکەیەکی ئینگلیزیە بۆ پێوانی درێژی و هەر پاردەیەک یەکسانە بە 3 پێ و پێ یەکەیەکی تری ئینگلیزیە بۆ پێوانی درێژی بەکاردێت دەکاتە 30.48 cm

أ نەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی کاشی کردنی ژوورێک ڕووبەرەکەی x پێ چوارگۆشە بێت.

ب ڕووبەری ژوورەکە بە پێ دووجا بدۆزەوە ئەگەر زانیت تێچوونی کاشی کردنەکە 380 000 دینارە.

34 لەکاتی گەرمکردنی هەوای ناو باڵۆن؛ تا °83 بۆهەریەک پێ سێجا لەهەوا توانای بەرزکردنەوەی g 25° بەنزیکی هەیە

أ نەخشەیەک بنووسە بۆ باڵۆنێك و ژمارەی ئەو گرامانەی کە دەتوانێت هەڵیبگرێت کاتێك xm^3 هەوای گەرمی تێدابێت.

ب چەند مەتر سێجا لە هەوای گەرم پێویستە بۆ هەڵگرتنی کەسێکە بارستەکەی 75kg بێت.

ج نەخشەی $g(x)=\frac{x}{453.6}$ ڕێسایەکە بۆ گۆڕینی گرام بۆ (پاوەند لە یەکەیەکی ئینگلیزیە بۆ پێوانی بارستایی)، نەخشەیەك بنوسە ژمارەی ئەو پاوەندانەی باڵۆنەکە دەتوانێت هەڵیبگرێت کاتێك x پێ سێجا هەوای گەرمی تێدابێت، بنوێنێت.

د ژمارەی پێ سێجاکان لەهەوای گەرم بۆ بەرزکردنەوەی 1000 پاوەند بخەمڵێنە.

35 **ئابوری بەکاربەر** کۆژین دوو بلیتی کڕینی پێیە، دەتوانێ بۆکڕینی پێڵاو لەدوکانێکی پێڵاو بەکاریبهێنێت. بلیتی یەکەم داشکانی 10 000 دینار بۆ دابین دەکات بەڵام بلیتی دووەم داشکانی ڕێژەی 15%دابین دەکات.

أ نەخشەی $f(p)$ بنووسە، بۆئەو پارانەی کۆژین بۆ کڕینی پێڵاو دەیدات نرخەکەی p دینار بێت، ئەگەر تەنها بلیتی یەکەم بەکاربهێنێت.

ب نەخشەی $g(p)$بنووسە، بۆئەو پارەی کۆژین بۆ کڕینی پێڵاو دەیدات نرخەکەی p دینار بێت، ئەگەر تەنها بلیتی دووەم بەکاربهێنێت.

ج $g(f(p))$ و $f(g(p))$ بدۆزەوە.

د ئامۆژگاری کۆژین دەکەیت، کام بلیتیان یەکەم جار بەکاربهێنێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

هـ کەمترین نرخ کۆژین دەیدات بۆ کڕینی جووتە پێڵاوێك نرخەکەی 49 000 دینار بێت بدۆزەوە.

36 **بوومەلەرزە** ئەو شەپۆڵەی بوومەلەرزە دروستی دەکات بەخێرایی 9km/s بڵاودەبێتەوە، زیانەکانی زۆر زۆردەبێت لەو ناوچانەی دەوری شوێنی بومەلەرزەکەیان داوە.

أ نەخشەیەك بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری ناوچەیەكkm^2 بومەلەرزە کاریتێدەکات پاش t چرکە بدۆزەوە.

ب زەویناسان خەملاندیان کاریگەری بوومەلەرزە کۆتایی دێت پاش ئەوەی ڕووبەری ناوچەی کارتێکراو دەگاتە $35000\ km^2$، کاریگەری بوومەلەرزەکە چەند دەخایەنێت.

دەروازەیەک

بوومەلەرزە

بوومەلەرزە لە ئەنجامی جوولەی چینەکانی زەوی نزیك شوێنی قڵیشتەردوو پەیدادەبێت. قڵیشتەکان شکانی توێکڵی زەوییە و دەکەوێتە سنووری چینە تەکتۆنیەکان.

37 **دانیشتوان** نەخشەی $p(t)=160\ 000\times1.05^t$ ڕێسایەکە بۆ دیاریکردنی ژمارەی دانیشتوانی یەکێك لە شارەکان، کاتێك t ژمارەی ساڵەکان بێت، کە لە ساڵی 1980 دا ئەنجامدراوە. و نەخشەی $d(p)=0.0044p$ ژمارەی پزیشکەکانی ئەم شارە بەپێی ژمارەی دانیشتوان بێت کاتێك p ژمارەی دانیشتوانی شارەکە بێت.

أ نەخشەییەك بنووسە بۆهەژمارکردنی ژمارەی پزیشکەکانی ئەم شارە بەپێی ژمارەی ساڵەکان، لە ساڵی 1980 وە.

ب **خەملاندن** ژمارەی پزیشکەکانی ئەم شارە بۆ ساڵی 2010 بخەمڵێنە.

ج کەی ژمارەی پزیشکەکانی ئەم شارە لە 5000 پزیشك زیاتر دەبێت؟

38 **بیری ڕەخنەگر** ئەگەر $f(x)=x$ئایا هەموو کات نەخشەی$f(g(x))$ یەکسانە بە نەخشەی $g(f(x))$ ڕوونبکەوە

ئەم دوو خشتەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی هەر بەهایەك.

39 $g(f(5))$ **40** $f(g(3))$ **41** $g(f(4))$ **42** $f(g(2))$

x	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	2	3

x	1	2	3	4
$g(x)$	1	2	4	8

43 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا دەتوانیت ئەم دوو خشتە بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی $f(g(4))$ ؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

44 **بنووسە** ئایا سەرجەمی دوو نەخشەی هێڵی دەبێتە نەخشەی هێڵی؟ ئایا ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشەی هێڵی دەبێتە نەخشەی هێڵی؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

45 کام لەم دوو نەخشە خوارەوە پاسەداتی ئەمە دەکەن، $f(x)$ و $g(x)$ کاتێك $(f \circ g)(x)=(3x+4)^2$

أ) $f(x)=3x+4$ ؛ $g(x)=x^2$

ب) $f(x)=x^2$ ؛ $g(x)=3x+4$

ج) $f(x)=(3x)^2$ ؛ $g(x)=4^2$

د) $f(x)=3x+4$ ؛ $g(x)=\sqrt{x}$

46 کام نەخشە بریتییە لە $(fg)(5)$ ئەگەر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=5x-2$

أ) 253 ب) 53 ج) 47 د) 13

47 کام لەمانەی خوارەوە نەخشەی $(f \circ g)(x)$ کاتێك $f(x)=4-x^2$ ، $g(x)=\frac{1}{2}x-2$ ؟

أ) $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{2}x^2$

ب) $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x$

ج) $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{2}x^3+2x^2+2x-8$

د) $(f \circ g)(x)=-x^2+\frac{1}{2}x+2$

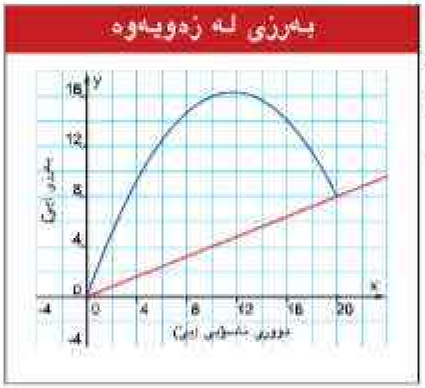
48 **تەنها وەڵام** $(f+g)(2)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=(x+1)^2$ و $g(x)=3x$

بەردنگاری و فراوانکردن

49 $g(x)$ بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $f(x)=2x-6$ و $f(g(x))=3x^2+4$

50 $g(f(x))$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=3x+8$ و $g(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 5x+2 & x\geq 0 \end{cases}$

51 **فیزیا** نەخشەی $y=-0.12x^2+2.8x$ ڕێسایەکە بۆ هەژمارکردنی بەرزی تۆپی پێ y دەنوێنێت. کە بە ئاڕاستەی گردەکە لێدەدرێت، بەپێی دووری ئاسۆیی x لەخاڵی لێدانەوە. هەروەها نەخشەی $y=\frac{2}{5}x$ دۆزینەوەی بەرزی خاڵێك لەسەر گردەکە بەپێی دووری لە خاڵی لێدانی تۆپەکە دەنوێنێت.



أ) بەرزی لە ئاستی خاڵی لێدان بۆ بەرزترین خاڵ تۆپەکە دەیگاتێ بدۆزەوە.

ب) بەرزی لە ئاستی خاڵی لێدان بۆ خاڵی کەوتنە خوارەوەی تۆپەکە لەسەر گردەکە بدۆزەوە.

پێداچوونەوەی لووپێچی

52 **کار** ساڵانە بەهای بزمێرێك نرخەکەی 2 500 000 دینارە بە ڕێژەی 20% دادەبەزێت. (وانەی 4-1)

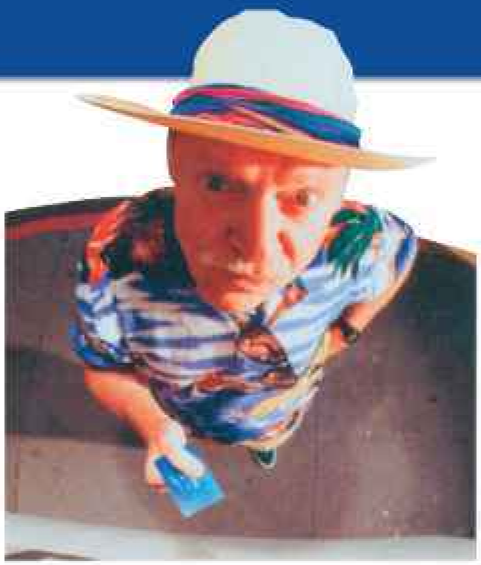
أ) نەخشەیەك بۆ دۆزینەوەی بەهای بزمێر پاش t ساڵ بنووسە.

ب) بەهای بزمێر پاش 10 ساڵ دەبێتە چەند؟

بنووسە ئەگەر زانیت $f(x)=\begin{cases} 8x & x\geq 0 \\ x-9 & x<0 \end{cases}$ ڕێسایەك بۆ هەر نەخشەیەك بنووسە (وانەی 5-2)

53 $g(x)$ بریتییە لە نەخشەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)$ بە ڕاکێشانی 5 یەکە بۆلای چەپ.

54 $h(x)$ بریتییە لە نەخشەی پەیدابوو لە جێگۆڕکێی نەخشەی $f(x)$ بە کشانی ئاسۆیی هاوکۆلکەی 3 بێت.



4–5 نموونە بیرکارییەکان

Mathematical Models

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

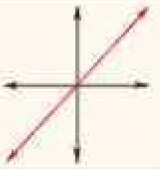
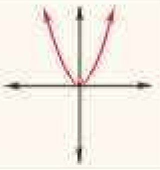
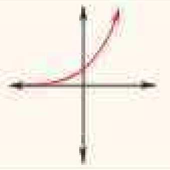
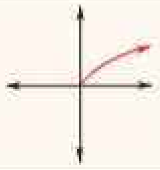
دەتوانیت نموونە بیرکارییەکان بۆ شیکردنەوە و پێشبینی کردنی ژمارەی ئامێرەکانی پارەپێدان (صرف الآلي) کە ئیش دەکەن بەکاربێنێت. (نموونە 3)

ئامانجەکان

بۆ نواندنی باری ژیانی ڕۆژانە بەهۆی نەخشەکان نموونەی بیرکاری بەکاردەهێنرێت بۆ بەجێهێنانی پێشبینییەکان.

زۆر لەو پێدراوانەی لەسەرپارەکانی ژیان کۆدەکرێنەوە شێوەیەک پێکدەهێنێت دەتوانیت بە بەکارهێنانی نەخشەیەک لەو نەخشانەی خوێندوتە بنوێنیت ئەو کاتە دەتوانیت ئەم نەخشانە بۆ شیکردنەوە و داڕشتنی پێشبینییەکان بەکاربهێنیت. هەندێک لەو نەخشە بنەڕەتیانەی تا ئێستا خوێندوتە وەبیر خۆت بێنەوە.

فێربە

نەخشە بنەڕەتییەکان				
جۆر	هێڵی	دووجا	توانی	ڕەگی
هاوکێشە	$f(x)=x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=b^x, b>0$	$f(x)=\sqrt{x}$
ڕوونکردنەوە				
نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان	نەگۆڕی جیاوازییەکانی یەکەم بۆ بەهایەکانی y کە بە بەهایەکانی x وە بەستراوە لە دووریدا یەکسانن	نەگۆڕی جیاوازییەکانی دوویەم بۆ بەهایەکانی y کە بە بەهایەکانی x وە بەستراوە لەدووریدا یەکسانن	نەگۆڕی ڕێژەی بەهایەکانی y کە بە بەهایەکانی x وە بەستراوە لە دووریدا یەکسانن	نەگۆڕی جیاوازییەکانی دوویەم بۆ بەهایەکانی x کە بە بەهایەکانی y بەستراوە لەدووریدا یەکسانن

پارمەتی

لەبەرئەوەی نەخشەی ڕەگی دووجای نەخشەی هەڵگەڕاوەیە بۆ نەخشەی دووجا ئەوا بەهای x و بەهای y ئاڵوگۆڕ دەبن.

نموونە 1 جیاکردنەوەی نموونەکان بە بەکارهێنانی نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان

نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەتی گونجاوتر بۆ نواندنی ئەم کۆمەڵە پێدراوانە.

أ درێژی سپرینگەکە پشت بەو بارستاییە دەبەستێت کە پێوەی هەڵواسراوە

بارستایی (kg)	4	5	6	7	8	9	10
درێژی (cm)	30.6	32	33.4	34.8	36.2	37.6	39

سەرنجبدە جیاوازی نێوان هەردوو بەهای هاوسێ بۆ بارستاییەکە نەگۆڕە. ساغبکەوە ئەگەر جیاوازی نێوان هەردوو بەهای هاوسێ بۆ درێژی نەگۆڕە.

درێژی (cm)	30.6	32	33.4	34.8	36.2	37.6	39

جیاوازییەکانی یەکەم 1.4 1.4 1.4 1.4 1.4 1.4

لەبەرئەوەی جیاوازی یەکەم نەگۆڕە ئەوا نەخشەی هێڵی گونجاوترە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە.

ب تەمەنی دار بە تیرەکەی دیاری دەکرێت.

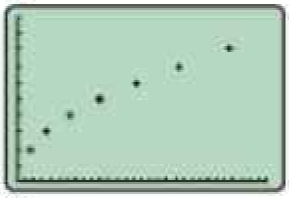
تیرەکەی (*cm*)	1.6	3.6	6.4	10.0	14.4	19.6	25.6
تەمەن (ساڵ)	2	3	4	5	6	7	8

سەرنجبدە جیاوازی نێوان هەردوو بەهای هاوسێ لە خشتەکەدا بۆ تەمەن نەگۆڕە. ساغبکەوە ئەگەر جیاوازی نێوان دوو بەهای تەنیشت بۆ تیرە نەگۆڕ بێت.

تیرەکەی (*cm*)	1.6	3.6	6.4	10.0	14.4	19.6	25.6

جیاوازییەکانی یەکەم 2.0 2.8 3.6 4.4 5.2 6.0

جیاوازییەکانی دووەم 0.8 0.8 0.8 0.8 0.8



لەبەرئەوەی جیاوازییەکانی دووەم بۆ گۆڕاوی ئازاد x نەگۆڕن، کە بە بەهاکانی گۆڕاوی بەستراو y دەوە بەستراوە لەدووریدا یەکسانن.

ئەوا نەخشەی ڕەگی دووجا گونجاوترین نموونەیە بۆ نواندنی ئەم پێدراوانە پاسەدان خاڵەکانی خشتەکە ئەوە دەردەخەن گونجاوترین نەخشە بریتییە لە $f(x)=\sqrt{x}$

ج قەبارەی بڕی ئاوی ماوە پاش بەهەڵمبوون بەکات دیاریدەکرێت.

کات (کاتژمێر)	1	2	3	4	5	6
قەبارە (mL)	512	384	288	216	162	121.5

لەبەرئەوەی جیاوازییەکانی نێوان دوو بەهای هاوسێ لەخشتەکەدا بۆ کات نەگۆڕە. تۆش ئەوە پاسەدان بکە جیاوازییەکانی نێوان دوو بەهای هاوسێ بۆ قەبارە نەگۆڕە.

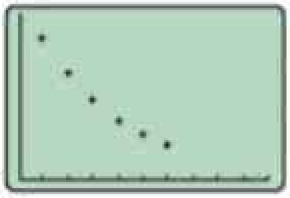
قەبارە (mL)	512	384	288	216	162	121.5

جیاوازییەکانی یەکەم 128- 96- 72- 54- 40.5-

جیاوازییەکانی دووەم 32 24 18 13.5

جیاوازییەکانی یەکەم نەگۆڕ نییە. هەروەها جیاوازییەکانی دووەم. ساغبکەوە ئایا ڕێژەی هەر بەهایەك لە قەبارە بۆ بەهای پێش خۆی نەگۆڕە یان نا.

$\frac{384}{512}=0.75$ $\frac{288}{384}=0.75$ $\frac{216}{288}=0.75$ $\frac{162}{216}=0.75$ $\frac{121.5}{162}=0.75$



لەبەرئەوەی ڕێژەی هەربەهایەکی قەبارە بۆ بەهای پێش خۆی نەگۆڕە. ئەوا نەخشەی توانی گونجاوترە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە.

ساغبکەوە لەم خاڵە ڕوونکردنەوەییانەدا دیارە کە پێدراوەکانی خشتەکە دەنوێنێت کە نەخشەی گونجاو بۆ نواندنی ئەم پێدراوانە بریتییە لە نەخشەی کەمبووە توانی (دالة تراجع أسّي)

خاڵی چاودێری

1. نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەتی گونجاو کە کۆمەڵە پێدراوەکان بنوێنێت.

أ

x	12	48	108	192	300
y	10	20	30	40	50

ب

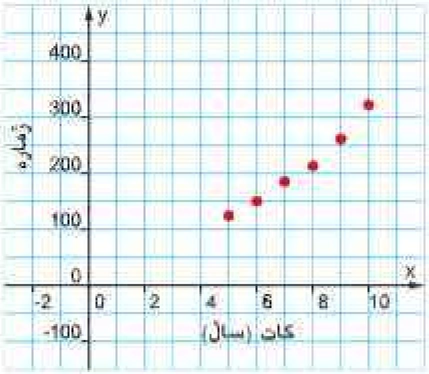
x	21	22	23	24
y	243	324	432	576

دەگمەنە جیاوازی نێوان پێدراوە ڕاستییەکان یان ڕێژەکەیان نەگۆڕبێت بەواتای بیرکارییانە. بەڵام دەتوانیت جیاوازییەکان یان ڕێژەکانیان شیبکەیتەوە بۆ ئەوەی بزانیت نزیکە لەوەی ببێتە نەگۆڕ. هەروەها دەتوانیت پێدراوە ڕاستییەکان بەخاڵی ڕوونکردنەوەیی بنوێنێت، جۆری نەخشەی گونجاو بۆ تواندنی بناسیتەوە پاشان فەرمانی لێژبوونەوە Regression لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەو نەخشەی پێدراوەکان بە باشترین شێوە دەنوێنێت.

نموونـــــە 2 جیبەجیکردن لەسەر پارێزگاریکردنی ڕەگەز

یەکێک لە زانایەکانی بواری ئاژەڵ پێدراوەکانی لەسەر پەرەپێدانی ژمارەیەک لە گامێشی بوفالو کۆکردەوە لە گەڵە گامێشێک کە لە کێڵگەیەکی سروشتی پەرەلاکرابوون نەخشەیەک بنووسە ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بنوێنێت.

کات (ساڵ)	5	6	7	8	9	10
ژمارە	124	150	185	213	261	322



هەنگاوی 1 خاڵی ڕوونکردنەوەیی دروستبکە کە پێدراوەکانی ناو خشتەکە بنوێنێت خاڵە ڕوونکردنەوەییەکان دەریدەخات کە شێوەیەکی دووجا یان شێوەیەکی توانی هەیە

هەنگاوی 2 لە جیاوازییەکان بکۆڵەوە.

ژمارە	124	150	185	213	261	322
جیاوازی یەکەم	26	35	28	48	61	
جیاوازی دووەم	9	-7	20	13		

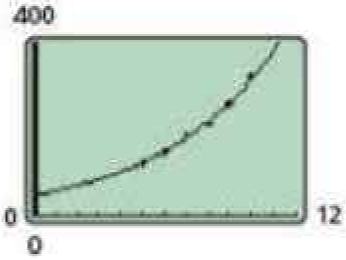
وادیارە نە جیاوازییەکانی یەکەم و نە جیاوازییەکانی دووەم نەگۆڕنییە.

هەنگاوی 3 لە ڕێژەکان بکۆڵەوە.

$\frac{150}{124} = 1.210$ $\frac{185}{150} = 1.233$ $\frac{213}{185} = 1.151$ $\frac{261}{213} = 1.225$ $\frac{322}{261} = 1.234$

هەموو ڕێژەکان نزیکە لە 1.2 ، ئەمەش هانمان دەدات لەدوای نموونەیەکی توانی بگەڕێین.

هەنگاوی 4 بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونەی توانی



نەخشەی توانی $f(x) = 48.581(1.207^x)$ ڕێسایەکە بۆ پێدراوەکانی خشتەکە.

یارمەتی

بۆنەوەی هاوکۆلکەی پەیوەستی r لە شاشەکە دەرکەوێ دوگمەی CATALOG 2nd پاشان 0 دابگرە پاشان Diagnostic On هەڵبژێرە.

خاڵی چاودێری

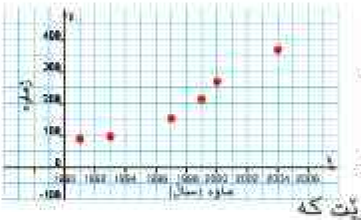
2. نەخشەیەک بنوسە پێدراوەکانی خشتەی خوارەوە بنوێنێت.

x	12	14	16	18	20	22	24
y	110	141	176	215	258	305	356

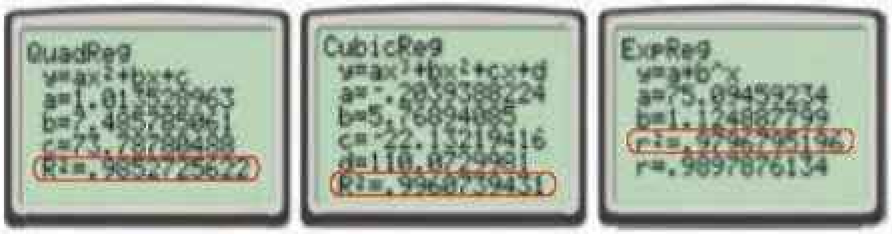
کاتێك پێدراوەکان ڕیزنەکرابن یان جیاوازی نێوانیان نەگۆڕنەبێت، پێویستە چەند نموونەیەك تاقیبکەیتەوە بۆ دۆزینەوەی ئەوەی باشتر پێدراوەکان دەنوێنێت. لە بژمێری ڕونکردنەوەییدا بەهایەك دەردەکەوێت پێیدەوترێت هاوکۆلکەی دیاریکردن «معامل التحديد» بە r^2 هێما کراوە یان هێمای R^2 بۆ دانراوە. هەتاکو هاوکۆلکەکە لە 1 نزیکبێتەوە، ئەوا نموونەی باشترین نواندنی کۆمەڵە پێدراوەکان.

نموونە 3 جێبەجێکردن لەسەر کردارەکانی بانك

لە پێدراوەکانی بەرامبەرت ژمارەکانی ئامێری پارەپێدان (صراف الالي) لە یەکێك لە وڵاتەکان ساڵ بەدوای ساڵ پیشاندەدات. ئەخشەیەك بنووسە ئەم کۆمەڵە پێدراوانە بنوێنێت بە پشتبەستن بە ساڵی 1990 ساڵی سفر بێت.



لەبەرئەوەی جیاوازییەکانی بەهای گۆڕاوی ئازاد نەگۆڕنییە و هەروەها جیاوازییەکانی بەهای گۆڕاوی پەیوەست نەگۆڕنییە، ئەوا ناتوانیت لێکۆڵینەوەی جیاوازییەکان بکەیت. خاڵی ڕوونکردنەوەیی دروستبکە بۆ نواندنی پێدراوەکان بە پشتبەستن بە 1990 بە ساڵی سفرە. لە خاڵە ڕونکردنەوەییەکانەوە دەردەکەوێت کە شێوەیەکی دووجا یان سێجا و یان توانی هەیە. بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ ئەنجامدانی گەڕانەوەی هەر جۆرێك.



بەراوردبکە لەنێوان بەهاکانی r^2، دیارە نموونەی سێجا باشترینە. دەتوانیت ئەم ئەخشە بەکاربهێنیت.

$$f(x)=0.2x^3+5.44x^2-22.13x+110.07$$

نموونەیەکە بۆ دیاریکردنی ژمارەی ئامێرەکان بەپێی ساڵەکانی پاش ساڵی 1990

خاڵی جاودێری

3. ئەو ئەخشە بنووسە کە پێدراوەکانی ئەم ئەخشەی خوارەوە دەنوێنێت.

x	11	14	25	31	40	50
y	245	302	480	557	645	705

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بۆچی بەکارهێنانی جیاوازییەکان و ڕێژەکان لەکاتی ئیش کردن بە پێدراوە راستیەکان بەسنووردار دادەنرێن.
2. ڕێکخەرێە ئەم خشتەی خوارەوە دروستبکە و تەواویبکە، ڕوونیبکەوە چۆن هەر ڕێگایەك یارمەتیت ئەدات نموونەی گونجاو بۆ نواندنی پێدراوەکان دیاریبکەیت.

4-5 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بڕوانە نموونە 1

جیاوازییەکان و ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەو ئەخشە بنەڕەتییەی کە باشترین نموونە بۆ ئاوندنی پێدراوەکان پێکدەهێنێت

1

x	y
6	69.6
13	51.4
20	33.2
27	15
34	−3.2
41	−21.4

2

x	y
11	2
47	6
99	10
167	14
251	18
351	22

3

x	y
0	125
1	150
2	180
3	216
4	259.2
5	311.04

بڕوانە نموونە 2

4 خشتەی خوارەوە ڕوونیدەکاتەوە کە بڕی ماوە ماددەی ئایۆدین – 131 بەگرام پاش / ڕۆژ لەدەستکردن بە تاقیکردنەوە.

کات / بەڕۆژەکان	0	1	2	3	4	5	6
بڕکە m بەگرام	1000	917.40	841.62	772.10	708.33	649.82	596.14

أ نەخشەیەک بنووسە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت.

ب نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ڕۆژەکان بۆ ئەوەی بڕی ئایۆدینی – 131 ماوە لە 50 g کەمترە.

بڕوانە نموونە 3

5 لەم خشتەی خوارەوە ژمارەی پاسکیلەکان لە شوێنی فرۆشتنی پاسکیل لە بیست و چوار مانگی پێشوو دەردەکەوێت.

کات / بەمانگەکان	0	4	9	12	15	20	24
ژمارە	62	54	45	48	55	53	60

أ نەخشەیەک بنووسە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت.

ب نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی پاسکیلەکان لە مانگی شەشەم.

ج ئایا ئامۆژگاری خاوەن دوکانەکە دەکەیت پشت بەم ئەخشەیە ببەستێت بۆ پێشبینی کردنی ژمارەی پاسکیلەکانی ناو دوکانەکە پاش ساڵێك لە ئێستاوە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد

شیکارکردنی ڕاهێنان	تەماشای نموونەکە
8-6	1
9	2
10	3

جیاوازییەکان و ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆدیاریکردنی ئەخشەی بنەڕەتی کە باشترین نموونە بۆ پێدراوەکان پێکدەهێنێت

6

x	y
1	380
3	343
5	310
7	279
9	252
11	228

7

x	y
2	97
8	202
14	253
20	250
26	193
32	82

8

x	y
4	4
9	6
16	8
25	10
36	12

9 **کشتوکاڵ** یەکێك لە جوتیارەکان تاقیکردنەوەیەکی ئەنجامدا لەسەر بڕی ئەو پەینەی پێویستە لە دۆنمە زەویەکدا بکرێت، بۆ دەستکەوتنی باشترین بەرهەم بۆ ئەم مەبەستە چەند کێڵگەیەکی بەکارهێنا، ئەنجامی تاقیکردنەوەکەی لەم خشتەی خوارەوە تۆمارکرد، ئەخشەیەك بنووسە پێدراوەکانی ناو خشتەکە بنوێنێت.

بڕی پەین بۆیەك دۆنم (kg)	45	70	90	115	125	135	150
بڕی بەرهەم بۆیەك دۆنم (ڕبە)	29	60	70	88	84	86	76

10 **زیندەزانی** ئەم خشتەی خوارەوە ژمارەی خەمڵێنراوی جۆرێك لە بەکتریای (اِیریشیا کولی) لە دەفرێکی تاقیکردنەوەدا دەنوێنێت پاش 6 خولەك لە دەستپێکردن بە تاقیکردنەوە.

کات / بەخولەك	0	10	20	30	40	50	60
ژمارەی بەکتریاکان	300	423	596	842	1188	1686	2354

أ ڕێسایەك بنووسە کە ژمارەی بەکتریاکان بەپێی کات بنوێنێت. باشترین نواندن بێت.

ب ڕێسایەکە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی بەکتریاکان پاش 3 کاتژمێر بەکاربهێنە.

ج چەند کاتی دەوێت بۆئەوەی ژمارەی بەکتریاکان 3 ئەوەندەی ژمارەی سەرەتاکەی لێبێت؟

11 **موڵکایەتی** ئەم خشتەیە نرخەکانی ژمارەیەك خانووی فرۆشراو بەپێی ڕووبەرەکەی دەنوێنێت

ڕووبەر (m^2)	248	109	138	233	227	276
نرخ (ملیۆن دینار)	179	125.9	136.75	172.5	169.9	187

أ ڕێسایەك بۆ هەژمارکردنی نرخی خانوو بەپێی ڕووبەرەکەی بدۆزەوە. (ڕووبەر وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربهێنە)

ب ڕێسایەکە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری نزیکراوەی خانوویەك نرخەکەی 175 ملیۆن دینار بێت.

ج ئایا باوەڕدەکەیت وەڵامەکەت بۆ لقی (ب) ورد بێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

12 **ئابووری** یەکێك لە زانایانی ئابوری لێکۆڵینەوەیەکی لەسەر ناوەندی کرێی ڕۆژانەی تاکەکانی کۆمەڵە کرێکارێکی کەرتی تایبەت کرد، بەپێی تەمەن ئەنجامدا پێدراوەکانی بەم شێوەی خوارەوە تۆمارکرد.

تەمەن (ساڵ)	18	28	38	48	58	68
ناوەندی کرێ (دینار)	17 480	30 650	37 440	41 230	37 570	21 390

أ نموونەیەکی گونجاو بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە.

ب نموونەیەك بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ناوەندی کرێی ڕۆژانەی کرێکارێك لەم چەشنە، تەمەنی 43 ساڵ بێت.

دەروازەیەك

مێژووی بیرکاری

زانای بیرکاری فەرەنسی لۆجێندەر Legendre (1752 - 1833) لە ساڵی 1806 ڕێڕەوی یەکێك لە کلکدارەکانی دۆزییەوە، بەرێگای وێنە کێشانی چەماوەیەك بەنزیکترین شوێن لە توانادا بێت بروات، لە هەندێك لەو شوێنانەی کلکدارەکەی تێدابینراوە.

13 **تەندروستی** ئەم خشتەی خوارەوە تەمەنی ژنان لە یەکێك لە کۆمەڵگاکان دەنوێنێت کاتێك یەکەم منداڵیان دەبێت.

ساڵ	1980	1985	1990	1995	2000
ناوەندی تەمەنی ژن کاتێك منداڵی یەکەمی دەبێت	22.7	23.7	24.2	24.5	24.9

أ ساڵی 1980 بە ساڵی سفر دابنێ بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونەیەکی دووجا و یەکێکیتر سێجا بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە.

ب هەردوو نموونەکە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی تەمەنی یەکەم منداڵبوونی ژن لەم کۆمەڵگایەدا لە ساڵی 2010 بخەمڵێنێت.

ج کام خەملاندن بەلای تۆ لە ڕاست نزیکە؟ ئەمە ڕونبکەوە.

14 ئەم خشتەیە خوارەوە قەبارەی هەوای گەرم v لە باڵۆن بەپێی پلەی گەرمی بەرگە هەوا t دەنوێنێت.

پلەی گەرمی	37	41	44	47
قەبارە (m^3)	850	934	1027	1130

أ نەخشەیەکی توانی بدۆزەوە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت

ب نەخشەیەك بۆ دیاریکردنی قەبارەی هەوای گەرم لەناو باڵۆنەکە بەکاربهێنە ئەگەر پلەی گەرمی بەرگەهەوا 42°C بێت.

ج ئایا نەخشەکە گونجاو دەبێت کاتێك پلەی گەرمی لە 47 پلە زیاتربێت؟ هۆیەکەی بڵێ.

15 **کشتوکاڵ** ئەم خشتەی خوارەوە ژمارەی کێڵگەکان لە یەکێك لە وڵاتە گەورەکان و ناوەندە ڕووبەری کێڵگە کە لەسەدەی بیستەم دەنوێنێت.

ساڵ	1910	1930	1950	1969	1987	1997
ژمارەی کێڵگەکان	6.4	6.3	5.4	2.7	2.1	1.9
ناوەندە ڕووبەر (دۆنم)	139	157	216	390	462	487

أ ژمارەی کێڵگەکان وەك گۆڕاوی ئازاد بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەك بۆ ناوەندە ڕووبەری کێڵگەکە

ب نەخشەکە بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی ناوەندە ڕووبەری کێڵگەکە. کاتێك ژمارەی کێڵگەکان دەگاتە 1 ملیۆن

ج نەخشەکە بەکاربێنە بۆ خەمڵاندنی ناوەندە ڕووبەری کێڵگەکە. کاتێ ژمارەی کێڵگەکان دەبێتە4.5 ملیۆن

16 **بازاڕی دراو** ساڵی 1990 کۆمپانیای هەڵۆی پیشەسازی دامەزرا. ئەم خشتەی خوارەوە هەندێك لە نرخی پشکی (سهم) ئەم کۆمپانیایە دەنوێنێت.

ساڵ	1991	1994	1997	2000	2003
نرخی پشك بە دینار	79 410	96 410	107 260	132 440	151 190

أ نەخشەیەك بۆ تواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە.

ب ڕێژەی سەدی نرخی بەرزبوونەی پشکی کۆمپانیای هەڵۆ لە ساڵێکدا چەندە؟

ج ئەگەر پشکی کۆمپانیای هەڵۆ لە ساڵی 2004 ، 520 155 دینار بێت. ئایا ئەم نرخە دەگونجێت لەگەڵ ئەو نرخەی نەخشەکە دیاردەکات؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

د نەخشەکە کە بۆ خەمڵاندنی ئەو ساڵەی نرخی پشکی کۆمپانیای هەڵۆ دەگاتە 000 200 بەکاربهێنە.

هـ بەهۆی هەڵئاوسان ساڵی 1991 ئەوەی نرخی یەك دیناربوو1.34 بەرز بوو ساڵی 2003 بەراورد بکە لەنێوان بەرزبونەوەی نرخی پشکی کۆمپانیای هەڵۆ و ڕێژەی هەڵئاوسان.

17 **زیندەزانی** ئەم خشتەی خوارەوە ژمارەی جۆرەکانی خشۆکە، لەهەندێك لە دوورگەکانی کاریبی و ڕووبەری ئەو دوورگانە بە میل دووجایە.

ژمارە	11	16	53	45	108	100
ڕووبەر	5	32	3 435	4 244	29 371	44 218

أ نموونەیەك بۆ تواندنی پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەوە. دوای ئەوەی ژمارە بەگۆڕاوی سەربەست دابنرێت

ب هەمان نموونە بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی ڕووبەری دوورگەیەك کە 75 جۆر خشۆکی تێدابێت.

ج وردی خەمڵاندنەکە لە لقی (ب)دا چۆن دەبینیت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

18 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** هەندێك جار وادەردەکەوێت نەخشەی دووجا باشترە لە نەخشەی هێڵی بۆ پێدراوەکان. دەربارەی هاوکۆلکەی a لەڕێسا دووجاکەدا چی دەڵێیت؟

19 **بنووسە** وا دابنێ ڕێسایەکی گونجاوت دۆزییەوە پێدراوەکانی دوو گۆڕاو بنوێنێت. ئایا گەیشتیتە ئەو ئەنجامەی کە پەیوەندییەکی هۆکاری باش هەیە لەنێوان دوو گۆڕاوەکە؟ پشتگیری وەڵامەکەت بەنموونە بکە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

x	y
3	2
4	23
5	50
6	93
7	122
8	167

20 کام لەمانەی خوارەوە لەسەر پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر جێبەجێ دەبێت؟

(أ) جیاوازییەکانی یەکەم بۆ گۆڕاوی بەستراو نەگۆڕە.

(ب) جیاوازییەکانی دووەم بۆ گۆڕاوی بەستراو نەگۆڕە.

(ج) ڕێژەی بەهای گۆڕاوی پەیوەست نەگۆڕە

(د) ڕێژەی گۆڕاوی ئازاد نەگۆڕە

21 بەهای n چەندە کە ڕێگە بەتواندنی پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر بە ڕێسایەکی تواانی ورد دەبێت؟

x	5	6	7
y	16	28	n

(أ) 40 (ب) 49 (ج) 45 (د) 52

22 بەهای n چەندە کە ڕێگە بەتواندنی پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر بە ڕێسایەکی دووجای ورد دەبێت؟

x	5	6	7	8
y	12	32	58	n

(أ) 60 (ب) 70 (ج) 80 (د) 90

بەرەنگاری و فراوانکردن

23 نەخشەی $P(t)=\frac{a}{1+be^{-kt}}$ پێی دەوترێت نەخشەی بازاڕی (دالة السوق) لەو بارانەی تێیدا خۆراك یان ڕووبەری زەوی لە بەرامبەر گەشەی کۆمەڵەکان ڕێگرە. دەتوانیت نەخشەی $F(t)=\frac{4000}{1+5.7e^{-0.2t}}$ بەکاربهێنیت بۆ دیاریکردنی ژمارەی ماسییەکان لە کێڵگەیەکی بەخێوکردنی ماسی بەپێی ژمارەی ئەو مانگانەی بەسەرچاندنی هێلکە ماسییەکاندا تێدەپەڕێت، کاتێك t ژمارەی مانگەکان بێت.

(أ) ژمارەی ماسیەکانی ناوکێڵگە کە پاش 10 مانگ لە چاندنی بخەمڵێنە.

(ب) بۆئەوەی ژمارەی ماسییەکان بگاتە 3000 ماسی چەند مانگ دەخایەنێت؟

(ج) زۆرترین ژمارەی ماسییەکانی کێڵگەکە بدۆزەوە، ئەگەر نەخشەکە گونجاوبێت بۆ بەکارهێنان.

24 **بژمێری ڕوونکردنەوەیی** دەتوانیت جۆرێکی تر لە شێوەکانی لێژبوونەوە، بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بدۆزیتەوە، ئەویش لێژبوونەوەی هێزە Power Regression. فەرمانی PwrReg لە بژمێری ڕوونکردنەوەییدا بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نموونەی هێز کە پێدراوەکانی خشتەی بەرامبەر بنوێنێت.

x	1	24	41	74
y	1	4.9	6.4	8.6

پێداچوونەوەی لووپێچی

هەر سستەمێك لەم لاسەنگانە بەشێوەی ڕوونکردنەوەیی بنوێنە (وانەی 3-2)

25 $\begin{cases} y \geq 3x+1 \\ y \leq x-3 \end{cases}$

26 $\begin{cases} y \geq x-8 \\ y \leq -\frac{4}{3}x+\frac{1}{3} \end{cases}$

27 $\begin{cases} y \leq 5x \\ y \geq x+2 \end{cases}$

28 **کار** نەخشەی $p(x) = -x^3 + 12x^2 - 12x - 80$ ڕێسایەکە، قازانجی یەکێك لە کۆمپانیاکانی بە ملیۆنەها دینار پێ هەژماردەکرێت، کاتێك x ژمارەی یەکە بەرهەمهێنراوەکان بێت (پۆلەکانی پێشوو)

أ سفرەکانی ئەم نەخشەیە بدۆزەوە.

ب کام لە سفرەکانی نەخشەکە ژمارەی یەکە بەرهەمهێنراوەکان دەنوێنێت، کە وا لە کۆمپانیاکە بکات لە زەرەرەوە بۆ قازانج بچێت.

تاوێتەکردنی نەخشەکان بەکاربهێنە بۆ بڕیاردان لەسەرئەوەی نەخشەی g پێچەوانەی نەخشەی f دەبێت. (وانەی 5-4)

29 $f(x) = x^2 + 1$ ؛ $g(x) = \sqrt{x} + 1$

30 $f(x) = -4 + 5x$ ؛ $g(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

بەشی 5
ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

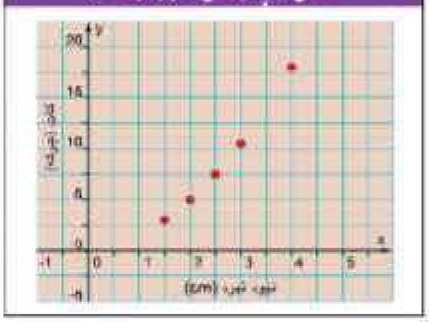
1 سەرۆکی شارەوانی پاش بارینی بەفرێکی زۆر گرنگی بە پاککردنەوەی شەقامەکان دەدات. ئەم خشتە تێچوونی پاککردنەوە ڕووبەری جیاوازی شەقامەکان دەنوێنێت. وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە و هاوکێشەیەک بنووسە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی پاککردنەوەی شەقامێک درێژییەکەی 2400 m بێت.

تێچوون بەدینار	درێژی شەقام بەمەتر
6950	300
8900	600
10 850	900
12 800	1200

2 بانەی ڕۆشنبیری سلێمانی نەخشە دادەڕێژێت ئاهەنگی ڕێزلێنان بۆ دامەزرێنەرانی ئەنجام بدات ڕێکخەری ئاهەنگەکە بڕیاریدا بۆ میوانەکان بە 4 دەفر پێشکەش بکات و هەریەکەیان 30 پارچە شیرینی تێدابوو، دوای ئەوە 4 پارچە شیرینی بۆ هەر میوانێک زیادکرا، خشتەیەک دروستبکە و وێنەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە و هاوکێشەیەک بۆ نواندنی ئەم بارە بنووسە ژمارەی میوانەکان بە گۆڕاوی ئازاد دابنێ.

3 ئەم خاڵە ڕوونکردنەوەییانە پێدراوەکانی کاتی پێویست بۆ پڕکردنی ژمارەیەک قووتو لوولەکی بەپێی نیوە تیرەی بنکەکە بوێنێت.

کاتی پڕکردنی قووتووەکان



أ خشتەیەک دروستبکە و هاوکێشەیەک بنووسە پێدراوەکان بنوێنێت.

ب ئەو هاوکێشەی پێشوو بۆ خەمڵاندنی کات بەکاربهێنە، کە پێویستە بۆ پڕکردنی قووتویەک نیوە تیرەی بنکەکەی $12cm$ بێت.

4 بەهای نەخشەکە بدۆزەوە $f(x)=\begin{cases}5x+2 & x\le 1\\ x^2-6 & x>1\end{cases}$ کاتێک $x=-2$ و $x=5$

5 وێنەی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشە بکێشە.

$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-2\\ -3x+2 & x\ge -2\end{cases}$$

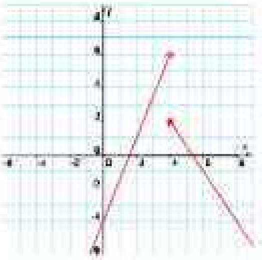
6 بەهای نەخشەکە بدۆزەوە $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x+9} & x\ge 4\\ 9-7x & x<4\end{cases}$ کاتێک $x=-6$ و $x=10$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

7 $$f(x)=\begin{cases}2x-4 & x<0\\ 5 & x\ge 0\end{cases}$$

8 $$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x-1 & x\le 2\\ \sqrt{x+2} & x>2\end{cases}$$

9 نەخشەیەکی پەلدار بۆئەم ڕوونکردنەوە بنووسە.



10 کۆمپانیایەکی پۆست و گواستنەوە 6000 دینار بۆهەر نێرراوێک وەردەگرێت کە بارستایی لە 8 kg زیاتر نەبێت، و بۆهەر کیلۆگرامێکی زیادە 1500 دینار وەردەگرێت. نەخشەیەکی پەلدار بنووسە بۆ ئەو پارەی وەریدەگرێت بۆ نێرراوێک بارستایی لە 18 kg زیاتر نەبێت.

11 $g(x)$ نەخشەی پەیدابوو لە جیگۆڕکێی نەخشەی $f(x)=\begin{cases}2x-2 & x\le 3\\ -4x+16 & x>3\end{cases}$ بە ڕاکێشانی دوو یەکە بۆلای چەپ. هاوکێشەی نەخشەی $g(x)$ بنووسە.

12 نەخشەی $h(x)$ بنووسە کە پەیدابووە لە ڕاکێشانی $f(x)=\begin{cases}2x-2 & x\le 3\\ -4x+16 & x>3\end{cases}$ دوو یەکە بۆ سەرەوە

13 ئەختەی $g(x)$ بنووسە پەیدابووە لە ڕاکێشانی $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & x\le 0 \\ x^2 & x>0 \end{cases}$ 7 یەکە بۆ لای ڕاست.

14 وێنەی ڕوونکردنەوەیی $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)+1$ بکێشە ئەگەر بزانیت $f(x)=2x^2+1$

15 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $f(x)=x+3$ و $g(x)=x^2-9$

16 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $f(x)=x+6$ و $g(x)=\frac{18}{x+4}$ بواری $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ دیاریبکە

ئەخشەیەك بنووسە كاتێك $f(x)=x^2-5x-14$.
$g(x)=x-7$

17 $(f+g)(x)$

18 $(f-g)(x)$

19 $(g-f)(x)$

20 $(fg)(x)$

21 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

22 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

هەریەکە لەمانەی خوارەوە بدۆزەوە ئەگەر زانیت $f(x)=x-2$ و $g(x)=\frac{8}{x+1}$

23 $f(g(-2))$ و $g(f(-2))$

24 $f(g(1))$ و $g(f(1))$

25 $g(f(x))$ و بوارەکەی

26 $f(g(x))$ و بوارەکەی

27 یەکێك لە کۆمپانیاکانی فڕۆکەوانی بڕیاری زیادکردنی 30 000 دیناریدا، بۆنرخی هەربلیتێك بە لەبەرچاوگرتنی بەرزبوونەوەی نرخی سووتەمەنییەکان لەسەر کۆمپانیاکە پێویستە 9% باجی فڕۆکەخانە بخاتە سەر نرخی بلیتەکە، ئەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە، نرخی نوێ بۆ بلیتێك بنوێنێت، کاتێك نرخەکەی x دینار بێت، پێش ئەوەی نرخی سووتەمەنی و باج زیادبکرێت.

28 ئەم خشتەیە زیادبوونی نرخی بلیتی چوونە ژوورەوەی باخچەی ئاژەڵان و پەیوەندی لەگەڵ ساڵانی پێشوو لە دامەزراندنیەوە دەنوێنێت. لە جیاوازییەکان و ڕێژەکان بکۆڵەوە بۆ دیاریکردنی کام پەیوەندی گونجاوترە بۆ نواندنی پێدراوەکانی خشتەکە. بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ دۆزینەوەی پەیوەندییەکە بەکاربهێنە

نرخی بلیتی باخچەی ئاژەڵان

زمارەی ساڵەکان	نرخ (بەدینار)
1	9500
2	10 250
3	11 100
4	12 000
5	12 920

29 ئەم خشتەیە بەکارهێنانی ئاو بۆ دانیشتوانی یەکێك لە شارەکان بەپێی پلەی گەرمی نیشان دەدات.

پلەی گەرمی (سەدی)	بەکارهێنانی ئاو (m^3)
12	269 899
15	297 912
18	328 952
21	363 110
24	401 122
27	442 893

أ پەیوەندییەك بدۆزەوە ئەم پێدراوانە بەنزیکەیی بنوێنێت

ب پەیوەندییەکە بۆ خەمڵاندنی بەکارهێنانی ئاو بەکاربهێنە، کاتێك پلەی گەرمی $30\,^{\circ}C$ بێت.

ج ئەگەر بەکارهێنانی ئاو لە یەکێك لە ڕۆژەکاندا $189\ 270\ m^3$ بێت، پلەی گەرمی لەو ڕۆژەدا چەندە؟

بەشی

5

تاقیکردنەوەی بەش

1 ژیار لە یەکێك لە سوپەر مارکێتەکاندا بە فرۆشیار دامەزرا، مانگی 300 000 دینار وەردەگرێت، و 3% کۆی ئەو شتانەی دەیفرۆشێت دەخرێتە سەر مانگانەکەی. ئەوەی ژیار وەریدەگرێت بە خشتە و وێنەی ڕوونکردنەوەیی و هاوکێشە بنوێنە، ئەگەر بزانیت فرۆشراوەکانی لەنێوان 0 و 10 000 000 دینار بێت

2 زانا لەسەر تاشە بەردێکی بەرز ڕاوەستابوو، بەشەق لە بەردێکی هەڵدا بۆ خوارەوە. ئەم خشتە بڕدراوەکانی بەرزی بەردەکە پاش چەند چرکەیەك لە هەڵدانی دەنوێنێت.

أ وێنەی ڕوونکردنەوەیی و هاوکێشەکەی دروستبکە، بەرزی بەردەکە بەپێی کات وەك گۆڕاوێکی ئازاد بنوێنێت.

ب بەرزی گاشەبەردەکە چەندە؟

ج بەرزی بەردەکە پاش 10 چرکە چەندە؟

د پاش چەند چرکە بەردەکە بەرزەوی دەکەوێت؟

کات (s)	بەرزی (m)
1	615.1
2	600.4
3	575.9
4	541.6
5	497.5
6	443.6

وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەخشەکە بکێشە

3 $f(x)=\begin{cases}-x-3 & x<1\\ 2x-6 & x\geq 1\end{cases}$

4 $f(x)=\begin{cases}5 & x<-2\\ -x^2-4x & x\geq -2\end{cases}$

بە زانینی $f(x)$ وێنەی ڕوونکردنەوەیی $g(x)$ بکێشە

5 $f(x)=2x-4$ و $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)-1$

6 $f(x)=x^2-2$ و $g(x)=-f(x+2)$

هەر ئەخشەیەك یان بەهایەك بدۆزەوە، ئەگەر بزانیت کە $f(x)=4x^2-9$ و $g(x)=2x+3$

7 $(f-g)(4)$

8 $g(f(3))$

9 $(fg)(5)$

10 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

11 زێڕینگەرێك 10% باجی هەر پارچە خشڵێك دەدات، وەك باجی زامنکردن و نرخی 150%ی تێچوونی گشتی دەیفرۆشێت. ئەخشەیەکی ئاوێتە بنووسە نرخی تێچوونی بنەڕەتی بە c دینار بنوێنێت.

12 ئەم خشتەی خوارەوە بڕدراوەکانی نرخی ژمارەیەك لە خانوو دوورییەکانیان لە ناوەڕاستی شارەوە دەنوێنێت.

أ ئەخشەیەك بدۆزەوە پەیوەندییەك بێت بۆ لێکۆڵینەوەی نرخی خانوو p بە پێی دووری d لە ناوەڕاستی شار بنوێنێت.

ب ئەو ئەخشەی دۆزیتەوە بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی تیکڕای نرخی خانوویەك، کە 20 km لە ناوەڕاستی شارەوە دوورە

نرخی خانووەکان	
دووری لە ناوەڕاستی شار (km)	تێکڕای نرخ (دینار)
2	118 496 000
4	109 016 000
6	100 295 000
8	92 271 000
10	84 890 000
12	78 098 000

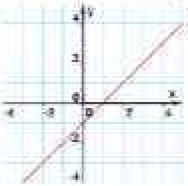
بەشی 5

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

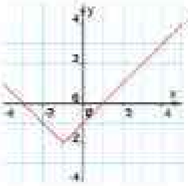
هەڵبژاردن لە زۆر

1 کام ڕوونکردنەوە نەخشە $f(x)=|x+1|-2$ دەنوێنێت

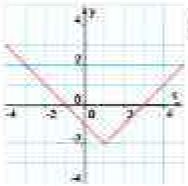
ⓐ



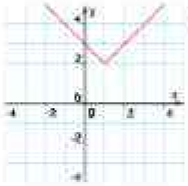
ⓑ



ⓒ

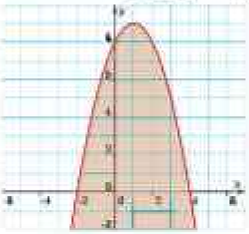


ⓓ



(أ) (ب) (ج) (د)

2 کام وێنە ڕوونکردنەوەییە بۆ کام نەخشە یان لاسەنگە لەمانەی خوارەوە باشترین نواندنە



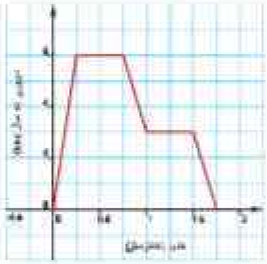
(أ) $y=x^2+2x+8$

(ب) $y=-x^2+2x+8$

(ج) $y\le x^2+2x+8$

(د) $y\le -x^2+2x+8$

3 ئەم وینە ڕوونکردنەوەییە بۆ کام لەمانەی خوارەوە باشترین نواندنە



(أ) شێرکۆ بەسواری پاسکیل تا گەیشتە کتێبخانە 6 km ی بڕی، کاتژمێرێکی لە کتێبخانە بەسەر برد، پاشان بۆ ماڵ گەڕایەوە.

(ب) شێرکۆ بە سواری پاسکیل تا گەیشتە کتێبخانە 6 km بڕی، نیو کاتژمێر لە کتێبخانە مایەوە، پاش ئەوە بۆ دوکانی فرۆشتنی کاسێتی ڤیدیۆ چوو و نیو کاتژمێری پێچوو، پاش ئەوە بۆ ماڵ گەڕایەوە.

(ج) شێرکۆ بە سواری پاسکیل تا گەیشتە کتێبخانە 3 km ی بڕی، لەوێ نیوکاتژمێری خایاند، پاش ئەوە 3 km بڕی بۆ چوونی بۆ دوکانی فرۆشتنی کاسێتی ڤیدیۆ، دوای ئەوە گەڕایەوە ماڵ.

(د) شێرکۆ بە سواری باسکیل تا گەیشتە کتێبخانە 6 km ی بڕی، لەوێ نیوکاتژمێری خایاند، پاش ئەوە 3 km ی بڕی بۆ چوونی بۆ دوکانی فرۆشتنی کاسێتی ڤیدیۆ لەوێ کاتژمێرێکی خایاند.

4 بەهای $f(x)=\begin{cases} x^2+4x-8 & x<-1 \\ x^3-x^2+5 & x\ge -1 \end{cases}$ چەندە؟ کاتێك $x=-1$

(أ) -13 (ب) -11 (ج) 3 (د) 5

5 کام لەمانە کۆمەڵە شیکاری $\sqrt{2x-4}=x-6$ یە؟

(أ) $\{10\}$ (ج) $\{2, 20\}$

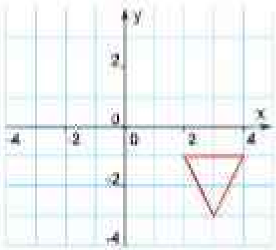
(ب) $\{4, 10\}$ (د) $\{2, 12\}$

6 کام لەمانە بریتییە لە نەخشەی $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ کاتێك $f(x)=2x^2-7x-30$ و $g(x)=x-6$ ؟

(أ) $2x-5$ (ج) $\frac{(2x-5)(x+6)}{x-6}$

(ب) $2x+5$ (د) $\frac{(2x-10)(9x+3)}{x-6}$

7 کام جێگۆڕکێ لەمانە وێنەیە بۆ سێگۆشەیەك یەکێك لە سەرەکانی $(-2, 1)$ بێت؟



(أ) وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری یەکەم

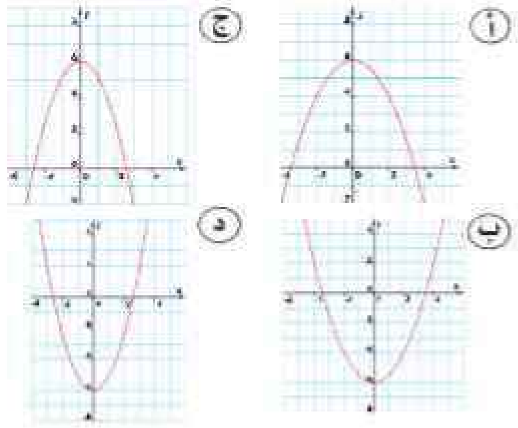
(ب) وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری دووەم

(ج) ڕاکێشانی 3 یەکە بۆلای چەپ، 3 یەکە بۆ سەرەوە.

(د) خولانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕت بە گۆشەی $180°$

8 کام لەمانە هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی

$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6$



کورتە وەڵام

9 بەهای بڕی $\log_4 256^3$ چەندە؟

10 بەهای c لە $4(5t-2)+3=2(10t+c)-7$ چەندە؟

11 بەهای بدۆزەوە کاتێک $x=5$

$$\left(\frac{x^2+5x-36}{2x^2-10x+8}\right)\left(\frac{x^2+x-2}{x^2+11x+18}\right)$$

کورتە وەڵام

12 $f(x)=x^2+1$

أ پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە.

ب وێنەی ڕوونکردنەوەیی $f(x)=x^2+1$ و پێچەوانەکەی بکێشە.

ج ڕوونیکەوە ئایا پێچەوانەی نەخشەکە، نەخشەیە یان نا.

13 ئەم خاڵانە بەکاربهێنە $(0, 6)$، $(2, 2)$، $(5, 11)$

أ نەخشەیەکی دووجا بنووسە کە ڕوونکردنەوەکەی بەو سێ خاڵەدا بڕوات.

ب بەشێوەی جەبری ساغبکەوە کە ڕوونکردنەوەیی نەخشەی نووسیوتە بەهەریەکە لەو خاڵانەدا تێپەڕوات.

ج وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

د $f(7)$ و $f(-7)$ بدۆزەوە.

14 $f(x)=x^2-4$

أ دوو جێگۆڕکێ بدۆزەوە، نەخشەکە دەگۆڕن بە شێوەیەک سەری نەخشەی $(1, 4)$ دابێت.

ب دوو جیگۆڕکێ بدۆزەوە نەخشەکە دەگۆڕن بە شێوەیەک وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی پەیدابوو بە $(0, 2)$ و $(-4, 2)$ دا تێپەڕوات.

درێژە وەڵام

15 ئاوات تانکی ئۆتۆمبیلەکەی بەسوتەمەنی پڕکرد بۆ گەشتێك ڕۆیشت. ئەم خشتە پێدراوەکانی بڕی سوتەمەنی ماوە لە تانکی ئۆتۆمبیلەکە بەپێی ئەو ماوەی ئۆتۆمبیلەکە دەیبڕێت دەردەخات.

دووری (بەمیل)	0	50	100	150	200
بڕی سوتەمەنی (بەگالۆن)	10	8	6	4	2

أ نەگۆڕی جیاوازییەکان یان ڕێژەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەی بنەڕەتی، بڕی سوتەمەنی ماوە لە تانکی ئۆتۆمبیلەکەدا.

ب نموونەیەکی بیرکاری بنووسە کە پێدراوەکانی خشتەکە بنوێنێت.

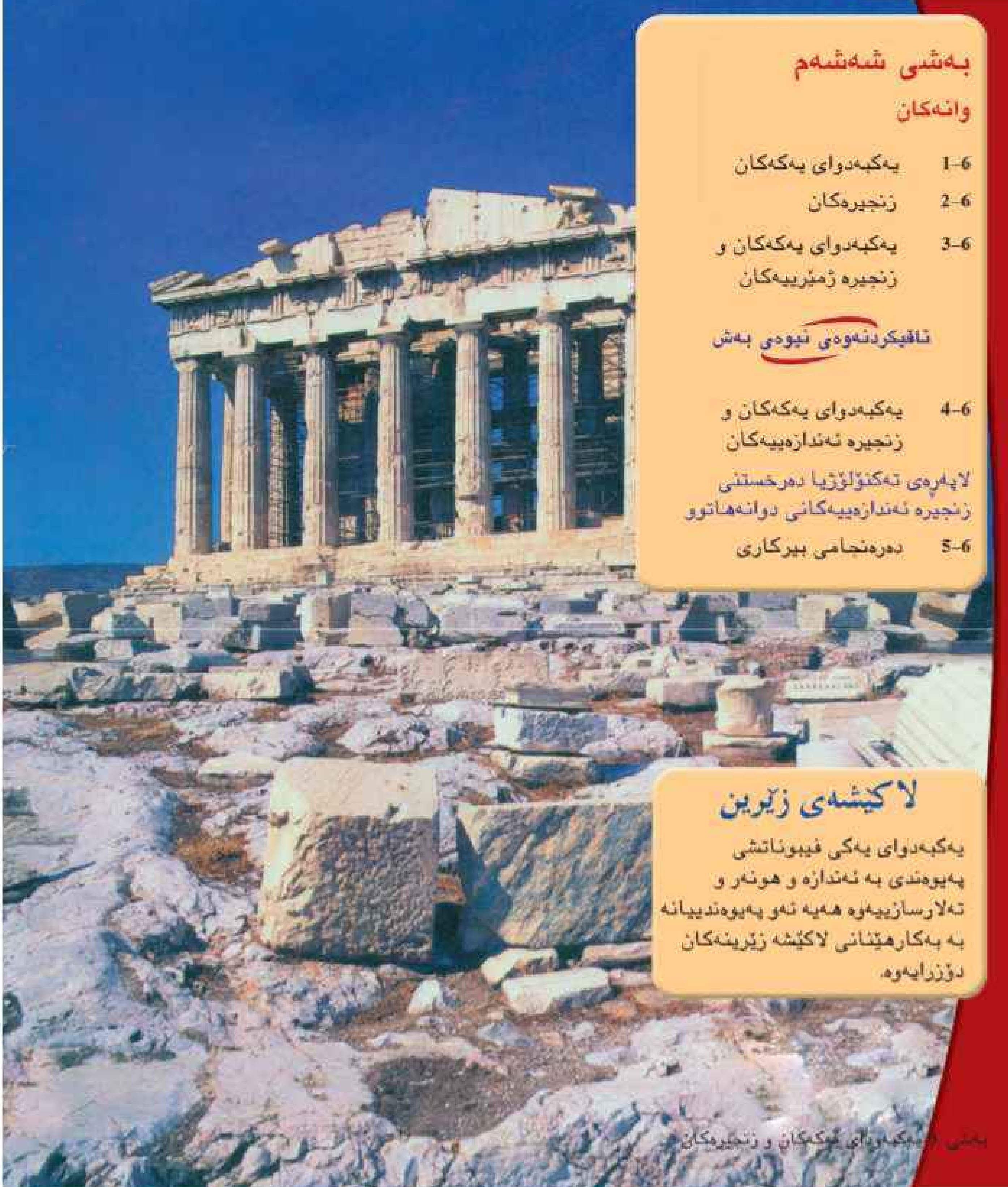
ج دوای بڕینی 75 میل چەند گالۆن سوتەمەنی پێ ماوە؟

د ئایا ئۆتۆمبیلەکە دەتوانێت 300 میل بڕوات بەبێ وەرگرتنی سوتەمەنی نوێ؟

هـ پێچەوانەی نەخشەکە بدۆزەوە. ڕونیبکەوە چی دەنوێنێت.

بەشی

6 یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرەکان Sequences and Series



بەشی شەشەم

وانەکان

1-6 یەکبەدوای یەکەکان

2-6 زنجیرەکان

3-6 یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرە ژمێرییەکان

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

4-6 یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرە ئەندازەییەکان

لاپەڕەی تەکنۆلۆژیا دەرخستنی زنجیرە ئەندازەییەکانی دوانەهاتوو

5-6 دەرەنجامی بیرکاری

لاکێشەی زێڕین

یەکبەدوای یەکی فیبوناتشی پەیوەندی بە ئەندازە و هونەر و تەلارسازییەوە هەیە ئەو پەیوەندییانە بە بەکارهێنانی لاکێشە زێڕینەکان دۆزرایەوە.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

زاراوەکە بەو پێناسەیەی لەلای چەپەوە هاتووە ببەستەوە.

1 نەخشەی تواني

2 نەخشە

3 نەخشەی هێڵی

4 نەخشەی دووجا

أ پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاوە بە جۆرێك هەر بەهایەك لە گۆڕاوی یەکەم بەرامبەر تاکە بەهایەکی گۆڕاوی دووەمە.

ب نەخشەیەکە روونکردنەوەکەی ڕاستەهێڵە.

ج نەخشەیەکە ڕێسایەکەی ڕێژەی دوو ڕادەیە.

د نەخشەیەکە هاوکێشەکەی بریتییە $f(x)=ax^2+bx+c$ کاتێك $a\neq0$

هـ نەخشەیەکە هاوکێشەکەی بریتییە لە $f(x)=ab^x$ و $a\neq0$ و $b\neq1$ و $b>0$

نووسینی برە ڕەگەکییەکان بەسادەترین شێوە.

برەکە بەسادەترین شێوە بنووسە.

5 $\sqrt{25}\times\sqrt{36}$ 6 $\sqrt{121}-\sqrt{81}$ 7 $\sqrt{\frac{1}{49}}$ 8 $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{64}}$

هەژمارکردنی هێزەکان

بەهای هەر برێك هەژماربکە.

9 $(-3)^3$ 10 $(-5)^4$ 11 $1-(-2^3)^3$ 12 $\frac{2^2\times2^7}{(2^2)^3}$

شیکارکردنی هاوکێشە بەپێی گۆڕاوێك

x بەپێی گۆڕاوەکانی تر هەژماربکە.

13 $y=12x-5$ 14 $y=-\frac{x}{3}+1$ 15 $y=-9+x^2$ 16 $y=-4(x^2-9)$

هەژمارکردنی بەهای برەکان

بەهای برەکە هەژماربکە کاتێك $x=2$ و $y=12$ و $z=24$

17 $\frac{y(y+1)}{3x}$ 18 $z+(y-1)x$ 19 $y\left(\frac{x+z}{2}\right)$ 20 $z\left(\frac{1-y}{1-x}\right)$

دژە نموونەکان

دژە نموونەیەك بدۆزەوە کە ناڕاستی دەستەواژەکە پیشان بدات.

21 $n^2=n$ کاتێك n ژمارەیەکی ڕاستییە.

22 $n^3\geq n^2\geq n$، n ژمارەیەکی ڕاستییە.

23 $\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}$ کاتێك n ژمارەیەکی ڕاستییە.

24 $\frac{2}{n}\neq\frac{n}{2}$ کاتێك n ژمارەیەکی ڕاستییە.

بەشی

6

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

خوێندووتە

- کۆمەڵەکانی ژمارەکان لەوانە ژمارە سروشتییەکان و ژمارە دووجاکان
- بەکارهێنانی شێوازەکانی جیاوازی و ڕێژە بۆ پۆلێنکردنی پێدراوەکان.
- کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی تەختە هێڵییەکان و تەختە توانییەکان و هەژمارکردنی بەهایەکانیان.

لەم بەشەدا

لەمەودوا فێردەبیت

- چەند شێوازێك لە ژمارەکان کە پێیان دەوترێت یەکبەدوای یەکەکان و سەرجەمەکانیان و پێیان دەگوترێت زنجیرەکان.
- جیاکردنەوەی یەکبەدوای یەك کە ژمارەییە یان ئەندازەییە.
- چۆنیەتی نووسین و هەژمارکردنی بەهایەکانی یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرەکان.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربێنیت

- لە قۆناغی بەرزتردا و لەکاتی خوێندنی جیاکاری و تەواوکارییدا.
- لە وانەکانی فیزیا. بۆ دۆزینەوەی ڕێسای وەك بەرزبوونەوە یەکبەدوای یەکەکانی تۆپێك کە بەر زەوی دەکەوێت.
- لەژیانی ڕۆژانەدا بۆ هەژمارکردنی بەکارخستنی گەشەی دارایی

Vocabulary زاراوەکان

Sequence (Progressions)	یەکبەدوای یەکەکان
Convergent sequence	یەکبەدوای یەکی لێکنزیکبوو
Divergent sequence	یەکبەدوای یەکی لێك دوورکەوتوو
Explicit definition	پێناسەی ڕاگەیێنراو
Finite sequence	یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو
Infinite sequence	یەکبەدوای یەکی دوا نەهاتوو
Iteration	دووبارەبوونەوە
Limit	ئامانج
Recursive definition	پێناسەی نادیار
Series	زنجیرە
Term of a sequence	ڕادەی زنجیرەکە

ڕۆشنایییەك لەسەر زاراوەکان

بۆئەوەی لەگەڵ زاراوەکانی ئەم بەشەدا ڕابێی. ئەم هەنگاوانەی خوارەوە پەیڕەو بکە

1. لە ژیانی ڕۆژانەدا وشەی **یەکبەدوای یەك** چی دەگەیەنێت؟ یەکبەدوای یەکی ژمارەیی چی دەگەیەنێت؟
2. وشەی دوا هاتوو مانای کۆتایی بوون دەگەیەنێت. چەند نموونەیەك بهێنەوە وشەی **دوا هاتووی** تێدا بەکارهاتبێت. یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو چ مانایەك دەبەخشێت ڕوونبکەوە.
3. پاڵپشت بەمانای وشەی کۆتایی چەند نموونەیەك بهێنەوە لە ڕستەدا کە وشەی دوانەهاتوو تێدا بەکارهاتبێت. ئەوەندەی لەتوانادایە **یەکبەدوای یەکی دوا نەهاتوو** ڕوونبکاتەوە.
4. وشەی زنجیرە لە تەلەفزیۆندا چی دەگەیەنێت؟ هەروەها وشەی **زنجیرە** لە بیرکاریدا چی دەگەیەنێت؟
5. ڕادە لە ڕادەدارەکاندا چی دەگەیەنێت پاشان باسی **ڕادەی یەکبەدوای یەك** بکە.

بەشی
6

بیرکاری
بە خوێندنەوە
و نووسین

ستراتیژی خوێندنەوە: بەڵگەیەکی باوەڕپێکراو بەکاربهێنە

بۆئەوەی بتوانیت بەڵگەیەکی باوەڕپێکراو بنووسی پەیوەندی بە چەمکێك لە چەمکەکانی بیرکارییەوە هەبێت، واتە تۆ باش لەوە تێگەیشتوویت کە باسی دەکەیت. دەتوانیت بۆ نووسین ئەم بەڵگەیە ڕێگایەك لە چوار هەنگاو پێکهاتبێت بەکاربێنیت بۆ نووسینی ئەم بەڵگەیە. هەروەك لە شیکارکردنی نموونەکەی خوارەوەدا ڕوونکراوەتەوە.

لە کتێبی پۆلی دەیەمەوە

بنووسە جیاوازی نێوان ئەگەری تیۆری و ئەگەری پراکتیکی ڕوونبکەوە، نموونەیەك بهێنەوە کە تێیدا جیاوازبن.

هەنگاوی 1 ئامانجەکە دیاربیکە

ئامانج ڕوونکردنەوەی جیاوازییە لەنێوان ئەگەری تیۆری و ئەگەری پراکتیکیدا.

هەنگاوی 2 ڕستەیەك بنووسە پاسادانی ئامانجەکە بکات

ئەگەری تیۆری پشت بەبیرکاری دەبەستێت بەڵام پراکتیکی پشت بە ئەنجامی تاقیکردنەوە دەبەستێت

هەنگاوی 3 نموونە بهێنەوە پاڵپشتی وەڵامەکەت بکات

کاتێك پارچە پارەیەکی کانزایی هەڵدەدەیت ئەگەری دەستکەوتنی خەت دەکاتە $\frac{\text{ژمارەی ئەو جارانەی پاسادانی ڕوودانەکە دەکەن}}{\text{ژمارەی هەموو ئەنجامەکان}}$ واتە $\frac{1}{2}$

بەڵام ئەگەری پراکتیکی بۆ دەستکەوتنی خەت دەکاتە $\frac{\text{ژمارەی ئەو جارانەی خەتی تێدا دەرکەوتووە}}{\text{ژمارەی ئەو جارانەی پارچە پارەکەی تێدا هەڵدراوە}}$

ئەگەر تەنها یەکجار پارەیەکمان هەڵدا ئەوا شێر یان خەتمان دەستدەکەوێت. ئەگەری پراکتیکی بۆ دەستکەوتنی خەت دەکاتە 1 (کاتێك خەتمان دەستدەکەوێت) یان 0 (کاتێك شێرمان دەستدەکەوێت)، بەڵام ئەگەری تیۆری بۆ دەستکەوتنی خەت هەر $\frac{1}{2}$ دەمێنێتەوە.

هەنگاوی 4 بەڵگەکەت پوختەبکە

لەبەرئەوەی ئەگەری تیۆری تەنها پشت بە ژمارەی ئەنجامە تیۆرییەکان دەبەستێت، بۆیە هەرگیز ناگۆڕێت. بەڵام ئەگەری پراکتیکی پشت بە ئەنجامە تاقیکردنەوەییەکان دەبەستێت. ئەوەش وای لێدەکات لەهەر هەڵدانێکدا بگۆڕێت.

هەوڵبدە

بۆ وەڵامدانەوەی ئەم دوو پرسیارە چوار هەنگاوەکان بەکاربهێنە.

1. بەردە زارێك 20 جار هەڵدرا و ژمارە 3 دووجار دەرکەوت. دەبێت بەلایەنی کەمەوە چەندجار زارەکە هەڵبدرێت بۆئەوەی ئەگەری تیۆری و پراکتیکی یەکسانبن لە ڕووداوی دەستکەوتنی ژمارە 3 دا؟ ڕوونبکەوە چۆن گەیشتیتە ئەو وەڵامە.

2. باوکی هۆشیار دەیەوێت کوڕەکەی بۆ خوێندنگایەکی نوێ ببات، 9 خوێندنگای دیاریکرد تا سەردانیان بکات بڕیاریدا لە هەفتەی داهاتوودا سەردانی 3 یان 4 خوێندنگا بکات. ژمارەی ڕێگاکانی سەردانی 4 خوێندنگاکە چەندی زیاترە لە ژمارەی ڕێگاکانی سەردانی 3 خوێندنگاکە. وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

6-1 یەکبەدواییەکەکان و زنجیرەکان
Sequences and Series

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

یەکبەدوای یەکەکان بۆ دانانی ئەو نموونانەی ئامانجیان خوێندنی زۆربەی ڕووداوە سروشتییەکانە بەکاردێت. وەك گۆڕان لە ژمارەی کۆمەڵێك کەروێشك بە تێپەڕبوونی کات.

ئامانجەکان

ڕادەی n لەیەکبەدوای یەکدا دەدۆزێتەوە.
- ڕێسای یەکبەدوای یەك دەنووسێت.
- سەرجەم دەدۆزێتەوەو دەنووسێت بەبەکارهێنانی هێمای بەیەکتربەستن (التجمیع)

زاراوەکان
Vocabulary

- یەکبەدوای یەك (متتالیة) Sequence
- ڕادەی یەکبەدوای یەك Term of a sequence
- یەکبەدوای یەکی دوانەهاتوو Infinite sequence
- یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو Finite sequence
- پێناسەی دیار Explicit definition
- دووبارەبوونەوە Iteration
- پێناسەی نادیار Recursive definition
- زنجیرە Series
- بەشە سەرجەمی partid sum
- هێمای بەیەکبەستن Summation Symbol

زانای بیرکاری ئیتاڵی لیۆناردۆ فیبۆناتشی ساڵی1201 ز، ئەو زاوزێ خێرایەی لە ژمارەیەك کەروێشکدا کە لە بارێکی نموونەییدا دەژیان باسکرد. فیبۆناتشی ژمارەی جووتە کەروێشکەکانی مانگ بە مانگ تۆمارکرد. بۆی دەرکەوت ئەو ژمارانە پەیڕەوی شێوازێك دەکەن لەدواییدا بە **یەکبەدوای یەکی فیبۆناتشی** ناونرا.

یەکبەدواییەك Sequence کۆمەڵە ژمارەیەکی ڕیزکراوە، هەریەکە لەو ژمارانە **ڕادەیەکە Term** لە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکەکە. دەگونجێت یەکبەدوای یەکەکە **دوا نەهاتوو Infinite** بێت، واتە لە ژمارەیەکی دوا نەهاتوو ڕادە پێکبێت، هەروەك یەکبەدوای یەکی ژمارە سروشتییەکان. یان **یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو Finite sequence** بێت، واتە لە ژمارەیەکی کۆتایی هاتوو ڕادە پێکبێت وەك 4، 3، 2، 1 . ئەمەش ئەوە دەردەخات کە یەکبەدوای یەك ئەخشەیەکە بوارەکەی ژمارە سروشتییە یەك لەدوای یەکەکانە. و مەوداکەی بریتییە لە کۆمەڵەی ئەو ژمارانەی ڕادەکان پێکدەهێنێت.

بیرکاری زانەکان a_n لەجیاتی نووسینی شێوە ئەخشەیی $a(n)$ بەکاردێنن ژمارەی سروشتی n پێی دەوترێت خانەی ڕادەکە، ڕادەی یەکەم بریتییە لە a_1 ڕادەی دووەم بریتییە لە a_2 بەڵام ئەو ڕادەیەی خانەکەی n بێت بریتییە لە a_n (ڕادەی nی ***nth* term**). لەبەرئەوەی یەکبەدوای یەك ئەخشەیەکە بۆیە هەرخانەیەکی n بەرامبەر تەنها ڕادەیەکە بریتییە لە a_n .

بوار	5	4	3	2	1	n	خانەی ڕادەکە
مەودا	5	3	2	1	1	a_n	ڕادەکە

لە یەکبەدوای یەکی فیبۆناتشیدا، هەریەکە لە ڕادەی یەکەم و دووەم یەکسانە بە 1 بەڵام هەر ڕادەیەك لە ڕادەکانی تر یەکسانە بەکۆی ئەو دوو ڕادەیەی کە ڕاستەوخۆ پێش ئەو هاتوون بە واتایەکی تر $a_1=1$، $a_2=1$، $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ کاتێك $n\geq 3$. بەم جۆرە پێناسەیە دەوترێت **پێناسەی نادیار Recursive definition** لە پێناسەی نادیاردا ڕادەیەك یان چەند ڕادەیەکی پێشوو بۆ دروستکردنی ڕادەیەکی دوای ئەو بەکاردێت.

نموونە 1 دۆزینەوەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەك بەبەکارهێنانی ئەخشەی نادیار (شاراوە)

پێنج ڕادەی یەکەمی ئەو یەکبەدوای یەکە بدۆزەوە کە بەپێناسەی نادیار ناسێنراوە $a_1=5$، $a_n=2a_{n-1}+1$

ڕادەی یەکەم دراوە

بۆ دۆزینەوەی a_2 بەهای a_1 دابنێ، بەهەمان شێوە بەردەوام بە لەدانانی بەهای هەر ڕادەیەك بۆ دۆزینەوەی ڕادەی دوای خۆی.

n	$2a_{n-1}+1$	a_n
1	دراو	5
2	2(5)+1	11
3	2(11)+1	23
4	2(23)+1	47
5	2(47)+1	95

واتە پێنج ڕادەی یەکەمی یەکبەودای یەکەکە بریتین لە 95 ,47 ,23 ,11 ,5

خاڵی جاودێری

1. پێنج ڕادەی یەکەمی ئەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

أ $a_1=-5$ ، $a_n=a_{n-1}-8$

ب $a_1=2$ ، $a_n=-3a_{n-1}$

دەتوانیت پێناسەی هەندێک یەکبەدوای یەک بە **پێناسەیەکی دیار Explicit definition** پێناسە بکەیت. بە جۆرێک کە دەتوانیت بەهای هەر ڕادەیەک بە زانینی خانەکەی بدۆزیتەوە.

نموونــــە 2 دۆزینەوەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەک بەبەکارهێنانی نەخشەی دیار (ئاشکەرا)

پێنج ڕادەی یەکەمی ئەو یەکبەدوای یەکە بدۆزەوە کە لە خوارەوە پێناسەکراوە. $a_n = 2^n - 3$

n	$2^n - 3$	a_n
1	$2^1 - 3$	−1
2	$2^2 - 3$	1
3	$2^3 - 3$	5
4	$2^4 - 3$	13
5	$2^5 - 3$	29

خشتەیەک دروستبکە و بەهای a_n هەژماربکە بەجۆرێک n بەهاکانی 1 تا 5 وەربگرێت. پێنج ڕادەی یەکەم بریتین لە 29 ,13 ,5 ,1 ,−1

پاسادان بکە بژمێری ڕونکردنەوەیی بەکاربێنە، نەخشەی $y = 2^x - 3$ تۆماربکە پاشان خشتەی بەهایەکانی بۆ دروستبکە

خاڵی جاودێری 2. پێنج ڕادەی یەکەمی ئەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

أ $a_n = n^2 - 2n - 1$ ب $a_n = 3n - 5$

دەتوانیت زانیارییەکانت بەکاربێنیت بۆ نووسینی پێناسەی یەکبەدواییەک.

نموونــــە 3 نووسینی پێناسەی یەکبەودای یەک

پێناسەی ڕادەی nی بۆ هەر یەکبەودای یەکێک بنووسە

أ **3, 6, 12, 24, 48**

جیاوازی نێوان هەر ڕادەیەک و ڕادەکەی پێش خۆی و ڕێژەی هەر ڕادەیەک و ڕادەکەی پێش خۆی بپشکنە.

ڕێژەکان		2	2	2	2
ڕادەکان	3	6	12	24	48
جیاوازی یەکەم		3	6	12	24
جیاوازی دووەم			3	6	12

ڕێژەکان نەگۆڕن، واتە $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ یان $a_n = 2a_{n-1}$ یەکبەدوای یەکەکە یەکبەودای یەکێکی توانیە بنچینەکەی دەکاتە 2 . تەماشای شێوازی هێزەکانی ژمارە 2 بکە.

$a_1 = 3 = 3\times 2^0$ ، $a_2 = 6 = 3\times 2^1$ ، $a_3 = 12 = 3\times 2^2$ ...

شێوازی $3(2^{n-1})$ پێناسەیەکی گونجاوە بۆ یەکبەودای یەکەکە. کەواتە $a_n = 3\times 2^{n-1}$

ب **2.5, 4, 5.5, 7, 8.5**

ڕادەکان	2.5	4	5.5	7	8.5
جیاوازی یەکەم		1.5	1.5	1.5	1.5

لەبەرئەوەی جیاوازییەکانی یەکەم نەگۆڕن، کەواتە یەکبەودای یەکەکە هێڵییە. ڕادەی یەکەم بریتییە لە 2.5 هەر ڕادەیەک لە ڕادەکانی بەدوایدا دێت 1.5 زیاد دەکات. پاساکە بریتییە لە $a_n = 1.5\ n+1$

لەبیرت بێت

جێگیربوونی جیاوازیەکانی یەکەم، نموونەیەکی هێڵی دەگەیەنێ هەروەها جیاوازیەکانی دووەم نموونەیەکی دووجا دەگەیەنێ هەروەها جێگیربوونی ڕێژەکان نموونەی توانی دەگەیەنێ.

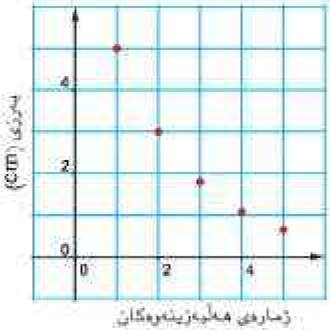
خاڵی جاودێری 3. پێناسەیەکی گونجاو بۆ ڕادەی nی بۆهەریەکە لەمانە بنووسە

أ $7, 5, 3, 1, -1$ ب $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

نموونە 4 جێبەجێکردن لەسەر فیزیا

تۆپێک لە بەرزییەکەوە بەردرایە خوارەوە، پاشان تا بەرزایی **155 cm** بەرزبۆوە. پاشان چەند جارێک تا بەرزایی **60%**ی پێش خۆی بەرزدەبێتەوە. بە ڕوونکرنەوەیی یەکبەدوای یەکەکە بنوێنە. باسی شێوازەکەی بکە. لەهەڵبەزینەوەی نۆیەمدا تۆپەکە چەند بەرز دەبێتەوە؟

بەرزبوونەوە لە جاری یەکەم 155 cm بەرزبوونەوە لەهەر جارێکدا دەگاتە 60%ی جاری پێشوو. دەتوانین پێناسەی یەکبەدوای یەکەکە بەم شێوەیە بکەین $a_1 = 155$ ، $a_n = 0.6 \times a_{n-1}$ ئەم پێناسە توێیە بۆ دۆزینەوەی هەندێك ڕادەی یەکبەدوای یەکەکە بەکاربێنە، پاشان بە ڕوونکردنەوەیی بیاننوێنە.



$$a_2 = 0.6 \times 155 = 93$$
$$a_3 = 0.6 \times 93 = 55.8$$
$$a_4 = 0.6 \times 55.8 = 33.48$$

وا دەردەکەوێت نواندنە ڕونکردنەوەییەکە توانی بێت. شێوازێك بۆ نووسینی پێناسەیەکی گونجاو بۆ یەکبەدوای یەکەکە بەکاربێنە. $a_n = 155 \times 0.6^{n-1}$ کاتێك n ژمارەی جارەکانی بەرزبوونەوەی تۆپەکە بێت. ئەم ڕێسایە بۆ هەژمارکردنی بەرزی تۆپەکە لەجاری نۆیەمدا بەکاربێنە $a_9 = 155 \times 0.6^{9-1} = 2.603$ تۆپەکە لەجاری نۆیەمدا 2.6 cm بەنزیکەیی بەرز دەبێتەوە.

خاڵی چاودێری

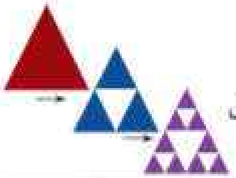
4. دەرماڵە گوڵێك لەهەر جارێکدا پێویستی بە 1.6 گالۆن ئاو هەیە. سەرجەمی ئەو گالۆنە ئاوانەی بۆ ئاودانی دەرماڵە گوڵەکە لەهەر ئاودانێك بەکارهاتووە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە. باسی ئەو شێوازە بکە کە دەستتکەوتووە، سەرجەمی ئەو گالۆنە ئاوانەی لەپاش 10 جار ئاودان بەکارتهێناوە چەندە؟

فراکتال **Fractals** وێنەیەکە بە دووبارەبوونەوەی شێوە لێکچووەکانی هاوشێوەی شێوە بنەڕەتییەکە دەستدەکەوێت

نموونە 5 سێگۆشەی سیرپنسکی **Sierpinski**

سێگۆشەیەکە بریتییە لە فراکتالێك لە سێگۆشەیەکی لایەکسان دەستت دەکەوێت، بەبڕینی سێگۆشەیەکی لایەکسان لە ناوەڕاستی سێگۆشەی یەکەم. پاشان ئەمە لەسەر هەر سێگۆشەیەك دووبارەبکەوە. کە دەستت دەکەوێت. ژمارەی سێگۆشەکان لە پێنجەم جاردا چەندە؟

لەهەر دووبارەبوونەوەیەکدا ژمارەی سێگۆشەکان 3 ئەوەندە زیاددەکات هێمای N_n بۆ ژمارەی سێگۆشەکان لەجاری یەکەمدا بەکاربێنە. جاری یەکەم سێگۆشەیەکت هەیە. لە جاری دووەمدا 3 سێگۆشەت دەستت دەکەوێت، و هەروەها ...



$N_1 = 1$ ، $N_2 = 3$ ، $N_3 = 3^2$ دەتوانیت بنووسی $N_n = 3^{n-1}$

کەواتە $N_4 = 3^3 = 27$ ، $N_5 = 3^4 = 81$. لە جاری چوارەمدا ژمارەی سێگۆشەکان 81 سێگۆشە دەبێت.

خاڵی چاودێری

5. کۆمەڵەی کانتۆر Cantor بریتییە لە شێوەیەکی فراکتال، بەلابردنی سێیەکی ناوەڕاستی پارچەڕاستەهێڵەکە، جێبەجێکردنی ئەم فەرمانە لەسەر هەر پارچە ڕاستەهێڵێکی ئەنجام دەستدەکەوێت. ژمارە ئەو پارچە ڕاستەهێڵانە لەدوای جێبەجێکردنی فەرمانەکە لەجاری پێنجەمدا چەندە؟

ئاگاداربە!

بە هێڵ تێوان خاڵەکان مەگەینە لەبەرئەوەی بواری ئەخشەکە بەشێکە لە کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکان.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونبکەوە جیاوازی نێوان پێناسەی یەکبەدوای یەک بەشێوەی دیار و نادیار.
2. بدۆزەوە 3 ڕادە ئەم یەکبەدوای یەکە تەواوبکات ... 4، 2، 1
3. باسیبکە چۆن یەکبەدوای یەک وەک ئەخشە دەبینیت؟ ئایا هەموو یەکبەدوای یەکەکان هەمان بواریان هەیە؟ ئەمە ڕوونبکەوە.
4. ڕێکخەرە وێنەی بەرامبەر دروستبکە و تەواوی بکە ئەوەی لە یەکبەدوای یەکدا فێری بوویت بەکورتی تێیدا بنووسە.

1-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ناڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** پێناسەی ________ یەکبەدوای یەکێك پێناسەیەکە ڕێگا بە دروستبوونی ڕادەی n ی دەدات بە زانینی ڕادەی پێش خۆی یان ڕادەکانی پێش خۆی (نادیار یان دیار).

بڕوانە نموونە 1

پێنج ڕادەی یەکەم بۆهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

2 $a_n = 4a_{n-1} - 1 : a_1 = 1$ **3** $a_n = a_{n-1} + 11 : a_1 = 3$ **4** $a_n = \frac{a_{n-1}}{5} : a_1 = 500$

بڕوانە نموونە 2

5 $a_n = 12(n-2)$ **6** $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **7** $a_n = -3n^2$

8 $a_n = n(n-1)$ **9** $a_n = 4^{n-1}$ **10** $a_n = (n+1)^2$

بڕوانە نموونە 3

لەهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانەدا پێناسەیەکی گونجاو بۆ ڕادەی n بنووسە.

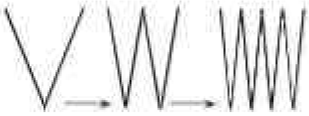
11 $6, 9, 12, 15, 18, \ldots$ **12** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ **13** $25, 15, 5, -5, -15, \ldots$

بڕوانە نموونە 4

14 **پاشەکەوت** داهاتی ئاوات لە ساڵی یەکەمدا 25 000 000 دیناربوو، لە ساڵەکانی دواییدا داهاتەکەی بەڕێژەی 5%ی ساڵی پێش خۆی زیاد دەکات. ئەم یەکبەدوای یەکە بە ڕونکردنەوەیی بنوێنە. باسی شێوازەکەی بکە. دوای 5 ساڵ داهاتەکەی چەند دەبێت؟ پاش 10 ساڵ چەند دەبێت؟

بڕوانە نموونە 5

15 **فراکتال** ژمارەی پارچە ڕاستەهێڵەکان لە دوو شێوەی چوارەم و پێنجەمدا چەند دەبێت؟



جێبەجێکردن

پێنج ڕادەی یەکەم بۆهەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

16 $a_n = a_{n-1} - 3 : a_1 = 7$ **17** $a_n = \frac{1}{n^2}$ **18** $a_n = 1.5a_{n-1} - 2 : a_1 = 4$

19 $a_n = (2)^{n-1} + 8$ **20** $a_n = 2n^2 - 12$ **21** $a_n = -3a_{n-1} - 1 : a_1 = -2$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونەکە
18-16	1
21-19	2
24-22	3
25	4
26	5

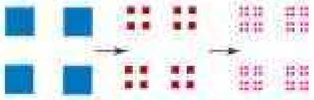
پێناسەیەکی گونجاو بۆ ڕادەی nی هەریەک لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

22 $2, 8, 18, 32, 50, \dots$

23 $9, 5, 1, -3, -7, \dots$

24 $5, 0.5, 0.05, 0.005, \dots$

25 **نەخشەکێشان** کورسییەکانی ئەندامانی تیپی ئۆرکسترا لە هۆڵی میوزیکی کلاسیکی لەسەر شێوەی نیوە بازنەیەک ڕێکخرا، بەجۆرێک سەرۆکی ئۆرکستراکە لە چەقەکەیدا وەستابوو، ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی یەکەم 16 کورسییە، ژمارەی کورسییەکانی ڕیزەکانی تر 4 کورسی لە ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی پیش خۆی زیاتربوو. ئەم یەکبەدوای یەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە، باسی شێوازەکەشی بکە، ژمارەی کورسییەکان لە ڕیزی شەشەم چەندە؟



26 **فراکتال** ژمارەی چوارگۆشەکان لەدوو شێوەی چوارەم و پێنجەمدا بدۆزەوە.

پێنج ڕادەی یەکەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکدا بدۆزەوە.

27 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 2$ ، $a_1 = 12$

28 $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$ ، $a_1 = 1$

29 $a_n = -a_{n-1} + 10$ ، $a_1 = -10$

30 $a_n = 2n^2 - 12$

31 $a_n = 8 - \frac{1}{10}n$

32 $a_n = 5(-1)^{n+1} \times 3^{n-1}$

33 **هەڵە لە شیکردنەوە** لە خوارەوە بە دوو شێوە پێنج ڕادەی یەکەمی ئەم یەکبەدوای یەکە نووسراوە $a_1 = 3$ ، $a_n = 2n + 1$ کامیان هەڵەیە، هەڵەکە دیاربکە.

أ $3, 5, 7, 9, 11$

ب $3, 7, 15, 31, 65$

پێناسەیەکی گونجاو بۆ ڕادەی nی بۆهەریەک لەم یەکبەدوای یەکانە بنووسە. پاشان ڕادەی دەیەمی بدۆزەوە.

34 $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$

35 $\frac{15}{9}, \frac{14}{9}, \frac{13}{9}, \frac{12}{9}, \frac{11}{9}, \dots$

36 $-5.0, -2.5, 0, 2.5, 5.0, \dots$

37 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

38 $0.04, 0.4, 4, 40, 400, \dots$

39 $24, 21, 16, 9, 0, \dots$

دەروازەیەک

لەسەر مێژووی بیرکاری

یەکبەدوای یەکی فیبۆناتشی بۆ دەرخستنی ڕێژەی زێڕین بەکاردێت. ڕێژەی هەر ڕادەیەک بۆ ڕادەکەی پێش خۆی لەڕێژەی زێڕینی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ نزیکدەبێتەوە هەتاخانەی ڕادەکە زیاد بکات.

40 **فیبۆناتشی** بیرت بێتەوە یەکبەدوای یەکی فیبۆناتشی نموونەیەک بوو بۆ توێژینەوە لە ژمارەی جووتە کەروێشکەکان پاش چەند مانگێک. یەکبەدوای یەکەکە بە ژمارە 1 پاشان ژمارە 1 دەستپێدەکات. و هەر ڕادەیەک یەکسانە بە سەرجەمی دوو ڕادەکەی پێش خۆی.

أ دوازدە ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکەکە بدۆزەوە.

ب ژمارەی جووتە کەروێشکەکان لەکۆتایی ساڵێکی تەواو چەندە؟

پاڵەوانێتی شەترەنج	
ژمارەی یاریکەر	ژمارەی گێمەکان
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

41 **شەترەنج** سەنگەر قارەمانێتیەکی شەترەنجی ڕێکخست بەجۆرێک هەریاریکەرێک یەکجار لەگەڵ هەموو یاریکەرەکان یاری دەکات. خشتەیەکی دروستکرد و بۆی دەرکەوت کە زیادکردنی هەر یاریکەرێکی نوێ دەبێتە هۆی ئەوەی ژمارەی یارییەکان لەیەک یاری زیاتربێت.

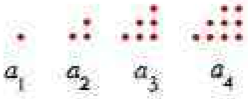
أ یەکبەدوای یەکەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە و شێوازەکەی باسبکە. ڕادەکانی دواتر چین؟

ب لادانی هێڵی بۆ دۆزینەوەی ڕێسایەک بۆئەو یەکبەدوای یەکە بەکاربێنە

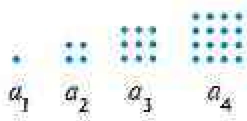
ج **چی دەبێت ئەگەر...؟** خشتەکە چۆن دەگۆڕێت ئەگەر هەر یاریکەرێک دووجار لەگەڵ هەریەکێک لەیاریکەرەکانی تر یاریبکات؟ خشتەیەک دروستبکە. ڕوونبکەوە یەکبەدوای یەکەکە چۆن دەگۆڕێت؟

ژمارەی خاڵەکان لەدوو وێنەی خوارەوە، لەهەر یەکیەدوای یەکێکدا بدۆزەوە.

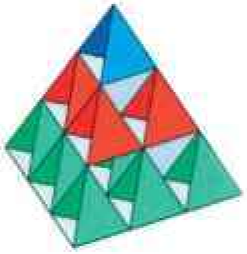
42



43



44 تەنی بەرامبەرت لە شێوەیەکی ئەندازەیی پێکدێت، هەریەکەیان لە 6 دنکە شقارتەی درێژی یەکسان دروستکراوە. شێوەیەك لە بەشی سەرەوەدا هەیە و 3 شێوە لە چینی دووەم و 6 شێوە لەچینی سێیەم و هەروەها ...



أ رێسای $a_n = a_{n-1} + 6n$ نموونەیەکە بۆ هەژمارکردنی ژمارەی دەنکە شقارتەکان لە چینی n دا. پێنج ڕادەی یەکەمی یەکیەدوای یەکەکە بدۆزەوە کاتێك $a_1 = 6$.

ب لێژی هێڵی بۆ دۆزینەوەی ڕێسای ئەو یەکیەدوای یەکە بەکاربهێنە.

ج چەند دەنکە شقارتە بۆ دروستکردنی چینی دووەم پێویستە.

45 **ئەندازە** خشتەی خوارەوە کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی پێنج چەندلا ڕێکەی یەکەم دەنوێنێت

کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە				
900^0	720^0	540^0	360^0	180^0

آ پێناسەیەکی دیار بۆئەم یەکیەدوای یەکە بنووسە، کۆی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلا ڕێکەیەك ژمارەی لایەکانی 12 بێت بدۆزەوە.

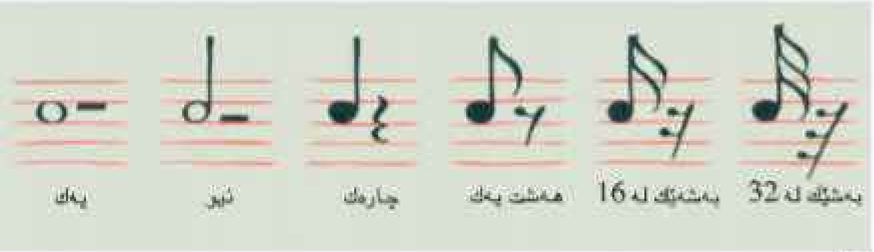
ب لەبیرت بێت گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکی ڕێك هەمان پێوانەیان هەیە. خشتەیەك دروستبکە پێوانەی گۆشەی ناوەوەی هەرچەندلایەکی ڕێك دیاریبکات. پێدراوەکانی خشتەکە بەوێنەی ڕوونکردنەوەیی بنوێنە، باسی شێوازەکەی بکە.

ج پێناسەیەکی دیار بۆ یەکیەدوای یەکی لقی ب بنووسە.

د پێوانەی گۆشەیەکی ناوەوەی دەلایەکی ڕێك بدۆزەوە.

46 **خەمڵاندن** بەهای ڕادەی بیستەم لەم یەکیەدوای یەکە دیاریبکە... ,7.94 ، 8.935 ، 9.93 ، 10.925 ، 11.92

47 **میوزیك** وێنەکەی خوارەوە کاتی نۆتەی میوزیکە جیاوازەکان نیشان دەدات.



أ یەکیەودای یەکێکی ژمارەیی بنووسە بەرەو پێشچوونی نۆتەی میوزیکەکان نیشانبدات. پێناسەیەکی دیار و یەکێکی نادیار بۆ ئەو یەکیەدوای یەکە بنووسە.

ب نۆتەیەکی تەواو 4 بیتە (Beats) و نیونۆتە 2 بیتە و چارەکە نۆتەیەك 1 بیتە و هەروەها ... یەکیەدوای یەکێك بنووسە ژمارەی بیتەکانی نۆتەیەك لەدوای یەکەکانی سەرەوە بنوێنێت. پێناسەیەکی نادیار و پێناسەیەکی دیار لەسەر ئەم یەکیەدوای یەکە بنووسە. پەیوەندی نێوان ئەم یەکیەدوای یەکە و یەکیەدوای یەکی لقی أ چییە؟

48 **بنووسە** جیاوازی نێوان یەکبەدوای یەکی دوا هاتوو و دوا نەهاتوو ڕوونبکەوە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

49 کام لەمانەی دێت ڕادەی داهاتووی ئەم یەکبەدوای یەکەیە. ... ,0 ,3–, 6–, 9–

(أ) –3 (ب) 0 (ج) 3 (د) 6

50 کام لەمانەی خوارەوە ڕێسای ئەم یەکبەدوای یەکەیە ... ,4, 12, 36, 108

(أ) $a_n = 4 + 3n$

(ب) $a_n = 3 + 4n$

(ج) $a_1 = 4$ ؛ $a_n = 3a_{n-1}$ کاتێك $n \geq 2$

(د) $a_1 = 3$ ؛ $a_n = 4a_{n-1}$ کاتێك $n \geq 2$

51 کام لەم یەکبەدوای یەکانە ڕێساکەی بریتییە لە $a_n = \frac{2n}{n+1}$

(أ) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \ldots$

(ب) $0, 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \ldots$

(ج) $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \ldots$

(د) $2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \ldots$

52 کام یەکبەدوای یەکە ڕێساکەی بریتییە لە $a_1 = 6$ ؛ $a_n = 12 - 2a_{n-1}$ کاتێك $n \geq 2$

(أ) $6, 4, 2, 0, -2, -4, \ldots$

(ب) $6, 0, 12, -12, 36, \ldots$

(ج) $0, 12, -12, 36, -60, \ldots$

(د) $6, 0, -6, -12, -18, \ldots$

53 **کورتە وەڵام** ڕادەی داهاتوو لەم یەکبەدوای یەکە بدۆزەوە ,2–, 4, 8–, 16, 32–

بەرەنگاری و فراوانکردن

پێناسەی دیار بۆئەم یەکبەدوای یەکانە بنووسە. پاشان ڕادەی دەیەم بدۆزەوە.

54 $-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 8, \frac{61}{3}, \frac{122}{3}, \ldots$

55 $-2, 6, -12, 20, -30, \ldots$

56 $0.9, 0.8, 0.6, 0.3, -0.1, \ldots$

57 **ئەندازە** 5 بازنە بکێشە، خاڵێك لەسەر بازنەی یەکەم دابنێ و 2 خاڵ لەسەر بازنەی دووەم و 3 خاڵ لەسەر بازنەی سێیەم دابنێ و هەروەها ... پاشان هەموو دوو خاڵێك لە خاڵەکانی بازنەکان بگەیەنە، زۆرترین ناوچەی یەکتر نەبڕیوەکانی هەر بازنەیەك لەخۆ دەگرێت بژمێرە.

(أ) ئەو یەکبەدوای یەکە بنووسە. کە دەستتکەوتووە.

(ب) وا دەردەکەوێت هەر ڕادەیەك یەکسانە بە دووئەوەندەی ڕادەکەی پێش خۆی بەڵام وا دەردەکەوێت ڕادەی شەشەم لە 32 کەمترە. هەوڵبدە ئەم ناوچانە لەبازنەی شەشەمدا بە وردی دیاریبکەیت بە دروستکردنی وێنەیەکی ڕێکوپێك.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە. وا دابنێ پێناسەکراوە (پۆلەکانی پێشوو)

58 $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$

59 $\frac{4x^2-5x}{8x^2+18x-35}$

60 $\frac{4x-12}{x^2-25} + \frac{8x-24}{2x-10}$

61 $\frac{x^2-5x-6}{x^2-3x-18} \times \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

کۆبکەوە یان لێدەربکە (پۆلەکانی پێشوو)

62 $\frac{2x-3}{x+1} + \frac{4x-9}{x-1}$

63 $\frac{9x}{8x-4} - \frac{10x+3}{12x-6}$

64 $\frac{x^2}{2x+7} - \frac{x}{x+2}$

65 **وێژە** کرمانج کتێبێك کە 854 لاپەڕەیە بەتیکڕای لاپەڕە و نیوێك لە خولەکێکدا دەخوێنێتەوە خشتەیەك دروستبکە و نەخشەیەك بنووسە ژمارەی ئەو لاپەڕانە بنوێنێت کە ماونەتەوە p بەپێی کات t . وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

2-6 زنجیرەکان
Series

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت سەرجەمەکانی یەکبەدوای یەکەکان بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوەی پێوانەکانی خانوویەک لە کارت دروستکرابێت (نموونە 4)

ئامانجەکان

- هەژمارکردنی سەرجەمی یەکبەدوای یەک و نووسینی بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم

زاراوەکان
Vocabulary

زنجیرە (متسلسلة)
Series

سەرجەمی بەش
Partial sum

هێمای کۆکردنەوە
Summation symbol

لە وانەی پێشوودا فێری دۆزینەوەی ڕادەی n ی یەکبەدوای یەک بوویت. هەندێک جار دەتوانیت سەرجەمی چەند ڕادەیەک لە یەکبەدوای یەکێکدا هەژماربکەیت بۆ دەربڕینی ئەو سەرجەمە **زنجیرە Series** بەکاردێت. خشتەکەی خوارەوە نموونە لەسەر ئەمە پیشان دەدات.

یەکبەدوای یەک	$1, 2, 3, 4$	$2, 4, 6, 8, ...$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$
زنجیرە	$1+2+3+4$	$2+4+6+8+...$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

لەبەرئەوەی زۆربەی یەکبەدوای یەکەکان ناکۆتان، بە زۆری سەرجەمە بەشییەکان بەکاردەهێنرێت. **سەرجەمی بەشی** هێمای S_nی بۆ دادەنرێت. بریتییە لە سەرجەمی n ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکەکە

$S_1 = 2$ سەرجەمی ڕادەی یەکەم
$S_2 = 2 + 4 = 6$ سەرجەمی دوو ڕادەی یەکەمین
$S_3 = 2 + 4 + 6 = 12$ سەرجەمی سێ ڕادەی یەکەمین
$S_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ سەرجەمی چوار ڕادەی یەکەمین

دەتوانیت هێمای سەرجەم Σ بۆ دەربڕینی زنجیرە بەم شێوەیە بەکاربێنیت.

$$\sum_{k=1}^{k=5} 2k$$

بەهای k کۆتایی ← $k=5$
بەهای یەکەمی k ← $k=1$
$2k$ ← پێناسەی دیاری یەکبەدوای یەک

نموونە 1 بەکارهێنانی هێمای سەرجەم

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم ئەم زنجیرانە بنووسە.

أ $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

پێناسەی دیار بۆ یەکبەدوای یەکەکە بدۆزەوە

$a_k = 3k$ پێناسەی دیار

سەرجەمی پێنج ڕادەی یەکەم بنووسە

$\sum_{k=1}^{k=5} 3k$ هێمای سەرجەم بەکاربهێنە

ب $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$

پێناسەی دیار بۆ یەکبەدوای یەکەکە بدۆزەوە

$a_k = (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ پێناسەی دیار

سەرجەمی پێنج ڕادەی یەکەم بنووسە

$\sum_{k=1}^{k=6} (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ هێمای سەرجەم بەکاربهێنە

ئاگاداربە!

بۆ ئەو یەکبەدوای یەکانەی نیشانەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەک ئەگۆڕێن $(-1)^{k+1}$ بەکاربێنە ئەگەر نیشانەی a_1 $(+)$ بێت و $(-1)^k$ بەکاربێنە ئەگەر نیشانەی a_1 $(-)$ بێت.

خۆت تاقیبکەرەوە

1. بە بەکارهێنانی یاسای سەرجەم ئەم زنجیرانە بنووسە.

أ $\frac{2}{4} + \frac{2}{9} + \frac{2}{16} + \frac{2}{25} + \frac{2}{36}$

ب $-2 + 4 - 6 + 8 - 10 + 12$

نموونـــــە 2 هەژمارکردنی بەهای زنجیرەکان

زنجیرەکە بکەوە و بەهاکەی هەژماربکە.

أ $\sum_{k=3}^{k=6} \frac{1}{2^k}$

$$\sum_{k=3}^{k=6} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}$$ بە دانانەوەی بەهاکانی k زنجیرەکە بکەوە

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$$ هێزەکان هەژماربکە

$$= \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$ سادەبکە

ب $\sum_{k=1}^{k=4} (10 - k^2)$

$$\sum_{k=1}^{k=4} (10 - k^2) = (10 - 1^2) + (10 - 2^2) + (10 - 3^2) + (10 - 4^2) = 10$$ بکەوە

ئاگاداربە!

هەندێک لە یەکبەدوای یەکەکان بەڕادەی a_k دەستپێدەکات کاتێک $k=1$ هەروەک نموونەی 2 – أ

خاڵی چاودێری

2. زنجیرەکە بکەوە و بەهاکەی هەژماربکە.

أ $\sum_{k=1}^{k=4} (2k-1)$ **ب** $\sum_{k=1}^{k=5} -5(2)^{k-1}$

دۆزینەوەی سەرجەمی ژمارەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەک هەموو کاتێک ئاسان نییە بەڵام دەتوانرێت ڕێسایەک بۆ هەژمارکردنی سەرجەمی ڕادەکانی یەکەم لەهەندێک لە یەکبەدوای یەکە تایبەتییەکاندا بدۆزیتەوە. زنجیرەی نەگۆڕ زنجیرەیەکە هەموو ڕادەکانی یەکسانن $3+3+3+3+3$

$$\sum_{k=1}^{k=5} 3 = \underbrace{3+3+3+3+3}_{\text{5 ژمارەی ڕادەکان}} = 5\times 3 = 15$$

سەرجەمی ڕادەکانی یەکەمی زنجیرەی نەگۆڕ بریتییە لە $\sum_{k=1}^{k=n} c = nc$

$$\sum_{k=1}^{k=n} a = \underbrace{c+c+\ldots+c}_{\text{ژمارەی ڕادەکانی } n} = c \times n$$

زنجیرەی هێڵی زنجیرەیەکە بۆ ژماردن. وەک سەرجەمی ژمارە سروشتییەکانی یەکەم تا خانەیەکی دیاریکراو. سەرجەمی 10 ژمارەی سروشتی یەکەم (جگەلە سفر) بریتییە لە

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

ڕیزکردنی ژمارەکان دووبارەبکەوە.

$$= (1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)$$

$$= 11+11+11+11+11 = 5\times 11 = 55$$

سەرنجبدە نیوەی ژمارەی ڕادەکان = 5 و $11 = 1 + 10$ بریتییە لە سەرجەمی ڕادەی یەکەم و دواڕادە. ئەم تێبینیەش وادەکات پێشبینی ئەوە بکەین سەرجەمی ژمارە سروشتییەکان تا خانەی n (جگەلە سفر) بریتییە لە $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n}{2}(n+1)$ یان $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

هێربە

پاساکانی سەرجەمی هەندێک لە زنجیرەکان

زنجیرەی نەگۆڕ	زنجیرەی هێڵی	زنجیرەی دووجا
$\sum_{k=1}^{k=n} a = na$	$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

نموونـــــه 3 بەکارهێنانی یاساکانی سەرجەمی هەندێك لە زنجیرەکان

بەهای زنجیرەکە هەژماربکە

أ $\sum_{k=1}^{k=6} 8$ زنجیرەیەکی نەگۆڕە

ڕێگای یەکەم یاسای سەرجەم بەکاربێنە، زنجیرەکە 6 ڕادەی تێدایە.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = na = 6 \times 8 = 48$$

ڕێگای دووەم بکەوە سەرجەم هەژمارەکە.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = \underbrace{8+8+8+8+8+8}_{\text{6 ڕادە}} = 48$$

ب $\sum_{k=1}^{k=5} k$ زنجیرەیەکی هێڵییە

ڕێگای یەکەم یاسای سەرجەم بەکاربێنە

$$\sum_{k=1}^{k=5} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

ڕێگای دووەم بکەوە سەرجەم هەژماربکە.

$$\sum_{k=1}^{k=5} k = 1+2+3+4+5 = 15$$

ج $\sum_{k=1}^{k=7} k^2$ زنجیرەیەکی دووجایە

ڕێگای یەکەم یاسای سەرجەم بەکاربێنە

$$\sum_{k=1}^{k=7} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{7(7+1)(2\times7+1)}{6}$$
$$= \frac{56(15)}{6}$$
$$= 140$$

ڕێگای دووەم بکەوە سەرجەم هەژمار بکە. بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربێنە

ئاگاداربە!

کاتێك ڕادەکانی زنجیرەیەك دەژمێری، پێویستە ژمارەنەکە ڕادەی یەکەم و کۆتایی تێدابێت ژمارەی ڕادەکانی زنجیرەی $\sum_{k=5}^{k=10} 8$ دەکاتە 6 نەك 5 چونکە بەهاکانی k بریتین لە $k = 5,6,7,8,9,10$

خاڵی چاودێری

3. بەهای زنجیرەکە هەژماربکە

أ $\sum_{k=1}^{k=60} 4$ **ب** $\sum_{k=1}^{k=15} k$ **ج** $\sum_{k=1}^{k=10} k^2$

نموونـــــه 4 جێبەجێکردن لەسەر شیکارکردنی پرسیارەکان

شیکارکردنی پرسیارەکان

سیڤان دەیەوێت خانوویەك لەکارتی یاریکردن دروست بکات کە ژمارەیان 52 دانەیە هەروەك لە وێنەکەدا دیارە و دەیەوێت زۆرترین نهۆمی دەستبکەوێت. چەند نهۆم دەتوانێت دروستبکات.

1 پرسیارەکە تێبگە

داواکراو زانینی ژمارەی نهۆمەکانە

زانیارییە گرنگەکان دیاربکە

- ژمارەی کارتەکان 52 دانەیە
- داواکراو زۆرترین نهۆم درست بکرێت.

2 پلاندانی

هێڵکارییەك بۆ خانووەکە بکێشە بۆ باشتر تێگەیشتنی پرسیارەکە شێوازێك بۆ ژمارەی کارتەکان لەهەر نهۆمێك بدۆزەوە، زنجیرەکە بنووسە و بەهاکەی هەژماربکە.

3 شیکاربکە

خشتەکە و وێنەکە دروستبکە.

نهۆم	1	2	3	4
وێنە				
ژمارەی کارتەکان	2	5	8	11

ژمارەی کارتەکان لە نهۆمێکەوە بۆ نهۆمێکی تر 3 کارت زیاد دەکات، زنجیرەیەک بنووسە. ژمارەی کارتەکان لە n نهۆمدا نیشان بدات.

$\sum_{k=1}^{k=n}(3k-1)$ کاتێك k هێمای خانەی نهۆمەکە بێت و n ژمارەی نهۆمەکان بێت.

$$\sum_{k=1}^{k=4}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)=26$$

$$\sum_{k=1}^{k=5}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)+(3\times5-1)=40$$

$$\sum_{k=1}^{k=6}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)+(3\times5-1)+(3\times6-1)=57$$

لەبەرئەوەی ژمارەی کارتەکان 52 کارتە، بۆیە زۆرترین ژمارەی ئەو نهۆمانەی سیڤان دەستی دەکەوێت بریتییە لە 5 نهۆم.

4 ساغبکەوە

خشتەکە بەکاربهێنە بۆ تەواوکردنی شێوازەکە. نهۆمی پێنجەم 14 کارتی تێدا بەکاردێت $S_5 = 2+5+8+11+14 = 40$ ئەگەر سیڤان بیەوێت نهۆمێکی تر زیاد بکات ئەوا پێویستی بە ژمارەیەکی زیاتر لەو کارتانە دەبێت کە ماونەتەوە ژمارەیان 12 کارتە.

خاڵی چاودێری

4. دوای تەواوبوونی ئاودانی باخەکەی هیوا سۆندەی ئاوەکەی پێچایەوە و لوولی کرد تا لە شوێنێکی باشدا دایبنێ. درێژی هەر پێچێك 6 cm لە پێچەکەی پێش خۆی زیاتربوو ئەگەر درێژی پێچی یەکەم 34 cm بێت، ئایا درێژی سۆندەکە چەندە ئەگەر زانیت ژمارەی پێچەکان 12 پێچە.

بیربکەوەو وتووێژبکە

1. جیاوازی نێوان یەکبەودای یەك و زنجیرە ڕوونبکەوە.
2. هێمای هەر گۆڕاوێك چییە لە $\sum_{k=1}^{k=n} k$
3. ڕێکخەریە خشتە دروستبکە و پاشان تەواوی بکە. شێوەیەکی گشتی بۆهەر زاراوەیەك بنووسە، نموونەیەکی بۆ بێنەوە.

فێربە

	یەکبەودای یەك	زنجیرە
شێوگی گشتی		
نموونە		

2-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** نموونەیەک بۆ بەکارهێنانی هێمای سەرجەم بنووسە.

پرۆانە نموونە 1

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەکە بنووسە.

2 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$ **3** $-3+6-9+12-15$

4 $1+10+100+1000+10\ 000$ **5** $100+95+90+85+80$

پرۆانە نموونە 2

زنجیرەکە بکەوە و بەهاکەی هەژماربکە

6 $\sum_{k=1}^{k=5} k^3$ **7** $\sum_{k=1}^{k=4} (-1)^{k+1}\frac{12}{k^2}$ **8** $\sum_{k=5}^{k=10} -5k$

پرۆانە نموونە 3

بەهای زنجیرەکە هەژماربکە

9 $\sum_{k=1}^{k=21} k$ **10** $\sum_{k=1}^{k=20} k^2$ **11** $\sum_{k=15}^{k=33} 6$

پرۆانە نموونە 4

12 **پارەدان** کارزان مانگانە بڕی 142 500 دینار قیست دەدات لەبری نرخی ئەو ئۆتۆمبیلەی کڕیویەتی پاش دوو ساڵ چەند پارەی داوە؟ ئەی پاش 5 ساڵ چەند دەدات؟

جێبەجێکردن

بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونە بکە
ڕاهێنانی ئازاد	
16–13	1
19–17	2
22–20	3
23	4

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەکە بنووسە.

13 $1.1+2.2+3.3+4.4+5.5$ **14** $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$

15 $11-12+13-14+15-16$ **16** $1+2+4+8+16+32$

زنجیرەکە بکەوە و هێماکەی هەژماربکە

17 $\sum_{k=1}^{k=5} 8(k+1)$ **18** $\sum_{k=2}^{k=7} (-2)^k$ **19** $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{k-1}{k+1}$

بەهای زنجیرەکە هەژماربکە

20 $\sum_{k=1}^{k=99} k$ **21** $\sum_{k=1}^{k=88} 2.5$ **22** $\sum_{k=1}^{k=25} k^2$

23 کۆگایەکی گەورە قووتوە پەنیری بەچەند چینێك لەسەر یەك لە شوشە بەندەکەیدا داناوە، بەجۆرێك لەچینی سەرەوەیدا یەك قووتو دانراوە، هەر چینێك قووتویەکی لە چینەکەی ژێر خۆی زیاترە چەند قووتوی داناوە ئەگەر بزانیت ژمارەی چینەکان 20 چینە.

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم یەکبەدوای یەکەکە بنووسە.

24 $-1+4-9+16-25+36$ **25** $25+24+23+...+2+1$

26 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ **27** $-800-80-8-0.8-0.08$

28 $10.8+10.5+10.2+9.9$ **29** $9-16+25-36+49-64$

30 $-3.9+4.4-4.9+5.4-5.9$ **31** $0+3.4+6.8+10.2+13.6$

32 $3+\frac{3}{2}+1+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}$ **33** $1000+100+10+1+\frac{1}{10}$

34 **گەشت** دووری نێوان بەغداد و ئەو شارەی هاوکاری لێیە 596 km. هاوکار بڕیاریدا لە ڕۆژی یەکەم نیوەی ڕێگایەکە ببڕێت. نیوەی ماوەکە لە ڕۆژی دووەمدا و نیوەی ماوەکەی تر لەڕۆژی سێیەمدا و... بەو شێوەیە. بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەیەک بنووسە کە سەرجەمەکەی ئەو دوورییە بێت لە 5 ڕۆژدا بڕیویەتی. لەو پێنج ڕۆژەدا چەند کیلۆمەتر دەبڕێت؟

35 **دڵنیایی** بەڕێوەبەری گەنجینەیەک ڕێگای درەختی بەکاردێنێ بۆ ئاگادار کردنەوەی کارمەندەکانی تا لە باری کتوپڕدا بڕیار لەسەر داخستنی گەنجینەکەیان بدەن. ئەو ڕێگایەش بە ئاگادار کردنەوەی سێ کارمەند لە لایەن بەڕێوەبەرەوە تا بڕیار لەسەر داخستنی قفڵەکان بدەن. و هەریەکێکیان 3 کارمەندی تر ئاگادار دەکات و هەروەها ...

أ هێڵکارییەکی درەختی لە 3 ئاستدا دروستبکە ئەم ڕێگایە بنوێنێت.

ب زنجیرەیەک بنووسە بەهایەکەی ژمارەی ئەو کارمەندانە بێت کە ئاگادار کراونەتەوە لە 5 ئاستدا و بەهای زنجیرەکە بدۆزەوە.

ج **چی دەبێت ئەگەر؟** وایدابنێ بەڕێوەبەرەکە لەجیاتی 3 کارمەند لەهەر ئاستێکدا 5 کارمەند ئاگادار دەکاتەوە. ئایا ژمارەی ئەو کارمەندە زیادانەی لە 5 ئاستدا ئاگادار کراونەتەوە چەندە؟

زنجیرەکە بکەوە و هێماکەی هەژماربکە.

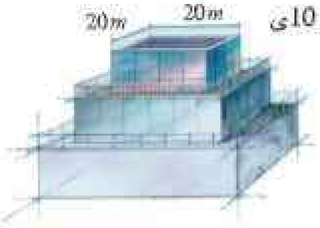
36 $\sum_{k=1}^{k=6}(k^2+1)$ **37** $\sum_{k=1}^{k=6}(-1)^k(5k)$ **38** $\sum_{k=3}^{k=6}\frac{1}{2k}$

39 $\sum_{k=1}^{k=6}(3k-2)$ **40** $\sum_{k=6}^{k=11}12(k-2)$ **41** $\sum_{k=1}^{k=3}\frac{k^2}{5k}$

دەروازەیەک
لەسەر مێژووی بیرکاری

بیرکاری زانی ئەڵمانی فرێدریک گاوس، لە تەمەنی دە ساڵیدا ڕێگایەکی خێرای بۆ هەژمارکردنی سەرجەمی ژمارە سروشتییەکانی لە 1 تا 100 دۆزیەوە ئەم ڕێگایەک بووە هۆی دۆزینەوەی یاسای هەژمارکردنی سەرجەمی ژمارە سروشتییەکان لە 1 تا n کاتێک n هەر ژمارەیەکی سروشتی بێت.

42 **تەلار** شێوەکەی بەرامبەرت مۆدێلی ئوتێلێک پیشان دەدات کە بەشێوەی هەرەمێک کێشراوە. هەرنهۆمێک لەشێوەی خشتەکێکدایە. درێژی لایەکی 10 m ی لە درێژی لایەکی نهۆمەکەی کە ڕاستەوخۆ دەکەوێتە سەرەوەی زیاترە.



أ زنجیرەیەک بنووسە کۆی ڕووبەرەکانی n نهۆم لەو ئوتێلە بنوێنێت.

ب کەمترین ژمارەی نهۆمەکان چەند بێت تا سەرجەمی ڕووبەری هەموو نهۆمەکان لە $50000\ m^2$ کەمتر نەبێت.

خەمڵاندن **هەر سەرجەمێک بەهزری بخەمڵێنە پاشان بەراورد لەنێوان خەمڵاندنەکەت و ئەو سەرجەمەی کە بە بەکارهێنانی بژمێر دەستت دەکەوێت بکە.**

43 $10+11+12+...+29+30$ **44** $1+3+5+...+97+99$

45 $(-2)+(-4)+(-6)+...+(-98)+(-100)$

46 **فیزیا** خشتەی بەرامبەر ئەو دوورییانە پیشان دەدات کە تەنێك دەیبڕێت کاتێك بەسەربەستی دەکەوێتە خوارەوە لەهەر ماوەیەك لەماوە یەکسانەکان (یەکەکانی دووری و کات فەرامۆش کراوە لەبەرئەوەی کاریگەری نابێت).

دووری کەوتنەخوارەوەی سەربەست لەهەر کاتێکی خایەنراو		
ماوەکان	نموونەی لیۆناردۆ	نموونەی گالیلۆ
1	1	1
2	2	3
3	3	5
4	4	7
5	5	9

أ زنجیرەیەک لە 5 ماوەدا بۆهەر نموونەیەک بنووسە و بەهاکەی هەژماربکە. هەر سەرجەمێك چی دەنوێنێت.

ب هەر زنجیرەیەك بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم بنووسە. سەرجەمی دە ڕادەی یەکەم لەهەر یەکێکیاندا هەژماربکە.

ج ئەو دوورییانەی تەنێك لە کەوتنە خوارەوەی سەربەستدا دەیبڕێت بەپێی ئەو نموونەی کە ئێستا کاری پێدەکەیت بریتییە لە ... ,25 ,16 ,9 ,4 ,1 بەراورد لەنێوان نموونەکەی لیۆناردۆ و گالیلۆ لەگەڵ ئەو نموونەیەی ئێستا کاری پێکراوە بکە.

47 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** دەگونجێت هەندێك تایبەتمەندی بیرکاری بەسەر زنجیرەکاندا جێبەجێبکرێت.

أ سەرجەمی هەریەك لە $\sum_{k=1}^{k=10} 3k$ و $3\sum_{k=1}^{10} k$ هەژمار بکە دەستەواژەیەك بنووسە پاڵپشت لەوە بکات کە پێکگەیشتووی.

ب هەریەکە لە $\sum_{k=1}^{k=10} k+\sum_{k=1}^{k=10} 2$ و $\sum_{k=1}^{k=10}(k+2)$ هەژماربکە. دەستەواژەیەك بنووسە پاڵپشت لەوە بکات کە پێی گەیشتووی .

48 زنجیرەی $\sum_{k=1}^{k=n}\left(3k^2+3k\right)$ بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو دەنکە شقارتە پێویستانەی لە دروستکردنی هەر ڕەفێك لە n چین پێکهاتبێت، هاوشێوەی ئەو هەرەمەی لە وێنەکەدا دیارە بەکاربێنە.

أ ئەو زنجیرەیەی سەربە هەرەمەکەیە و لە 5 چین پێکهاتووە بکەوە و هەژماری باهاکەی بکە تا بزانێت ژمارە دەنکە شقارتەکان چەندە؟

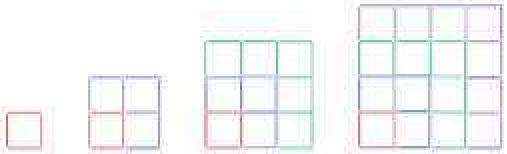
ب ئەم ڕێسایە

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(a_k+b_k\right)=\sum_{k=1}^{k=n}a_k+\sum_{k=1}^{k=n}b_k \quad \text{و ڕیسای} \quad \sum_{k=1}^{k=n}ax_k=a\sum_{k=1}^{k=n}x_k \ \text{بەکاربێنە}$$

بۆ نووسینی زنجیرەی $\sum_{k=1}^{k=n}\left(3k^2+3k\right)$ وەك سەرجەمی ئەنجامی لێکدانی زنجیرەیەکی دووجا لە ژمارەیەك، ئەنجامی لێکدانی زنجیرەیەکی هێڵی لە ژمارەیەك بەکاربێنە.

ج پاساکانی سەرجەمی زنجیرە هێڵیەکان و دووجاکان و ئەوەی لە لقی (ب) دا دەستت کەوتووە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو دەنکە شقارتانەی پێویستە لە دروستکردنی هەرەمێك لە 17 چین پێکهاتبێت بەکاربێنە.

49 **فرە هەنگاو** شێوازەکەی خوارەوە بپشکنە تیایدا دەنکە شقارتە بۆ دروستکردنی چوارگۆشە بەکارهاتووە کەدرێژی لایەکانی لەهەر جارێکدا یەك زیاددەکات.



أ یەکبەدوای یەکێك بنووسە ژمارەی ئەو دەنکە شقارتە زیادکراوانە بنوێنێت کە بۆ دروستکردنی چوارگۆشەیەکی نوێ پێویستە.

ب بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەیەك بنووسە بۆنواندنی ژمارەی ئەودەنکە شقارتانەی بۆ دروست کردنی چوارگۆشەیەك درێژی لایەکی 6 دەنك بێت چەند دەنکت پێویستە بۆ دروستکردنی ئەو چوارگۆشە.

50 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا سەرجەمی $1+3+5+7+9$ یەکسانە بە سەرجەمی $9+7+5+3+1$؟ ئایا ئەم زنجیرەیە بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم بەهەمان شێوە دەنووسرێت.

51 **بنووسە** ئەو هۆیە ڕوونبکەوە کەوا لە S_n دەکات بەشە سەرجەمێك بێت، نەك سەرجەمی گشتی هەموو راەکانی یەکبەدوای یەکەکە.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

52 کام لەمانەی خوارەوە کراوەیە بۆ زنجیرەی $\sum_{k=1}^{k=7}(-1)^k(3k)$ ؟

أ $3+6+9+12+15+18+21$

ب $-3+6-9+12-15+18-21$

ج $3-6+9-12+15-18+21$

د $-3-6-9-12-15-18-21$

53 کام لەمانەی خوارەوە نووسینی زنجیرەی $\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ دەنوێنێت. بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم.

أ $\sum_{k=1}^{k=4}\frac{k}{2}$

ب $\sum_{k=1}^{k=4}\frac{1}{2^k}$

ج $\sum_{k=1}^{k=4}\frac{1}{2k}$

د $\sum_{k=1}^{k=4}\frac{1}{k+2}$

54 کام لەمانەی خوارەوە بەهای $\sum_{k=1}^{k=6} k^2$ پێکدەهێنێت.

أ) 36 ب) 55 ج) 91 د) 273

55 کام لەمانەی خوارەوە بەهای $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$ پێکدەهێنێت.

أ) $\frac{1}{45}$ ب) $\frac{4}{45}$ ج) $\frac{7}{12}$ د) $\frac{5}{8}$

56 **کورتە وەڵام** سۆزان هەرەمێکی لە قوتوی شیرینی دروستکرد، بە جۆرێك لە چینی سەرەوەیدا یەك قوتو هەبێت چینەکەی دوای ئەو چینەی لە دوای دێت 4 قوتو بێت و چینی دوای ئەو 9 قوتو و چوارەمی 16 قوتو ... ئایا بۆ دۆزینەوەی ژمارەی قوتوەکانی چینی 20 یەکبەدوای یەك یان زنجیرە بەکاردەهێنرێت؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم زنجیرەیەك بنووسە پاشان بەهاکەی بدۆزەوە.

57 $1+2+3+...+1000$ **58** $1^2+2^2+3^2+...+25^2$

سیفەتەکانی یەکبەدوای یەك بسەلمێنە

59 $\sum_{k=1}^{k=n} ax_k = a\sum_{k=1}^{k=n} x_k$ **60** $\sum_{k=1}^{k=n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{k=n} a_k+\sum_{k=1}^{k=n} b_k$

61 **بیری ڕەخنەگر** بەڕای تۆ بەهای زنجیرەی ... + 1-1 + 1-1 + 1-1 چەندە؟ ئەگەر لەسەر ئەم شێوانە بەردەوام بوویت؟ ڕوونبکەوە.

پێداچوونەوەی لووپێچی

یەکتربڕینە ستوونی و ئاسۆییەکانی هەر ڕاستەهێڵێك بدۆزەوە پاشان وێنەکەی بکێشە (پۆلەکانی پێشوو)

62 $3x-4y=12$ **63** $-6x+3y=-18$ **64** $10x+15y=-5$

65 **ئەلار** ئەخشەی $h(t)=8|t-6|+10$ ڕێسایەك بۆ هەژمارکردنی بەرزی سەرخەرێك (مصعد) لە زەوییەوە بە (پێ) پێکدێنی بەپێی کات t بەچرکە کەمترین بەرزی سەرخەرەکە چەندە؟ (پۆلەکانی پێشوو)

پێنج ڕادەی یەکەمی هەریەك لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە. (وانەی 6 - 1)

66 $a_n=\left(\frac{1}{2}n+2\right)^2$ **67** $a_n=\left(a_{n-1}\right)^2-1$ ؛ $a_1=2$ **68** $a_n=\frac{4^n}{2}$

3-6

یەکبەدواییەك و زنجیرە ژمارەییەکان Arithmetic Sequences and Series

چیٚ ئەمە بەکاردەهێنیت؟

دەتوانیت یەکبەدوای یەکی ژمارەیی بۆ خەملاندنی کرێی تێچوونی پۆستە بەکاربێنیت.

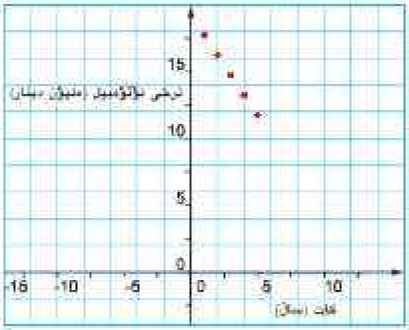
ئامانجەکان

- دۆزینەوەی ڕادەیەکی داواکراو لە یەکبەدوای یەکی ژمارەییدا
- دۆزینەوەی بەهایەکانی زنجیرە ژمارەییەکان

زاراوەکان
Vocabulary

یەکبەدوای یەکی ژمارەیی
Arithmetic Sequence (Progression)

زنجیرەی ژمارەیی
Arithmetic Series



سمکۆ ئۆتۆمبیلێکی نوێی بە 000 750 16 دینار کڕی

بەڕێوەبەرایەتی باجی دەرامەت نرخی ئۆتۆمبیلەکەی ساڵ لەدوای ساڵ بەم شێوەیە خەملاند 000 750 17 ، 000 250 16 ، 000 750 14 ، 000 250 13 ، ... بەم یەکبەدوای یەکە دەوترێت **یەکبەدوای یەکی ژمارەیی Arithmetic sequence** چونکە جیاوازی d لەنێوان هەر ڕادەیەك و ڕادەکەی دوای خۆی نەگۆڕە ناکاتە سفر بەو جیاوازییە دەوترێت بنچینە **Common difference** بۆ یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکەی سەرەوە دەکاتە 000 500 1 دینار.

ڕادە	a_1	a_2	a_3	a_4
بەها	17 750 000	16 250 000	14 750 000	13 250 000

جیاوازییەکان −1500 −1500 −1500

لەبیرت بێت جیاوازی نێوان ڕادە یەکەمەکان بۆ بەهاکانی نەخشەیەکی هێڵی جیاوازییەکی نەگۆڕە. سەرنجی ئەمە بدە: ئەگەر جووتە ڕێکخراوی (n,a_n) بە ڕوونکردنەوەیی نوێنرا چەند خاڵێکت دەست دەکەوێت. کە هەموویان دەکەونە سەرێەك ڕاستەهێڵ. بەم جۆرە دەتوانیت تەماشای یەکبەدوای یەکی ژمارەیی بکەیت. نەخشەیەکی هێڵییە و بوارەکەی کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکانە.

نموونە 1 جیاکردنەوەی یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکان

دیاریبکە ئایا یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان نا. ئەگەر ژمارەییە بنچینەکەی بدۆزەوە. ڕادەی دوای پاش ڕادەی دوایێدراو بدۆزەوە.

أ $-3, 2, 7, 12, 17, ...$

ڕادەکان 17 12 7 2 -3

جیاوازییەکان 5 5 5 5

یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە، بنچینەکەی دەکاتە 5 ، ڕادەی دواتری پاش ڕادەی کۆتایی دراو $5+17=22$

ب $-4, -12, -24, -40, -60, ...$

ڕادەکان -60 -40 -24 -12 -4

جیاوازییەکان -20 -16 -12 -8

یەکبەدوای یەکەکە ژمارەیی نییە، چونکە جیاوازی نێوان ڕادەکان یەکسان نییە

خاڵی جاودێری

1. دیاریبکە ئایا یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان نا. ئەگەر ژمارەییە بنچینەکە و ڕادەی دوای پاش ڕادەی کۆتایی دراو بدۆزەوە.

أ $1.9, 1.2, 0.5, -0.2, -0.9, ...$

ب $\frac{11}{2}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, ...$

بەهای ئۆتۆمبیل ساڵ لەدوای ساڵ	
n	a_n
1	$a_1 = 16\,750\,000 + 0(-1\,500\,000)$
2	$a_2 = 16\,750\,000 + 1(-1\,500\,000)$
3	$a_3 = 16\,750\,000 + 2(-1\,500\,000)$
4	$a_4 = 16\,750\,000 + 3(-1\,500\,000)$
5	$a_5 = 16\,750\,000 + 4(-1\,500\,000)$
n	$a_n = 16\,750\,000 + (n-1)(-150\,000)$

سەرنجی شێوازەکەی خشتەی بەرامبەر بدە هەر ڕادەیەك دەکاتە سەرجەمی ڕادەی یەکەم، چەندجارەی بنچینەکەی لەگەڵدا کۆکرابێتەوە. دەتوانیت ئەم شێوازە بۆ داڕشتنی یاسای یەکبەدوای یەکە ژمارەییەکان گشتگیر بکەیت.

ڕادەی دووەم = ڕادەی یەکەم + بنچینە

ڕادەی سێیەم = ڕادەی یەکەم + x2 بنچینە

وە هەروەها

فێربە

یاسای ڕادەی گشتی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی

ڕادەی nی بۆهەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بەم شێوەیە دەدۆزیتەوە

$a_n = a_1 + (n-1)d$ کاتێك a_1 ڕادەی یەکەم و d بنچینە بێت.

نموونە 2 هەژمارکردنی ڕادەی nی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی

ڕادەی دەیەم لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییە بدۆزەوە **... ,4 ,11 ,18 ,25 ,32**

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە $d = 25 - 32 = -7$

هەنگاوی 2 ڕادەی دەیەم بە بەکارهێنانی یاسایەکە بدۆزەوە

$a_n = a_1 + (n-1)d$	یاسا
$a_{10} = 32 + (10-1)(-7)$	لەجیاتی دابنێ
$= -31$	سادەبکە

ڕادەی دەیەمی یەکبەدوای یەکەکە بریتییە لە 31-

پاسادان بکە یەکبەدوای یەکەکە تەواوبکە.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	32	25	18	11	4	−3	−10	−17	−24	−31

خاڵی چاودێری

2. ڕادەی یازدەیەم لەم یەکبەدوای یەکانەدا بدۆزەوە.

أ $-3, -5, -7, -9, \ldots$

ب $9.2, 9.15, 9.1, 9.05, \ldots$

لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار

دەمەوێت پاسادانی بەهای هەر ڕادەیەك بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بکەم. ئەخشتەی ڕادەی گشتی بخەرە ناو بژمێرەکەوە (لە نموونە 2) $y = 32 + (x-1)(-7)$

پاشان ئەرکی خشتەکردنی بەکاربێنە بە 1($n=1$) دەستپێبکە هەنگاوێك بەکاربێنە برەکەی 1 بێت، پاشان بەهای ئەو ڕادەیە بخوێنەوە کە دەتەوێت. ئەو بەهای y یە. کە بەرامبەر خانەی ڕادەکەیە

نموونە 3 دۆزینەوەی ڕادە نادیارەکان

ڕادە نادیارەکان لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییە بدۆزەوە. **11, ▒ , ▒ , ▒ , 17–**

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	پاساکە
$-17 = 11 + (5-1)d$	لەجیاتی دابنێ
$-7 = d$	سادەیکە

هەنگاوی 2 ڕادە نادیارەکان بە بەکارهێنانی $a_1 = 11$ ، $d = -7$ بدۆزەوە.

$$a_2 = 11 + (2-1)(-7) = 4$$
$$a_3 = 11 + (3-1)(-7) = -3$$
$$a_4 = 11 + (4-1)(-7) = -10$$

خاڵی جاوەڕێی 3. ڕادە نادیارەکانی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی **0 , ▒ , ▒ , ▒ ,2** بدۆزەوە.

لەبەرئەوەی جیاوازی نێوان هەر ڕادەیەك و ڕادەکەی پێش خۆی لە یەکبەدوای یەکی ژمارەییدا جیاوازییەکی نەگۆڕ، بۆیە زانینی دوو ڕادە بەسە بۆ دۆزینەوەی بنچینە.

نموونە 4 دۆزینەوەی ڕادەی n ی لەیەکبەدوای یەکی ژمارەییدا کاتێك دووڕادە لە ڕادەکانی زانراوبێ

ڕادەی شەشەم لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییەدا بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $a_9 = 120$ ، $a_{14} = 195$

هەنگاوی 1 بنچینە بدۆزەوە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	پاساکە
$a_{14} = a_9 + (14-9)d$	$a_n = a_{14}$ و $a_1 = a_9$ (لەجیاتی 1 ، 9 دابنێ) دابنێ
$a_{14} = a_9 + 5d$	سادەیکە
$195 = 120 + 5d$	لەجیاتی دابنێ
$15 = d$	شیکاریکە

هەنگاوی 2 a_1 بدۆزەوە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	پاساکە
$120 = a_1 + (9-1)(15)$	لەجیاتی دابنێ
$120 = a_1 + 120$	سادەیکە
$0 = a_1$	شیکاریکە

هەنگاوی 3 پاسای یەکبەدوای یەکەکە بنووسە و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی a_6

$a_n = a_1 + (n-1)d$	پاسا
$a_n = 0 + (n-1)(15)$	لەجیاتی دابنێ
$a_6 = 0 + (6-1)15$	سادەیکە
$= 75$	

ڕادەی شەشەمی یەکبەدوای یەکەکە بریتییە لە 75

خاڵی جاوەڕێی 4. ڕادەی یازدەیەمی ئەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

أ $a_2 = -133$ و $a_3 = -121$ ب $a_3 = 20.5$ و $a_8 = 13$

لەوانەکانی پێشوودا زنجیرە ژمارەییەکانت نووسینەوەو هەژماری بەهاکانیت کردووە. **زنجیرەی ژمارەیی Arithmetic Series** زنجیرەیەکە یەکبەدوای یەکەکەی ژمارەییە. دەتوانیت بە ئاسانی یاسایەك بدۆزیتەوە بۆ هەژمارکردنی بەهای زنجیرە ژمارەییەکە هەتا ڕادەیەکی دیاریکراو. وەك ئەمەی خوارەوە:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 \quad +(a_1+d)+(a_1+2d)+\ldots+a_n \\ S_n &+ a_n \quad +(a_n-d)+(a_n-2d)+\ldots+a_1 \\ \hline 2S_n &= \underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)\ldots+(a_1+a_n)} \end{aligned}$$

سەرجەمی n بڕ کەهەریەکە یەکسانە بە $a_1 + a_n$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right) \text{ یان } S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

فێربە

سەرجەمی n ڕادەی یەکەم لە زنجیرە ژمارەییدا

بەنووسین	بەژمارە	بەجەبری
سەرجەمی n ڕادەی یەکەم لە زنجیرە ژمارەیی بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ژمارەی ڕادەکان لە ناوەندە ژمێرەیی ڕادەی یەکەم و دواڕادە.	سەرجەمی $2+4+6+8+10$ بریتییە لە $S_5 = 5\left(\frac{2+10}{2}\right) = 5(6) = 30$	$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$ کاتێك n ژمارەی ڕادەکان و a_1 ڕادەی یەکەم و a_n دوا ڕادە بێت.

نموونە 5 دۆزینەوەی بەهای زنجیرە ژمارەیی

سەرجەمی داواکراو لەهەریەکە لەم زنجیرە ژمارەییانەدا بدۆزەوە.

أ S_{15} لە زنجیرەی

$25 + 12 + (-1) + (-14) + \ldots$

بنچینە بدۆزەوە.

$d = 12 - 25 = -13$

ڕادەی a_{15} بدۆزەوە.

$a_{15} = 25 + (15 - 1)(-13)$

$= -157$

S_{15} بدۆزەوە.

$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$

$S_{15} = 15\left(\frac{25+(-157)}{2}\right)$

$= 15(-66) = -990$

بۆ پاسادان بژمێری ڕوونکردنەوە بەکاربێنە.

ب $\sum_{k=1}^{k=12}(3+4k)$

هەردوو ڕادەی a_1 و a_{12} بدۆزەوە.

$a_1 = 3 + 4(1) = 7$

$a_{12} = 3 + 4(12) = 51$

S_{12} بدۆزەوە.

$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$

$S_{12} = 12\left(\frac{7+51}{2}\right)$

$= 348$

بۆ پاسادان بژمێری ڕوونکردنەوە بەکاربێنە.

ئاگاداربە!

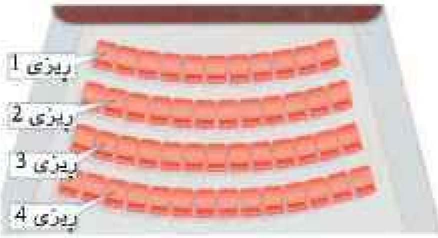
ئەم سەرجەمە بەشێوانە ناتوانێت سەرجەمی زنجیرە ژمارەیی کۆتایی نەهاتوو بدۆزیتەوە لەبەرئەوەی بەهای ڕادەکان تا ناکۆتا زیاددەکات یان تا ناکۆتا کەمدەکات.

خاڵی چاودێری

5. سەرجەمی داواکراو لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانەدا بدۆزەوە.

أ S_{16} لە زنجیرەی $12 + 7 + 2 + (-3) + \ldots$ **ب** $\sum_{k=1}^{k=13}(50 - 20k)$

نموونـــــه 6 جێبەجێکردن لەشانۆکاندا



ژمارەی کورسییەکانی چواردە ڕیزی یەکەم لە ناوەڕاستی یەکێک لە شانۆ جیهانەکان یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی پێکدەهێنێت.

أ **ژمارەی کورسییەکان لە ڕیزی 14 دا چەندە؟**

پاساکە بنووسە. $a_1 = 11$ و $d = 1$

پاسای ڕادەی n بنووسە.	$a_n = a_1 + (n-1)d$
لە جیاتی دابنێ	$a_{14} = 11 + (14-1)(1)$
	$= 11 + 13$
سادەبکە	$= 24$

ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی چواردەهەم دەکاتە 24 کورسی

ب **ژمارەی کورسییەکان لەهەر 14 ڕیزەکەدا چەندە؟**

S_{14} بدۆزەوە بە بەکارهێنانی پاسای سەرجەمی ڕادەکانی یەکەم لە زنجیرەی ژمارەییدا.

پاساکە	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$
لەجیاتی دابنێ	$S_{14} = 14\left(\frac{11+24}{2}\right)$
سادەبکە	$= 14\left(\frac{35}{2}\right) = 245$

ژمارەی کورسییەکانی هەر 14 ڕیزەکە دەکاتە 245 کورسی.

خاڵی چاودێری

چی دەبێت ئەگەر... ؟ وا دابنێ ژمارەی کورسییەکان لەهەر ڕیزێك لەڕیزی دووەمەوە دوو کورسی زیاترە لەوەی پێش خۆی.

أ ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی 14 چەندە؟

ب ژمارەی کورسییەکان لەهەر 14 ڕیز چەندە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. بەراورد لەنێوان یەکبەدوای یەکی ژمارەیی و نەخشەی هێڵی بکە.
2. بنچینەی سالب چی دەگەیەنێت لەیەکبەدوای یەکی ژمارەییدا؟
3. چۆن ڕادەی شەشەم دەدۆزیتەوە لە یەکبەدوای یەکی ژمارەیی ئەگەر ڕادەی سێیەم و چوارەمت زانی
4. چۆن بنچینە دەدۆزیتەوە لە یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی کاتێك ڕادەی حەوتەم و دوازدەیەم زانراوبێت
5. ڕێکخەربە ئەم هێڵکارییە بنووسەوە و پاشان تەواوی بکە هەر چوار چێوەیەك پڕبکەوە بۆئەوەی تێگەیشتنی لەیەکبەدوای یەکی ژمارەییدا ڕونبکەیتەوە.

فێربە

3-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** بڕەی $50+40+30+20+10$ بریتییە لە (یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی یان زنجیرە ژمارەیی)

پڕوانە نموونە 1

دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان نا. ئەگەر ژمارەییە بنچینە و ڕادەی دوای خۆی بدۆزەوە.

2 $46, 39, 32, 25, 18, \ldots$

3 $28, 21, 15, 10, 6, \ldots$

4 $\frac{12}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{6}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$

پڕوانە نموونە 2

ڕادەی هەشتەم لەهەریەک لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

5 $3, 8, 13, 18, \ldots$

6 $10, 9\frac{3}{4}, 9\frac{1}{2}, 9\frac{1}{4}, \ldots$

7 $-3.2, -3.4, -3.6, -3.8, \ldots$

پڕوانە نموونە 3

ڕادەی نادیارەکان لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

8 13, ■ , ■ , 25, ...

9 9, ■ , ■ , ■ , 37, ...

10 1.4, ■ , ■ , ■ , -1, ...

پڕوانە نموونە 4

ڕادەی نۆیەم لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە.

11 $a_4=27$ ، $a_5=19$

12 $a_3=12.2$ ، $a_4=12.6$

13 $a_3=-5$ ، $a_6=-11$

14 $a_{10}=100$ ، $a_{20}=50$

15 $a_7=-42$ ، $a_{11}=-28$

16 $a_4=\frac{3}{4}$ ، $a_8=\frac{1}{2}$

پڕوانە نموونە 5

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرەیەک بدۆزەوە.

17 S_{15} لە زنجیرەی $5+9+13+17+\ldots$

18 $\sum_{k=1}^{12}(-2+6k)$

19 S_{18} لە زنجیرەی $3.2+2.9+2.6+2.3+\ldots$

پڕوانە نموونە 6

20 **کرێ** بلند پەیوەندی بە کۆمپانیایەکی زانیارییەوە کرد، تا بە موچەیەکی ساڵانە کە بڕەکەی 26 000 000 دینارە کاربکات. بە مەرجێک ساڵانە مووچەکەی 1 250 000 دینار زیادبکات.

أ لە ساڵی شەشەمدا مووچەکەی دەبێتە چەند؟

ب کۆی ئەو مووچەیەی لە شەش ساڵی یەکەمدا وەریدەگرێت چەندە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونەکە
23-21	1
26-24	2
29-27	3
32-30	4
35-33	5
36	6

دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان نا. ئەگەر ژمارەییە، بنچینەکەی و ڕادەی دواتری بدۆزەوە.

21 $288, 144, 72, 36, 18, \ldots$

22 $-2, -12, -22, -32, -42, \ldots$

23 $0.99, 0.9, 0.81, 0.72, \ldots$

ڕادەی یازدەیەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەییدا بدۆزەوە.

24 $12, 11.9, 11.8, 11.7, \ldots$

25 $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \ldots$

26 $-3.0, -2.5, -2.0, -1.5, \ldots$

ڕادەی نادیار لەهەریەک لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییە بدۆزەوە.

27 77, ■ , ■ , ■ , 33, ...

28 -29, ■ , ■ , -2, ...

29 2.3, ■ , ■ , ■ , 1.5, ...

ڕادەی دوازدەیەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

30 $a_5=16.2$ ، $a_4=18.4$ **31** $a_8=46$ ، $a_4=-2$ **32** $a_{25}=-58$ ، $a_{22}=-49$

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرە ژمارەییەکدا بدۆزەوە.

33 S_{15} لە زنجیرەی $-18+(-16)+(-14)+...$ **34** $\sum_{k=1}^{k=20}(88-3k)$ **35** $\sum_{k=1}^{k=14}\left(14-\frac{1}{2}k\right)$

36 **بەکاربردن** کاژین پۆشاکێکی بەقیست کڕی، لە هەفتەی یەکەمدا 15000 دیناریدا بەفرۆشیارەکە. وا ڕێککەوتن هەفتانە 5000 دینار بۆ قیستەکانی تر زیادبکات.

أ لە هەفتەی نۆیەمدا دەبێت چەند پارەبدات؟

ب سەرجەمی ئەو پارەیەی لە کۆتایی هەفتەی نۆیەمدا داویەتی چەندە؟

37 **کاتژمێرەکان** کاتژمێری گۆڕەپانێك لەکاتژمێر 1دا یەك زەنگ لێدەداو لەکاتژمێر 2دا دووجارو هەروەها...

أ کاژمێرەکە لە کاتژمێر 1 ی پاش نیوەڕۆوە تا نیوە شەو چەندجار لێدەدات وە بە درێژایی 24 کاتژمێر چەندجار لێدەدات؟

ب **چی دەبێت ئەگەر ...؟** کاتژمێری شارەوانی لەهەر نیو کاتژمێردا جارێك زەنگ لێبدات. ئەمەش سەرەڕای لێدانەکانی لەهەرسەری کاتژمێرێکدا کاریگەری لەسەر یەکبەدوای یەکەکە چی دەبێت؟ و ژمارەی لێدانەکانی ئەم کاژمێرە لە ماوەی 24 کاتژمێردا چەند دەبێت؟

بەروازێیەك

لەسەر کاتژمێر

لە گرنگترین شتە دیارەکانی شاری لەندەنی پایتەختی بەریتانیا کاتژمێرە بەناوبانگەکەی بیگ بنە کە دەکەوێتە گۆڕەپانی پەرلەمانی بەریتانیاوە. ناوی ئەو کاتژمێرە Big Ben بۆ زەنگە زەبەلاحەکەی دەگەڕێتەوە کە بارستاییەکەی 13.8 تەنە بۆ ئاگاداری لە کات لێدەدات.

سەرجەمی داواکراو بۆهەر زنجیرەیەك بدۆزەوە.

38 $\sum_{k=1}^{k=16}(555-11k)$ **39** $\sum_{k=1}^{k=15}(4-0.5k)$ **40** $\sum_{k=1}^{k=18}\left(-33+\frac{5}{2}k\right)$

41 S_{16} لە زنجیرەی $7.5+7+6.5+...$ **42** S_{18} لە زنجیرەی $2+9+16+23+...$

43 **تەلار** هەرەمی لۆڤەر لە پاریس لەبەردەم مۆزەخانەی لۆڤەر لە هەشتایەکانی سەدەی بیستەمدا دروستکراوە. ئەو هەرەمە بە تابلۆی شووشەبەندکراوە. هەرەمەکە لەچەند ڕووتەختێك پێکهاتووە ڕووتەختەکەی سەرەوە 4 تابلۆی تێدایە ژمارەی تابلۆکان تا بەرەو خواربێت 4 زیاددەکات.

أ هێمای سەرجەم بۆ نووسینی زنجیرەکە و دیاریکردنی ژمارەی تابلۆکان بەگشتی لە n ڕووتەختدا بەکاربێنە.

ب ئەگەر هەرەمەکە لە 18 ڕووتەخت پێکهاتبێت. ژمارەی تابلۆ شوشەکان چەندە؟

ج لە ڕاستیدا ژمارەی تابلۆ بەکارهاتووەکان 11 تابلۆی کەمترە لەوەی هەژمارت کرد. ئەویش بۆ دروستکردنی دەروازەی هەرەمەکە. ژمارەی ئەو تابلۆیانەی لەهەرەمی لۆڤەردا هەیە چەندە؟

44 **فیزیا** ئانکی ئاو لە بەرزیدا دادەنرێت تا بە ئاسانی ئاو بگاتە هەر ماڵێك، هەتا ئانکی ئاوەکە مەترێك بەرزتر بێتەوە پەستانی ئاوەکە 9.73 کیلۆ باسکال زیاددەکات.

أ یەکبەدوای یەکێك بنووسە پەستانی ئاوەکە لەگەڵ بەرزبوونەوەی ئانکییەکە مەتر بە مەتر پیشانبدات.

ب نزمترین بەرزی ئانکییەکە چەندە تا پەستانی ئاوەکە دەکاتە 345 کیلۆ باسکال.

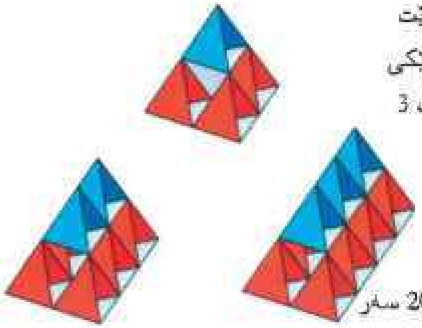
ج نزمترین بەرزی ئانکییەکە چەندە تا پەستانی ئاوەکە دەکاتە 690 کیلۆ باسکال کە باشترین ئاستی ناسراوە بۆ پەستانی ئاو؟

د یەکبەدوای یەکەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە. پەستانی ئاوەکە لەهەردوو لقی ب و ج شلۆڤە بکە.

45 **زەویناسی** كیشوەری ئەمریكای باكوور سالانە لە كیشوەری ئەورووپا دوور دەكەوێتەوە.

أ پاش 50 سال كیشوەری ئەمریكای باكوور چەند لە ئەورووپا دوور دەكەوێتەوە.

ب پاش چەند سال ئەو دوو كیشوەرە بە لایەنی كەم 1 كیلۆمەتر لە یەكتری دوور دەكەونەوە.



46 دەتوانیت نموونەی (سامپڵی) هەرەمی یەك سەر لەدوو چین پێكهاتبێت بە بەكارهێنانی 4 هەرەمی بنكە سێینە دروستبكەی بۆنەوەی سامپڵێكی چەند سەر لە دوو چین پێكهاتبێت دروستبكەیت پێویستە هەر جارێك 3 هەرەمی بۆ زیاد بكەیت، هەروەك لە وێنەی بەرامبەردا پیشاندراوە.

أ چەند هەرەمی بنكە سێینەت پێویستە بۆ دروستكردنی سامپڵێكی دوو چینی 20 سەری هەبێت؟

ب سۆلاف 20 سامپڵی لەدوو چین پێكهاتوو كە سەرەكانی لە 1 تا 20 سەر بوو یەك لەدوای یەك دروستكرد. چەند هەرەمی بنكە سێینەی بەكارهێناوە.

47 **كرێ** یانەیەكی تۆپی سەبەتە 000 395 دینار لەهەفتەی یەكەمدا دەدات بە ڕاهێنەرەكەی. و بۆ هاندانی ڕاهێنەرە باشەكان لەهەر هەفتەیەكدا 000 45 دیناری زیادكرد. ڕاهێنەرێك لەدوا هەفتەی وەرزەكەدا 000 755 دیناری وەرگرت. ئایا ئەم وەرزە چەند هەفتەی خایاندووە؟

48 **بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆ نوسینی ڕێسای یەكبەدوای یەكی ژمارەیی، كەمترین ڕادەكە پێویستە بزانیت چەندە؟ بۆ نووسینی هاوكێشەی ڕاستەهێڵێك پێویستە چەند خاڵت هەبێت؟ ئایا پەیوەندی لەنێوان ئەو دوو وەڵامەدا هەیە؟ ڕوونیبكەوە.

49 **بنووسە** بنچینەی یەكبەدوای یەكێكی ژمارەیی، ژمارەیەكی موجەبە. ڕادەی a_n چی بەسەردێت ئەگەر بەهای n بەردەوام زیادبكات؟ چی بەسەردێت ئەگەر بنچینەكە سالب بێت.

ئامادەكردن بۆ تاقیكردنەوە

50 كام لەمانە یەكبەدوای یەكی ژمارەییە؟

أ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

ب $2.2, 4.4, 6.6, 8.8, \ldots$

ج $2, 4, 8, 16, \ldots$

د $2, 4, 7, 11, \ldots$

51 یەكێك لە ڕێكخەری ئاهەنگەكان 45 هەزار دینار وەردەگرێت. بۆ هەریەكێكی بەشدار بووی ئاهەنگەكە 12 هەزار دیناری بۆ زیاد دەكرێت. كام لەم یەكبەدوای یەكانەی خوارەوە بارەكە دەردەبڕێت؟

أ $a_n = 45 + 12(n-1)$

ب $45, 57, 69, 81, 93, \ldots$

ج $a_n = 57 + 12n$

د $57, 69, 81, 93, 105, \ldots$

52 كام لەمانەی خوارەوە ڕادەی نادیاری یەكبەدوای یەكە ژمارەییەكەیە 40 ، ■ ، ■ ، ■ ، 4

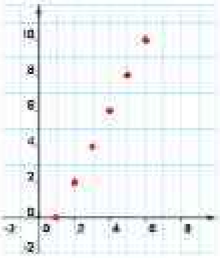
أ 11, 22, 33

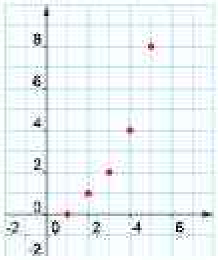
ب 13, 22, 31

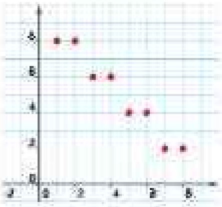
ج 14, 24, 34

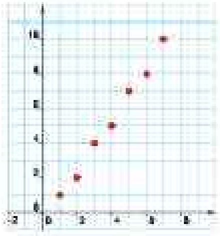
د 16, 24, 36

53 کام لەم هێڵکارییە ڕوونکردنەوەییانە یەکبەدوای یەکی ژمارەیی دەنوێنێت؟

أ


ج


ب


د


54 کام لەمانەی خوارەوە سەرجەمی زنجیرەی $4+7+10+13+16+19$ دەنوێنێت؟

أ $\sum_{k=1}^{k=6} 19-3k$ ب $\sum_{k=1}^{k=6}(22-3k)$

ج $\sum_{k=1}^{k=6} 19-4k$ د $\sum_{k=1}^{k=6}\left(22-3(k-1)\right)$

55 **کورتە وەڵام** ڕادەی سیزدەهەم لەیەکبەدوای یەکی ژمارەیی ... ,42 ,46 ,50 ,54دا چەندە؟

بەرەنگاری و فراوانکردن

56 دوو ڕادەی a_n و a_mت لە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکی ژمارەییدا هەیە.

أ ڕوونیبکەوە بنچینەی ئەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییە دەکاتە $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$.

ب ڕێسا نوێیەکە بۆ دۆزینەوەی بنچینە لەو یەکبەدوای یەکە ژمارەییە بەکاربێنە کە $a_{12}=88$ و $a_{36}=304$

57 ڕێسایەك بنووسە جگە لە ڕادەی یەکەم ڕادەی تری تێدانەبێت بۆ هەژمارکردنی سەرجەمی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی، کەی بەکارهێنانی ئەو ڕێسایە گونجاو دەبێت؟

58 سەرجەمی 3 ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی یەکسانە بە 60 و ئەنجامی لێکدانیان یەکسانە بە 7 500 ئەو سێ ڕادەیە کامانەن.

59 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** مەبەست لە یەکسان بوونی $a_{2n}=2a_n$ چییە؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

دیاریبکە ئایا ئەم ئەخشە توانییانە ئەخشەیەکی گەشەبوونە یان بووکانەوەیە. (وانەی 4 - 1)

60 $f(x)=1.25(0.75)^x$ **61** $f(x)=1.43(5.32)^x$ **62** $f(x)=0.92(0.64)^x$

63 **دەنگەکان** ئەخشەی $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ڕێسایەکە بۆ پێوانی ئاستی توندی دەنگ بەکاردێت. کاتێك L ئاستی توندی دەنگە بە دیسبل و I توندی دەنگ و I_0 توندی بەرگوێ کەوتن بێت، ئاستی توندی دەنگێك بدۆزەوە. کە توندییەکەی $10^{9.2}I_0$ بێت.

هەر زنجیرەیەك بە بەکارهێنانی یاسای سەرجەم بنووسە. (وانەی 6 - 2)

64 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ **65** $\frac{4}{5}+\frac{8}{5}+\frac{12}{5}+\frac{16}{5}+4$

66 $-1+2+7+14+23$ **67** $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-1-\frac{4}{3}-\frac{5}{3}$

بەشی 6

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

6-1 دەروازەیەك بۆ یەکبەدوای یەکەکان

پێنج ڕادەی یەکەمی هەریەکە لەم یەکبەدوای یەکانە بدۆزەوە.

1. $a_n = \frac{2}{3}n$
2. $a_n = 4^{n-1}$
3. $a_1 = -1.3$ ، $a_n = 2a_{n-1} - 12$
4. $a_n = n^2 - 2n$

جۆری ئەم یەکبەدوای یەکانە دیاریبکە.

5. $8, 11, 14, 17, 20, \ldots$
6. $-2, -8, -18, -32, -50, \ldots$
7. $1\,000, 200, 40, \frac{8}{5}, \ldots$
8. $437, 393, 349, 305, 261, \ldots$

9. پاسێك بە خێرایی 55 km / h دەڕوات. پاسەکە لە کیلۆمەتری 18 ەوە دەستی بە جووڵە کردو پارێزگاری لە خێراییەکەی کرد. دوای 4 کاتژمێر پاسەکە لەکام کیلۆمەتری ڕێگاکەدا دەبێت؟ یەکبەدوای یەکەکە بە ڕوونکردنەوەیی لە n کاتژمێردا بنوێنە. شێوازەکە باسبکە.

6-2 زنجیرەکان و هێمای سەرجەم

زنجیرەکە بکەوە و بەهایەکەی هەژماربکە.

10. $\sum_{k=1}^{k=4} (-14 - 2k)$
11. $\sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{k}{k+2}\right)$
12. $\sum_{k=1}^{k=5} (-1)^k (k^2 - 2)$

بەهای زنجیرەکە بدۆزەوە.

13. $\sum_{k=1}^{k=5} \frac{1}{2}$
14. $\sum_{k=1}^{k=40} k^2$
15. $\sum_{k=1}^{k=15} k$

16. ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی یەکەمی شانۆیەك 20 کورسییە، لە ڕیزێکەوە بۆ ئەو ڕیزەی لەدوای دێت ژمارەی کورسییەکان 3 کورسی زیاد دەکات. ژمارەی کورسییەکان لە شانۆکەدا چەندە؟ ئەگەر بزانیت ژمارەی ڕیزەکان 12 ڕیزبێت.

6-3 یەکبەدوای یەکەکان و زنجیرە ژمارەییەکان

ڕادەی هەشتەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

17. $10.00, 10.11, 10.22, 10.33, \ldots$
18. $-5, -13, -21, -29, \ldots$
19. $a_2 = 57.5$ و $a_5 = 80$
20. $a_{10} = 141$ و $a_{13} = 186$

ڕادەی نادیار لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆزەوە.

21. $-23, ■, ■, -89, \ldots$
22. $31, ■, ■, ■, 79, \ldots$

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرە ژمارەییەك بدۆزەوە.

23. S_{10} لە زنجیرەی $40 + 30 + 20 + 10 + \ldots$
24. $\sum_{k=1}^{k=8} 4k$
25. $\sum_{k=1}^{k=11} (0.5k + 5.5)$
26. S_{14} لە زنجیرەی $-6 - 1 + 4 + 9 + \ldots$

27. پێشڕەو بڕیاریدا هەندێك لەو پارەیەی باوکی دەیداتێ لە دەخیلەیەکدا پاشەکەوتی بکات. بڕیاریدا لەهەفتەی یەکەمی ساڵەکەدا هەزار دینار بخاتە دەخیلەکەیەوە 1500 دینار لەهەفتەی دووەمدا و 2 هەزار دینار لە هەفتەی سێیەمدا و هەروەها ... لەدوای هەفتەی کۆتایی ساڵدا چەند پارە دەخاتە دەخیلەکەیەوە. لە کۆتایی ساڵدا دەخیلەکە چەندی تێدابێت؟ (ئەگەر بزانیت ساڵێك 52 هەفتەی تێدایە)

4–6 یەکبەدواییەك و زنجیرە ئەندازییەکان Geometric sequences and Series

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

پلاندانەرانی یارییە وەرزشییەکان یەکبەدوای یەك و زنجیرە ئەندازەییەکان بۆ دیاریکردنی ژمارەی یارییەکان لەهەر خولێکدا بەکاردێنن (نموونە 6)

ئامانجەکان

- دۆزینەوەی ڕادەکانی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان لەگەڵ دۆزینەوەی ناوەندی ئەندازەیی
- دۆزینەوەی بەهاکانی زنجیرە ئەندازەییەکان.

زاراوەکان Vocabulary

یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی Geometric Sequence

ناوەندی ئەندازەیی Geometric mean

زنجیرەی ئەندازەیی Geometric Series

سیرینا ولیامز لەنێوان 128 یاریکەردا لەتۆپی تێنسی قارەمانێتی کچان لە ویمبلدون ساڵی 2003 دا پلەی یەکەمی بەدەستهێنا، لەکۆتایی هەر یارییەکی نێوان دوویاریکەردا براوە بەردەوام دەبێت بەڵام دۆڕاوەکە دەردەکرێت. ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە ژمارەی یاریکەرەکان لە کۆتایی هەر خولێکدا بۆ نیوە کەمدەکات. دەکرێت ئەو یاریکەرانەی لە کۆتایی هەر خولێکدا دەمێنێتەوە بە بەکارهێنانی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی دیاریبکرێن. لە **یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا Geometric Sequence** ڕێژەی هەر ڕادەیەك بۆ ڕادەکەی پێش خۆی نەگۆڕە و جیاوازە لە 1 . بەو ڕێژەیە دەوترێت **بنچینە Common ratio** بنچینەی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکەی سەرەوە بریتییە لە $\frac{1}{2}$.

خولەکە	1	2	3	4
ژمارە	128	64	32	16

ڕێژەکان $\frac{64}{128}=\frac{1}{2}$ $\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$ $\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$

بیرت بێتەوە نەخشە توانییەکان ڕێژەی هاوبەش (بنچینە)یان هەیە، کاتێك جووتە ڕێکخراوی (n, a_n)ی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت. ئەو خاڵانەی دیاریت کردووە دەکەونە سەر چەماوەیەکی توانی بەو شێوەیە دەتوانێت سەیری یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی بکەیت هەروەك نەخشەیەکی توانی بوارەکەی کۆمەڵەی ژمارە سروشتییەکانە.

نموونە 1 جیاکردنەوەی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان

دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە یان نا، ئەگەر ئەندازەییە بنچینەکەی و ڕادەی دوای ڕادە دراوەکە بدۆزەوە.

أ 8, 12, 18, 27, ...

8 12 18 27

جیاوازییەکان 9 6 4

ڕێژەکان $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$

یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە بنچینەکەی $r=\frac{3}{2}$ هێمای r بۆ بنچینەی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی دادەنرێت

ب 8, 16, 24, 32, ...

8 16 24 32

جیاوازییەکان 8 8 8

ڕێژەکان $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{2}$ 2

یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە بنچینە $d=8$ هێمای d بۆ بنچینەی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی دادەنرێت

ج 6, 10, 15, 21, ...

6 10 15 21

جیاوازییەکان 6 5 4

ڕێژەکان $\frac{7}{5}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{3}$

یەکبەدوای یەکەکە نە ژمارەییە و نە ئەندازەییشە

خاڵی چاودێری

1. دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە یان نا ئەگەر ئەندازەییە بنچینەکەی و ڕادەی دوای ڕادە دراوەکە بدۆزەوە.

أ $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{108}, ...$

ب 1.7, 1.3, 0.9, 0.5, ...

ج −50, −32, −18, −8, ...

لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا هەر ڕادەیەك لە ڕادەکانی بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ئەو ڕادەیەی پێش خۆی هاتووە لە بنچینەکەی، ئەمەش پێناسەیەکی ئادیاری ئەم یەکبەدوای یەکەت بەم شێوەیەی خوارەوە دەداتێ:

$$a_n = a_{n-1} r$$

ڕادەی n ⟵ a_n ، ڕادەی پێش خۆی a_{n-1} ، بنچینە ⟵ r

هەروەها دەتوانیت پێناسەی دیار بۆ دۆزینەوەی ڕادەی nی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکە بەکاربێنیت. هەر ڕادەیەك بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ڕادەی یەکەم لە هێزێك لە هێزەکانی بنچینەکە. هەروەك لە خشتەی خوارەوە پیشاندراوە.

ژمارەی یاریکەرەکان لەهەر خولێکی ویمبلدون					
خولەکە	1	2	3	4	n
ژمارەی یاریکەران	128	64	32	16	a_n
ڕێساکە	$a_1 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$a_2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$a_3 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a_4 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a_n = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

فێربە

یاسای گشتی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان

ڕادەی a_n بۆ یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بەم یاسایەی خوارەوە هەژماردەکرێت

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

کاتێك a_1 ڕادەی یەکەمی و r بنچینەکەی یەکبەدوای یەکەکە بێت.

نموونە 2

دۆزینەوەی ڕادەی n لە یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی

ڕادەی نۆیەم لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی ... ,80–, 40, 20–, 10, 5– دا بدۆزەوە.

هەنگاوی 1 بە بەکارهێنانی یاساکە بنچینە بدۆزەوە. $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{-5} = -2$

هەنگاوی 2 ڕادەی نۆیەم هەژماربکە بە بەکارهێنانی یاسا

$a_n = a_1 r^{n-1}$ یاساکە

$a_9 = -5(-2)^{9-1}$ لە جیاتی دابنێ

$a_9 = -5(256) = -1280$ سادەبکە

ڕادەی نۆیەم لەم یەکبەدوای یەکە بریتییە لە 1280–

ساغبکەوە یەکبەدوای یەکەکە تەواوبکە.

$a_5 = -80$

$a_6 = -80(-2) = 160$

$a_7 = 160(-2) = -320$

$a_8 = -320(-2) = 640$

$a_9 = 640(-2) = -1280$ ✓

خاڵی جیاوەبوون

2. ڕادەی نۆیەم لەهەریەکە لەم یەکبەدوای یەکە ئەندازەییانە بدۆزەوە.

أ $\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \ldots$

ب $0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, \ldots$

نموونــــە 3 دۆزینەوەی ڕادەی n ی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بەزانینی دووڕادە لە ڕادەکانی

ڕادەی دەیەم لەو یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەدا بدۆزەوەکە $a_5 = 96$ و $a_7 = 384$

هەنگاوی 1 بنچینەکە بدۆزەوە.

$a_7 = a_5 r^{7-5}$	یاساکە
$a_7 = a_5 r^2$	سادەبکە
$384 = 96r^2$	لەجیاتی دابنێ
$4 = r^2$	هەردوولا دابەشی 96 بکە
$\pm 2 = r$	ڕەگی دووجای هەردوولا وەربگرە

ئاگاداریە!
کاتێک دوو ڕادە لە ڕادەکانی یەکبەدوای یەکەکە دراو بێت، دڵنیابە لەوەی کە بەها موجەب و سالبەکانی r ت وەرگرتووە

هەنگاوی 2 a_1 بدۆزەوە.

لەهەر بارێك لە بارەکانی r بە تەنها بکۆڵەوە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاساکە
$96 = a_1(2)^{5-1}$	$96 = 6(-2)^{5-1}$	لەجیاتی دابنێ
$6 = a_1$	$6 = a_1$	سادەبکە

هەنگاوی 3 یاسای یەکبەدوای یەکەکە بنووسە بۆ دۆزینەوەی a_{10} بەکاربهێنە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	یاساکە
$a_n = 6(2)^{n-1}$	$a_n = 6(-2)^{n-1}$	لەجیاتی دابنێ
$a_{10} = 6(2)^{10-1}$	$a_{10} = 6(-2)^{10-1}$	لەجیاتی n ، 10 دابنێ
$a_{10} = 3072$	$a_{10} = -3072$	سادەبکە

ڕادەی دەیەم لەم یەکبەدوای یەکە بریتییە لە 3072 یان 3072-

خاڵی چاودێری

3. ڕادەی حەوتەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

أ $a_4 = -8$ و $a_5 = -40$ ب $a_2 = 768$ و $a_4 = 48$

بۆیە ناوەندە ئەندازەیی بۆ دوو ژمارەی موجەبی وەك x ، y بەم شێوەی پێناسە دەکرێت $\sqrt{xy}$ ئەگەر a ، b ، c سێ ڕادەی موجەبی لەدوای یەکتر، لەیەکبەدوایەکی ئەندازەیی ئەوا $b = \sqrt{ac}$

ناوەندە ئەندازەییەکان لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا ئەو ڕادانەن دەکەونە نێوان دوو ڕادەوە کە بەدوای یەکدا نەهاتبن.

فێربە

ناوەندە ئەندازەیی

لەهەر یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی کە ڕادەکانی موجەبن هەر ڕادەیەك ناوەندی ئەندازەیی یە بۆ دوو ڕادەکەی پێش خۆی و پاش خۆی.

نموونــــە 4 دۆزینەوەی ناوەندە ئەندازەیی

ناوەندە ئەندازەیی بۆهەردوو ژمارەی $\frac{1}{32}$ و $\frac{1}{2}$ بدۆزەوە.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{32}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$$

خاڵی چاودێری

4. ناوەندە ئەندازەیی بۆ دوو ژمارەی 16 و 25 بدۆزەوە.

هەروەک زنجیرە ژمارەییەکان **زنجیرەی ئەندازەییش Geometric Series** بریتییە لە زنجیرەی یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکەی. دەتوانیت بە ئاسانی یاسایەک بۆ هەژمارکردنی بەهای زنجیرە ئەندازەییەکە تا ڕادەیەکی دیاریکراو بەم شێوەیەی خوارەوە بدۆزیتەوە:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \ldots + a_1r^{n-1}$$

$$-rS_n = \quad -a_1r - a_1r^2 - \ldots - a_1r^{n-1} - a_1r^n$$

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$$

$$S_n(1-r) = a_1(1-r^n)$$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

تیۆرە

سەرجەمی ڕادە یەکەمەکان لە زنجیرەیەکی ئەندازەیی

سەرجەمی ڕادە یەکەمەکان (S_n) لە زنجیرە ئەندازەیی $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ دا بەم یاسایە هەژمار دەکرێت.

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right); r \neq 1$$

کاتێک a_1 ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکەکە و r بنچینەکەی بێت.

نموونـــــه 5 دۆزینەوەی سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی

سەرجەمی داواکراو بۆهەر زنجیرە ئەندازەییەک بدۆزەوە.

أ S_7 لە زنجیرەی $3 - 6 + 12 - 24 + \ldots$

هەنگاوی 1 بنچینەکە بدۆزەوە

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$$

هەنگاوی 2 S_7 بدۆزەوە کاتێک $a_1 = 3$ و $r = -2$ و $n = 7$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_7 = 3\left(\frac{1-(-2)^7}{1-(-2)}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1-(-128)}{3}\right) = 129$$

بۆ یاسادان بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە.

ب $\sum_{k=1}^{k=5}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

هەنگاوی 1 ڕادەی a_1 بدۆزەوە.

$$a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

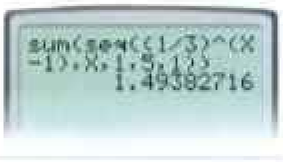
هەنگاوی 2 S_5 بدۆزەوە

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_5 = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$

$$= \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} = 1.49$$

بۆ یاسادان بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە.



لەبیرت بێت

ئەم کۆمەڵانە بەشە کۆمەڵەی لەبەرئەوەی هەریەکەیان لە کۆمەڵە ڕادەیەکی کۆتایی هاتوو پێکهاتووە. لە وانەی 5-6 دا فێردەبیت چۆن سەرجەمی هەندێک لە زنجیرە دوا نەهاتووەکان بدۆزیتەوە.

خاڵی جاوەدێری

5. **سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرە ئەندازەییەکدا بدۆزەوە.**

أ S_8 لە زنجیرە $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

ب $\sum_{k=1}^{k=6} -3(2)^{k-1}$

نموونــــە 6 جێبەجێکردن لە وەرزشدا

لە خولی ویمبلدون بۆ تۆپی تێنسی سەرزەوی **128** یاریکەر بەشداریان کرد. قارەمانەتییەکە بەردەوام بوو تا یەک براوە مایەوە. چەند یاری لە قارەمانێتییەکە ئەنجامدرا.

هەنگاوی 1 یەکبەدوای یەکەکە بنووسە.

بنووسە n = ژمارەی خولەکان

a_k = ژمارەی یارییەکانی خولی k

S_n = کۆی ژمارەی یارییەکان لە n خولدا

$a_n = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ خولی یەکەم 64 یاریە، بۆیە $a_1=64$. لەبەرئەوەی ژمارەی یارییەکان لەهەر خولێکدا نیوەی ژمارەی یارییەکانی خولی پێشوو دەبێت بۆیە $r=\frac{1}{2}$

هەنگاوی 2 ژمارەی خولەکان بدۆزەوە

$1 = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ خولی کۆتایی یەک یاری ئەنجام دەدرێت.

$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ بەشی توانی لە بڕەکە جیابکەوە، بە دابەشکردن بەسەر 64 دا.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\frac{1}{64}$ بەشێوەی توانێک لە توانەکانی $\frac{1}{2}$ بنووسە.

$6 = n-1$ توانەکان یەکسان بکە

$7 = n$ سادەبکە

هەنگاوی 3 کۆی گشتی یارییەکان بدۆزەوە.

$S_7 = 64\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = 127$ یاسای سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی بەکاربهێنە

خولەکە 127 یاری ئەنجامداوە.

خاڵی چاودێری کۆمپانیایەکی گەورە سالانە 84 000 000 دینار کرێی بارەگاکەی ئەدات، ئەو بڕە سالانە 8% زیاد دەکات لە ماوەی 6 ساڵدا کۆمپانیاکە چەند پارە ئەدات؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. سێ ڕادەی دوای ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی... ,6 ,3 بدۆزەوە، پاشان سێ ڕادەی دوای دوو ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکی ژمارەیی... ,6 ,3 بدۆزەوە.
2. بەراورد لەنێوان ناوەندی ژمێرەیی و ناوەندە ئەندازەیی دوو ژمارەی 4 و 10 دا بکە.
3. ڕێکخەریە هێلکارییەکەی بەرامبەر دروستبکەوە و پاشان تەواوی بکە. هەر چوارچێوەیەک پڕبکەوە بەجۆرێک ئەوەی لە یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەکان تێگەیشتووی نیشانبدات.

4-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** لە یەکبەدوای یەکی ئەندازەییدا ئەو ڕادەیەی دەکەوێتە نێوان دوو ڕادەوە کە دوای یەک ئەهاتبن بریتییە لە ___؟___ (ناوەندی ژمێرەیی یان ناوەندی ئەندازەیی).

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە هەریەکە لەم یەکبەدوای یەکانە ئەندازەیین یان ژمارەیین یان هیچیان نیین. ئەگەر ئەندازەییە بنچینەکەی و ڕادەی داهاتووی بدۆزەوە.

2 $-10, -12, -14, -16, \ldots$

3 $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \ldots$

4 $-320, -80, -20, -5, \ldots$

بڕوانە نموونە 2

ڕادەی دەیەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

5 $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$

6 $5000, 500, 50, 5, 0.5, \ldots$

7 $-0.125 \;،-0.25 \;،-0.5 \;،1 \;،-2 \ldots$

بڕوانە نموونە 3

ڕادەی شەشەمی ئەو یەکبەدوای یەکە ئەندازەییە بدۆزەوە کە دوو ڕادە دراوە ناسراوە.

8 $a_5 = -4 \;،\; a_4 = -12$

9 $a_5 = 108 \;،\; a_2 = 4$

10 $a_5 = 12 \;،\; a_3 = 3$

بڕوانە نموونە 4

ناوەندە ئەندازەیی بۆهەردوو ژمارەکە بدۆزەوە.

11 6 و $\frac{3}{8}$

12 2 و 32

13 12 و 192

بڕوانە نموونە 5

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرەیەکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

14 S_8 لە زنجیرەی $2+0.2+0.02+\ldots$

15 $\sum_{k=1}^{k=5}(-3)^{k-1}$

16 S_5 لە زنجیرەی $12-24+48-96+\ldots$

17 $\sum_{k=1}^{k=9}256\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

بڕوانە نموونە 6

18 **مووچە** مامۆستایەکی زمان لە ساڵی یەکەمدا مووچەکەی 8000000 دینارە ئەو مووچەیە ساڵانە بەڕێژەی 5% زیاد دەکات، لە بیستەمین ساڵی خزمەتیدا مووچەکەی دەبێتە چەند؟ لەو ماوەیەدا چەندی وەرگرتووە؟

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی پرسیارەکانی	تەماشای نموونەکە
21-19	1
25-22	2
28-26	3
31-29	4
35-32	5
36	6

دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ئەندازەییە یان ژمارەییە یان شتێکی ترە، ئەگەر ئەندازەییە، بنچینەکەی و ڕادەی داهاتووی بدۆزەوە.

19 $-36, -49, -64, -81, \ldots$

20 $-2, -6, -18, -54, \ldots$

21 $2, 7, 12, 17, \ldots$

ڕادەی نۆیەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

22 $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \frac{1}{1250}, \ldots$

23 $3, -6, 12, -24, 48, \ldots$

24 $3200, 1600, 800, 400, \ldots$

25 $8, 24, 72, 216, 648, \ldots$

ڕادەی حەوتەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە کە دوو ڕادەی دراوە.

26 $a_5 = 162 \;،\; a_4 = 54$

27 $a_6 = 20.25 \;،\; a_5 = 13.5$

28 $a_6 = -100 \;،\; a_4 = -4$

ناوەندە ئەندازەیی بەهەردوو ژمارەیەك بدۆزەوە.

29 9 و $\frac{1}{9}$

30 81 و 2

31 $\frac{1}{5}$ و 45

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرە ئەندازەییەکدا بدۆزەوە.

32 S_6 لە زنجیرەی $1+5+25+125+\dots$

33 S_8 لە زنجیرەی $10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\dots$

34 $\sum_{k=1}^{6} -1\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

35 $\sum_{k=1}^{7} 8\left(10\right)^{k-1}$

36 **باپیران** دایك و باوك و دوو باپیر و دوو داپیرو 4 باپیرە گەورە و 4 داپیرە گەورەت هەیە.

أ ژمارەی باپیرە گەورە و داپیرە گەورە لەماوەی 6 نەوەدا پێشتوو چەندە؟ لەماوەی 21 نەوەدا چەندە؟

ب **چی دەبێت ئەگەر...؟** ڕێسای هەژمارکردنی باپیرە گەورە و داپیرە گەورە چۆن دەگۆڕێت ئەگەر تۆ یەکەم نەوە بیت؟

بۆهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی پێناسەی دیار، و ڕادەی دەیەم و سەرجەمی دە ڕادەی یەکەم بدۆزەوە.

37 $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$

38 $4, 0.4, 0.04, 0.004, \dots$

39 $8, 16, 32, 64, \dots$

40 $-22, -11, -\frac{11}{2}, -\frac{11}{4}, \dots$

41 $162, -54, 18, -6, \dots$

42 $12.5, 62.5, 312.5, 1562.5, \dots$

دەروازەیەک

ئەنتیکە

ئۆتۆمبیلی رولس رویس کە هی سەرمایەدار ڕۆك ئاند رول جون گرانترین ئۆتۆمبیل بوو کە بە 2.2 ملیۆن دۆلار فرۆشرا.

43 **ئەنتیکە** شاناز پولێکی کۆنی بە 20 000 دینار کڕی، شاناز وایدانا نرخی پولەکە ساڵانە 15% زیاد بکات.

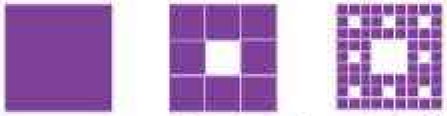
أ نرخی پولەکە پاش 4 ساڵ دەبێتە چەند؟ پاش 6 ساڵ دەبێتە چەند؟

ب ئایا نرخی پولەکە لە چوار ساڵی یەکەمدا زۆرتر زیاد دەبێت لەو زیادبوونەی لە چوار ساڵی دووەمدا بووە یان نا؟ ئەمە ڕوونکبەوە.

44 **قیستە زانکۆییەکان** لە ڕۆژی لە دایکبوونی شیرین داپیرە و باپیرەی بڕیاریاندا قیستەکانی وەرگرتنی لە زانکۆ بۆ بدەن. لە ڕۆژی لە دایکبوونیدا 50 دیناریان بۆ دانا. بڕیاریاندا هەر ساڵێك دوونەوەندەی ساڵەکەی پێشووی بۆ دانێن، کاتێك شیرین تەمەنی دەبێتە 18 ساڵ چەند پارەی بۆ کۆ دەبێتەوە؟ کە تەمەنی دەگاتە 21 ساڵ چەند پارەی بۆ کۆدەبێتەوە؟

45 **تەکنەلۆژیا** نامەیەکی ئەلیکترۆنیت بە دەست گەیشت، تێیدا داوای بەختێکی باشت بۆ دەکات، و داوای لێکردوی بۆ 5 هاوڕێی بنێریت، و داوا لەهەر یەکێکیان بکەیت لەلای خۆیانەوە بۆ 5 هاوڕێی تری بنێرن و هەروەها ... پاش 10 دەستە هاوڕێ ژمارەی ئەو نامانە چەندن؟

46 **فراکتاڵ Fractals** مافوری سیرپنسکی Sierpenski شێوەیەکی لە یەکبووە لەسەر چوارگۆشەیەك چەسپاوە، لەهەر خولێکدا ناوەڕاستی چوارگۆشە ڕەنگکراوەکە چوارگۆشەیەکی لێدەردەهێنرێت، هەروەك لە شێوەکەی خوارەوەدا دیارە.



أ ئەگەر ڕووبەری چوارگۆشەی یەکەم $1\ m^2$ بێت. یەکبەدوای یەکێك بنووسە ڕووبەرە ڕەنگکراوە دەستکەوتووەکان لەهەر خولێکدا بنوێنێت.

ب لەکام خولدا ڕووبەرە ڕەنگکراوەکە لە $\frac{1}{2}\ m^2$ کەمتر دەبێت.

47 **کاغەز** ئەستوری کاغەزی سپی $0.1\ mm$ دەبێت ئەگەر بینوشتێنیەوە ئەستورییەکەی دوونەوەندی لێدێت.

أ ئەگەر کاغەزەکە بەلایەنی زۆرەوە 7 جار بنوشتێنرێتەوە ئەستوری کاغەزەکە دوای 7 جار نوشتاندنەوە چەندە؟

ب وای دابنێ دەتوانیت بەردەوام بیت لە نوشتاندنەوەی کاغەزەکە چەند بتەوێت، دوای چەند جار ئەستوری کاغەزەکە لە بەرزایی لوتکەی ئیڤەرست Everest زیاتر دەبێت کە دەکاتە $8\,850\ m$

48 یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی و یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە بە مەرجێك هەریەکەیان بەم شێوەیە دەستپێبکات ... ,1,4

پێوانەکانی کاغەزەکە	
جۆر	**پێوانەکانی (بە گرێ)**
A	$8\frac{1}{2}\times 11$
B	11×17
C	17×22
D	22×34
E	34×44

49 **پێوانە** خشتەی بەرامبەر پێوانەکانی چەند جۆرە کاغەزێك کە زۆرترین بەکارهێنانی هەیە ڕوونەکاتەوە.

أ دریژی و پانی کاغەزەکە لەهەر پێوانەیەك بپشکنە. چ پەیوەندیەکت بۆ دەردەچێت؟

ب ئەو پەیوەندییەی ڕووبەری کاغەزەکان لە پێوانە جیاوازەکان پێکەوە دەبەستێتەوە کامەیە؟ ئەو پەیوەندییە ناوی چییە؟

50 داهاتی یەکێك لە فلیمە سینەماییەکان لە هەفتەی یەکەمی نیشانیدا 60 ملیار دینارە و لە هەفتەی سێیەمدا 9.6 ملیار دینارە. وادابنێ داهاتی هەفتانەکەی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی دەنوێنێت.

أ داهاتی فلیمەکە لە حەفتەی دووەمدا بخەمڵێنە.

ب ڕێژەی کەمکردنی داهاتەکان لە هەفتەیەکەوە بۆ هەفتەیەکی تر چەندە؟

ج پێشبینی دەکەیت لە کام هەفتەدا داهاتەکەی لە یەك ملیار دینار کەمتر دەبێت.

د نیشاندانی فلیمەکە 8 هەفتە بەردەوام بوو، کۆی داهاتی نیشاندانەکەی چەندە؟

51 **زیندەزانی** جۆرێك لە بەکتریا ژمارەکەی بەپێی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی زیاددەکات. ژمارەی بەکتریاکان دوای کاتژمێرێك 4 بوو و دەبێتە 1024 دوای 5 کاتژمێر. ژمارەی بەکتریاکان پاش دوو کاتژمێرچەندە؟ پاش 3 کاتژمێر چەندە؟ پاش 4 کاتژمێر چەندە؟

52 **پارەدان** کۆمپانیایەك خانوویەکی بۆ بارەگاکەی مانگی بە 750 000 دینار بۆ ماوەی ساڵێك بەکرێی گرت، بەجۆرێك دوای ساڵی یەکەم ساڵانە 10% ئەوبڕە زیاددەکات.

أ زنجیرەیەك بنووسە بۆ ئەو بڕە پارەیەی کۆمپانیاکە لەماوەی 5 ساڵدا دەیدات.

ب هێمای سەرجەم بەکاربێنە بۆ نواندنی ئەوەی ساڵانە کۆمپانیاکە لەماوەی 10 ساڵدا دەیدات، پاشان بەهایەکەی بدۆزەوە.

پێوەری نۆتەکان	
نۆتە	**لەرەلەر (بە هێرتز)**
C_0	16.35
C_1	32.7
C_2	65.4
C_3	130.8
C_4	■

53 **میوزیك** لەرەلەری هەندێك لە نۆتە میوزیکییەکان یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی پێکدێنێت کاتێك C_0 لاوازترین نۆتە بێت.

أ نۆتەی C_4 بە نۆتەی ناوەندە بۆ ئەم جۆرە دادەنرێت. لەرەلەرەکەی چەندە؟

ب یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بنووسە لەرەلەرەکانی نۆتەکان لەم جۆرە بنوێنێت، وایدابنێ $a_1 = C_1$

ج گوێچکەی مرۆڤ دەنگێك نابیستێت لەرەلەرەکەی لە 20 000 هێرتز زیاتر بێت. خانەی یەکەم نۆتە چەندە کە گوێی مرۆڤ توانای بیستنی نییە؟

54 **پزیشکی** یەکێك لە نەخۆشخانەکان لەماوەی شەپۆلی بڵاوبوونەوەی ئەنفلۆنزادا 16 توشبووی لە هەفتەی یەکەمدا و 56 ی لەهەفتەی دووەمدا و 196ی لە هەفتەی سێیەمدا تۆمارکرد.

أ یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بنووسە ژمارەی بارەکانی توشبوون بە ئەنفلۆنزا بنوێنێت.

ب ئەگەر بارەکانی توشبوون بەم شێوەیە بەردەوام بوو، کۆی ژمارەی بارەکانی توشبوون لە کام هەفتەدا دەگاتە 10 000 توشبوو؟

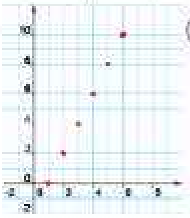
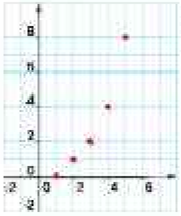
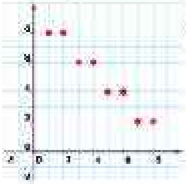
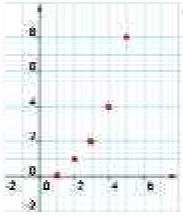
55 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئەگەر بنچینە r گەورەتربێت لە 1 ، کاریگەری لەسەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی چی دەبێت؟ کاریگەری چی دەبێت ئەگەر $0 < r < 1$ ؟

56 **بنووسە** چی بەسەر ڕادەکانی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەییدا دێت، ئەگەر ڕادەی یەکەمی سێ ئەوەندە بکرێت؟ چی بەسەر سەرجەمی ڕادەکانی یەکەمیدا دێت؟

57 کام لەمانەی خوارەوە سەرجەمی شەش ڕادەی یەکەمی ئەم یەکبەدوای یەکە ئەندازەییە $4.5+9+18+36+\ldots$ دەنوێنێت؟

(أ) 67.5 (ب) 144 (ج) 283.5 (د) 445.5

58 کام لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە وا دەردەکەوێت یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەییە

(أ)

(ب)

(ج)

(د)


59 کام لەمانە سێ ڕادەی یەکەمی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی $a_7=-192$ و $a_9=-768$ دەنوێنێت؟

(أ) $3, -6, 12$

(ب) $-3, 12, -48, \ldots$

(ج) $-3, 6, -12$ یان $-3, -6, -12$

(د) $3, -12, 48$ یان $-3, -12, -48$

60 کام لەمانە بەهای ئەم زنجیرەیە $-10-15+22.5-33.75+50.625$ یە؟

(أ) $\sum_{k=1}^{5} 10\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ (ب) $\sum_{k=1}^{5} -10\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ (ج) $\sum_{k=1}^{5} 10\left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ (د) $\sum_{k=1}^{5} -10\left(-\frac{3}{2}\right)^{k}$

بەرەنگاری و فراوانکردن

بژمێری ڕوونکردنەوەیی یەکەم ڕادەی هەریەکیەدوای یەکێک بدۆزەوە بەهاکەی لە ملیۆنێک زیاتربێت.

61 $a_1=10$ ، $r=2$ **62** $r=4$ ، $a_1=\frac{1}{4}$ **63** $a_1=0.01$ ، $r=3.2$

64 سەرجەمی 3 ڕادەی دوای یەک لە یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەییدا بریتییە لە 73.5 و ئەنجامی لێکدانیشیان 2744 ، ئەو ڕادانە کامانەن؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

65 ئەو یەکبەدوای یەکە ئەندازەییەی ڕادەی یەکەمی 55 و بنچینەکەی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی ئەمانە:

أ) پێنج ڕادەی یەکەمی دوای ڕادەی یەکەم بدۆزەوە نزیک کرابێتەوە بۆ نزیکترین ژمارەی تەواو.

ب) سەرجەمی هەردوو ڕادەیەکی دوای یەک هاتوو هەژماریکە تێبینی چی دەکەیت.

ج) دەستەواژەیەکی تایبەت بەم یەکبەدوای یەکە داڕێژە.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

سفرەکانی ئەخشەکە و دەرکەنارەکانی بدۆزەوە. (پۆلەکانی پێشوو)

66 $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x+1}$ **67** $f(x)=\frac{x+5}{x^2-x-6}$ **68** $f(x)=\frac{x^2-16}{4x}$

69 **بازاڕ** یەکێک لە کۆگا گەورەکان داشکاندنێکی بە ڕێژەی 20% لەسەر کەلوپەلەکانی بۆ ماوەی مانگێک دانا. داشکاندنێکی زیادەی بەڕێژەی 10% بۆ ڕۆژانی دووشەممە زیادکرد. (وانەی 5–3)

أ) ئەخشەیەکی تاوێتە بنووسە نرخی کالای ڕۆژی دووشەممە بەپێی نرخە بنەڕەتییەکە x بنوێنێت.

ب) بینا ڕۆژی دووشەممە جلێکی کڕی ئەگەر نرخی بنەڕەتی جلەکە 275000 دینار بێت پێویستە چەند پارە بدات؟

دە ڕادەی یەکەمی هەریەکە لەم یەکبەدوای یەکە ژمارەییانە بدۆزەوە. (وانەی 6–3)

70 $78, 65, 52, 39, 26, \ldots$ **71** $1.7, 7.3, 12.9, 18.5, 24.1, \ldots$

72 $9.42, 9.23, 9.04, 8.85, 8.66, \ldots$ **73** $16.4, 26.2, 36, 45.8, 55.6, \ldots$

لایەڕەی تەکنۆلۆژیا

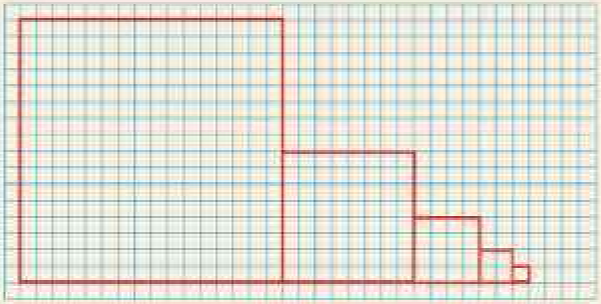
دۆزینەوەی زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان

دەتوانیت بەهۆی یەکبەدوای یەکی چوارگۆشەکان زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان بدۆزەیتەوە.

چالاکی 1

1 لەسەر کاغەزی هێڵی ڕوونکردنەوەیی، چوارگۆشەیەك درێژی لایەکی 16 یەکە بێت دروستبکە. سەرنجبدە چێوەکەی 64 یەکە دەبێت.

2 لە یەکێك لە گۆشەکانی ئەو چوارگۆشەیەی دروستتکردوە. لە تەنیشتەوە دەستبکە بە دروستکردنی چوارگۆشە کە درێژی لایەکانی یەك لەدوای یەك 8 و 4 و 2 و 1 بن.



درێژی لایەکی چوارگۆشەکە	چێوەکەی	سەرجەمی کەڵەکەبوو
16	64	64
8	32	96
4		
2		
1		
$\frac{1}{2}$		

3 خشتەی بەرامبەر دروستبکەوە شەش ڕیزی یەکەمی بە تۆمارکردنی چێوەی چوارگۆشەکان لە ستوونی دووەمدا و سەرجەمی کەڵەکەبووی چێوەکان لە ستوونی سێیەمدا تەواوبکە.

4 هێمای سەرجەم بۆ نووسینی زنجیرەی ئەندازەیی بەکاربێنە چێوەکان بنوێنێت.

5 بژمێری ڕونکردنەوەیی بۆدۆزینەوەی سەرجەمی بیست ڕادەی یەکەم بەکاربێنە

6 **دەستەواژەیەك بنووسە** دەربارەی سەرجەمی کەڵەکەبووی چێوەکان ئەگەر بەردەوام بیت لە دروستکردنی چوارگۆشەکان تا ناکۆتا.

7 بەهای بڕەی $\frac{64}{1-\frac{1}{2}}$ بدۆزەوە پەیوەندی چییە لەنێوان ئەوەی کە دۆزیتەوە لەگەڵ وەڵامی پرسیاری 5 ؟

هەوڵبدە

درێژی لایەکی چوارگۆشەکە	ڕووبەر	سەرجەمی کەڵەکەبوو
16		
8		
4		
2		
1		
$\frac{1}{2}$		

1 خشتەی بەرامبەر دروستبکەوە، بە دۆزینەوەی ڕووبەری چوارگۆشەکان و سەرجەمی کەڵەکەبووی ڕووبەرەکان تەواوی بکە.

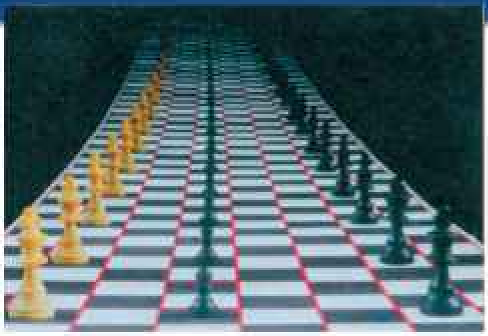
2 هێمای سەرجەم بۆ نووسینی زنجیرەی ئەندازەیی بەکاربێنە کە سەرجەمی ڕووبەرەکان بنوێنێت.

3 بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆدۆزینەوەی سەرجەمی دە ڕادەی یەکەم بەکاربێنە.

4 **دەستەواژەیەك بنووسە** دەربارەی سەرجەمی کەڵەکەبووی ڕووبەرەکان بنووسە ئەگەر بەردەوام بیت لە دروستکردنی چوارگۆشەکان تا ناکۆتا.

5 بەهای بڕی $\frac{256}{1-\frac{1}{4}}$ بدۆزەوە پەیوەندی لەنێوان ئەوەی دۆزیتەوە لەگەڵ پرسیاری 3 دا چییە؟

6 **بوختەی ئەنجام** پاسایەك بۆ هەژمارکردنی بەهای زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوانەهاتوو بنووسە بەهای ڕووتی بنچینە r لە 1 کەمتربێت و لەسفر گەورەتربێت.



5-6 دەرئەنجامی بیرکاری
Mathematical Induction

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوەی شێوازەکانی دووبارەبووەوە (پرسیاری 58)

ئامانجەکان

- بەهای زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو دەدۆزیتەوە
- دەرئەنجامی بیرکاری بۆ سەلماندنی دەستەواژەکان بەکاردەهێنێت.

زاراوەکان
Vocabulary

زنجیرەیی ئەندازەیی ناکۆتا
Infinite geometric series

لێکنزیکبوو
(توافقیة، تقاربیة)
Convergent

ئامانج
Limit

لێکدوورکەوتوو
(تخالفیة، تباعدیة)
Divergent

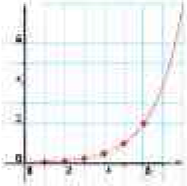
دەرئەنجامی بیرکاری
Mathematical Induction

لەوانەی پێشوودا فێری ئەوەبوویت چۆن بەشە کۆمەڵەکانی زنجیرەی ئەندازەیی دوا هاتوو بدۆزیتەوە. لەم وانەیەدا فێری دۆزینەوەی سەرجەمی ئەندازەیی دوا نەهاتوو دەبێت.

زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو **Infinite geometric series** بریتییە لە ژمارەیەکی دوانەهاتوو ڕادە. تەماشای ئەم دوو زنجیرە ئەندازەییە دوانەهاتووانەی خوارەوە بکە.

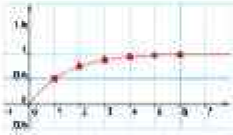
$$R_n = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \dots$$

سەرجەمی بەشەکان						
n	1	2	3	4	5	6
R_n	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{32}$



$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

سەرجەمی بەشەکان						
n	1	2	3	4	5	6
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$



تێبینی ئەوە بکە لە زنجیرەی ئەندازەیی S_n بنچینەکە یەکسانە بە $\frac{1}{2}$ سەرجەمی ڕادەکان نزیک دەبێتەوە لە 1 . تا بەهاکانی n گەورەتربێت، کاتێک $|r| < 1$ ئەوا سەرجەمی بەشەکانی زنجیرە ئەندازەییەکە نزیکدەبێتەوە لە ژمارەیەکی دیاریکراوکاتێک بەهای n زیادبکات. لەم بارەدا دەوترێت زنجیرەکە لێکنزیکبوونە **Convergent** ، ئەو ژمارەیە ئامانجی **Limit** زنجیرەکەیە.

کارەکە لە زنجیرەی R_n دا جیاوازە کاتێک $|r| \geq 1$ و بەهاکانی n زیادبکات. بەهاکانی سەرجەمە بەشەکان زیاد دەکات. هەموو ژمارەکان تێدەپەڕێنێت لەم بارەدا زنجیرەکە لێکدوورکەوتنە **Divergent**

نموونە 1 جیاکردنەوەی زنجیرە ئەندازەییە لێکنزیکبووەکان و لێکدوورکەوتووەکان

دیاریبکە زنجیرە ئەندازەییەکە لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە

أ $20 + 24 + 28.8 + 34.56 + \dots$

$|r| \geq 1$; $r = \frac{24}{20} = 1.2$

زنجیرەکە لێکدورکەوتنە سەرجەمی نییە

ب $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

$|r| < 1$; $r = \frac{1}{3}$

زنجیرەکە لێکنزیکبوونە سەرجەمی هەیە

خۆت جاوبنێرە

1. دیاریبکە زنجیرە ئەندازەییەکە لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە.

أ $\frac{2}{3} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \dots$

ب $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + \dots$

ئەگەر زنجیرەی ئەندازەیی لێکنزیکبونەوە بێت دەتوانیت سەرجەمەکەی هەژمار بکەیت. بە گەڕانەوە بۆ زنجیرەی ... + $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ یاسای سەرجەم لە زنجیرەی ئەندازەیی بەکاربێنە $a_1 = \frac{1}{2}$ و $r = \frac{1}{2}$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

بە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $S(n) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ بنوێنە سەرنجبدە بەها $S(n)$ نزیکدەبێتەوە لە 1 هەرچەند بەهای n گەورەتربێت. هەتا n نزیکبێتەوە لە ناکۆتای موجەب $+\infty$ ، $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لە سفر نزیکدەبێتەوە ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت سەرجەمی زنجیرەکە دەکاتە 1 . لەمەشەوە دەتوانرێت ئەم چەمکە بەگشتی بۆ هەموو زنجیرە ئەندازەییە لێکنزیکبووەکان بەبەکارهێنانی هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری بسەلمێنرێت.

فێربە

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان

ئەگەر بنچینەی یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو r بێت و پاسادانی مەرجی $|r| < 1$ بکات. ئەوا زنجیرەکە لێکنزیکبوونە و سەرجەمەکەی بریتییە لە

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

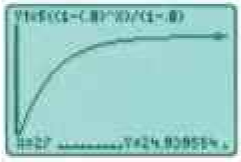
کاتێک a_1 ڕادەی یەکەم و r بنچینەکەی بێت.

نموونـــــە 2 دۆزینەوەی سەرجەمی زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو

سەرجەمی زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو).

أ $5 + 4 + 3.2 + 2.65 + \ldots$

$r = 0.8$	زنجیرەکە لێکنزیکبونە چونکە $|r| < 1$
$S = \frac{a_1}{1-r}$	یاسای سەرجەم
$S = \frac{5}{1-0.8} = \frac{5}{0.2} = 25$	لەجیاتی دابنێ

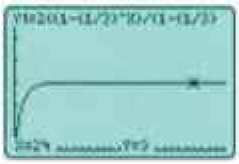


پاسادان بکە. وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y = 5\left(\frac{1-(0.8)^x}{1-0.8}\right)$ بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بکێشە. دەردەکەوێت بەهای y لە 25 نزیکدەبێتەوە.

ب $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k-1}} = \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots$$

$r = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	زنجیرەکە لێکنزیکبونە چونکە $|r| < 1$
$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{2} = 3$	یاسای سەرجەم



پاسادان بکە. وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y = 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^x}{1-\frac{1}{3}}\right)$ بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بکێشە. دەردەکەوێت بەهای y لە 3 نزیکدەبێتەوە.

ڕۆشنایی

دەتوانیت یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی بە ڕوونکردنەوەیی بە بەکارهێنانی یاسای سەرجەمی بنوێنێت هەروەک لە وانەی پێشوودا هاتووە $S = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ بە دانانی y لە شوێنی S و x لە شوێنی n. دانانی بەهای a_1 و r

خاڵی چاودێری

2. سەرجەمی زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

أ $25 - 5 + 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots$ **ب** $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k$

دەتوانیت زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان بۆ نوسینی ژمارەیەکی ڕێژەیی دەوری بەشێوەی کەرت بەکاربهێنیت

نموونــــە 3 نووسینی ژمارەیەکی ڕێژەیی دەوری بەشێوەی کەرت

ژمارەی **0.232323...** وەک کەرت بە سادەترین شێوە بنووسە

هەنگاوی 1 ژمارەکە بەشێوەی زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوای نەهاتوو بنووسە.

$0.232323... = 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + ...$ شێوازێك بۆ نووسینی زنجیرەکە بەکاربێنە

هەنگاوی 2 بنچینە بدۆزەوە.

$r = \frac{0.0023}{0.23} = \frac{1}{100} = 0.01$ زنجیرەکە لێکنزیکبوونە $|r| < 1$

هەنگاوی 3 سەرجەم بدۆزەوە.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.23}{1-0.01} = \frac{0.23}{0.99} = \frac{23}{99}$$

پاسادان بکە بژمێر بۆ دابەشکردنی
23 بەسەر 99 دا بەکاربێنە.

✓

لەبیرت بێت

بیرت بێت هەر ژمارەیەکی دەوری وەك ...0.232323 یان $0.\overline{23}$ ژمارەیەکی ڕێژەییە و دەتوانی بەشێوەی کەرت بینووسی.

خاڵی چاودێری 3. ژمارە ...0.111 وەك کەرت بە سادەترین شێوە بنووسە.

بۆ دۆزینەوەی سەرجەمەکان زنجیرەکانت بەکارهێنا. وەك سەرجەمی ژمارە تەواوکان لە 1 تا 100 . دەتوانرێت یاسا بەکارهاتووەکان بۆ دۆزینەوەی ئەم جۆرە سەرجەمانە بە یەکێك لە ڕێگاکانی سەلماندن لە بیرکاریدا بسەلمێنرێت ئەویش سەلماندنە بەڕێگای **دەرئەنجامی بیرکاری Mathematical induction**

ڤێربە

سەلماندن بە دەرئەنجامی بیرکاری

بۆ سەلماندنی ڕاستی دەستەواژەیەك بۆ هەر بەهایەکی سروشتی n ئەم هەنگاوانە پەیڕەو بکە:

هەنگاوی 1 پاسادانی باری یەکەم بکە: ڕوونبکەوە یاساکە ڕاستە کاتێك $n = 1$

هەنگاوی 2 وایدابنێ دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = k$

هەنگاوی 3 بیسەلمێنە دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = k + 1$

نموونــــە 4 سەلماندن بە دەرئەنجامی بیرکاری

دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

هەنگاوی 1 پاسادانی باری یەکەم بکە، ڕوونبیکەوە دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = 1$

$1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = 1$

هەنگاوی 2 وایدابنێ دەستەواژەکە ڕاستە کاتێك $n = k$

$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$ لە جیاتی n ، k دابنێ.

هەنگاوی 3 بیسەلمێنە دەستەواژەکە ڕاستە کاتێک $n=k+1$

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$ ڕادەی $k+1$ بۆهەردوولا زیادبکە

$$=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$$ ژێرەی هاوبەش بدۆزەوە

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$ سەرەکان کۆبکەوە

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ بەپێی $k+1$ شیتەڵی بکە

$$=\frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2}$$ بەپێی $k+1$ بینووسە

دەستەواژەی $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ڕاستە بۆهەموو بەهایەکی سروشتی n

خاڵی جاودێری

4. دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی سەرجەمی ژمارە سرشتییە تاکەکان $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

هەندێک دەستەواژە وا دەردەکەوێت ڕاست بێت لە زۆر باردا بەڵام تەنها ئەمە بەسنییە بۆئەوەی بووترێت دەستەواژەکە لەهەموو بارێکدا ڕاستە. بۆئەوەی بیسەلمێنین دەستەواژەکە چەوتە، دژە نموونەیەک بهێنەوە وا لە دەستەواژەکە بکات ناڕاست بێت لەیەک باردا.

نموونـــــــە 5 دۆزینەوەی سەرجەمی زنجیرەی ئەندازەیی

دژە نموونەیەک بێنەوە ناڕاستی $2^n\geq n^2$ دەربخات کاتێک n ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

$2^0\geq(0)^2$ $2^1\geq(1)^2$ $2^4\geq(4)^2$ $2^{-1}\geq(-1)^2$

$1\geq0$ ✓ $2\geq1$ ✓ $16\geq16$ ✓ $\frac{1}{2}\geq1$ ✗

کەواتە $2^n\geq n^2$ چەوتە کاتێک $n=-1$ ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت دەستەواژەی بەهای n هەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت چەوتە.

ڕۆشنایی

لەبیرت بێت کە دۆزینەوەی زۆربەی دژە نموونەکان بە بەکارهێنانی ژمارەی تایبەتی وەک 0 و 1 ژمارە سالبەکان یان کەرتەکان دەکرێت.

خاڵی جاودێری

5. دژە نموونەیەک بێنەوە ناڕاستی $\frac{a^2}{2}\leq2a+1$ دەربخات کاتێک a هەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

بیربکەوەو وتووێژبکە

1. چۆن ئەوە دیاریدەکەی کە زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە.
2. چۆن ژمارەی ڕێژەیی دەوری $0.\overline{83}$ دەگۆڕێت بۆ زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو.
3. ڕێکخەربە خشتەکە دروستبکە و تەواوی بکە، جۆرە جیاوازەکانی زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکان بە پووختەیی باسبکە.

فێربە

	نموونە	بنچینە	سەرجەم
زنجیرەی لێکنزیکبوو			
زنجیرەی لێکدورکەوتوو			

5-6 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتوو کە بەهای ڕادەکانی لە ژمارەیەکی دیاریکراو نزیکدەبێتەوە لەگەڵ زیادبوونی بەهای n بریتییە لە زنجیرەیەکی ــــــ؟ــــــ (لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە)

بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە ئایا زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکە لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە.

2 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+...$ **3** $1-5+25-125+...$ **4** $27+18+12+8+...$

بڕوانە نموونە 2

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

5 $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+...$ **6** $\sum_{k=1}^{\infty}4(0.25)^k$ **7** $800+200+50+...$

بڕوانە نموونە 3

ژمارە دەورییەکە وەک کەرتێک بە سادەترین شێوە بنووسە

8 $0.888...$ **9** $0.\overline{56}$ **10** $0.131313...$

بڕوانە نموونە 4

11 دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی سەرجەمی ژمارە جووتەکان کە پاسادانی $2+4+6+8+...+2n=n(n+1)$ دەکەن.

بڕوانە نموونە 5

دژە نموونەیەک بدۆزەوە ناڕاستی دەستەواژەکە دەربخات کاتێک n هەر ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

12 $n^4\geq 1$ **13** $\log n>0$ **14** $n^3\leq 3n^2$

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

ڕاهێنانی ئازاد	
بۆشیکارکردنی پرسیارەکان	تەماشای نموونەکە
17-15	1
20-18	2
23-21	3
24	4
27-25	5

دیاریبکە ئایا زنجیرەی ئەندازەیی کۆتایی نەهاتوو لێکنزیکبوونە یان لێکدوورکەوتنە

15 $3+\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}+...$ **16** $5+10+20+40+...$ **17** $2-4+8-16+...$

سەرجەمی زنجیرەی ئەندازەیی کۆتایی نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

18 $\sum_{k=1}^{\infty}60\left(\frac{1}{10}\right)^k$ **19** $\frac{8}{5}-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+...$ **20** $\sum_{k=1}^{\infty}(3.5)^k$

ژمارە دەورییەکە وەک کەرتێک بەسادەترین شێوە بنووسە

21 $0.\overline{6}$ **22** $0.90909...$ **23** $0.541541541...$

24 دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە بۆ سەلماندنی $\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

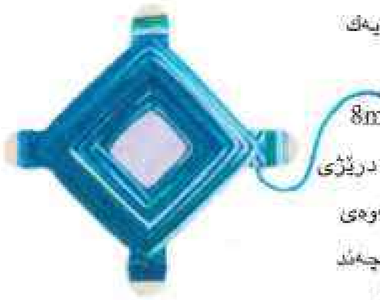
دژە نموونەیەک بهێنەوە کە ناڕاستی دەستەواژەکە دەربخات کاتێک n ژمارەی ڕاستی بێت.

25 $n^3\neq -n^2$ **26** $n^4>0$ **27** $5n^2>2^n$

28 **هەڵە لە شیکردنەوە** لە خوارەوە دوو وەڵام هەیە بۆ دۆزینەوەی سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتووی $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+...$ کامیان هەڵەیە؟ هەڵەکە دیاریبکە.

أ
$$S=\frac{\frac{1}{5}}{1-2}=-\frac{1}{5}$$

ب
سەرجەمی ئەو زنجیرەیە نییە.



29 **هونەر** هونەرمەندێك تابلۆیەكی مەزنی دروستكرد لە چەند چوارگۆشەیەك پێكهاتبوو. هەر یەكێكیان دەكەوتە ناو ئەوی تریانەوە بۆ دروستكردنی چوارگۆشەكان داوێكی بەكارهێنا درێژی لایەكی گەورەترین چوارگۆشە 8m بوو. درێژی لایەكی هەر چوارگۆشەیەكی ناوەوە یەكسان بوو بە 90% ی درێژی لایەكی ئەو چوارگۆشەیەی لەناویدایە. وایدابنێ هونەرمەندەكە توانای ئەوەی هەیە چوارگۆشەكانی ناوەوە تا دوانەهاتوو دروستبكات. هونەرمەندەكە چەند مەتری داو پێویستە؟ (بەهۆی زنجیرە ئەندازەیی ناكۆتا شێوازەكە بنوێنە)

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

30 $215-86+34.4-13.76+\dots$

31 $500+400+320+\dots$

32 $8-10+12.5-15.625+\dots$

33 $\sum_{k=1}^{\infty}-5\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$

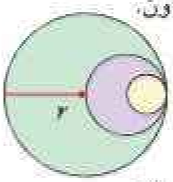
34 $\sum_{k=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

35 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}$

36 $-25-30-36-43.2-\dots$

37 $\sum_{k=1}^{\infty}200(0.6)^{k-1}$

38 **ئەندازە** سەرنجی شێوازی وێنەكەی بەرامبەر بدە بازنەكان یەك لەناو یەكتر كێشراون، بەجۆرێك نیوەتیرەی هەر بازنەیەك نیوەی نیوەتیرەی ئەو بازنەیە بێت كە تیایەتی.



أ زنجیرەیەكی ئەندازەیی كۆتایی نەهاتوو بەپێی r بنووسە چێوەكانی ئەو بازنانە بنوێنێت، پاشان سەرجەمەكەی بدۆزەوە.

ب سەرجەمی چێوەكانی بازنەكان بدۆزەوە. ئەگەر نیوەتیرەی بازنە مەزنەكە 3 cm بێت.

ژمارەی دەوری وەك كەرت بەسادەترین شێوە بنووسە.

39 $0.\overline{4}$

40 $0.\overline{9}$

41 $0.\overline{123}$

42 $0.\overline{18}$

43 $0.\overline{5}$

44 $0.0\overline{54}$

45 **میوزیك** لەم ساڵانەی دواییدا داواكاری لەسەر كڕینی CD میوزیك كەمی كرد. بەهۆی زیادبوونی دۆسیێ مۆزیكی لە ئینتەرنێتدا. دەتوانرێت ژمارەی CD یە فرۆشراوەكان لە ساڵی 2001 ەوە بەهۆی یەكبەدوای یەكێكی ئەندازەیی بنوێنرێت.

أ ژمارەی CD یە فرۆشراوەكانی ساڵی 2010 بخەمڵێنە

ب ژمارەی CD یە فرۆشراوەكان لە ساڵی 2001 تا 2010 بخەمڵێنە

ج وایدابنێ یەكبەدوای یەكە ئەندازەییەكە بەردەوام دەبێت تا ناكۆتا ژمارەی ئەو CD یانەی لەسەرەتای ساڵی 2001 ەوە فرۆشراوە چەندە؟

دەرئەنجامی بیركاری بەكاربێنە بۆ سەلماندنی هەر دەستەواژەیەك.

46 $1+2+4+\dots+2^{n-1}=2^n-1$

47 $1+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

48 $1(2)+2(3)+3(4)+\dots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

49 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

50 **سینەما** داهاتی یەکێك لە فلیمە سینەماییەکان لە هەفتەی یەکەمی نیشانیدا 20 ملیار دینارە. لە هەفتەکانی داهاتوودا بەرێژەی 40% کەمدەکات.

أ) یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بنووسە داهاتی فلیمەکە لەهەفتەیەکدا بنوێنێت.

ب) سەرجەمی داهاتی فلیمەکە لەشەش هەفتەی یەکەمی نیشانیدا بدۆزەوە.

ج) ئەگەر نیشاندانی فلیمەکە تا ناکۆتا بەردەوام بوو گۆڕەی داهاتی فلیمەکە چەند دەبێت؟

51 **پاڵەوانێتی لەشجوانی** لە یەکێك لە پاڵەوانێتیەکانی لەشجوانی خەڵاتێکی گەورەت بردەوە، دوو ڕێگایان بۆ دانای بۆ وەرگرتنی خەڵاتەکەت: یەك ملیۆن دینار لە مانگی یەکەمدا وەربگریت لەگەڵ مانگانەیەك کە بەهاکەی نیوەی ئەو پارەیە مانگی پێشوو بێت. یان مانگانە 100 000 دینار بۆ ماوەی 20 مانگ وەربگریت کام ڕێگا هەڵدەبژێریت.

بۆهەر دەستەواژەیەك دژە نموونەیەك بدۆزەوە کاتێك x ژمارەیەکی ڕاستی بێت.

52 $\frac{x^4}{x^3} \le 2x$

53 $x^4 - 1 \ge 0$

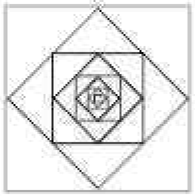
54 $\ln x^5 > \ln x$

55 $2x^2 \le 3x^3$

56 $2x^2 - x \ge 0$

57 $12x - x^2 > 25$

58 **ئەندازە** درێژی لایەکی چوارگۆشە گەورەکە 12 m و سەرەکانی هەر چوارگۆشەیەکی ناوەوە ناوەڕاستی لایەکانی ئەو چوارگۆشەیە کە دەکەوێتە ناویەوە. وایدابنێ کرداری دروستکردنی چوارگۆشەکان تا ناکۆتا بەردەوامە.



أ) چێوەی چوارگۆشەی دووەم بدۆزەوە.

ب) سەرجەمی چێوەی هەموو چوارگۆشەکان بدۆزەوە.

ج) سەرجەمی ڕووبەری هەموو چوارگۆشەکان بدۆزەوە.

د) لەباریکدا درێژی لایەکی چوارگۆشەکە s بێت، سەرجەمی چێوەکان بە بەکارهێنانی هێمای سەرجەم بنووسە ئەم کارە لەگەڵ سەرجەمی ڕووبەرەکان دووبارەبکەوە.

هـ) کام دوو زنجیرە بەخێرایی کەمدەکات، سەرجەمی چێوەکان یان سەرجەمی ڕووبەرەکان؟ چۆن ئەمەت زانی.

59 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بەراورد لەنێوان سەرجەمی بەش S_n بۆ زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو و سەرجەمی گشتییەکەیدا بکە، کاتێك $a_1 > 0$ و $r = \frac{4}{5}$ کامیان گەورەترە؟ ئایا گۆڕان لە کارەکەدا دەبێت ئەگەر $a_1 < 0$. ئەمە ڕوونبکەوە.

60 **بنووسە** جیاوازای لەنێوان نووسینی سەرجەمی بەش S_n بۆ زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو و سەرجەمی گشتیدا چییە؟

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

61 کام زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووی لێکنزیکبووەوەیە؟

أ) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^k$ ب) $\sum_{k=1}^{\infty}5\left(\frac{1}{4}\right)^k$ ج) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4}(5)^k$ د) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k(5)^k$

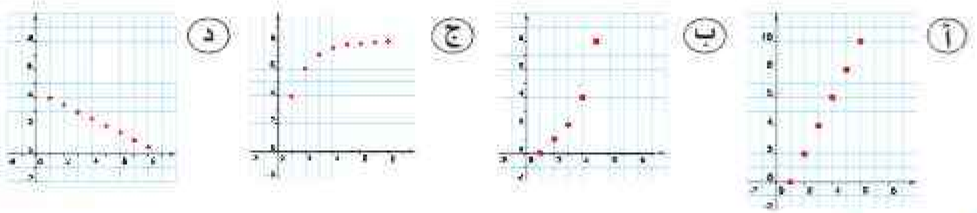
62 سەرجەمی ئەم زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووە $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$ کامەیە؟

أ) 2 ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{3}$

63 زنجیرە ئەندازەییەکی دوا نەهاتوو سەرجەمەکەی 180 بێت و بنچینەکەی $r = \frac{2}{3}$ ڕادەی یەکەمی چەندە؟

أ) 60 ب) 120 ج) 270 د) 540

64 کام لەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە زنجیرەی ئەندازەیی دوا نەهاتووی لێکنزیکبوو دەنوێنێت؟



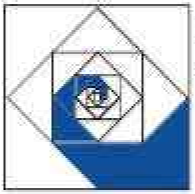
65 **درێژە وەڵام** بۆ سەلماندنی $3+5+...+(2n+1)=n(n+2)$ دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە هەرچی دەیکەیت نیشانیبدە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

ژمارەی دەوری وەک کەرتێک بە سادەترین شێوە بنووسە.

66 $0.1\overline{6}$ **67** $0.41\overline{6}$ **68** $0.52\overline{86}$

69 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئایا دەگونجێت زنجیرە ژمارەیەکی دوا نەهاتوو سەرجەمەکەی لە کۆتایی دیاریکراو نزیکبێتەوە، هەروەک لەهەندێک زنجیرە ئەندازەییە دوا نەهاتووەکاندا هەیە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.



70 **ئەندازە** درێژی لایەکی چوارگۆشە گەورەکە $12\,m$ سەرەکانی هەر چوارگۆشەیەکی ناوەوە لە ناوەڕاستی ئەو چوارگۆشەیەدا دەبێت کە لە ناویدایە. وایدابنێ ئەم کردارە لە دروستکردنی چوارگۆشەکاندا تا ناکۆتا بەردەوام دەبێت. سەرنجی ئەوە بدە وێنەکە هێڵێکی لوولپێچی سپی و ڕووبەرێکی لوولپێچی شین دەردەخات.

أ سەرجەمی زنجیرەیەکی ئەندازەیی دوا نەهاتوو بۆ دۆزینەوەی درێژی هێڵە شینەکە بەکاربێنە.

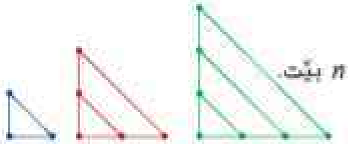
ب سەرجەمی زنجیرەیەکی ئەندازەیی کۆتایی نەهاتوو بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری ناوچە شینەکە بەکاربێنە.

ج ئایا ئەو وەڵامەی لە لقی ب دا دەستکەوتووە گونجاوە؟ وەڵامەکەت ڕونبکەوە.

پێداچوونەوەی لوولپێچی

71 **تۆپی پێ** گۆڵکەری یانەی پێشمەرگە بۆ تۆپی پێ %80 ی لێدانی ڕاستەوخۆ گۆڵ دەکات گۆڵکەرەکە پێنج لێدانی ڕاستەوخۆ لێدەدات. ئەگەری ئەوەی بە لایەنی کەمەوە 4 لێدان گۆڵ بێت چەندە؟ (پۆلەکانی پێشوو)

72 **ئەندازە** شێوازەکەی بەرامبەر بەکاربێنە (وانەی 6–3)



أ ژمارەی خاڵەکان لە سێ وێنەی بەرامبەردا بدۆزەوە.

ب ڕێسایەک بنووسە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی خاڵەکانی شێوەکە پلەکەی n بێت.

ج ژمارەی خاڵەکان لە شێوەی بیست و دووەمین چەندە؟

دیاریبکە یەکبەدوای یەکەکە ژمارەییە یان ئەندازەییە بنچینەی ژمارەییەکەی و بنچینەی ئەندازەییەکە بدۆزەوە ئەگەر توانرا (وانەی 4 –6)

73 $297, 99, 33, 11, ...$ **74** $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 4, \frac{16}{3}, ...$

75 $25, 100, 250, 1000, ...$ **76** $4, 4.8, 5.76, 6.912, ...$

بەشی

6 ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

پێنج ڕادەی یەکەمی هەر یەکبەدوای یەکێک بدۆزەوە.

1 $a_n = n - 9$

2 $a_n = \frac{1}{2}n^2$

3 $a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

4 $a_n = a_{n-1} - 2$ و $a_1 = 55$

5 $a_n = \frac{1}{5}a_{n-1}$ و $a_1 = 200$

6 $a_n = -3a_{n-1} + 1$ و $a_1 = -3$

ڕیسایەک بۆ ڕادەی n لە هەریەکبەدوای یەکێک بدۆزەوە.

7 $-4, -8, -12, \ldots$

8 $5, 20, 80, 320, \ldots$

9 $-24, -19, -14, -9, \ldots$

10 $27, 18, 12, 8, \frac{16}{3}, \ldots$

11 **وەرزش** یاریکەرێکی تۆپی سەبەتە لە بەرزایی 3.2m تۆپێکی فڕێدا و دوای بەر زەوی کەوتنی تا بەرزایی 70% ی بەرزییەکەی پێشووی بەرزبوەوە بەو شێوەیە تۆپەکە چەند بەرزدەبێتەوە؟ لە جاری چوارەم و تۆپەمدا چەند بەرز دەبێتەوە؟

زنجیرەکە بکەوە و سەرجەمەکەی هەژماربکە

12 $\sum_{k=1}^{k=4} k^2(-1)^k$

13 $\sum_{k=1}^{k=5} (0.5k + 4)$

14 $\sum_{k=1}^{k=5} (-1)^{k+1}(2k - 1)$

15 $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{5k}{k^2}$

سەرجەمی زنجیرەکە هەژماربکە

16 $\sum_{k=1}^{k=8} (-5)$

17 $\sum_{k=1}^{k=10} k^2$

18 $\sum_{k=1}^{k=12} k$

19 **پارەدان** سەردار خانوویەکی بە قیست کڕی. قیستی مانگانەکەی 1 150 000 دینارە دوای دوو ساڵ چەندی پارە داوە؟ دوای 15 ساڵ چەند پارەدەدات؟

ڕادەی یازدەهەم لەهەر زنجیرە ژمارەییەک بدۆزەوە.

20 $23, 19, 15, 11, \ldots$

21 $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \ldots$

22 $-9.2, -8.4, -7.6, -6.8, \ldots$

23 $a_4 = 5$ و $a_3 = 1.5$

24 $a_8 = 21$ و $a_6 = 47$

25 $a_9 = 13$ و $a_5 = -7$

سەرجەمی داواکراو لەهەر زنجیرە ژمارەییەک بدۆزەوە.

26 S_{18} لە زنجیرەی $\ldots - 13 - 9 - 5 - 1 -$

27 S_{12} لە زنجیرەی $\ldots - \frac{1}{6} - 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$

28 $\sum_{k=1}^{k=15} (-14 + 3k)$

29 $\sum_{k=1}^{k=15} \left(\frac{3}{2}k + 10\right)$

30 **پاشەکەوتکردن** لیندا لەسەرەتای ساڵدا 50 000 دیناری هەبوو. باوکی بڕیاریدا هەفتانە 8 000 دیناری بداتێ، لیندا بڕیاریدا ئەوەی هەیەتی و ئەوەی باوکی دەیداتێ کۆبکاتەوە تا پاڵتۆیەکی پێ بکڕێت نرخەکەی 499 000 دینارە. یەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بنووسە بارەکە بنوێنێت. ئایا لیندا دەتوانێت لە کۆتایی ساڵدا پاڵتۆکەی بکڕێت؟

ڕادەی هەشتەم لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەییدا بدۆزەوە.

31 $40, 4, 0.4, 0.04, \ldots$

32 $\frac{1}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$

33 $-16, -8, -4, -2, \ldots$

34 $-6, -12, -24, -48, \ldots$

ڕادەی نۆیەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

35 $a_3 = 24$ و $a_4 = 96$

36 $a_1 = \frac{2}{3}$ و $a_2 = -\frac{4}{3}$

37 $a_4 = -1$ و $a_6 = -4$

38 $a_3 = 4$ و $a_6 = 500$

ناوەندە ئەندازەیی بۆئەم دوو ژمارەیە بدۆزەوە.

39 10 و 2.5

40 8 و $\frac{1}{2}$

41 $\frac{\sqrt{3}}{96}$ و $\frac{\sqrt{3}}{6}$

42 $\frac{5}{12}$ و $\frac{125}{108}$

لەهەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی سەرجەمی داواکراو بدۆزەوە.

43 S_5 لە زنجیرەی $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

44 S_6 لە زنجیرەی $-\frac{4}{5} + 8 - 80 + \dots$

45 $\sum_{k=1}^{k=8} (4)^{k-1}$

46 $\sum_{k=1}^{k=7} -2(5)^{k-1}$

47 $\sum_{k=1}^{k=6} 60\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

48 $\sum_{k=1}^{k=5} 18\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

49 **کەلوپەل** نرخی ئامێرێکی کۆپیکردنی نوێ 9 ملیۆن دینارە. پاش 5 ساڵی تر نرخی ئامێرەکە دەبێتە چەند. ئەگەر زانیت نرخەکەی لە هەر ساڵێك 65% ی ساڵی پێشووی نرخی کەمدەکات.

50 **کرێ** کرێی خانوویەك 650 000 دینارە لە مانگێکدا کرێکە ساڵانە بە ڕێژەی 6% زیاد دەکات.

أ لە پاش 6 ساڵ کرێی ساڵانەی خانوەکە دەبێتە چەند؟

ب سەرجەمی ئەو پارانەی کرێچییەکە داویەتی لە پێنج ساڵی یەکەمدا چەندە؟

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە.

51 $-2\,700 + 900 - 300 + \dots$

52 $-1.2 - 0.12 - 0.012 + \dots$

53 $-49 - 42 - 36 - \frac{216}{7} - \dots$

54 $4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \dots$

55 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{3^k}$

56 $\sum_{k=1}^{\infty} -7\left(\frac{3}{5}\right)^k$

57 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k$

بۆ سەلماندنی هەریەکە لەمانەی خوارەوە دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربێنە

58 $2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

59 $1 + 5 + 25 + \dots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}$

60 $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$

61 **بۆخۆشی** کچێك سواری جۆلانەیەك بووە. لەبەرزییەکەوە دێتە خوارەوە پێش ئەوەی جۆلانەکە بەرزبێتەوە، ئەو دوورییەی کچەکە دەیبڕێت لەجاری یەکەمی سەرکەوتن و دابەزیندا 9 مەترە.

أ زنجیرە ئەندازەییەکی دوا نەهاتوو بنووسە ئەو دوورییە بنوێنێت کە دەیبڕێت، ئەگەر زانیت دووری لەهەر جارێکدا 85% دووری جاری پێشووە.

ب پێش وەستانی جۆلانەکە ئەو دوورییە چەند دەبێت کەبڕیویەتی .

بەشی
6

تاقیکردنەوەی بەش

پێنج ڕادەی یەکەمی هەریەکبەدوای یەکێک بدۆزەوە.

1 $a_n = n^2 - 4$

2 $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} - 8$ و $a_1 = 48$

ڕێسایەک بۆهەریەک لەم یەکبەدوای یەکانە بنووسە

3 $-4, -2, 0, 2, 4, \dots$

4 $54, 18, 6, 2, \frac{2}{3}, \dots$

یەکبەودای یەکەکە بکەوە و سەرجەمەکانیان هەژماربکە.

5 $\sum_{k=1}^{k=4} 5k^3$

6 $\sum_{k=1}^{k=7} (-1)^{k+1}(k)$

ڕادەی نۆیەمی هەریەکبەدوای یەکێکی ژمارەیی بدۆدزوە.

7 $-19, -13, -7, -1, \dots$

8 $a_5 = 5$ و $a_2 = 11.6$

9 لەم یەکبەودای یەکە ژمارەییەدا دوو ڕادە نادیارەکە بدۆزەوە $125, \square, \square, 65$

سەرجەمی داواکراو لەهەریەک لەم زنجیرە ژمارەییانە بدۆزەوە.

10 S_{20} لە زنجیرەی $4 + 7 + 10 + 13 + \dots$

11 $\sum_{k=1}^{k=12} (-9k + 8)$

12 لە یەکێک لە شانۆکان ڕیزی یەکەم 16 کورسی تێدایە. لە ڕیزی دووەمەوە ژمارەی کورسییەکان دوو کورسی زیاد دەکات لە ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی پێش خۆی. ژمارەی کورسییەکانی ڕیزی دوازدەیەم چەند؟ ژمارەی کورسییەکانی دوازدە ڕیزی یەکەم چەندە؟

ڕادەی دەیەمی هەر یەکبەدوای یەکێکی ئەندازەیی بدۆزەوە.

13 $\frac{3}{256}, \frac{3}{64}, \frac{3}{16}, \frac{3}{4}, \dots$

14 $a_5 = 8$ و $a_4 = 2$

15 ناوەندی ئەندازەیی بۆهەردوو ژمارەی 4 و 25 بدۆزەوە

لەهەر زنجیرە ئەندازەییەک سەرجەمی داواکراو بدۆزەوە.

16 S_6 لە زنجیرەی $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

17 $\sum_{k=1}^{k=12} 250\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}$

18 ئەگەر هەموو ساڵێک یەک ملیۆن دینارت لە بانک دانا بۆ ماوەی 10 ساڵ بەسوودی ساڵانەی 5%، ملیۆنی یەکەم لە کۆتایی ساڵی دەیەم دەبێتە چەند؟ لەکۆتایی ساڵی دەیەم هەموو پارەکەت دەبێتە چەند؟

سەرجەمی زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتوو بدۆزەوە. (ئەگەر سەرجەمی هەبوو)

19 $200 - 100 + 50 - 25 + \dots$

20 $\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{7}{8}\right)^k$

دەرئەنجامی بیرکاری بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2}{2}$.

21 هەنگاوی 1 :

22 هەنگاوی 2 :

23 هەنگاوی 3 :

بەشی
6

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 کام لەمانە یەکبەدوای یەکی 4، 6، 4، 6، 4 دەنوێنێت، کە بەفێمای سەرجەم نووسراوە؟

أ) $\sum 24$

ج) $\sum_{n=0}^{n=5}(-1)^n+5$

ب) $\sum_{n=2}^{n=4}(-1)^n+5$

د) $\sum_{n=1}^{n=5}(-1)^n+5$

2 کام لەمانە کراوەی دوو ڕادەداری $(2x-y)^3$ دەبێت؟

أ) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

ب) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

ج) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

د) $8x^3+12x^2y+3xy^2+y^3$

3 $f(x)=x^3+2x^2-5x-9$ کام لەم نەخشانە بریتییە لە وێنەی نەخشەی $f(x)$ لە وێنەدانەوەی بەتەوری تەوەری دووەم.

أ) $g(x)=-x^3-2x^2+5x+9$

ب) $g(x)=-x^3+2x^2+5x-9$

ج) $g(x)=2x^3+4x^2-10x-18$

د) $g(x)=x^3+2x^2-5x-5$

4 کام لەم نەخشانە نەخشەی گەڕانەوەی توانییە؟

أ) $f(x)=-5x$

ب) $f(x)=2.3(6.7)^x$

ج) $f(x)=0.49(7.9)^x$

د) $f(x)=5.13(0.32)^x$

5 تۆپێک لە بەرزی 10 m ەوە کەوتە خوارەوە و بەر زەوی کەوت و هەڵبەزیەوە. هەموو جارێک 60% ی بەرزییەکەی پێشووی بەرزدەبێتەوە کام لەمانە بەرزی تۆپەکە بەمەتر لە n جاردا دەنوێنێت؟

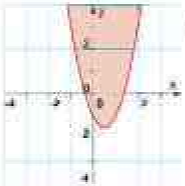
أ) $10(0.6n)$

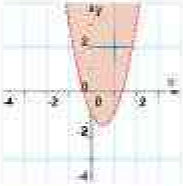
ج) $\frac{10-n}{0.6}$

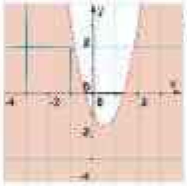
ب) $10(0.6)^{n-1}$

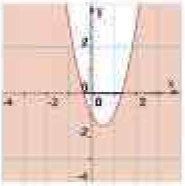
د) $10(0.6)^n$

6 کام وێنە ڕوونکردنەوەییانە شیکاری ئەم لاسەنگە دووجاییە $6x+3y\geq 6x^2-3$ دەنوێنێت؟

أ) 

ج) 

ب) 

د) 

7 ژیلە ئارایشتگایەکی جوانکاری کردەوە. لە چوار هەفتەی یەکەمیدا یەک لەدوای یەک 2 000 000 دینار، 2 400 000 دینار، 2 880 000 دینار، 3 456 000 دیناری قازانج کرد. لەهەفتەی شەشەمدا قازانجەکەی چەند دەکات، ئەگەر قازانجەکە بەم شێوەیە زیادبکرێت؟

أ) 3 856 000 دینار

ج) 4 147 000 دینار

ب) 4 032 000 دینار

د) 4 980 000 دینار

8 ڕادەی تۆیەم لە یەکبەدوای یەکی $a_n=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}\right)+4$ چەندە؟

أ) 36　ب) 68　ج) 132　د) 260

9 پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی $f(x)=4x-5$ چییە؟

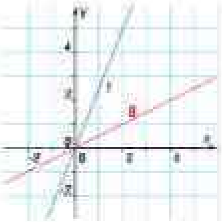
أ) $f^{-1}(x)=-4x+5$

ج) $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{4}$

ب) $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+5$

د) $f^{-1}(x)=5x-4$

10 نەخشەی $f(x)$ بە چ جێگۆڕکێیەك دەگۆڕێتەوە بۆ نەخشەی $g(x)$



أ چوونەوەیەکی ئاسۆیی بە هاوکۆلکەی $\frac{1}{5}$

ب کشانی ئاسۆیی بەهاوکۆلکەی 5

ج چوونەوەیەکی ستوونی بە اهوکۆلکەی $\frac{1}{3}$

د کشانی ستوونی بە هاوکۆلکەی 3

11 کام لەمانە سفری نەخشەی $f(x)=2x^2+5x-12$ دەبێت؟

أ -4 و $\frac{3}{2}$ ج $-\frac{3}{2}$ و 4

ب -2 و 3 د $\frac{3}{2}$ و 2

کورتە وەڵام

12 بنچینەی یەکبەدوای یەکی ئەندازەیی $125, 50, 20, 8, ...$ چەندە؟

13 کاغەزێك لە کاغەزەکانی یاری ڕاکێشرا ئەگەری ئەوەی ئەو کاغەزە 10 یان سووربێت چەندە؟

14 سەرجەمی زنجیرە ژمارەیی $\sum_{k=1}^{6}(7k-3)$ چەندە؟

15 پۆتانی دووەمی ئەو حاڵەی شیکاری ئەم سستەمە دەنوێنێ چەندە؟ $\begin{cases} 2y-2=4x \\ 6-x=8y \end{cases}$

16 ئەم نەخشەیە بەکاربێنە $f(x)=\sqrt[3]{5x}$ ؟

أ بوار و مەودای نەخشەکە بدۆزەوە.

ب پێچەوانەی نەخشە بۆ نەخشەی $f(x)$ چییە؟

ج بوار و مەودای پێچەوانەی نەخشەکە چییە؟

17 زنجیرە ئەندازەیی دوا نەهاتووی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^{n-1}}$ بەکاربێنە.

أ دیاریبکە زنجیرەکە نزیکبوونە یان دورکەوتنە.

ب سەرجەمی زنجیرەکە بدۆزەوە (ئەگەر هەبێت)

18 یەکێك لە کۆگا گەورەکان قووتووی ساردەمەنی شێوە سێگۆشەیی نمایش دەکات. بەجۆرێ کە ژمارەی قووتووەکان لە بەرزترین ڕیزدا 3 قوتوە هەتا لە ڕیزەکاندا بەرەوە خوارەوە بچین ژمارەی قووتوەکان یەکێك زیاد دەکات.

أ ئایا یەکبەدوای یەك یان زنجیرە بۆ نواندنی ژمارەی قووتوەکان لە ڕیزی n بەکاردێت؟

ب ژمارەی قووتوەکانی هەر 12 ڕیزەکە چەندە؟

ج زنجیرەی $\sum_{k=1}^{12}(k+2)$ چی دەنوێنێت؟ ڕوونبکەوە.

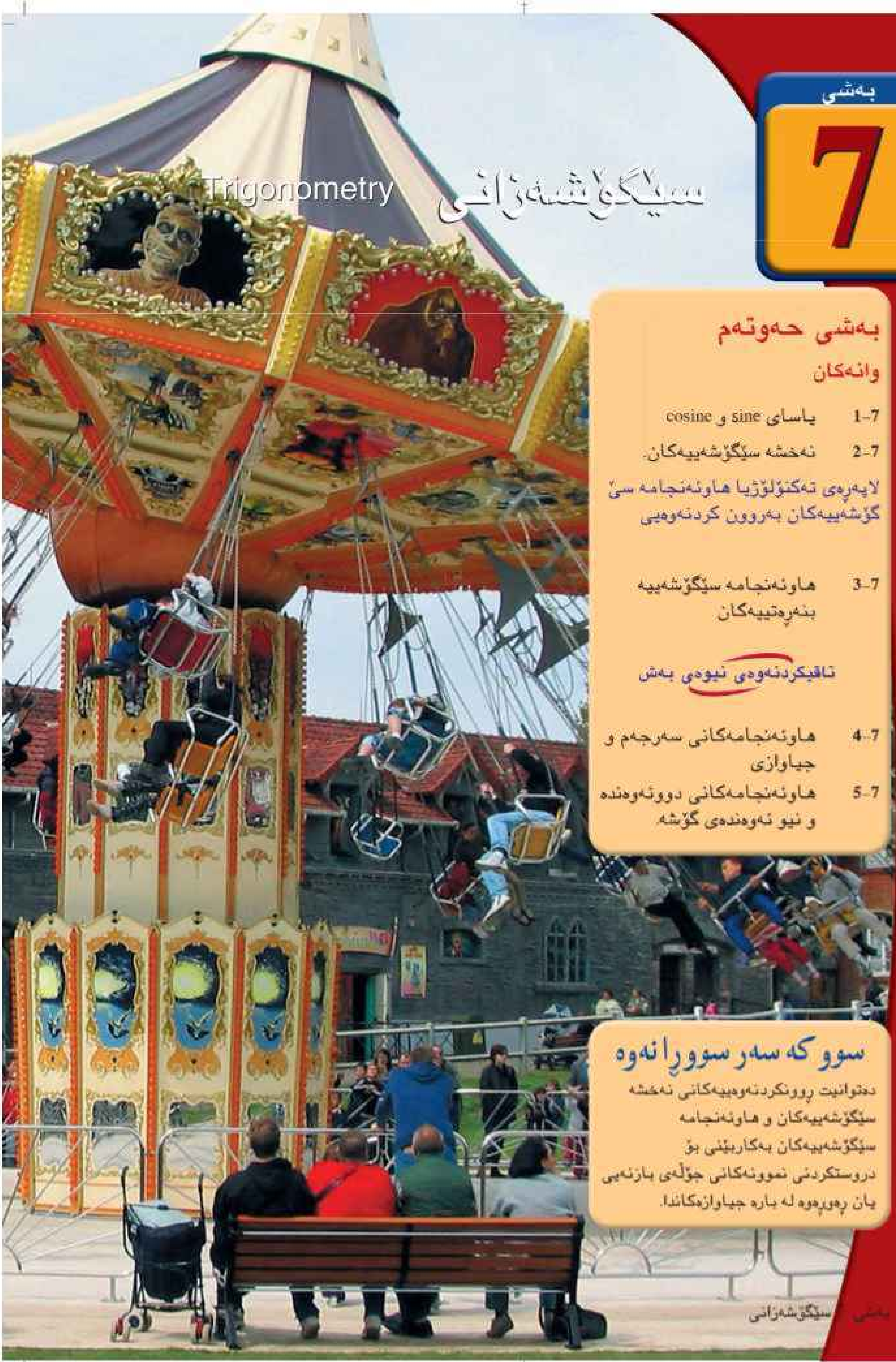
درێژە وەڵام

19 پاڵێوراوان بۆ وەرگرتن لە کۆلێژی ئەفسەری بە دوو تاقیکردنەوەدا تێپەڕدەبن 60% ی پاڵێوراوان تاقیکردنەوەی یەکەم بەسەرکەوتویی دەبڕن، 20% یان تاقیکردنەوەی دووەم بەسەرکەوتویی دەبڕن.

أ هێلکارییەکی درەختی دروستبکە ئەگەرە لە تواناکان بۆهەر پاڵێوراوێك دەربخات.

ب ئەگەر پاڵێوراوەکان بۆیان هەبێت لەهەردوو تاقیکردنەوەکەدا بەشداربن ئەگەری ئەوەی پاڵێوراوەکە لەهەردوو تاقیکردنەوەکە دەربچێت چەندە؟ چەند پاڵێوراو چاوەڕێی دەرچوون دەکەن ئەگەر ژمارەیان 50 پاڵێوراو بێت.

ج کامیان گەورەترە: ئەگەری ئەوەی پاڵێوراوەکان لەهەردوو تاقیکردنەوەکەدا دەربچێت یان لەهەردووکیاندا بکەون؟ ڕوونبکەوە.



بەشی

7

سێگۆشەزانی Trigonometry

بەشی حەوتەم

وانەکان

7-1 یاسای sine و cosine

7-2 نەخشە سێگۆشەییەکان.

لایەڕەی تەکنۆلۆژیا هاوتەنجامە سێ گۆشەییەکان بەروون کردنەوەیی

7-3 هاوتەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

7-4 هاوتەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی

7-5 هاوتەنجامەکانی دووتەوەندە و نیو تەوەندەی گۆشە

سووکە سەر سوورِانەوە

دەتوانیت ڕوونکردنەوەییەکانی نەخشە سێگۆشەییەکان و هاوتەنجامە سێگۆشەییەکان بەکاربێنی بۆ دروستکردنی نموونەکانی جوڵەی بازنەیی یان ڕەوڕەوە لە یارە جیاوازەکاندا.

ئایا تۆ ئامادەیت؟

زاراوەکان

هەر زاراوەیەک بەپێی پێناسەکەی کە لەلای چەپ هاتووە ببەستەوە.

1 Sin ی گۆشە

2 Cosin ی گۆشە

3 ژێی سێگۆشەی وەستاو

4 tan ی گۆشە

أ ڕێژەی درێژی لای بەرامبەری گۆشەکەیە بۆ درێژی لاتەنیشتەکەی.

ب ڕێژەی درێژی لاتەنیشتی گۆشەکەیە بۆ درێژی ژێیەکەی.

ج ڕێژەی درێژی ژێیە بۆ درێژی لای بەرامبەر گۆشەکە.

د ڕێژەی لای بەرامبەر گۆشەکەیە بۆ درێژی ژێیەکەی.

هـ لای بەرامبەری گۆشە وەستاوەکەیە.

دابەشکردنی کەرتەکان

دابەشبکە

5 $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{2}}$ 6 $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$ 7 $\dfrac{-\frac{3}{8}}{\frac{1}{8}}$ 8 $\dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{7}{4}}$

سادەکردنی برە ڕەگییەکان

برەکە بەسادەترین شێوەی بنووسە.

9 $\sqrt{6}\times\sqrt{2}$ 10 $\sqrt{100-64}$ 11 $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}}$ 12 $\sqrt{\dfrac{4}{25}}$

لێکدانی دوو ڕادەدار

لێکبدە

13 $(x+11)(x+7)$ 14 $(y-4)(y-9)$ 15 $(2x-3)(x+5)$

16 $(k+3)(3k-3)$ 17 $(4z-4)(z+1)$ 18 $(y+0.5)(y-1)$

هاوئەنجامە تایبەتییەکان

لێکبدە

19 $(2x+5)^2$ 20 $(3y-2)^2$

21 $(4x-6)(4x+6)$ 22 $(2m+1)(2m-1)$

23 $(s+7)^2$ 24 $(-p+4)(-p-4)$

بەشی

7

ڕێبەری خوێندن: تێڕوانین لەسەر بەشەکە

لە ڕابردوودا

ئەمانەت خوێندووە

- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی سێگۆشە و ڕێژە سێگۆشەییەکانی تێدایە.
- بەکارهێنانی شێتەڵ بۆ شیکارکردنی هاوکێشە دووجاکان.
- بەکارهێنانی ئەو نەخشانەی نموونەیەک بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە پێکدێنن.
- شیکارکردنی هاوکێشەکان بەجەبری و ڕوونکردنەوەیی.

لەم بەشەدا

ئەمانە فێردەبیت

- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی نەخشە سێگۆشەییەکانیان تێدایە.
- نەخشە سێگۆشەییەکان بۆ دروستکردنی نموونە کە بارەکانی ڕاستی ژیان بنوێنێت.

لە داهاتوودا

دەتوانیت کارامەییەکانی ئەم بەشە بەکاربهێنیت لە

- قۆناغی بەرزتردا، لە کاتی خوێندنی جیاکاری و تەواوکاری
- لە وانەکانی تری وەک فیزیا، زیندەزانی و ئابووری.
- دەرەوەی خوێندنگا بۆ خوێندنی دیاردەی ڕووداوەکان. (الظواهر الدورية).

زاراوەکان — *Vocabulary*

Vocabulary	زاراوەکان
Amplitude	فراوانی
Cycle	خول
Frequency	دووبارە بوونەوە – لەرەلەر
Period	کاتی خوولی
Periodic functions	نەخشەی خولاوە
Phase shift	لادانی ڕوو
Rotation matrix	ڕیزکراوەی خولانەوە

ڕۆشنایییەک لەسەر زاراوەکان

بۆ ئەوەی لەگەڵ هەندێک لەم زاراوانەدا ڕابێی کە لەم بەشەدا هاتووە ئەم هەنگاوانە پەیڕەو بکە:

1. واتای وشەی **فراوانی** لە ژیانی ڕۆژانەدا چییە؟ مەبەست لە فراوانی بەندۆڵی کاتژمێر چییە؟
2. واتای وشەی **خول** لە ژیانی ڕۆژانەدا چییە؟ نموونە لەسەر **دیاردەی ڕووداوەکان** بێنەوە.
3. نموونە لەسەر کارێک بێنەوە دووبارە بونەوەی تێدابێت. وەک پاککردنەوەی ددان ڕۆژانە. دەوترێت ڕۆژی دووجار ددانم دەشۆم. باسی ئەو نموونەیە بکە باسمان کرد.
4. بەدەگمەن واتای **ماوەی خوولی** لە ژیانی ڕۆژانەدا بەکاردێت. ئەم دەربڕینە بۆ تۆ چی دەگەیەنێت؟ واتای **نەخشەی خولاوە** چۆن تێدەگەیت؟
5. کاتێک **ڕیزکراوەی خولانەوە** بەکاردێنێت ئەو ئەنجامەی پێشبینی دەکەیت چییە؟

بەشی
7

بیرکاری
بە خوێندنەوە و نووسین

ستراتیژیەتی وانەکە: ئامادەبوون بۆ تاقیکردنەوەی کۆتایی.

بیرکاری بابەتێکی کەڵەکەبووە. بۆیە هەموو ئەو بابەتانەی لەسەرەتای ساڵەوە دەیخوێنیت. تاقیکردنەوەی کۆتایی ساڵ دەیگەرێتەوە. بۆیە واباشترە بەم شێوەیەی لە خوارەوە هاتووە بۆ خۆ ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە پلاندانێی:

دوو حەفتە پێش تاقیکردنەوە

- بە تاقیکردنەوەکانی پێشوو و ئەرکی ماڵەوەدا بچۆوە بۆ ئەوەی ئەو بابەتانەی پێویستن گرنگیان پێبدەی و ئەو پرسیارانەی بە هەڵە شیکارکراون یان شیکارەکانیان ناتەواوە سەر لە نوێ شیکاریان بکەیتەوە.
- ئەو یاسا و سەلمێنراوانەی بۆ رۆژی تاقیکردنەوە پێویستە بیانزانی لە لیستێکدا بیان نووسە.
- خۆت لەو پرسیارانە تاقیبکەوە لەسەر شێوەی پرسیاری تاقیکردنەوەکان (تاقیکردنەوەی نموونەیی خۆت ئەنجام بدە).

حەفتەیەک پێش تاقیکردنەوە

- ئەو پرسیارانەی پێشتر بۆ تاقیکردنەوە نموونەییەکە بەکارتهێناون لە وەڵامەکانیان دڵنیابە. ئەگەر لە شیکار کردنی پرسیارەکاندا سەرکەوتوو نەبووی بەدوای نموونەی هاوشێوەدا بگەرێ و خۆت لەسەر شیکارکردنیان راپێنە.
- لەگەڵ یەکێک لە هاوپۆلەکانتدا لەسەر یاسا و سەلمێنراوەکان پرسیار لەیەکتری بکەن، لەو لیستەی کە پێشتر ئامادەتان کردبوو.

رۆژی پێش تاقیکردنەوە

- دڵنیابە لە پێداویستییەکانی تاقیکردنەوە وەک پێنووس و راستە و ژمێر (دڵنیابە لە پاتری ژمێرەکەت).

ڕۆژی تاقیکردنەوە

هەوڵبدە

خشتەیەکی خۆ ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوەی کۆتایی ساڵ تێیدا کات دابەشکرابێت دروستبکە.

1–7 یاسای ساین Sine و یاسای کۆساین Cosine

Law of sines and Low of cosines

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

ئەندازیارەکان بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی بینادروستکردن یاسای ساین و کۆساین بەکاردەهێنن.

ئامانجەکان

یاسای ساین و کۆساین بەکاردێت بۆ شیکارکردنی سێگۆشە کاری.

لەوکاتەی بورجی پیزا لە ساڵی 1370 ز لە ئیتالیا دروستکراوە ئەندازیارەکان چەندەها پێشنیار پێشکەش دەکەن بۆ کەمکردنەوەی لارییەکەی. ئەو گۆشەیەی ئەو بورجە لەگەڵ زەوی دروستیکردوە وەستاونییە وەك ئەو شێوازانەی کە بە شێوەیەکی گشتی لە تەلارەکاندا هەیە. بۆیە لەسەر ئەندازیارەکان پێویست بوو لەسەر ئەو سێگۆشانە کاربکەن کە وەستاونین.

لە پۆلی دەیەم فێری چۆنیەتی بەکارهێنانی ڕێژە سێگۆشەییەکان بوویت. بۆ دۆزینەوەی پێوانەکانی گۆشەکانی سێگۆشە گۆشەوەستاو، هەروەها فێری دۆزینەوەی لایەکانی بوویت. بەوکردارەش دەوترێت شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو. لەم وانەیەشدا شیکارکردنی سێگۆشە فێردەبێت جۆرەکەی هەر جۆرێك بێت. بۆ ئەوە پێویستت بە هەژمارکردنی ڕێژە سێگۆشەییەکانی ئەو گۆشانە هەیە کە پێوانەکەیان دەگاتە $180°$ بۆت هەیە بژمێر بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوەی ئەو بەهایانە.

نموونە 1 دۆزینەوەی ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەکراوەکان

بازنەی یەکە بۆ دۆزینەوەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی بەکاربهێنە:

أ $\sin 135°$ ب $\tan 98°$ ج $\cos 108°$

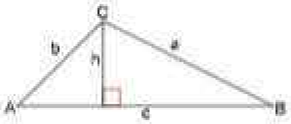
$\sin 135° \approx 0.71$ $\tan 98° \approx -7.12$ $\cos 108° \approx -0.31$

خاڵی چاودێری

1. بازنەی یەکە بۆ دۆزینەوەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی بەکاربهێنە:

أ $\cos 120°$ ب $\sin (-150°)$ ج $\tan 120°$

دەتوانیت بەرزی سێگۆشە بەکاربێنیت بۆ دۆزینەوەی پەیوەندییەك کەلایەکانی سێگۆشەکە بەیەکەوە ببەستێت. لەسەری سێگۆشەکەوە C بەرزی سێگۆشەکە بۆ سەر $\overline{AB}$ بکێشە، پاڵپشت بەوێنەی بەرامبەر. دەتوانیت بنووسیت



$$\sin\hat{B} = \frac{h}{a} \qquad \sin\hat{A} = \frac{h}{b}$$

$$h = a \sin \hat{B} \qquad h = b \sin \hat{A}$$

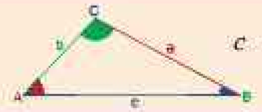
$$a \sin\hat{B} = b \sin\hat{A}$$ لەمەوە دەردەچێت

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b}$$ لەوەوەش دەردەچێت

هەروەها دەتوانیت بەرزییەکی تر لە بەرزییەکانی سێگۆشەکە بەکاربێنیت بۆ ڕوونکردنەوەی ئەوەی کە دوو ڕێژە یەکسانەکەی پێشوو دووبارە یەکسانن بە ڕێژەی $\frac{\sin \hat{C}}{c}$.

فێربە

سەلمێنراوی 1-7 یاسای ساین Sin



ئەگەر ABC هەرجۆرە سێگۆشەیەک بێت، درێژی لایەکانی a ، b ، c

بۆ ئەوا $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

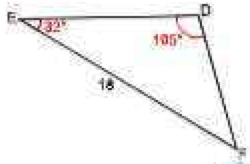
دەتوانی یاسای Sin بۆ شیکارکردنی سێگۆشە بەکاربێنی بەزانینی–

- پێوانەی دوو گۆشە لە گۆشەکانی و درێژی لایەکی.
- درێژی دوو لە لایەکانی و پێوانەی گۆشەیەک لە نێوانیادا نەبێت.

نموونـــــە 2 بەکارهێنانی یاسای Sin

پێوانەی داواکراو بدۆزەوە. درێژییەکەی بۆ نزیکترین بەش لە دەیەک نزیکبکەوە و پێوانەی هەر گۆشەیەک بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە

أ DF



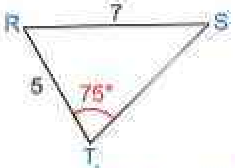
یاسای Sin $\frac{\sin \hat{D}}{EF} = \frac{\sin \hat{E}}{DF}$

لە جیاتی دابنێ $\frac{\sin 105°}{18} = \frac{\sin 32°}{DF}$

لێکدانی دوولا و دووبەتوان $DF \times \sin 105° = 18 \times \sin 32°$

هەردوو لا دابەشی sin105 بکە $DF = \frac{18 \times \sin 32°}{\sin 105°} \approx 9.9$

ب $m\hat{S}$



یاسای Sin $\frac{\sin \hat{T}}{RS} = \frac{\sin \hat{S}}{RT}$

لە جیاتی دابنێ $\frac{\sin 75°}{7} = \frac{\sin \hat{S}}{5}$

هەردوو لا لە 5 بدە $\sin \hat{S} = \frac{5 \times \sin 75°}{7}$

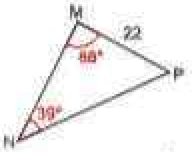
دوگمەی $\sin^{-1}$ دابگرە بۆ هەژمارکردنی پێوانە $\hat{S}$ $m\hat{S} = \sin^{-1}\left(\frac{5 \times \sin 75°}{7}\right) \approx 44°$

دەتوانی بژمێری زانستی بۆ پێوانی $\hat{S}$ بەکاربێنە، پاش گۆڕینی بژمێر بۆ ئەوەی بەشێوازی شەستی (پلە) کاربکات لە جیاتی گۆشەی نیوەتیرەیی (بازنەیی) دوگمەی MODE دابگرە پاشان بیخەرە سەرDegree لە دوایدا دووگمەی ENTER و بۆ هەژمارکردنی $m\hat{S}$ یەک لە دوابیەک دووگمەی 2nd ، SIN ، 5 ، x ، SIN ، 7 ، 5 ، (، ÷ ، 7 ،) ، Enter داگرە.

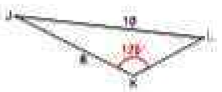
خاڵی چاودێری

2. پێوانەی داواکراو بدۆزەوە. هەر درێژیەک بۆ نزیکترین بەش لە دەیەک نزیکبکەوە، پێوانەی هەر گۆشەیەک بۆ نزیکترین پلە بدۆزەوە.

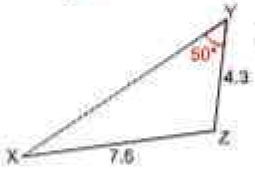
أ NP



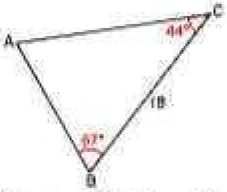
ب $m\hat{L}$



ج $m\hat{X}$



د AC



یاسای Sin ناتوانێت هەموو سێگۆشەیەکمان بۆ شیکاربکات بۆ نموونە ئەگەر دوو لا و گۆشەی نێوانیان نەزانی یان ئەگەر درێژی هەموو لایەکانی زانراوبێت. لەم بارانەدا پێویستە یاسای Cos (کۆساین) بەکاربێنین.

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ

$\sin 105° \approx 0.96$

$\sin 32° \approx 0.53$

$\sin 44° \approx 0.69$

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ

$\sin 88° \approx 0.99$

$\sin 39° \approx 0.63$

$\sin 127° \approx 0.8$

$\sin 125° \approx 0.82$

$\sin 50° \approx 0.76$

$\sin 67° \approx 0.92$

سەلمێنراوی 1-7 یاسای کۆساین cosine

ئەگەر ABC هەر جۆرە سێگۆشەیەک بێت، درێژی لایەکانی a ، b ، c بێ ئەوا

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

یارمەتی

لە یاسای Cos دا گۆشەی بەکارهاتوو لەهەموو یەکسانیبوونەکاندا بریتییە لە و گۆشەیەی بەرامبەر لاکەی تری یەکسانیبوونەکەیە

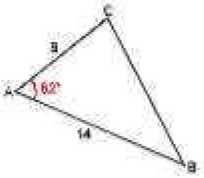
دەتوانی یاسای Cosine بۆ شیکارکردنی سێگۆشە بەکاربێنی بەزانینی:-

- دوو لا و گۆشەی نێوانیان.
- درێژی هەرسێ لایەکەی.

نموونـــــە 3 بەکارهێنانی یاسای Cosine

پێوانەی داواکراو بدۆزەوە، هەر درێژیەک بۆ نزیکترین دەیەک نزیکبکەوە، و پێوانەی هەر گۆشەیەک بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

أ BC



یاسای Cos $\quad BC^2=AB^2+AC^2-2(AB)(AC)\cos\hat{A}$

لەجیاتی دابنێ $\quad =14^2+9^2-2(14)(9)\cos 62°$

سادەبکە $\quad BC^2\approx 158.6932$

رەگی دووجا وەربگرە $\quad BC\approx 12.6$

درێژی $\overline{BC}\approx 12.6$ بەنزیکەیی

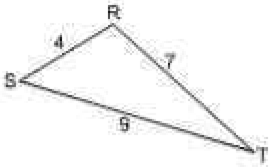
تێبینی

ئەگەر بژمێرت ئەبێ

$\cos 62°\approx 0.47$

$\cos 107°\approx 0.29$

ب $m\hat{R}$



یاسای Cos $\quad ST^2=RS^2+RT^2-2(RS)(RT)\cos\hat{R}$

لەجیاتی دابنێ $\quad 9^2=4^2+7^2-2(4)(7)\cos\hat{R}$

سادەبکە $\quad 81=65-56\cos\hat{R}$

$16=-56\cos\hat{R}$

شیکاربکە $\quad \cos\hat{R}=-\frac{16}{56}$

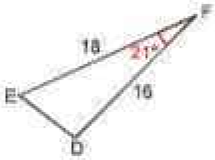
$m\hat{R}=\cos^{-1}\left(-\frac{16}{56}\right)\approx 107°$

پێوانەی $\hat{R}$ بریتییە $107°$ بەنزیکراوەیی.

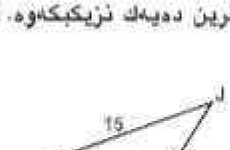
خالی جاوديری

3. پێوانەی داواکراو بدۆزەوە، هەر درێژیەک بۆ نزیکترین دەیەک نزیکبکەوە، هەر پێوانەیەک بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

أ DE



ب $m\hat{K}$



تێبینی

ئەگەر بژمێرت ئەبێ

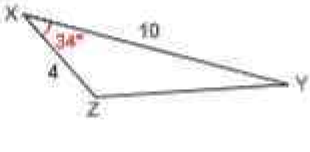
$\cos 21°\approx 0.93$

$\cos 29°\approx 0.87$

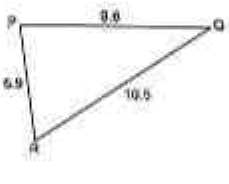
$\cos 34°\approx 0.83$

$\cos 64°\approx 0.43$

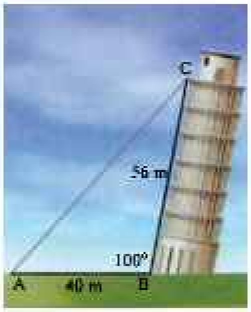
ج YZ



د $m\hat{R}$



نموونــــــە 4 جێبەجێکردن لە ئەندازەی بیناسازی



بەرزی بورجی پیزا لە ئیتالیا $56m$ ە لەساڵی 1999 ز گۆشەی بورجەکە گەیشتە $100°$ بۆ ئەوەی بورجەکە نەڕوخێت ئەندازیارێك پێشنیاری ئەوەی کرد لوتکەی بورجەکە بە سیمێك لەگەڵ خاڵێك کە $40m$ لە بنکەکەیەوە دوور بێت ببەستینەوە. درێژی سیمەکە و پێوانەی ئەو گۆشەیەی لەگەڵ ڕووتەختی زەویەکەدا دروستی دەکات چەندە؟ درێژییەکەی بۆ نزیکترین دەیەك لە مەتر و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

ئاگاداربە!

وەڵامەکان نزیك مەکەوە تائەگەیتە ئەنجامی کۆتایی ئەگەر پرسیارەکە لە چەند هەنگاوێك پێکهاتبێ وەڵامی سەرەتایی لەهەزری بژمێرەکە بپارێزە.

هەنگاوی 1 درێژی سیمەکە بدۆزەوە.

یاسای Cos	$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos \hat{B}$
لەجیاتی دابنێ	$= 40^2 + 56^2 - 2(40)(56)\cos 100°$
سادەبکە	$AC^2 = 5513.9438$
ڕەگی دووجا وەربگرە	$AC = 74.3$

هەنگاوی 2 پێوانەی گۆشەی سیمەکە لەگەڵ ڕووی زەویەکەدا بدۆزەوە.

یاسای Sin	$\frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{B}}{AC}$
لەجیاتی دابنێ	$\frac{\sin \hat{A}}{56} = \frac{\sin 100°}{74.2559}$
سادەبکە	$\sin \hat{A} = \frac{56 \times \sin 100}{74.2559}$
بژمێرە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی $m\hat{A}$	$m\hat{A} = \sin^{-1}\left(\frac{56 \times \sin 100°}{74.2559}\right) \approx 48°$

تێبینی

ئەگەر بژمێرت نەبێ

$\cos 100° \approx -0.1736$

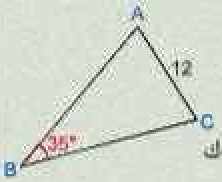
$\sin 100° \approx 0.9848$

گۆشەی سیمەکە لەگەڵ ڕووی زەویەکە دەکاتە $48°$ بەنزیکی.

خاڵی چاودێری

4. **چی دەبێت ئەگەر...؟** ئەندازیارێکی تر پێشنیازی ئەوەی کرد لوتکەی بورجەکە بە سیمێکی بەهێز بخاڵێك 31m لە بنکەی بورجەکەوە دووربێت ببەستیەوە درێژی ئەو سیمە چەند دەبێت. درێژیەکە بۆ نزیکترین دەیەك لە مەتر پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

بیربکەوە و تاوتوێبکە



1. بۆ هەژمارکردنی BC بە یاسای Sin ئایا پێویستیت بە زانیاری زیاتر هەیە؟ ئەگەر وەڵامەکەت بەڵێ بوو ئەو زانیارییە چییە؟
2. ڕێکخەر بە خشتەکە بنووسەوە و تەواوی بکە. بۆ شیکارکردنی هەر سێگۆشەیەك کام یاسا بەکاردەهێنێت، دیاریبکە، پاشان نموونەیەك بە وێنە بنووسە.

فێربە

پێدراوەکانی سێگۆشەکە	یاسا	نموونە
پێوانەی دوو گۆشە و درێژی لایەك		
درێژی دوو لا و پێوانەی گۆشەیەك لە نێوانیادا نەبێت.		
درێژی دوو لا و پێوانەی گۆشەی نێوانیان		
درێژی سێ لا		

1-7 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

بڕوانە نموونە 1

بڕمێری زانستی بۆ دۆزینەوەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی بەکاربهێنە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لەسەر نزیکبکەوە

1 $\sin 100°$ **2** $\sin 167°$ **3** $\tan 92°$

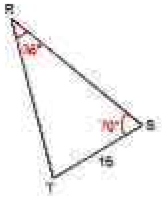
4 $\tan 141°$ **5** $\cos 133°$ **6** $\sin 150°$

7 $\sin 147°$ **8** $\tan 164°$ **9** $\cos 156°$

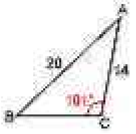
بڕوانە نموونە 2

پێوانەی داواکراو بدۆزەوە، درێژییەکە بۆ نزیکترین دەیەک، و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە

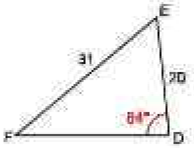
10 RT



11 $m\hat{B}$



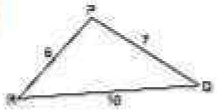
12 $m\hat{F}$



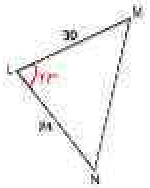
بڕوانە نموونە 3

پێوانەی داواکراو بدۆزەوە، درێژییەکە بۆ نزیکترین دەیەک و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

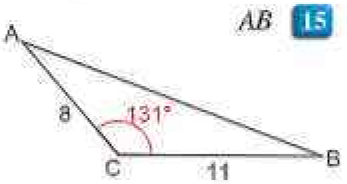
13 $m\hat{Q}$



14 MN



15 AB



بڕوانە نموونە 4

16 **دارتاشی** دارتاشێك چوار چێوەیەکی لە 3 پارچەدار دروستکرد. درێژییەکانیان بریتیبوون لە $20cm$ و $24cm$ و $30cm$ پێوانەی هەر گۆشەیەك لە گۆشەکانی سێگۆشەکە چەندە؟ وەڵامەکانت بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

بەبەکارهێنانی بازنەی یەکە ئەمانەی خوارەوە بدۆزەوە

17 $\cos 180°$ **18** $\tan(-150°)$ **19** $\tan 150°$

20 $\sin 150°$ **21** $\sin(-120°)$ **22** $\cos 90°$

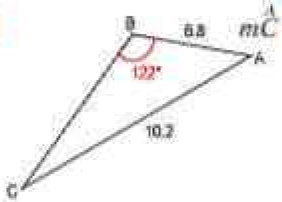
23 $\tan 270°$ **24** $\cos(-135°)$ **25** $\sin 90°$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
25-17	1
31-26	2
37-32	3
38	4

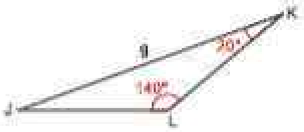
پێوانەی داواکراو بدۆزەوە، درێژییەکە بۆ نزیکترین دەیەك، و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە

26 $m\hat{C}$

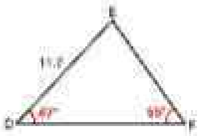


27 PR

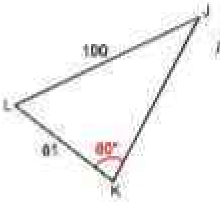
28 JL



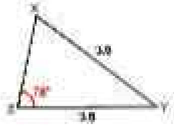
29 EF



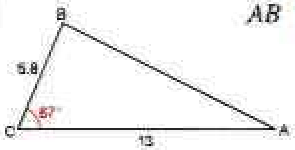
30 $m\hat{J}$



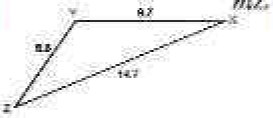
31 $m\hat{X}$



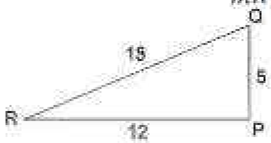
32 AB



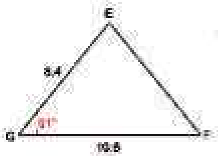
33 $m\hat{Z}$



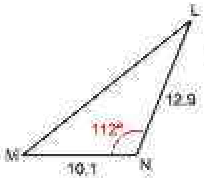
34 $m\hat{R}$



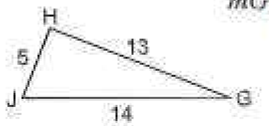
35 EF



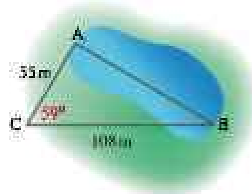
36 LM



37 $m\hat{G}$



38 **چاودێری** بۆ ئەوەی چاودێرێك درێژی دەریاچەیەك بزانێت 3 خاڵی A و B و C دیاریکرد وەك لە وێنەی بەرامبەردا دیارە. درێژی $\overline{AB}$ بدۆزەوە نزیککرابێتەوە بۆ نزیکترین دەیەك لە مەتر؟ و پێوانەی $\hat{B}$ گۆشەی B نزیکرابێتەوە بۆ نزیکترین پلە چەندە؟

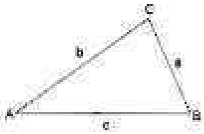


دەروازەیەك

لەسەر سستەمی چاودێری

زۆربەی کردارەکانی چاودێری بە هۆی سستەمی جیهانی GPS ئەنجام دەدرێت. ئەو سستەمە چەند مانگێکی دەستکرد بۆ دیاریکردنی شوێنەکان بەکاردێنێ.

بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 39-42 سێگۆشەی بەرامبەر بەکاربێنە. درێژییەکان نزیکبکەوە بۆ نزیکترین دەیەك و گۆشەکان بۆ نزیکترین پلە.



39 $m\hat{A}=74°$ ، $m\hat{B}=22°$ ، $b=3.2$ cm ، a بدۆزەوە

40 $m\hat{C}=100°$ ، $a=9.5$m ، $b=7.1$ m ، c بدۆزەوە

41 $a=2.2$m ، $b=3.1$m ، $c=4$m ، $m\hat{B}$ بدۆزەوە

42 $a=10.3$cm ، $c=8.4$cm ، $m\hat{A}=45°$ ، $m\hat{C}$ بدۆزەوە

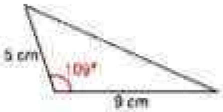
43 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** وادابنێ پێوانەی هەر سێ گۆشەکانی سێگۆشەیەك دەزانی. و دەتەوێت درێژی لایەکانی بدۆزیەوە ئایا دەتوانیت یاسای Sin یان Cos بەکاربێنیت بۆ گەیشتن بەو مەبەستە؟ بەڵگە بۆ وەڵامەکەت بهێنەوە.

44 **چی دەبێت ئەگەر...؟** یاسای Cos چ گۆڕانێکی بەسەردا دێت ئەگەر گۆشەکە وەستاوبێت؟

45 **پێشبڕکێ** وێنەی بەرامبەر نەخشەی یەکێك لە پێشبڕکێیەکانی ڕۆیشتن ڕووندەکاتەوە. پێویستە پێشبڕکێکەرەکە چەند پلە پێچ بکاتەوە پاش گەیشتنی بە خاڵی چاودێری یەکەم بۆ ئەوەی ڕووبکاتە خاڵی چاودێری دووەم؟ وەڵامەکەت نزیک بکەوە بۆ نزیکترین پلە.

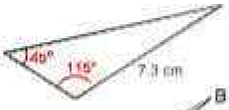
فرەهەنگاو چێوەی هەر سێگۆشەیەك هەژماربکە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

46

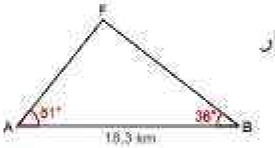


47

48



49 لێرەدا بارێکی لێتێچوون لە بارەکانی جێبەجێکردنی یاسای Sin داهەیە. ئەویش ئەو بارەیە کە لە سێگۆشەیەکدا پێوانەی یەکێك لە گۆشەکان و درێژی لایەکی بەرامبەر گۆشەکە و درێژی لایەکی تر بزانیت. بەڵام درێژی لای بەرامبەرە کورترە لە درێژی لایەکەی تر. ئەوا دووبار هەیە بۆ ئەم جۆرە سێگۆشانە. دوو بەهای گونجاو بۆ $m\hat{C}$ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە (یارمەتی: لەکاتی بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ دۆزینەوەی گۆشەیەك sin ـەکەی زانراوبێت پێوانەی گۆشەیەکی تیژی ئەوتۆت دەداتێ کە مەرجەکە بێنێتەدی. ئەو گۆشەیە و گۆشە پڕکەرەکەی بەهەندوەربگرە).



50 دوو تیمی بەرگری شارستانی کە لە دووخاڵی A ، B دابوون، ئاگادار کرانەوە لە خاڵی F دا ئاگرێك کەوتووەتەوە.

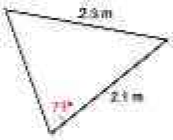
أ $m\widehat{CBD}$بدۆزەوە.

ب دووری نێوان هەر تیمێك و شوێنی ئاگرەکە هەژماربکە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین کیلومەتر نزیکبکەوە.

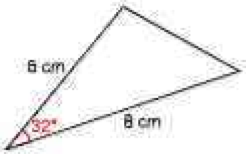
ج کۆپتەری ئاگر کوژێنەوە بەخێرایی$150\,km/h$ دەفڕێت. ئەو کاتە چەندە کە تیمەکان قازانج دەکەن ئەگەر کۆپتەرەکە لە خاڵی A وە بفڕێت لە جیاتی خاڵی B .

دیاریبکە ئایا دەتوانیت یاسای Sin یان یاسای Cos وەك هەنگاوی یەکەم بۆ شیکارکردنی هەر سێگۆشەیەك بەکاربێنیت.

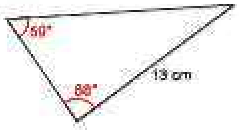
51



52



53

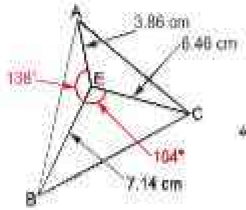


54 پۆتانی سەرەکانی سێگۆشەی ABC بریتییە لە $A(0, 3)$ ، $B(3, 1)$ ، $C(-3, -1)$

أ AB ، BC ، CA بدۆزەوە

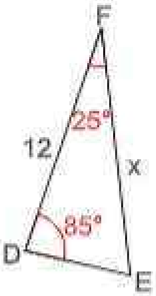
ب کام یەکێك لە گۆشەکانی سێگۆشە گەورەترین پێوانەی هەیە؟

ج پێوانەی ئەو گۆشەیە بدۆزەوە.



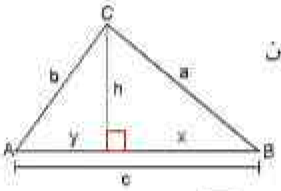
55 **هونەر** کلار شێوازێکی پێکهێنا بۆ ڕەنگکردنی شووشە وەك لە وێنەی بەرامبەردا دایە. BC وAB هەژماربکە پاشان $m\widehat{ABC}$ بدۆزەوە. درێژییەکە بۆ نزیکترین بەش لە سەد و گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

56 **هەڵە لە شیکردنەوە** داوا لە خوێندکاران کرا درێژی x لە سێگۆشەی بەرامبەردا بدۆزنەوە. ئەم دوو وەڵامەیان پێشنیارکرد. کامیان هەڵەیە؟ هەڵەکە ڕوونبکەوە.



بەپێی یاسای sin	بەپێی یاسای sin
$\frac{\sin 85}{x}=\frac{\sin 25}{12}$	$\frac{\sin 85}{x}=\frac{\sin 70}{12}$
$x\sin 25=12\sin 85$	$x\sin 70=12\sin 85$
$x=\frac{12\times\sin 85^\circ}{\sin 25^\circ}\approx 28.3$	$x=\frac{12\times\sin 85^\circ}{\sin 70^\circ}\approx 12.7$

57 سەلماندنی یاسای Cos لە سێگۆشەیەکی گۆشەتیژ



دراو: ABC سێگۆشەیەکە هەموو گۆشەکانی تیژە و درێژی لایەکانی بریتین لە a ، b ، c

داواکراو : $a^2=b^2+c^2-2bc\ x\cos\hat{A}$

سەلماندن: لە خاڵی C ەوە ئەستونێك بۆ سەر $\overline{AB}$ بکێشە. و سێگۆشەکە دەبێتە 2 سێگۆشەی وەستاو 1 و 2 وەستاو هێمای h بۆ بەرزییەکە دابنێ لای$\overline{AB}$ دەکات دوو بەشەوە. درێژی یەکەم x و درێژی دووەم y بێت. بە پێی سەلمێنراوی فیساغورس دەتوانین بنووسین.

لە سێگۆشەی 1 دا $a^2=h^2+y^2\ \dots\ (1)$

لە سێگۆشەی 2 دا $b^2=h^2+x^2\ \dots\ (2)$

لەجیاتی y لە هاوکێشەی 1 : $(x-2)$ دابنێ

$a^2=h^2+(x-2)^2\ \dots\ (3)$

$a^2=(h^2+x^2)+c^2-2cx$

لەجیاتی h^2+x^2 دابنێ b^2

$a^2=b^2+c^2-2cx\ \dots\ (4)$

لەسێگۆشەی 2 دا: $\cos\hat{A}=\frac{x}{b}$

$x=b\cos\hat{A}$

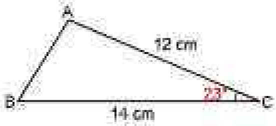
لەجیاتی دانان لە 4 ئەنجامەکە دێتەدی

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

58 **بنووسە** ئایا دەتوانیت یاسای Sin بۆ شیکارکردنی سێگۆشەی بەرامبەرت بەکاربێنیت؟ وەڵامەکەت بەبەڵگە ڕوونبکەوە.

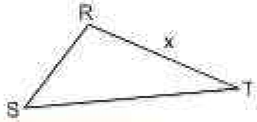
ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

59 کام لەمانەی خوارەوە نزیکترین بەهایە بۆ درێژی $\overline{AB}$؟



(أ) 5.5cm (ب) 14.4cm (ج) 7.5cm (د) 22.2cm

60 کام لەم کۆمەڵە زانیارییانە وادەکەن هەژمارکردنی بەهای x بەیاسای ساین ئەنجام بدرێت.

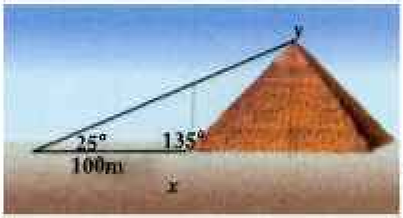


(أ) $ST=15.3$، $RS=8.1$، $m\hat{T}=38°$

(ب) $ST=9$، $m\hat{S}=40°$، $RS=4$

(ج) $ST=7$، $m\hat{S}=34°$، $m\hat{R}=92°$

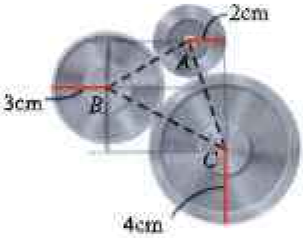
(د) $m\hat{T}=31°$، $m\hat{S}=44°$، $m\hat{R}=105°$



61 ئەدازیارێك بینی ڕووی هەرەمێك گۆشەیەك لەگەڵ ڕووی زەویدا دروستدەکات پێوانەکەی 135° ـــە. هەروەها بینی پێوانەی ئەو بەرزە گۆشەیەی لوتکەی هەرەمەکە لەگەڵ خاڵێك کە 100m لە بنکەکەیەوە دوور دەکاتە 25°. درێژی لای $\overline{xy}$ چەندە؟

(أ) 48m (ب) 81m (ج) 124m (د) 160m

بەرەنگاری و فراوانکردن



62 **فرەهەنگاو** 3 پەیك پێکەوە نوسێنران وەك لە وێنەی بەرامبەردا دیارە، نیوەتیرەی پەیکەکان بریتی بوون لە 2cm، 3cm، 4cm لە سێگۆشەی ABC دا $m\widehat{ACB}$ بدۆزەوە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

63 ڕاستەهێڵی ℓ بە دووخاڵی $(-1,1)$، $(1,3)$ دا تەپەڕوات، ڕاستەهێڵی m بە دووخاڵی $(-1,1)$ و $(3,2)$ دا تەپەڕوات. پێوانەی ئەو گۆشە تیژەی دوو ڕاستەهێڵەکە دروستی دەکەن هەژماربکە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

64 **دەریاوانی** بەندەری B بە دووری 5km لە باشووری بەندەری A وەیە. کەشتیەك لە بەندەری A دەستی بە جوولە کرد بە ئاڕاستەی باکوور −32°− ڕۆژهەڵات خێراییەکەی 6km/h. کەشتییەکەی دوای 45 خولەك چەند دوورە لە خاڵی B وە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك لە کیلۆمەتر نزیکبکەوە.

پێداچوونەوەی لولپێچی

لەهەر شێوازێکدا، ئەو ژمارەیە بنووسە کە پلەکەی n بێت (پۆلەکانی پێشوو)

65 3, 6, 9, 12, 15,...

66 3, 5, 7, 9, 11,...

67 4, 6, 8, 10, 12,...

ڕێژەی سێگۆشەییەکان بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی گۆشەی $\hat{A}$ لە هەر بارێکدا (پۆلەکانی پێشوو)

68 $\cos\hat{A}=\frac{15}{17}$

69 $\sin\hat{A}=\frac{15}{17}$

70 $\tan\hat{A}=1.875$

بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەتیژی A لەهەر پرسیارێکدا. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەشی لە هەزار نزیکبکەوە.

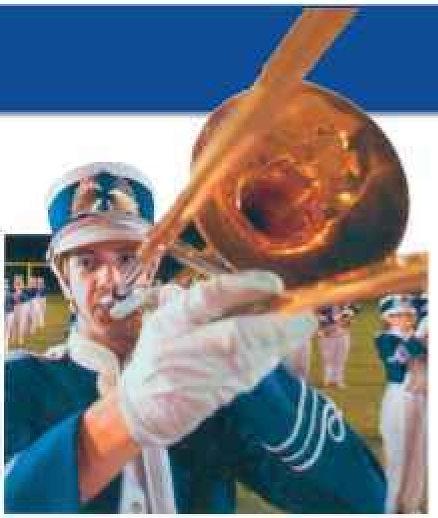
71 $\sin\hat{A}=0.89$

72 $\cos\hat{A}=0.89$

73 $\tan\hat{A}=2.05$

2-7 نەخشە سێگۆشەییەکان

Trigonometric Functions



بۆ چی ئەمە فێر دەبین؟

دەتوانیت دیاردە خولییەکان بە بەکارهێنانی نەخشە سێگۆشەییەکان بنوێنرێن، وەک شەپۆلە دەنگییەکان (تەماشای نموونەی 3 بکە).

ئامانجەکان

جیاکردنەوەی نەخشە خولییەکان، جیاکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییەکان و کێشانی ڕوونکردنەوەییان.

زاراوەکان Vocabulary

نەخشەی خوولی (الدالة الدورية) Periodic function

نەخشەی سێگۆشەیی Trigonometric function

خوڵ Cycle

کاتی خوولاو (الزمن الدوري) Period

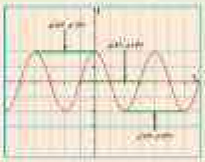
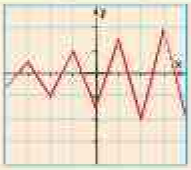
فراوانی Amplitude

لەرەلەر Frequency

لادانی ڕوو Phase shift

نەخشەی سێگۆشەیی Trigonometric function نەخشەیەکە ڕێساکەی بڕێکی سێگۆشەییە نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان سیانن **نەخشەی ساین Sine function** $f(x)=\sin x$ و **نەخشەی کۆساین** cosine Function $f(x)=\cos x$ و **نەخشەی تان Tangent function** $f(x)=\tan x$ کاتێک x پێوانەی گۆشەکەبێت بە گۆشەی نیوەتیرەی radian نەخشە سێگۆشەییەکان بەوە جیادەکرێنەوە، کە بەهایەکانیان بە شێوەیەکی خولی دووبارە دەبنەوە. نەخشەی Sine پاسادانی $\sin(x+2\pi)=\sin x$ دەکات ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت ئەم نەخشەیە هەمان بەهای دەبێت کاتێک x لە ماوەی $\left[0, 2\pi\right]$، $\left[2\pi, 4\pi\right]$ دا دەبێت. دەتوانین ئەمە بەم شێوەیە دەربڕین، نەخشەی Sinx خولایەوە و کاتی خوولەکەی بریتییە لە 2π .

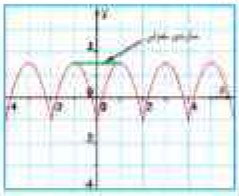
نەخشەی دووبارەبووە Periodic function ئەو نەخشەیەیە بەهایەکانی لە ماوە ڕێکەکاندا دووبارە دەبنەوە بەو ماوە ڕێکانەش دەوترێت **خول Cycles** هەموو خولەکان یەک درێژیان هەیە. پێی دەووترێت **کاتی خولی Period** سەرەنجی ئەم ڕونکردنەوانە بدە بەکێکیان خولییە ئەویتریان خولی نییە دەبینیت خولەکە دەتوانێت لە هەر خاڵێکی چەماوەی نەخشەکەوە دەستپێبکات.

نەخشەی خوولی	نەخشەی ناخوولی
	

نموونە 1 جیاکردنەوەی نەخشە خوولییەکان

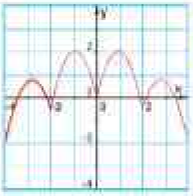
دیاریبکە نەخشەکە خولییە یان نا. ئەگەر نەخشەکە خوولیبووە بوو ماوەی خولییەکەی دیاریبکە

أ



شێوازەکە بە شێوەیەکی ڕێکوپێک دووبارە دەبێتەوە کەوا لە نەخشەکە دەکات نەخشەیەکی خولی بێت وکاتی خوولییەکەی 2 دەبێت

ب

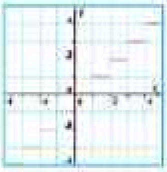


شێوازێک نییە بە ڕێك و پێکی دووبارە بێتەوە هەرچەندە ڕوونکردنەوەییەکە چەند هاوجێبونێکی تێدایە. نەخشەکە خولی نییە.

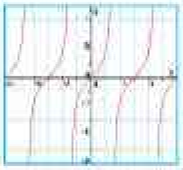
خاڵی چاودێری

1. **دیاریبکە نەخشەکە خولییە یان نا ئەگەر خولی بوو، ماوەی خولییەکە دیاریبکە.**

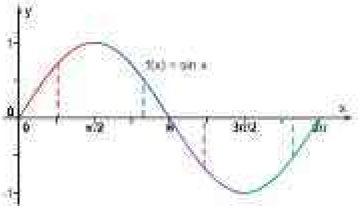
أ



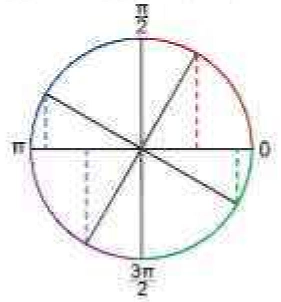
ب



نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکانی خوولین دەتوانیت چەماوەی نەخشەی $f(x)=\sin x$ لە ڕووتەختی پۆتاندا بەبەکارهێنانی پۆتانی y بۆ ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر بازنەی یەکە دروستبکەیت، کاتێک x گۆشەی تەوەری θ لەباری نموونەیدا بنوێنێت.

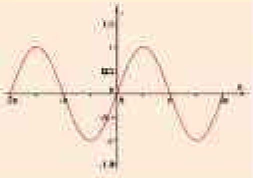
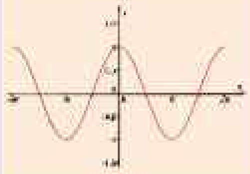
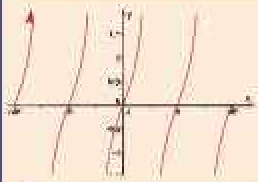


y	$x(=\theta)$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$



دەتوانیت ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\cos x$ بەبەکارهێنانی پۆتانی x بۆ خاڵەکانی سەریەکەی بازنەکە بکێشیت. **فراوانی Amplitude** نەخشەی خولی بریتییە لە نیوەی جیاوازی نێوان گەورەترین بەهاو بچوکترین بەهای. فراوانی هەمیشە ژمارەیەکی موجەبە. فراوانی هەریەکە لە دوو نەخشەی Sin و Cos بریتییە لە $1=\frac{1-(-1)}{2}$ بەڵام فراوانی نەخشەی tangent پێناسەنەکراوە

سیفەتەکانی چەماوەی نەخشە سێگۆشەییەکان

نەخشە	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
ڕوونکردنەوەی نەخشەکە (چەماوەکەی)			
بوار	R	R	$\left\{x / x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in I\right\}$
مەودا	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	R
کاتی خوولی	2π	2π	π
فراوانی	1	1	پێناسە نەکراو

ڕۆشنایی

هەردوو چەماوەی نەخشەی Sin و tan بە خاڵی بنەڕەتدا دەڕۆن بەڵام چەماوەی نەخشەی Cos تەوەرەی y لە 1 دا دەبڕێت.

دەتوانیت چەماوەکانی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بۆ کێشانی وێنەی ڕوونکردنەوەیی $y=a\sin bx$ ، $y=a\cos bx$ ، $y=a\tan bx$ بەکاربێنیت بیرت بێت، کە a ڕاکێشانی ستونی دەگەیەنێت کاتێک($|a|>1$) یان چوونەوەیەکی ستوونییە کاتێک ($0<|a|<1$) ئەمەش دەبێتە هۆی گۆڕانی فراوانی.

ئەگەر a سالب بێت، پێویستە جێگۆڕکێ بە ڕوونکردنەوە بکرێت بە وێنەدانەوەیەکی ئاسۆیی دەنوێنێت، b نیشانەی کشانەوە یان چوونەوەیەکی ئاسووین وکاتی خوولییەکە دەگۆڕێت.

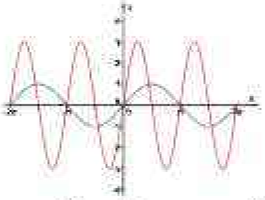
جێگۆڕکێ ڕوونکردنەوەییەکانی نەخشە سێگۆشەییەکان

لە نەخشە سێگۆشەییەکانی $y=a\sin bx$ $y=a\cos bx$ $y=a\tan bx$

نەخشە	فراوانی	ماوەی دوبارەبوونەوە	دەرکەنارەکان
$y=a\sin bx$	$\lvert a\rvert$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	دەرکەناری نییە
$y=a\cos bx$	$\lvert a\rvert$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	دەرکەناری نییە
$y=a\tan bx$	پێناسە نەکراوە	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	دەرکەناری ستوونیەکان لە $x=\frac{\pi}{2\lvert b\rvert}+\frac{k\pi}{\lvert b\rvert}$ کاتێک $k\in I$

نموونـــــه 2 جێگۆڕکێی نەخشە سێگۆشەییەکان

أ **چەماوەی نەخشەی Sin بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی نەخشەی $g(x) = 3\sin 2x$ فراوانی و مەودای نەخشەکە دیاریبکە.**



هەنگاوی 1 فراوانی و ماوەی کاتی خولی دیاریبکە.

لەبەرئەوەی $a = 3$ کەواتە فراوانییەکەی $|a| = |3| = 3$

لەبەرئەوەی $b = 2$ کەواتە فراوانییەکەی $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

هەنگاوی 2 وێنەی ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.

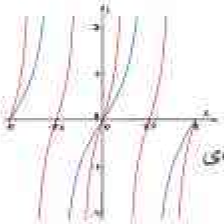
پێویستە چەماوەی نەخشەی بنەڕەت بەهاوکۆلکەی 3 رابکێشیت. و چوونەوەیەکی ئاسۆیی بە هاوکۆلکەی $\frac{1}{2}$ بۆ بکەیت. چەماوەی نەخشەی بنەڕەت تەوەری ئاسۆیی لە چەند جارەکانی π دەبڕێت، هەروەها چەماوەی نەخشەی g تەوەری ئاسۆیی لە چەند جارەکانی $\frac{\pi}{2}$ دا دەبڕێت. گەورەترین بەهای نەخشەی g لە 3 داو بچووکترین بەهای لە 3- دا دەبێت.

ب **چەماوەی نەخشەی tan بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی نەخشەی $h(x) = \tan 2x$ کاتی خولییەکەی و یەکتربڕینە ئاسۆییەکان و دەرکەنارەکانی دیاریبکە.**

هەنگاوی 1 کاتی خولییەکەی دیاریبکە.

لەبەرئەوەی $b = 2$ کەواتە کاتی خوولییەکەی بریتییە لە $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$

هەنگاوی 2 یەکتربڕین لەگەڵ تەوەرەی ئاسۆیی بدۆزەوە یەکەم یەکتربڕین لە $x = 0$ دا دەبێت. و لەبەر ئەوەی کاتی خوولییەکەی نەخشەکە بریتییە لە $\frac{\pi}{2}$ بۆ یەکتر بڕینەکان لەگەڵ تەوەرەی ئاسۆیدا لە $x = k\frac{\pi}{2}$ دا دەبێت. کاتێك $k \in I$



هەنگاوی 3 دەرکەنارەکان دیاریبکە لەبەر ئەوەی $b=2$ بۆیە دەرکەنارە ستونییەکانی لە $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ یان $x = \frac{\pi}{2|2|} + \frac{k\pi}{|2|}$ دا دەبێت.

هەنگاوی 4 بەبەکارهێنانی ئەو زانیارییانەی پێشوو چەماوەی نەخشەی h بکێشە

خاڵی چاودێری

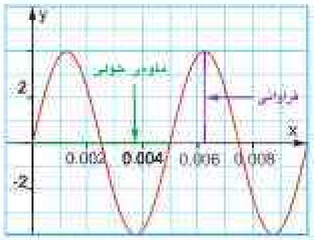
2. **أ** چەماوەی نەخشەی Cos بەکاربێنە بۆ وێنە کێشانی نەخشەکە $g(x)=\frac{1}{3}\cos 2x$ فراوانی و کاتی خولییەکەی بۆ ئەو نەخشەیە دیاریبکە.

ب چەماوەی نەخشەی tan بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی نەخشەکە $h(x)=3\tan \frac{1}{2}x$ و کاتی خولییەکەی بۆ ئەوەی نەخشەکە و یەکتر بڕینە ئاسۆییەکان و دەرکەنارەکان بدۆزەوە.

دەتوانیت هەردوو نەخشەی Sin و Cos وەك نموونە بۆ لێکۆڵینەوەی دیاردە سروشتییەکان بەکاربێنیت وەك شەپۆلە دەنگییەکان دەنگە جیاوازەکان شەپۆلی جیا جیا دروستدەکەن لەرەلەرەکان **Frequency** بۆ ناسینەوەی دەنگەکان بەکاردێت. لەرەلەر بریتییە لە ژمارەی خولەکان لە یەکەیەکی کاتدا، ئەویش هەڵگەڕاوەی کاتی خولانەوەکەی. بۆ پێوانە کردنی لەرەلەرەکان هیرتز Hz بەکاردێت. بۆ نموونە: کاتێك دەوترێت دەنگێك بە لەرەلەری 440 هێرتزە، هێرتز مانای وایە شەپۆلی دەنگەکە 440 جار لە چرکەیەکدا دووبارە دەبێتەوە.

نموونـــــه 3 جێبەجێکردن لە زانستی دەنگدا

نەخشەی Sin بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی شەپۆلێکی دەنگ کاتی خولییەکەی 0.005 S وفراوانییەکەی 4 cm بێت لەرەلەری ئەو شەپۆلە بدۆزەوە.



تەوەری ئاسۆیی بۆ چەند یەکەیەك ڕەنووسی بکە یەکە 0.001 چرکە بنوێنێت. کاتی خولییەکەی 0.005 چرکە دەخایەنێت تاخولێکی تەواو دروستبکات. بەڵام فراوانی بە دوو بەهای گەورەترین و بچووکترین دیاریدەکرێت. لەبەر ئەوەی لەرەلەرەکەی یەکسانە بە هەڵگەڕاوەی کاتی خولییەکەی، بۆیە بەهایەکەی بریتییە لە $\frac{1}{0.005} = 200Hz$ لەرەلەری دەنگەکە 200 هێرتزە.

خاڵی چاودێری

3. نەخشەی Sin بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ئەو شەپۆلە دەنگەی ماوەی دووبارە بوەکەی 0.004 S و فراوانییەکەی 3.0 m لەرەلەری شەپۆڵی ئەو دەنگە بە هێرتز بدۆزەوە

دەتوانرێت هەردوو نەخشەی Sin و Cos جێگۆڕکێ پێبکرێت بە ڕاکێشان بۆ دەستکەوتنی $y = \sin(x-h)+k$ یان $y = \cos(x-h)+k$ لەبیرت بێت ڕاکێشانی چەماوەکە k یەکە بە ستوونی بۆ سەرەوە دەبێت ئەگەر k موجەب بێت وە بۆ خوارەوە دەبێت ئەگەر سالب بێت.

لادانی ڕوو (انحراف الطور) Phase Shitf بۆ نەخشەیەکی دووبارەبووەوە بریتییە لە ڕاکێشانی ئاسۆیی چەماوەکە، لادانی ڕوو h یەکە بۆ لای ڕاست دەبێت ئەگەر h موجەب و بۆ لای چەپ دەبێت ئەگەر h سالب بێت.

نموونـــــه 4 دیاریکردنی لادانی ڕوو بۆ هەر دوو نەخشەی Sin و Cos

ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=\sin x$ بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی نەخشەی $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ یەکتربڕینەکان لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی ڕوو دیاربکە.

هەنگاوی 1 فراوانی و کاتی خوولی دیاربیکە

لەبەرئەوەی $a = 1$ بۆیە فراوانی $|a| = |1| = 1$

لەبەرئەوەی $b = 1$ کاتی خوولی بریتییە $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

هەنگاوی 2 لادانی ڕوو بدۆزەوە.

h دیاریبکە، $x + \frac{\pi}{2} = x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$

لەبەر ئەوەی $h = -\frac{\pi}{2}$ بۆیە لادانی ڕوو بریتییە لە $\frac{\pi}{2}$ بۆ لای چەپ، لەمەوە دەستدەکەوێت کە هەموو یەکتربڕینەکانی وێنەکە $\frac{\pi}{2}$ یەکە بۆ لای چەپ ڕاکێشراوە.

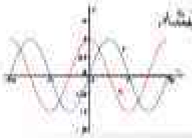
هەنگاوی 3 یەکتربڕینە ئاسۆییەکان دیاربیکە.

لەبەر ئەوەی نەخشەی بنەڕەت لە $x = k\pi$ دا تەوەری ئاسۆیی دەبڕێت کاتێك $k \in I$ بۆیەش نەخشەکە لە $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ دا تەوەری ئاسۆیی دەبڕێت.

هەنگاوی 4 گەورەترین و بچووکترین بەها دیاربیکە.

نەخشەکە گەورەترین یان بچوکترین بەها وەردەگرێت ئەگەر x لە ناوەڕاستی یەکتر بڕینەکان بێت لەگەڵ تەوەرەی ئاسۆییدا. گەورەترین بەهای نەخشەکە یەکسانە بە 1 لە $x = 2k\pi$ بچوکترین بەهای نەخشەکە یەکسانە بە -1 لە $x = \pi + 2k\pi$ کاتێك $k \in I$.

هەنگاوی 5 بەبەکارهێنانی زانیارییەکان وێنەی چەماوەی نەخشەکە بکێشە.



خاڵی چاودێری

4. چەماوەی نەخشە $f(x)=\cos x$ بەکاربێنە بۆ وێنە کێشانی $g(x)=\cos(x-\pi)$ یەکتربڕینەکان لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی ڕوو دیاریبکە.

دەتوانیت جێگۆڕکێیەکان بەیەکەوە ئەنجام بدرێت بۆ هەردوو نەخشە Sin و Cos بەهاکانی a، b، h، k بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی سیفەتە دیارەکانی نەخشەی Sin یان Cos .

فراوانی ← a ، لادانی ڕوو ← h

$$y = a\sin b(x-h)+k$$

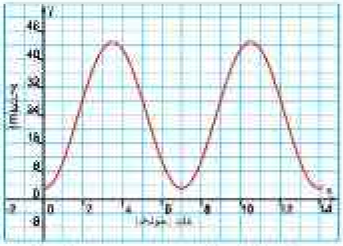
b ← ماوەی دووبارە بونەوە ، k ← ڕاکێشانی ستوونی

نموونـــــه 5 جێبەجێکردن

چەرخ و فەلەکێکی مەزن یەک خول بە 7 خولەک تەواودەکات. نەخشەی $H(t)=21\sin\frac{2\pi}{7}(t-1.75)+24$ ڕێسایەکە بۆ دۆزینەوەی بەرزی (بەمەتر) بۆ هەریەکێک لە کورسییەکان لە زەویەوە بە پێی کات (چرکە).

أ **وێنەی چەماوەی نەخشەکە بۆ بەرزی کورسییەک لە ماوەی دوو خولدا بکێشە.**

$k=24$ ، $h=1.75$ ، $b=\frac{2\pi}{7}$ ، $a=21$ $\quad H(t)=21\sin\frac{2\pi}{7}(t-1.75)+24$



هەنگاوی 1 جیاکەرەوە سەرەکییەکانی نەخشەکە دیاریبکە فراوانی 21 کاتی خولی $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{7}\right|}=7$

کاتی خوولی بریتییە لەو کاتەی چەرخ و فەلەکەکە دەیخایەنێت بۆ ئەوەی خولێکی تەواو بکات. دەکاتە 7 خولەک.

لادانی ڕووەکە: 1.75 خولەک بۆ لای ڕاست. ڕاکێشانی ستوونی: 24 m بۆ سەرەوە چەماوەکە تەوەرەی ئاسۆیی نابڕێت. گەورەترین بەها: $45 = 21 + 24$ کەنەخشەکە لە $t=3.5$ و $t=10.5$ دا وەریدەگرێت. بچوکترین بەها: ***24-21=3*** کە نەخشەکە لە $t=0$، $t=7$، $t=14$ دا وەریدەگرێت.

ب **گەورەترین بەرزی کورسییەکە دەیگاتێ چەندە؟**

گەورەترین بەرزی کورسییەکە بریتییە لە $45\text{m} = (24+21)$

خاڵی چاودێری

5. **چی دەبێت ئەگەر ...؟** وایدانێ نەخشەکە بریتیی بێت لە $H(t)=-5\cos\frac{\pi}{45}t+7$ بە پێی t (بە چرکە).

أ وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ بەرزی کورسییەک لە ماوەی دوو خولدا بکێشە

ب گەورەترین بەرزی کورسییەکە دەیگاتێ چەندە؟

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. پەیوەندی نێوان لەرەلەری نەخشەی خولی وکاتی خولی چییە؟ ئەمە چۆن بەسەر نەخشەی Cos دا جێبەجێدەبێت.

2. ئەو پەیوەندییەی گەورەترین و بچووکترین بەها و فراوانی و کاتی خولی دوو نەخشەی Sin و Cos پێکەوە دەبەستێت چییە؟
3. ڕێکخەرە هێڵکارییەکەی بەرامبەرت دروستبکەوە و تەواوی بکە لەسەر هەر جێگۆڕکێیەک نموونە بێنەوە. ماوەی کاتی خولی دیاریبکە.

فێربە

2-7 ڕاهێنانەکان

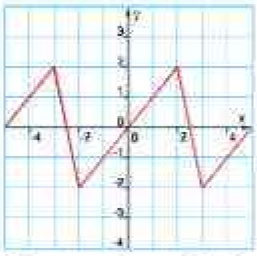
ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 **زاراوەکان** بەهاکانی ئەخشەی خولی لەماوە ڕێکەکاندا دووبارە دەبێتەوە پێ دەوترێت ____؟ (خول یان کاتی خولی).

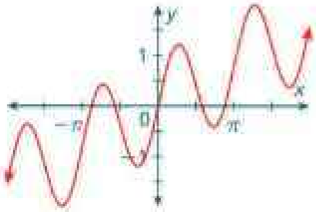
بڕوانە نموونە 1

دیاریبکە ئەخشەکە خولییە یان نا، کاتی خولی بدۆزەوە ئەگەر خولی بوو.

2



3



بڕوانە نموونە 2

چەماوەی ئەخشەی بنەڕەت بەکاربێنە بۆ وێنە کێشانی هەرئەخشەیەک، فراوانی و کاتی خولی دیاریبکە

4 $f(x)=\sin \frac{1}{2} x$ **5** $h(x)=\frac{1}{4} \cos x$ **6** $k(x)=\sin \pi x$

چەماوەی ئەخشەی بنەڕەتی بەکاربهێنە بۆ وێنەکێشانی هەرئەخشەیەک، ماوەی دووبارەبووەوە یەکتر بڕینەکانی ئاسۆیی دەرکەنارەکان دیاریبکە.

7 $f(x)=2 \tan 3x$ **8** $h(x)=\tan \frac{1}{4} x$ **9** $k(x)=\tan 2\pi x$

بڕوانە نموونە 3

10 **دەنگ** ئەخشەی Sine بۆ وێنەکێشانی شەپۆلێکی دەنگی کەکاتی خولی 0.01S (چرکە). فراوانییەکەی 6 cm بەکاربێنە. لەرەلەری ئەو شەپۆلە بدۆزەوە.

بڕوانە نموونە 4

چەماوەی ئەخشەی بنەڕەت بۆ وێنەکێشانی هەریەک لەم ئەخشانە بەکاربێنە. خاڵەکانی یەکتر بڕین لەگەڵ تەوەرەی ئاسۆیی و لادانی ڕوو بۆ هەر یەکەیان دیاریبکە.

11 $f(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$ **12** $h(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ **13** $k(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

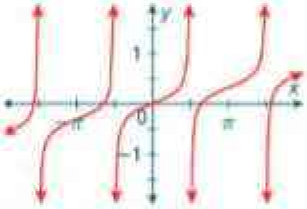
بڕوانە نموونە 5

14 **بۆ خۆشی** دەتوانرێت ئەخشەی $H(\theta)=-4\cos\theta+6$ بۆ هەژمارکردنی بەرزی سواربووی جۆلانەیەک (بەپێ) بە گوێرەی گۆشەی θ کە جولانەکە لەگەڵ ئەو ڕاستە هێڵیە ئەستوونەی بەسەرەکیدا دەڕوات پێکدێنێت. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە بەرزی سواربووی جۆلانە کە بنوێنێت، کاتێک $0° \le \theta \le 90°$ بەرزی سواربووەکە لە $\theta=60°$ چەند؟

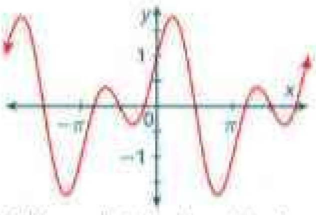
ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

دیاریبکە ئەخشەکە خولییە یان نا، کاتی خولی بدۆزەوە ئەگەر خولی بوو.

15



16



چەماوەی ئەخشەی بنەڕەت بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی هەر ئەخشەیەک، فراوانی و کاتی خولی بدۆزەوە.

17 $f(x)=4\cos x$ **18** $h(x)=\frac{3}{2}\sin x$ **19** $k(x)=-\cos 4x$ **20** $\ell(x)=6\sin \frac{1}{3} x$

21 **دەنگ** ئەخشەی Sin بۆ وێنەکێشانی شەپۆلێکی دەنگ بەکاربێنە، ئەگەر کاتی خولی 0.025S و فراوانییەکەی 50 cm بێت. لە پاشاندا لەرەلەری شەپۆلەکەی بدۆزەوە.

ڕاهێنانی ئازاد

بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
16-15	1
20-17	2
21	3
28-22	4
29	5

چەماوەی نەخشەی بنەڕەت بۆ وێنەکێشانی هەریەک لەم نەخشانە بەکاربێنە کاتی خولی و خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و دەرکەنارەکان بدۆزەوە.

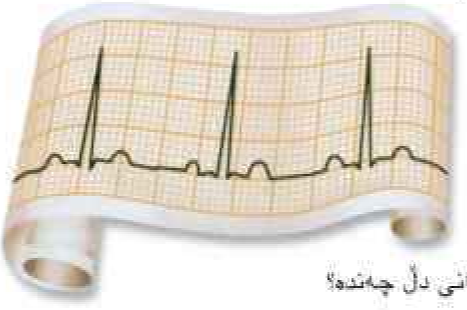
22 $f(x)=\tan\frac{3}{2}x$ **23** $h(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ **24** $k(x)=-2\tan\frac{\pi}{2}x$

25 $f(x)=\sin(x+\pi)$ **26** $h(x)=\cos(x-3\pi)$

27 $k(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$ **28** $g(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

29 **زانستی دەریا** دەتوانیت نەخشەی $d(t)=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{31}t\right)+23$ وەك ڕێسایەك بۆ دۆزینەوەی قووڵی ئاوی یەکێك لەکەنداوەکان بە مەتر و بەپێی کات بەکاربێنیت. وێنەی ئەم نەخشەیە بکێشە زۆرترین و کەمترین قووڵی بدۆزەوە.

30 **پزیشکی** وێنەی بەرامبەر هێڵکاری دڵی مرۆڤێکی ئاسایی دەردەخات. هەر خولێك لێدانێکی دڵ دەنوێنێت.



أ کاتی خولی لێدانەکانی دڵێك بدۆزەوە.

ب تێکڕای لێدانەکانی دڵ ژمارەکانییەتی لە خولەکێکدا. تێکڕای لێدانەکان لە هێڵکارییەکەی بەرامبەرت چەندە؟

ج لەرەلەری ئەم هێڵکارییە چەندە؟

د پەیوەندی نێوان لەرەلەری ئەم هێڵکارییە و تێکرایی لێدانی دڵ چەندە؟

لەسەر پزیشکی

ئامێری هێڵکاری دڵ بۆ پێوانی ئەو تەزوو و کارە بایییەی فرمانی لێدانەکانی دڵی مرۆڤ لە کاتی دەستنیشانکردنی نەخۆشییەکانی دڵدا پێك دەخات بەکاردێت.

پەیوەندی نێوان فراوانی و کاتی خوولی بۆ هەریەك لەم نەخشانە بدۆزەوە، پاشان ئەو جێگۆڕکێیانە دیاریبکە کە بەسەر نەخشەی بنەڕەتدا هاتوون تا بگەیتە ئەم نەخشانە.

31 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$ **32** $g(x)=\frac{3}{4}\cos\frac{\pi}{4}x$

33 $k(x)=\cos(2\pi x)-2$ **34** $\ell(x)=-3\sin 3x$

خەملاندن نەخشەی Sin و Cos بۆ خەملاندنی بەهای هەر بڕێك بەکاربێنە.

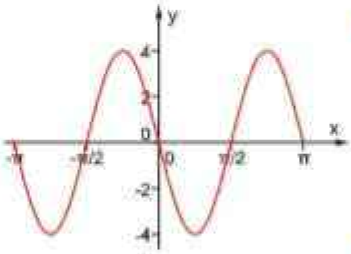
35 $\sin 160^\circ$ **36** $\cos 50^\circ$ **37** $\sin 15^\circ$ **38** $\cos 95^\circ$

نەخشەی Sine و Cosine بۆ نواندنی ئەوەی دیاریکراوە بنووسە.

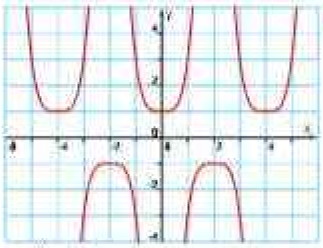
39 فراوانی 6 و کاتی خولییەکەی π **40** فراوانی $\frac{1}{4}$ و لادانی ڕوو $\frac{3}{2}\pi$ بۆلای چەپ

نەخشەی Sine و Cosine بۆ نواندنی ڕوونکردنەوەییەکە بنووسە.

41



42



43 بەرزترین ئاستی هەڵکشانی کەنداوێك دەگاتە 3m ، ئاستی داکشانی دەگاتە 0 هەڵکشانەکە 6.1 کاتژمێرە بەردەوام دەبێت تا دەکشێتەوە و 6.1 کاتژمێری تری دەوێت تا دەگەڕێتەوە. دەتوانرێت بەرزی هەڵکشانەکە h بەپێی کات t بنوێنرێت.

أ فراوانی ئەو نەخشەیە و کاتی خولی چەندە؟ بەرزترین بەها و نزمترین بەها چەندە؟

ب وایدانێ هەڵکشانەکە بەرزترین بەهای دەبێت کاتێك $t=0$ بەهای $h(0)$ چەندە؟ و بەهای $h(6.1)$ چەندە؟

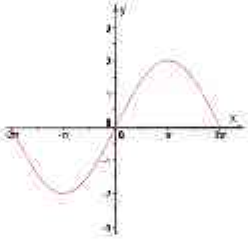
ج نەخشەی h لەسەر شێوەی $h(t)=a\cos bt+k$ بنووسە؟

44 **بیری ڕەخنەگر** ئەگەر فراوانی نەخشەی Sin و کاتی خولییەکەیت زانی، ئایا دەتوانیت گەورەترین و بچووکترین بەهای بدۆزیتەوە، ئەو بەهایانەی x دیاریبکەیت بۆ ئەنجامدانی ئەو کارە پێویستە؟ چۆن بەکاریان دەهێنێت؟

45 **بنووسە** چی بەسەر خولی دا دێت لە نەخشەی $f(x)=\sin bx$ کاتێك $b>1$؟ وەکاتێك $b<1$؟

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

46 کام نەخشەی سێگۆشەیی بۆ وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر گونجاوە؟



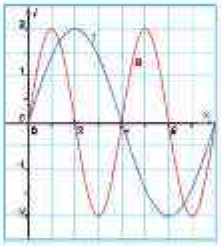
(أ) $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ (ب) $f(x)=2\sin x$

(ج) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ (د) $f(x)=2\sin\frac{1}{2}x$

47 فراوانی نەخشەی $f(x)=-4\cos 3\pi x$ کامەیە؟

(أ) -4 (ب) 3 (ج) 4 (د) 3π

48 وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر بۆ دیاریکردنی پەیوەندیی f و g بەکاربێنە



(أ) فراوانی f دوو ئەوەندەی فراوانی g ـە.

(ب) لەرلەری f دووئەوەندەی لەرلەری g ـە.

(ج) کاتی خولی f دوئەوەندەی کاتی خولی g ـە

(د) خولی f دووئەوەندەی خولی g ـە.

49 **کورتە وەڵام** چەماوەی نەخشەی $f(x)=\sin x$ بۆ وێنەکێشانی $g(x)=-4\sin 2(x-\pi)$ لەماوەی $[0, 2\pi]$ دا بەکاربێنە و جێگۆڕکێیان دیاربیکە

بەرەنگاری و فراوانکردن

هەردوو نەخشەی $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta$ و $g(\theta)=2\cos\theta$ بەکاربێنە کاتێك $0^\circ\leq\theta\leq360^\circ$

50 وێنەی چەماوەی هەردوو نەخشەکە لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە.

51 بەهای نزیکەیی پۆوتانی هەر خاڵێك لە خاڵەکانی یەکتربڕینی نێوان دوو چەماوەکە بدۆزەوە.

52 کەی لاسەنگەی $f(\theta)>g(\theta)$ ڕاست دەبێت؟

پێداچوونەوەی لولپێچی

هەرکۆمەڵە ژمارەیەك بە شێوەی ماوە (فترە) بنووسە (پۆلەکانی پێشوو)

53 $-7<x\leq5$ **54** $x\leq-2$ یان $1\leq x\leq13$ **55** $0\leq x\leq9$

56 **گوڵ** لاڤین 100 000 دیناری بۆ کڕینی چەند چەپکە گوڵێك لە گوڵەباخ و مێلاقە (زنبق) و مێخەکی پێیە. نرخی چەپکێك گوڵەباخ 6000 دینار و چەپکێك مێلاقە 2000 دینار و چەپکێك میخەك 4000 دینارە (وانەی 2)

گوڵە باخ	6		3	7
مێلاقە		8	5	
میخەك	11	15		13

(أ) هاوکێشەیەکی هێڵی بەسێ نەزانراو بنووسە پارەکە بنوێنێت.

(ب) خشتەی بەرامبەر تەواوبکە.

پێدراوەکان بۆ شیکارکردنی سێگۆشەی ABC بەکاربێنە (وانەی 7-1)

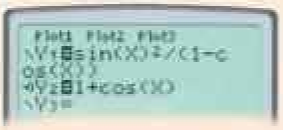
57 $b=2$ ، $c=11$ ، $m\hat{A}=165^\circ$ **58** $a=9.2$ ، $b=11.4$ ، $c=20.2$

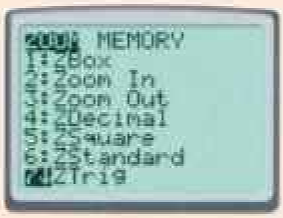
لاپەڕەی
تەکنولۆژیا

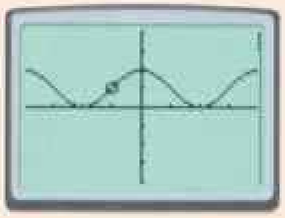
ڕوونکردنەوەیی هاو ئەنجامە سێگۆشەییەکان

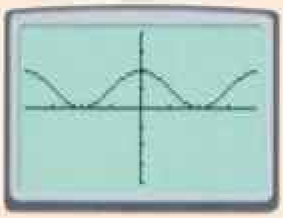
دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ بەراوردکدنی وێنە ڕوونکردنەوەییەکان و دارشتنی دەستەواژەکان لە سەر هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بە کاربێنیت.

چالاکی









دیاریبکە ئایا هاوکێشەی $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=1+\cos x$ هاوئەنجامێکی سێگۆشەییە یان نا.

ئەگەر هاوکێشەکە هاوئەنجام بێت ئەوا هیچ جیاوازییەك نییە لە نێوان ئەو چەماوەیەی ڕێساکەی لای یەکەمەوە و ئەو چەماوەیەی ڕێسایەکەی لای دووەمە.

1 $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ بەرامبەر **Y1** و $1+\cos x$ بەرامبەر **Y2** تۆماربکە. ڕێگای 0 بۆ کێشانی وێنەی دووەم هەڵبژێرە لەگەڵ هێڵێك کە پێیدا تێپەڕێت. ئەمە وادەکات بتوانیت بە دوای وێنە ڕوونکردنەوەییەکەدا بڕۆیت.

2 شاشەی وێنەکە دیاریبکە بەبەکارهێنانی ZTrig :7 لە هەڵبژاردنەکانی zoom .

3 چاودێری شاشەی بژمێرەکە بکە لەو کاتەی وێنەی چەماوەی دووەم دەکێشێت. بازنەیەك دەبینیت کە لەسەر چەماوەی یەکەم دەجوڵێت ئەمەنیشانەی ئەوەیە چەماوەی ئەخشی یەکەم لە سەر چەماوەی ئەخشەی دووەم دەکێشێت.

4 کاتێك بازنەکە لە وێنە کێشانی چەماوەی دووەم دەبێتەوە دڵنیادەبێت لەوەی کە هەردوو چەماوەکە جووتن. ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت هاوکێشەکە هاوئەنجامە. دواتر دەتوانیت بە جەبری ساغکردنەوەی بۆ بکەیت.

هەوڵبدە

1 **دەستەواژەیەك بنووسە** دیاریبکە ئایا هاوکێشەی $\cos x = \tan x \sin x - \frac{1}{\cos x}$ هاوئەنجامێکی سێگۆشەییە یان نا.

2 جەبریانە ڕاستی یان ناڕاستی وەڵامەکەت لە پرسیاری پێشوودا بسەلمێنە.

3 **دەستەواژەیەك بنووسە** دیاریبکە ئایا هاوکێشەی $\tan x = \frac{1+\tan x}{1+\frac{1}{\tan x}}$ هاوئەنجامێکی سێگۆشەییە یان نا.

4 جەبریانە ڕاستی یان نا ڕاستی وەڵامەکەت لە پرسیاری پێشوودا بسەلمێنە.

3–7 هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان Fundamental Trigonometric Identities

ئامانجەکان

- بەکارهێنانی هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بۆ سادەکردنی بڕە سێگۆشەییەکان و نووسینەوەیان جارێکی تر و دڵنیابوون لە ڕاستی هاوئەنجامەکان.

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

کارگەی دروستکردنی پێداویستییەکانی خلیسکێنە هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ دیاریکردنی جۆری ئەو مۆمەی لە تەختەی خلیسکێنە دەدەن بەکاردێنن (نموونەی 3)

دەتوانیت هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان لە سادەکردنی بڕە سێگۆشەییەکان بەکاربێنیت. لە بیرت بێت هاوئەنجام لە بیرکاریدا پەیوەندییەکە، ڕاست دەبێت بۆ هەموو ئەو بەهایانەی گۆڕاوەکانی پەیوەندییەکە وەریدەگرن. ئەم هاوئەنجامانەی خوارەوە بەبەکارهێنانی سەلمێنراوی فیساغۆرس پوختەکراوە.

سەلمێنراوی فیساغۆرس	$x^2+y^2=r^2$
هەردوو لا دابەشی r^2 بکە.	$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$
$\cos\theta$ لە جیاتی $\frac{x}{r}$ و $\sin\theta$ لە جیاتی $\frac{y}{r}$ دابنێ.	$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

فێربە

هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان		
هاوئەنجامی *tan*	هاوئەنجامی فیساغۆرسییەکان	دژە هاوئەنجامە
$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ $1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

بۆ ئەوەی بیسەلمێنیت هاوکێشەیەک هاو ئەنجامە، یەکێک لە لایەکانی چەند جارێک بگۆڕە، تاوەک لایەکەی تری لێدێت. لە هەنگاوەکاندا هاوئەنجامە بنەڕەتییەکان بەکاربێنە.

نموونە 1 سەلماندنی هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکە بسەلمێنە

أ $\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$

ئەو لایە هەڵبژێرە کە دەتەوێت بیگۆڕیت.	$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$
هاوئەنجامی *tan* بەکاربێنە.	$=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$
سادە بکە	$=\frac{1}{\cos\theta}$

ب $\frac{1}{\sin(-\theta)}=-\frac{1}{\sin\theta}$

ئەو لایە هەڵبژێرە کە دەتەوێت بیگۆڕیت	$\frac{1}{\sin(-\theta)}=$
دژە هاوئەنجامەکە بەکاربێنە	$\frac{1}{-\sin\theta}$
سادە بکە	$-\frac{1}{\sin\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}$

ڕۆشنایی

دەتوانیت هەر لایەک بگۆڕیت، بەڵام وا باشترە کە لا ئاڵۆزەکە بگۆڕیت بۆ ئەوەی لای دووەمت دەستبکەوێت.

خاڵی چاودێری

1. هاوتەنجامە سێگۆشەییەکە بسەلمێنە.

أ $\sin\theta \frac{1}{\tan\theta} = \cos\theta$

ب $1 - \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta}$

دەتوانیت هاوتەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ سادەکردنی بڕە سێگۆشەییەکان بەکاربێنیت.

نموونە 2 بەبەکارهێنانی هاوتەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ سادەکردنی بڕە سیگۆشەییکان

بڕە سێگۆشەییەکە تەنها بە هۆی $\cos\theta$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

$\frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$ هاوتەنجامی فیساغۆرسی

$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}$ جیاوازی نێوان دوو دووجا

$1+\cos\theta$ سادەبکە

ب $\frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta\sin\theta$

$\frac{1}{\cos\theta} - \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\sin\theta$ لەجیاتی دابنێ

$\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ کەرتەکان لەیەك دەربکە.

$\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$ هاوتەنجامی فیساغۆرس بەکاربێنە

$\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$ سادەبکە

$\cos\theta$

ڕۆشنایی

ئەگەر ئەتوانی بڕە سێگۆشەییەکە سادە بکەیت. هەولبدە ڕێژە سێگۆشەییەکە بگۆڕی بۆ Sin یان Cos .

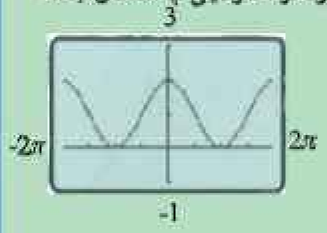
خاڵی چاودێری

2. بڕە سێگۆشەییەکە تەنها بەپێی $\sin\theta$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

ب $\frac{1}{\tan^2\theta}$

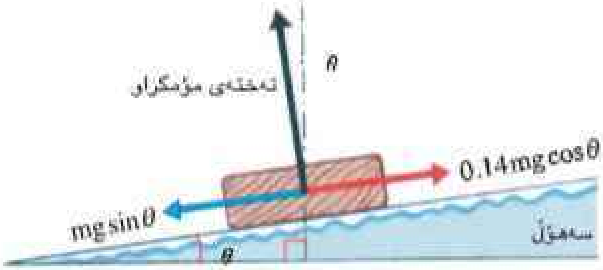
لە خوێندکارەوە بۆ خوێندکار هاوتابوونی بڕەکە بە ڕوونکردنەوەیی پاسادان بکە.



حەزدەکەم بژمێری ڕوونکردنەوەیی بۆ پاسادان کردنی هاوتەنجام بوونی دووبڕە بەکاربێنم بۆ ئەوەی لە هاوتەنجامبوونی ئەم دووبڕە $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ و $1+\cos\theta$ دڵنیابم . بژمێر بەکاربێنە بۆ دروستکردنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەردوو نەخشەی $y = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ و $y = 1+\cos\theta$ لەسەر هەمان شاشە لەبەرئەوەی هەردوو چەماوەکە لەسەر یەکتری جووتن مانای هاوتابوونی هەردووکیانم دەستکەوت.

نموونە 3 جیبەجێکردنی پیشەسازی

یەکێك لە و کارگانەی پێداویستییەکانی خلیسکێنە دروستدەکات. لێکخشاندنی جۆرێکی نوێ لە مۆم کە تەختەکەی پێ مۆم دەکرێت تاقیدەکاتەوە لە ڕێگای مۆمکردنی تەختەیەکی لاکێشە ئەریبی و دانانی لەسەر ڕوویەکی لێژی سەهۆڵ ئاستی ڕووی لایکی سەهۆڵەکە بە هێواشی بەرز دەکرێتەوە تا پارچە تەختەکە دەست بە خلیسکانی دەکات.



کاتێک تەختەکە دەست بە خلیسکان دەکات. پێکنەری بارستاییەکەی تەریب بەڕووی سەهۆڵەکە $mg \sin\theta$ یەکسان دەبێ بە بەرگری خلیسکاندنەکە $\mu mg\cos\theta$ کە لە لێکخشاندنەکە پەیدا دەبێت. کاتێک μ هاوکۆلکەی لێکخشاندن بێت. گۆشەی لێکخشاندن θ دیاریبکە، واتە ئەو گۆشەیەی ئاستی ڕووی سەهۆڵەکە لەگەڵ ئاسۆدا دروستی دەکات، لەسەرەتای خلیسکاندندا، ئەگەر بزانیت $\mu = 0.14$.

$mg \sin\theta = \mu mg\cos\theta$	هەردوو لا دابەشی mg بکە
$\sin\theta = \mu\cos\theta$	لەجیاتی دابنێ
$\sin\theta = 0.14\cos\theta$	هەردوو لا دابەشی $\cos\theta$ بکە.
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0.14$	هاوتەنجامی tan .
$\tan\theta = 0.14$	$\tan^{-1}$ بەکاربێنە
$\theta \approx 8°$	

پارچە تەختەکە دەست بە خلیسکان دەکات، کاتێک پێوانەی گۆشەی θ دەبێتە 8 پلە بە نزیکەیی.

خوێندنەوە

پیتی یۆنانی μ بە میو بخوێنەرەوە

خاڵی چاودێری

3. هاوکێشەی $mg\sin\theta = \mu mg\cos\theta$ بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی گۆشەی خلیسکان، کاتێک هاوکۆلکەی لێکخشاندن $\mu = 0.4$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. باسبکە چۆن دەیسەلمێنیت هاوکێشەیەک هاوتەنجامە
2. ڕوونیبکەوە کام هاوتەنجام بۆ سەلماندنی $(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) = \sin^2\theta$ بەکاردێت.
3. ڕێکخەر بە خشتەکە دروستبکەوە و بە نووسینی هاوتەنجامە فیساغۆرسییەکان تەواوی بکە.

فێربە

3-7 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

نموونە برۆانە 1

هاوتەنجامە سێگۆشەییەکە بسەلمێنە

1 $\sin\theta \frac{1}{\cos\theta} = \tan\theta$ **2** $\frac{1}{\tan(-\theta)} = -\frac{1}{\tan\theta}$ **3** $\cos^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) = \sin^2\theta$

نموونە برۆانە 2

هەر بڕێک بە پێی $\cos\theta$ بە سادەترین شێوە بنووسە

4 $\frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$ **5** $\left(1 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right)(1-\sin^2\theta)$ **6** $\sin^2\theta + \cos^2\theta + \tan^2\theta$

7 **فیزیا** هاوکێشەی $mg\sin\theta=\mu mg\cos\theta$ بۆ دۆزینەوەی گۆشەی خلیسکاندنی لاکێشە تەریبێکی شووشە لە سەر مێزێکی شووشە دانرابێ. کاتێك ڕووە شووشەکە لار دەکرێتەوە، لاکێشە تەریبەکە دەست بە خزین دەکات، ئەگەر بزانیت هاوکۆلکەی لێکخشاندن $0.94=\mu$ بێت.

بڕوانە نموونە 3

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

هاوەنجامە سێگۆشەییەکە بسەلمێنە.

8 $\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$

9 $\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}=1-\frac{1}{\tan\theta}$

10 $\tan\theta\sin\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$

11 $\frac{1}{\cos^2\theta}(1-\cos^2\theta)=\tan^2\theta$

بۆشیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
11–8	1
15–12	2
16	3

هەر بڕەیەك بە پێی $\sin\theta$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

12 $\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}$

13 $\tan^2\theta$

14 $\cos\theta\frac{1}{\tan\theta}+\sin\theta$

15 $\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}{1+\tan^2\theta}$

16 **فیزیا** هاوکێشەی $mg\sin\theta=\mu mg\cos\theta$ بۆ دۆزینەوەی بەرزترین لاری گونجاو بۆ ڕێگایەك بەکاربینە کە تایەکانی ئۆتۆمبێلی لەسەر بوەستێت بێ ئەوەی بخلیسکێت.

فرە هەنگاو هەر بڕەیەکی سێگۆشەیی بە پێی یەك ئەخشەی سێگۆشەیی بنووسە

17 $\frac{1}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

18 $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tan\theta$

19 $\cos\theta+\sin\theta\tan\theta$

20 $\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}-\cos^2\theta$

21 $\cos^2\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

22 $\cos\theta(\tan^2\theta+1)$

23 $\sin\theta\cos\theta\tan\theta$

24 $1-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta}$

25 $\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$

26 $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

27 $\tan\theta\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)$

28 $\cos\theta\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)$

29 $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

30 $\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\cos^2\theta\right)$

31 $\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)$

لە ڕاستی ئەم هاوەنجامانە بگەڕێ.

32 $\frac{\cos\theta-1}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos^2\theta}$

33 $\sin^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)=\cos^2\theta$

34 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

35 $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$

36 $\frac{1-\cos^2\theta}{\tan\theta}=\sin\theta\cos\theta$

37 $\frac{1}{\sin^2\theta(1+\tan^2\theta)}=\frac{1}{\tan^2\theta}$

هاوەنجامە بنەڕەتییەکە بسەلمێنە بە بێ بەکارهێنانی هیچ هاوەنجامێکی تری بنەڕەتی (ڕێژە سێگۆشەییەکان لەگەڵ x ، y ، r) بەکاربێنە.

38 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

39 $\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

40 $1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$

41 $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

42 دەتوانرێت نەخشەی $y(t)=5\sin t$ بۆ هەژمارکردنی کشانی سپرینگێك لە ژێر کاریگەری تەنێکدا کە پێوەی هەڵواسرابێت بە پێی کات t بە چرکە. و نەخشەی $z(t)=2.6\cos t$ بۆ هەژمارکردنی کشانی سپرینگێکی تر لە ژێر کاریگەری تەنێکدا کە پێوەی هەڵواسرابێت.

أ دووتەن بەهەردوو سپرینگەکەوە لە هەمان کاتدا $(t=0)$ هەڵواسراون. دوای چەند چرکە کشانی دوو سپرینگەکە یەکسان دەبن؟

ب کشان لەو ساتەدا چەند دەبێت؟

ج ئەو ساتانەی کە کشانی دوو سپرینگەکە تێدا یەکسان دەبن کامانەن؟

بژمێری ڕوونکردنەوەیی بژمێری ڕوونکردنەوەیی بەکاربێنە بۆ ئەوەی بڕیاربدەی هەریەك لەمانە هاوتەنجامن یان نا.

43 $\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)=\tan^2\theta$

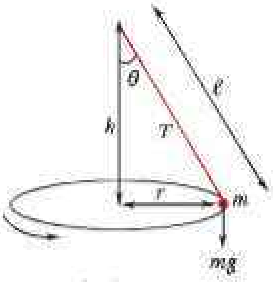
44 $\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\sin\theta$

45 $\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}+\cos\theta\frac{1}{\sin^2\theta}\right)=\frac{1}{\sin^2\theta}$

46 $\frac{1}{\tan\theta}(\cos\theta+\sin\theta\tan\theta)=\frac{1}{\sin\theta}$

47 $\cos\theta=0.99\cos\theta$

48 $\sin\theta\cos\theta=\tan\theta-\tan\theta\sin^2\theta$



49 **فیزیا** بەندۆڵێك لە جوولانیدا شێوە قوچەکێك دروست دەکات کاتێك لەسەر بازنەیەك بجولێت، لە جیاتی ئەوەی لە لایەك بۆلای بەرامبەری بچێت. وێنەی جولانەکەی قوچەکێکە کە بنکەکەی بازنەی جولانەوەکەیە. دەتوانیت یاسای $r=\frac{g\tan\theta}{\omega^2}$ بۆ هەژمارکردنی نیوەتیرەی قوچەکەکە r بەکاربێت، کاتێك هێمای هێزی ڕاکێشان g بێ و ω گۆشە خێرایی بەندۆلەکە بێت.

أ ڕێسای $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell\cos\theta}}$ و هاوتەنجامە سێگۆشەییەکان بەکاربێنە بۆ نووسینەوەی ڕێسای هەژمارکردنی نیوە تیرە.

ب ڕێسایەك بۆ ℓ بە پێی ω و g و یەك نەخشەی سێگۆشەی بنووسە.

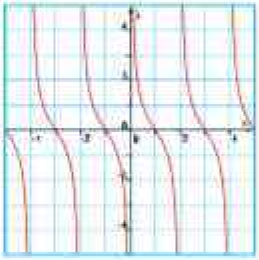
بیری ڕەخنەگر بەنەخشەیەك دەووترێت نەخشەیێکی تاك ئەگەر $f(-x)=-f(x)$ و نەخشەیێکی جووت کاتێك $f(-x)=+f(x)$

50 هەر سێ نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکە لە نێوان تاك و جووتدا پۆلێنبکە.

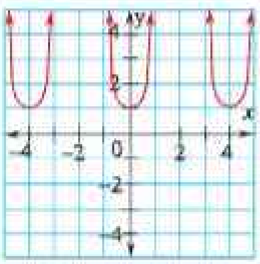
51 چەماوەی نەخشەی تاك و نەخشەی جووت بە چی لێکجیادەکرێنەوە، چی لە چەماوەی نەخشەکانی تر جیایان دەکاتەوە.

دیاریبکە هەریەك لەم نەخشانە تاکن یان جووتن

52



53



54 **بیری ڕەخنەگرانە** چەند شێوە نووسینی تری هاوتا دەتوانیت بۆ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ بەکاربێنیت بەلایەنی کەمەوە سێیانیان بنووسە.

55 **بنووسە** $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ و $\cos(-\theta)=\cos\theta$ بەکاربێنە بۆ ئەوەی $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ دەستبکەوێت.

56 کام بڕ هاوتای $\tan\theta$ دەبێت؟

أ $\sin\theta$ ب $\cos\theta$ ج $\frac{1}{\cos\theta}$ د $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta$

57 کام بڕ هاوتای سێ بڕەکەی تر نابێت؟

أ $\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}$ ب $\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{1}{\tan\theta}$ ج $\frac{\tan\theta}{\sin^2\theta}$ د $\cos^2\theta\tan\theta$

58 کام دەستەواژە سێگۆشەییە هاوتەنجام نییە؟

أ $1+\cos^2\theta=\sin^2\theta$ ب $\frac{1}{\sin^2\theta}-1=\frac{1}{\tan^2\theta}$ ج $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ د $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

59 کام بڕ هاوتای $1-\frac{1}{\cos^2\theta}$ دەبێت؟

أ $\tan^2\theta$ ب $-\tan^2\theta$ ج $\frac{1}{\tan^2\theta}$ د $-\frac{1}{\tan^2\theta}$

60 **کورتە وەڵام** پاسادان بکە لە ڕاستی $\sin\theta+\cos\theta\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$ بۆ هەر هەنگاوێك بەڵگە بێنەوە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

بڕەکە بە شێوەی کەرتێکی تاقانە بنووسە.

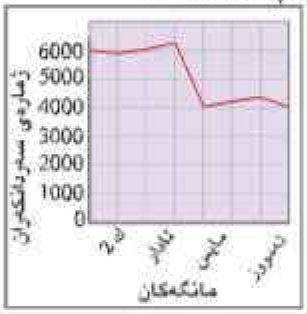
61 $\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$ **62** $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ **63** $1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ **64** $\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

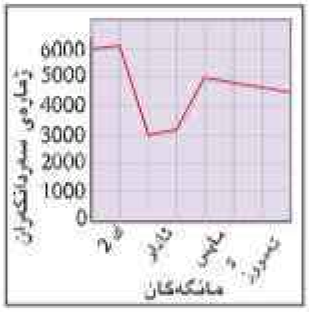
بە سادەترین شێوە بنووسە

65 $\frac{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$ **66** $\frac{\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}}$ **67** $\frac{\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$ **68** $\frac{1-\frac{1}{\sin\theta}}{1-\frac{1}{\sin^2\theta}}$

پێداچوونەوەی لولپێچی

69 **گەشت و گوزار** یەکێك لە ئامارکاران پێدراوەکانی لەسەر ژمارەی ئەوکەسانەی لە ماوەی 6 مانگدا سەردانی دوورگەکەیان کردووە تۆمارکرد. ئەو وێنە ڕوونکردنەوەییەی هەر بارێك دەردەبڕێت دیاریبکە.

①


②


أ بارى پێشبینی هەڵکردنی گەردەلوول دەکات لە دوو مانگی ئادار و نیساندا.

ب بەرزبوونەوەی پلەی گەرما لە وەرزی هاویندا بووە هۆی پەشیمانبوونەوەی زۆربەی گەشتیاران.

هەر ئەگەرێك بدۆزەوە (پۆلەکانی پێشو)

70 دەرکەوتنی ژمارە 4 لەکاتی هەڵدانی زارێکەوە، دەرکەوتنی ڕووی 4 لە کاتی هەڵدانی بەردەزارێکی تر.

71 دەرکەوتنی دوو ڕووی شێر لە هەڵدانی پارچەپارەیەکی کانزایی دووجار.

لە هەر نەخشەیەکی سێگۆشەییدا 4 بەها بۆ گۆڕاوی θ بدۆزەوە. کەوا لە نەخشەکە بکات پێناسە نەکراوبێت.

72 $y=-\tan\theta$ **73** $y=\frac{1}{\cos(0.5\theta)}$ **74** $y=-\frac{1}{\sin\theta}$

بەشی 7

تاقیکردنەوەی نیوەی بەش

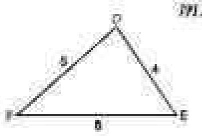
7-1 پاسای Sin و Cos

بێوانەی هەریەکێک لەمانە بدۆزەوە. درێژییەکان بۆ نزیکترین دەیەک و بێوانەی گۆشەکان بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە

1 $m\hat{A}$

2 GH

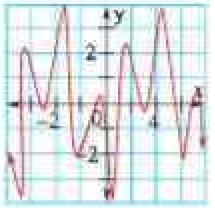
3 $m\hat{F}$



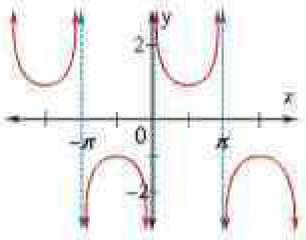
7-2 نەخشە سێگۆشەییەکان

دیاریبکە ئایا نەخشەکە خوولییە یان نا. ئەگەر وایە کاتی خوولی بدۆزەوە

4



5



وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە. فراوانی و کاتی خوولی بدۆزەوە.

6 $f(x)=\sin 4x$ **7** $g(x)=-3\sin x$ **8** $h(x)=0.25\sin \pi x$

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە. خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی ڕوو بدۆزەوە.

9 $f(x)=\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$ **10** $g(x)=\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ **11** $f(x)=\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)$

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ئەم نەخشانە. خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و دەرکەنارەکان بدۆزەوە.

12 $f(x)=\frac{1}{2}\tan 4x$ **13** $f(x)=-2\tan\frac{1}{2}x$ **14** $f(x)=\tan\frac{1}{2}\pi x$

7-3 هاونەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان

ئەم هاونەنجامە سێگۆشەییانە بسەلمێنە

15 $\sin^2\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}=\tan\theta$

16 $\sin(-\theta)\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\tan\theta}=-1$

17 $\dfrac{\frac{1}{\tan^2\theta}-1}{\frac{1}{\tan^2\theta}+1}=1-2\sin^2\theta$

بڕەکە بەبەکارهێنانی یەک ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە.

18 $\frac{1}{\tan\theta}\frac{1}{\cos\theta}$ **19** $\frac{1}{\cos(-\theta)}$ **20** $\dfrac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}}$

4–7

هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی
Sum and Difference Identities

ئامانجەکان

- بەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی بۆ هەژمارکردنی بەهای برە سێگۆشەییەکان
- ڕێزکراوەی خولانەوە و هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی بەکاردێنێت بۆ ئەنجامدانی خولانەوە

زاراوەکان
Vocabulary

ڕێزکراوەی خولانەوە
Rotation Matrix

کێ ئەمە بەکاردەهێنێت؟

دەتوانیت هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی لەگەڵ لێکدانی ڕێزکراوەکان بۆ دۆزینەوەی خوولانەوەی شێوەیەک بەکاربێنیت (نموونە 4).

لێکدانی ڕێزکراوەکان و هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی ئامرازێکن بۆ دیارکردنی پۆوتانی وێنەی خاڵەکان بە خوولانەوەیان بە دەوری خاڵی بنەڕەت لە ڕووتەختی پۆوتاندا.

هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی	
هاوئەنجامەکانی سەرجەم	**هاوئەنجامەکانی جیاوازی**
$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$	$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$
$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$
$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$	$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

نموونە 1

هەژمارکردنی بەهای بڕێکی سێگۆشەیی بەبەکارهێنانی هاوەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی.

بەهای تەواوی هەر برێک بدۆزەوە.

أ $\sin 75^\circ$

$\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)$ — $75^\circ=30^\circ+45^\circ$ بەشێوەی بنووسە. لەبەر ئەوەی ڕێژەی سێگۆشەییەکان هەردوو گۆشەی 45° و 30° زانراون هاوئەنجامی sin سەرجەمی $\sin(A+B)$ بەکاربهێنە

$=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ — لە جیاتی دابنێ.

$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ — سادە بکە.

ب $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$ — بنووسە $-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$

$=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$ — هاوئەنجامی cos ی جیاوازی $\cos(A-B)$ بەکاربهێنە.

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ — لە جیاتی دابنێ.

$=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ — سادەکە.

ڕۆشنایی

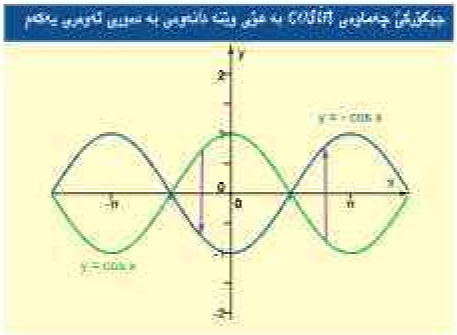
زۆر ڕێگا هەیە بۆ نووسینی $-\frac{\pi}{12}$: بۆ نموونە $\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$ یان $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$

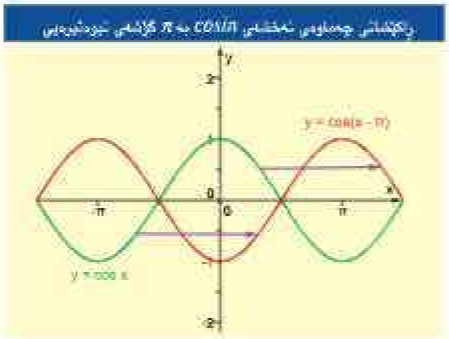
خۆت جاوبدێری

1. بەهای تەواوی هەر برێک بدۆزەوە.

أ $\tan 150^\circ$ **ب** $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$

راکێشانی چەماوەی نەخشەی Cosin بە π گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ لای ڕاست هاوتای وێنەداتەوەیە بە دەوری تەوەری یەکەم





ئەم کارە لە نموونەی 2 دا بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی جیاوازی دەچەسپێت

نموونە 2 سەلماندنی هاوئەنجامی سێگۆشەیی بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی جیاوازی و سەرجەم

بسەلمێنە $\cos(x-\pi) = -\cos x$

$\cos(x-\pi) =$ لای چەپ هەڵبژێرە بۆ گۆڕینی

$\cos x\cos\pi + \sin x\sin\pi =$ هاوئەنجامی cos جیاوازی $\cos(A-B)$ بەکاربێنە

$\cos x(-1) + \sin x(0) =$ لە جیاتی دابنێ

$-\cos x = -\cos x$ سادە بکە

خاڵی چاودێری 2. بسەلمێنە $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

نموونە 3 بەکارهێنانی سەلمێنراوی فیساغۆرس لەگەڵ هاوئەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی

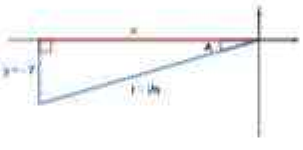
بەهای بڕەی $\tan(A+B)$ بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $\sin A = -\frac{7}{25}$ و $180^\circ < A < 270^\circ$ و $\cos B = \frac{8}{17}$ و $0^\circ < B < 90^\circ$.

هەنگاوی 1 $\tan A$ و $\tan B$ بدۆزەوە.

گۆشەی ڕاگراو پێناسەی ڕێژە سێگۆشەییەکانی $\sin A = \frac{y}{r}$ و $\cos B = \frac{x}{r}$ بەکاربێنە. سێگۆشەیەکی گۆشە وەستاو بۆ هەر گۆشەیەک لە چارەکی گونجاو بکێشە بە x و y و r ناوینێ

لە چارەکی سێیەم

$\sin A = -\frac{7}{25}$ $180^\circ < A < 270^\circ$



$x^2 + (-7)^2 = 25^2$

$x = -\sqrt{625-49} = -24$

کەواتە $\tan A = \frac{y}{x} = \frac{7}{24}$

لە چارەکی یەکەم $0^\circ < B < 90^\circ$

$\cos B = \frac{8}{17}$

$8^2 + y^2 = 17^2$

$y = \sqrt{289-64} = 15$

کەواتە $\tan B = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}$

لە بیرت بێت

گۆشەی ڕاگر بۆ گۆشەی θ. بریتییە لەو گۆشە تیژە موجەبە کە کۆتا لای گۆشەکە θ لەگەڵ تەوەری یەکەم دروست دەکات.

هەنگاوی 2 هاوتەنجامی سەرجەم بەکاربێنە

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$ هاوتەنجامی *tangent*ی سەرجەمی

$$= \frac{\frac{7}{24} + \frac{15}{8}}{1 - \frac{7}{24}\cdot\frac{15}{8}}$$ لەجیاتی دانێ

$$\tan(A+B) = \frac{\frac{52}{24}}{1 - \frac{35}{64}} = \frac{416}{87}$$ سادەبکە

خاڵی چاودێری

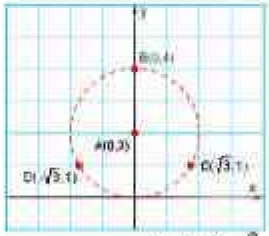
3. بەهای بڕەی $\sin(A-B)$ بدۆزەوە ئەگەر زانیت $\sin A = \frac{4}{5}$ و $90^\circ < A < 180^\circ$
$\cos B = \frac{3}{5}$ و $0^\circ < B < 90^\circ$

بۆ ئەوەی وێنەی خاڵی $P(x, y)$ بە خوولانەوەی گۆشەی θ بەدەوری خاڵی بنەڕەت دا دەستبکەوێت، **ڕێزکراوەی خولانەوە** بەکاربێنە

بەکارهێنانی ڕیزکراوی خولانەوە
خولانەوەیەک بە دەوری خاڵی بنەڕەت بەگۆشەی θ، هەر خاڵێك وەك $P(x, y)$ جێگۆرکێ دەکات بۆ خاڵی $P'(x', y')$ بەپێی ئەم هاوکێشەیە: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

فێربە

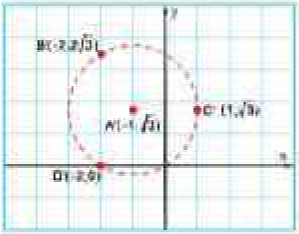
نموونە 4 بەکارهێنانی ڕێزکراوەی خولانەوە



پۆوتانەکانی وێنەی ئەو خاڵانە بدۆزەوە کە لە وێنەی بەرامبەرت دیاریکراون بە خولانەوەی بە گۆشەی 30° بە دەوری خاڵی بنەڕەت

هەنگاوی 1 ڕیزکراوەی خولانەوە R_{30} و ڕێزکراوەی خاڵەکان S بنووسە.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_{30} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$



هەنگاوی 2 هەردوو ڕێزکراوەکە لێکبدە

$$R_{30} \times S = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

هەنگاوی 3 پۆوتانی خاڵەکانی- وێنەکان بەم شێوەیەدەبن $A'(-1, \sqrt{3})$ $B'(-2, 2\sqrt{3})$
$C'(1, \sqrt{3})$ $D'(-2, 0)$

خاڵی چاودێری

4. پۆوتانی خاڵەکانی- وێنەکان بدۆزەوە ئەگەر گۆشەی خولانەوە 60° بێت.

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. باسی 3 ڕێگای جیاواز بکە، کە بتوانیت تیایاندا هاوتەنجامەکانی جیاوازی بەکاربێنی بۆ دۆزینەوەی $\sin 15^\circ$.
2. ڕوونیبکەوە خاڵەکانی لێکچوون و لێکنەچوون لە نێوان هاوتەنجامەکانی sin و cos، چۆن نیشانەی ڕادەکان لە هاوتەنجامەکاندا پەیوەندی بە دیاریکردنی هاوتەنجامی سەرجەم یان هاوتەنجامی جیاوازییەوە هەیە.
3. ڕێکخەر بە هێڵکارییەکە بنووسە پاشان تەواوی بکە. بۆ هەر تەختەیەك هاوتەنجامەکانی سەرجەم و جیاوازی لەگەڵ نموونەیەك بنووسە.

4-7 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

1 پێناسەی خولانەوە پێویستی بە دیاریکردنی چەقەکەی هەیە. بریتییە لەو خاڵەی کە خولانەوەکە بە دەوریدا دەبێت و گۆشەکەی و ئاڕاستەکەی. لە کاتی بەکارهێنانی ڕیزکراوەی خولانەوە، چەقی خولانەوەی پێویست چییە؟ ئاڕاستەی خولانەوەی پێویست چییە؟

بڕوانە نموونە 1

بەهای بڕەکە بە تەواوی بدۆزەوە.

2 $\cos 105^\circ$ **3** $\sin \frac{11\pi}{12}$ **4** $\tan \frac{\pi}{12}$ **5** $\cos(-75^\circ)$

بڕوانە نموونە 2

هاوتەنجامەکە بسەلمێنە

6 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ **7** $\tan(\pi+x)=\tan x$ **8** $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$

بڕوانە نموونە 3

بەهای بڕەکە بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $\sin A=\frac{-12}{13}$ و $180^\circ<A<270^\circ$ و $\cos B=-\frac{4}{5}$ و $90^\circ<B<180^\circ$

9 $\sin(A+B)$ **10** $\cos(A-B)$ **11** $\tan(A+B)$ **12** $\tan(A-B)$

بڕوانە نموونە 4

13 پۆتانی خاڵی سەرەکانی وێنەی سێگۆشەی ABC بدۆزەوە کاتێك $A(0,2)$، $B(0,-1)$، $C(3,0)$ بێت بە خولانەوەیەك گۆشەکەی 120° و چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

ڕاهێنان و شیکارکردنی پرسیارەکان

بەهای هەر بڕێك بە تەواوی بدۆزەوە.

14 $\sin \frac{7\pi}{12}$ **15** $\tan 165^\circ$ **16** $\sin 195^\circ$ **17** $\cos \frac{11\pi}{12}$

هاوتەنجامەکە بسەلمێنە

18 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$ **19** $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$ **20** $\tan(x-2\pi)=\tan x$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
17-14	1
20-18	2
24-21	3
25	4

بەهای بڕەکە بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $\cos A = -\frac{12}{13}$ و $90^\circ < A < 180^\circ$ و $\sin B = -\frac{4}{5}$ و $270^\circ < B < 360^\circ$

21 $\sin(A+B)$ **22** $\tan(A-B)$ **23** $\cos(A+B)$ **24** $\cos(A-B)$

25 پۆوتانی وێنەی سەرەکانی سێگۆشەی ABC بدۆزەوە کاتێك $A(0, 2)$ ، $B(1, 2)$ ، $C(0, 1)$ بە خولانەوەیەك گۆشەکەی 45° چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە

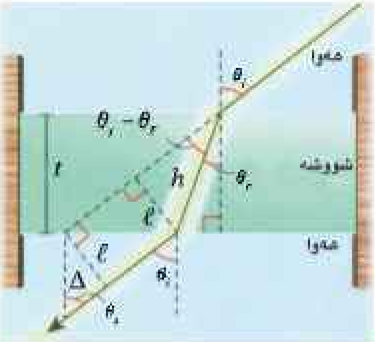
بەهای بڕەکە بە تەواوی بدۆزەوە.

26 $\sin 165^\circ$ **27** $\tan(-105^\circ)$ **28** $\sin(-15^\circ)$ **29** $\cos 195^\circ$ **30** $\cos\frac{19\pi}{12}$

31 $\tan\frac{5\pi}{12}$ **32** $\sin 255^\circ$ **33** $\tan 195^\circ$ **34** $\cos\frac{\pi}{12}$

بەهای θ بدۆزەوە ئەگەر زانیت $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

35 $\cos(\theta - 30^\circ) = \frac{1}{2}$ **36** $\cos(\theta + 20^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **37** $\sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$



38 **فیزیا** ڕووناکی بە گۆشەی θ_i بە شووشەدا تێپەڕ دەبێت، و بەهەمان گۆشە لێوەی دەردەچێت. بەڵام خاڵی دەرچوونی ڕووناکی لە شووشەکەوە بە دورییەکی ئاسۆیی لە خاڵی چوونە ژوورەوەی بە بڕی $\Delta = \left(\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin\theta_i \cos\theta_r}\right)t$ دووره وەك لە وێنەی بەرامبەر دا دیارە.

أ بەبەکارهێنانی هاوتەنجامی سێگۆشەییەکان بڕەی Δ تەنها بە پێی tan بنووسە.

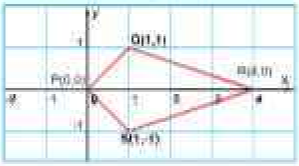
ب وێنەی بەرامبەر بەکاربێنە بۆ نوسینی $\sin(\theta_i - \theta_r)$ بە پێی ℓ و h

فرەهەنگاو بەهای هەریەکە لە $\tan(A+B)$ و $\cos(A+B)$ و $\sin(A-B)$ لە هەرباریێکدا بدۆزەوە

39 $\sin A = -\frac{7}{25}$ و $180^\circ < A < 270^\circ$ ؛ $\cos B = \frac{12}{13}$ و $0^\circ < B < 90^\circ$

40 $\sin A = -\frac{1}{3}$ و $270^\circ < A < 360^\circ$ ؛ $\sin B = \frac{4}{5}$ و $0^\circ < B < 90^\circ$

41 بۆ دروستکردنی دروشمی بەرهەمێکی نوێ چوارلای $PQRS$ چەند جارێك جێگۆڕکێی پێکراوە.



أ ڕێزکراوەی خولانەوەکان بەدەوری خاڵی بنەڕەت بۆ ئەو خولانەوانەی گۆشەکانی یەك لە دوای یەکن 90°، 180°، 270°

ب ڕێزکراوکان بۆ دیاریکردنی پۆوتانی وێنەی چوارلایەکە بە هەموو خولانەوەکانیانەوە بەکاربێنە

ج لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا وێنەی چوارلایەکە بە هەرسێ خولانەوەکانیەوە بکێشە.

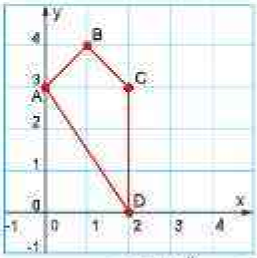
42 **بیری ڕەخنەگر** ئایا دەتوانیت بەهای $\sin\frac{11\pi}{24}$ بە تەواوی بدۆزیەوە بە بەکارهێنانی هاوتەنجامەکانی سەرجەم یان جیاوازی؟ ڕوونیبکەوە.

43 نەخشەی $y(t) = 4.2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right)$ بۆ دۆزینەوەی کشانی سپرینگ لە ژێر کاریگەری تەنێك کە پێوەی هەڵواسراوبێت بە پێی کات بە چرکە بەکاردێت.

أ فراوانی و کاتی خولی نەخشەکە بدۆزەوە.

ب هاوتەنجامی سێگۆشەیی بەکاربێنە بۆ نووسینی ئەو نەخشەیە بە پێی Cos بەتەنها.

ج کشانەکە پاش 8 چرکە چەندە؟



ئەندازە بۆوتانی سەرەکانی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە کاتێك $A(0, 3)$ ، $B(1, 4)$ ، $C(2, 3)$ ، $D(2, 0)$ بە خولانەوەی گۆشەی θ چەقەکەی خاڵی بنەڕەت بێت وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

44 $\theta = 45°$ **45** $\theta = 60°$ **46** $\theta = 120°$ **47** $\theta = -30°$

48 **بنووسە** ئایا $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ ؟ نموونەیەك بهێنەوە بۆ پاڵپشتی وەڵامەکەت.

ئامادەکردن بۆ تاقیکردنەوە

49 کام لەمانەی خوارەوە بەهای بڕەی سێگۆشەیی $\cos 15° \cos 45° - \sin 15° \sin 45°$ ؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ج) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (د) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

50 کام لەمانە بەهای x ـە ، ئەگەر $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{1}{2}$

(أ) $\frac{\pi}{6}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{3}$ (د) $\frac{\pi}{2}$

51 بەهای $\cos(A-B)$ بدۆزەوە ، ئەگەر زانیت $\sin A = \frac{1}{2}$، $0° < A < 90°$ و $\cos B = \frac{3}{5}$ ، $0° < B < 90°$

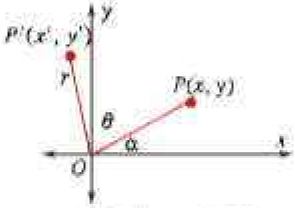
(أ) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ (ج) $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ (د) $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

52 **کورتە وەڵام** بەهای $\sin(-15°)$ بە تەواوی بدۆزەوە، هەنگاوەکانت دیاریکە.

بەرەنگاری و فراوانکردن

53 ساغیبکەوە کە هەڵگەڕاوەی ڕیزکراوەی خولانەوە بە گۆشەی θ بریتییە لە ڕیزکراوەی خولانەوە بە گۆشەی $-\theta$.

54 سەلمێنراوی tan ی سەرجەمی دوو گۆشە $\tan(A+B)$ بسەلمێنە.



55 دیاریبکە چۆن ڕیزکراوەی خولانەوە بەبەکارهێنانی هاوتەنجامەکانی سەرجەمی sin و cos بەستدەکەوێت ییرت بێتەوە لە پۆلی دەیەمدا توانیوتە هەر خاڵێك وەك $P(x, y)$ لەسەر شێوەی $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ بەبەکارهێنانی گۆشەی ڕاگر بنووسە

گۆشەی خولانەوە بە دەوری خاڵی بنەڕەت بدۆزەرەوە کە جێگۆڕکێ بە سێگۆشەی ABC بۆ $A'B'C'$ دەکات کاتێك $A(1, 0)$ ، $B(0, 2)$ ، $C(-1, 0)$ بێت.

56 $A'(0, 1)$ ، $B'(-2, 0)$ ، $C'(0, -1)$

57 $A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، $B'(-\sqrt{2}, 2)$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

58 $A'(-1, 0)$ ، $B'(0, -2)$ ، $C'(1, 0)$

59 $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ، $B'(-1, \sqrt{3})$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

پێداچوونەوەی لولپێچی

دابەش بکە وادابنێ هەموو بڕەکان پێناسەکراوە (پۆلەکانی پێشوو)

60 $\frac{3x^2}{7y^3} + \frac{6x}{21y}$

61 $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8} + \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-4}$

62 $\frac{9x^3y^2}{15xy^4} + \frac{6x^4y}{3x^2y^5}$

بەبەکارهێنانی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بڕەکە بنووسە (وانەی 7-3)

63 $\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{\sin\theta} \times \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\cos\theta}$

64 $\frac{1}{\tan\theta} \frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

65 $\cos\theta \sin\theta \tan\theta$

5–7 هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندەی گۆشە و نیو ئەوەندەی گۆشە

Double-Angle and Half-Angle Identities

ئامانجەکان

- هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندەی گۆشە و نیو ئەوەندەی گۆشە بەکاردێنێت بۆ هەژمارکردنی بەهاکانی برە سێگۆشەییەکان و نووسینەوەیان بە سادەترین شێوە.

بۆچی ئەمە فێردەبین؟

دەتوانیت هاوئەنجامی دوو ئەوەندەی گۆشە بەکاربێنیت بۆ هەژمارکردنی دووری ئاسۆیی هاوێژراوێك وەك تۆپێکی گۆلف (پرسیاری 94)

بۆ بەدەستهێنانی هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە دەتوانیت هاوئەنجامەکانی سەرجەم بەکاربێنیت بۆ نموونە

$$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$$

$$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta$$

دەتوانیت هاوئەنجامەکانی $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ بە هەمان ڕێگای پێشوو بدۆزیتەوە هاوئەنجامی $\cos 2\theta$ سێ شێوەی هەیە. دەتوانین بەبەکارهێنانی هاوئەنجامی سەرجەمی $\cos$ و هاوئەنجامی بنەڕەتی $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ بە دەستیان بێنن. وا باوە برە سێگۆشەییەکان بە پێی θ بنوسرێت.

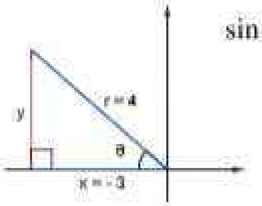
هاوئەنجامەکانی دووئەوەندە		
$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

فێربە

نموونە 1 هەژمارکردنی بەهای برەیەکی سێگۆشەیی بەبەکارهێنانی هاوئەنجامەکانی دوو ئەوەندە

بەهای تەواوی $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدۆزرەوە ئەگەر زانیت $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ $90° < \theta < 180°$

هەنگاوی 1 $\sin\theta$ بدۆزەوە بۆ ئەوەی بە های $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ بدۆزەوە؟



ڕێگای یەکەم گۆشەی ڕاگر بەکاربێنە.

لە چارەکی دووەم $90° < \theta < 180°$ $\cos\theta = -\frac{3}{4}$

سەلمێنراوی فیساغۆرس — $(-3)^2 + y^2 = 4^2$

بەهای هەژمارێکە رەگی موجەب وەربگرە — $y = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ڕێگای دووەم شیکاریکە

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

لەجیاتی دانیێ رەگی دووجا وەربگرە — $\sin\theta = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$

سادەی بکە — $= \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ئاگاداربە!

لە نیشانەی x و y ئەرنەکەویت. گۆشەی θ دەکەوێتە کام چارەکەوە

	cos	sin
یەکەم	+	+
دووەم	−	+
سێیەم	−	−
چوارەم	+	−

هەنگاوی 2 بەهای $\sin 2\theta$ بدۆزەوە

هاوتەنجامی sin2θ دووتەوەندە $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

لەجیاتی دابنێ $\sin 2\theta = 2\frac{\sqrt{7}}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)$

سادەبکە $= -\frac{3\sqrt{7}}{8}$

هەنگاوی 3 بەهای $\cos 2\theta$ بدۆزەوە

هاوتەنجامی cos2θ دووتەوەندە $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 2\theta = 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$

خاڵی جاوەتیری

1. بەهای تەواوی $\tan 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدۆزەوە. ئەگەر زانیت $\cos\theta = \frac{1}{3}$
$270° < \theta < 360°$

دەتوانیت هاوتەنجامەکانی دووتەوەندە بەکاربێنێت بۆ سەلماندنی هاوتەنجامە سێگۆشەییەکان.

نموونە 2 سەلماندنی هاوتەنجامە سێگۆشەییەکان بەبەکارهێنانی هاوتەنجامەکانی دوو تەوەندە.

هاوتەنجامەکە بسەلمێنە

أ $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

لای ڕاست وەربگرە. $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

هاوتەنجامی cos2θ بەکاربێنە $= \frac{1}{2}(1-(1-2\sin^2\theta))$

سادەبکە $= \frac{1}{2}(2\sin^2\theta)$

$\sin^2\theta = \sin^2\theta$

ب $(\cos\theta + \sin\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$

لای چەپ وەربگرە $\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta =$

دووجاتەواوەکە بکەوە $(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (2\cos\theta\sin\theta) =$

کۆبکەوە

هاوتەنجامی sin2θ و هاوتەنجامی فیساغۆرسیەکان بەکاربێنە $1 + \sin 2\theta$

$1 + \sin 2\theta = 1 + \sin 2\theta$

ڕۆشنایی

یەک لا هەڵبژێرە بۆ گۆڕانکاریکردن، نەوەک هەردوو لا بەیەکجار.

خاڵی جاوەتیری

2. هاوتەنجامەکە بسەلمێنە.

أ $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos 2\theta$

ب $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

دەتوانیت هاوتەنجامی $\cos 2\theta$ بەکاربێنی بۆ گەیشتن بە هاوتەنجامەکانی نیوە. بەبەکارهێنانی $\frac{\theta}{2}$ لە جیاتی θ

لە نموونەی 2 سەلماندووتە کە: $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ هەروەها $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ بەکاربێنە بۆ نووسینی $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ ئەگەر لە جیاتی θ ، $\frac{\theta}{2}$ دابنێی هاوتەنجامی نیو تەوەندمان دەستدەکەوێت.

هاوتەنجامەکانی نیوە		
$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

دیاریکردنی نیشانە بەپێی شوێنی کۆتا لا (دوالا) بۆ گۆشەی $\frac{\theta}{2}$ دەبێت لەباری نموونەییدا.

هاوتەنجامەکانی نیوە یارمەتی هەژمارکردنی بەهاکانی هەر بڕێکمان بە تەواوی دەدات.

نموونـــــە 3 هەژمارکردنی بەهاکانی بڕە سێگۆشەییەکان بە بەکارهێنانی هاوتەنجامەکانی نیوە

هاوتەنجامەکانی نیوە بەکاربێنە بۆ هەژمارکردنی هەر بڕێک بەتەواوی.

أ $\cos 165^\circ$

$\cos\frac{330^\circ}{2}$

سالبە چونکە 165° چارەکی دووەم

$-\sqrt{\frac{1+\cos 330^\circ}{2}}$

سادەبکە

$-\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}}$

$-\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\cos 330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

بەبەکارهێنانی بژمێری زانستی پاسادان بکە

ب $\sin\frac{\pi}{8}$

$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

موجەب چونکە $\frac{\pi}{4}$ چارەکی یەکەمەوە

$+\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}$

$\sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}}$

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

بەبەکارهێنانی بژمێری زانستی پاسادان بکە

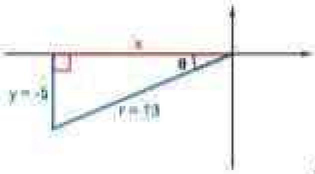
خاڵی چاودێری

3. هاوتەنجامەکانی نیوە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای هەر بڕێک بە تەواوەتی

أ $\tan 75^\circ$ **ب** $\cos\frac{5\pi}{8}$

نموونـــــە 4 بەکارهێنانی سەلمێنراوی فیساغۆرس و هاوتەنجامەکانی نیوە

بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە، ئەگەر زانیت $\sin\theta=-\frac{5}{13}$ $180^\circ<\theta<270^\circ$



هەنگاوی 1 $\cos\theta$ بدۆزەوە بۆ ئەوەی بتوانیت هاوتەنجامەکانی نیوە بەکاربێنی گۆشەی ڕاگر بەکاربێنە.

لە چارەکی سێیەم هەژماربکە $180^\circ<\theta<270^\circ$ $\sin\theta=-\frac{5}{13}$

سەلمێنراوی فیساغۆرس $x^2+(-5)^2=13^2$

بەهای x هەژماربکە $x=-\sqrt{169-25}=-12$

کەواتە $\cos\theta=-\frac{12}{13}$

هەنگاوی 2 بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ هەژماربکە.

$$\sin\frac{\theta}{2}$$

$$+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$ — $\sin\frac{\theta}{2}$ موجەبە لەبەر ئەوەی $90<\theta<135$

$$\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{2}}$$ — لەجیاتی دابنێ

$$\sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$ — سادەبکە

$$\sqrt{\frac{25}{26}}=\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

هەنگاوی 3 بەهای $\tan\frac{\theta}{2}$ هەژماربکە

$$\tan\frac{\theta}{2}$$

$$-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$ — $\tan\frac{\theta}{2}$ موجەبە لەبەر ئەوەی $90°<\theta<135°$

$$-\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{1+\left(-\frac{12}{13}\right)}}$$ — لەجیاتی کە

$$-\sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)\left(\frac{13}{1}\right)}$$ — سادەبکە

$$-\sqrt{25}$$

$$-5$$

ئاگاداربە!

وردبە لە دیاریکردنی نیشانەی هەر یەک لە $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ ئەگەر $180°<\theta<270°$ ئەوا $90°<\frac{\theta}{2}<135°$

خاڵی چاودێری

4. بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە ئەگەر زانیت $\tan\theta=\frac{4}{3}$ $0°<\theta<90°$

بیربکەوە و تاوتوێبکە

1. ڕوونبیکەوە کام هاوتەنجامی دووتەوەندە بەکاردێنیت بۆ سادەکردنی $\frac{\cos2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$
2. باسبیکە چۆن نیشانەی $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ دیاریدەکرێ؟
3. ڕێکخەر بە دووبارە هێڵکارییەکە دووبارە بنووسەوە پاشان تەواوی بکە. لە هەر چوار چێوەیەک هاوتەنجامێکی بنووسە

فێربە

5–7 ڕاهێنانەکان

ڕاهێنانی ناڕاستەکراو

بەهای هەریەک لە $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ بدۆزەوە.

بڕوانە نموونە 1

1. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$: $\cos\theta=-\frac{5}{13}$
2. $0°<\theta<90°$: $\sin\theta=\frac{4}{5}$

هەریەک لەو هاوتەنجامانە بسەلمێنە

بڕوانە نموونە 2

3. $2\cos 2\theta=4\cos^2\theta-2$
4. $\sin^2\theta=1-\frac{\cos 2\theta+1}{2}$
5. $\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$
6. $\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

بەبەکارهێنانی هاوتەنجامەکانی نیوە بەهای بڕەکان بدۆزەوە.

بڕوانە نموونە 3

7. $\cos 67.5°$
8. $\cos\frac{\pi}{12}$
9. $\tan\frac{3\pi}{8}$
10. $\sin 112.5°$

بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە

بڕوانە نموونە 4

11. $180°<\theta<270°$: $\sin\theta=-\frac{24}{25}$
12. $270°<\theta<360°$: $\cos\theta=\frac{1}{4}$

ڕاهێنان وشیکارکردنی پرسیارەکان

بەهای $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ بدۆزەوە

13. $90°<\theta<180°$: $\cos\theta=-\frac{7}{25}$
14. $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$: $\tan\theta=\frac{20}{21}$

هەریەک لەم هاوتەنجامانە بسەلمێنە

15. $\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$
16. $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$
17. $\tan\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$
18. $\tan\theta=\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

بەبەکارهێنانی هاوتەنجامەکانی نیوە بەهای بڕەکە بدۆزەوە.

19. $\sin\theta\frac{7\pi}{12}$
20. $\cos\frac{5\pi}{12}$
21. $\sin 22.5°$
22. $\tan 15°$

بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە

23. $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$: $\tan\theta=-\frac{12}{35}$
24. $180°<\theta<270°$: $\sin\theta=-\frac{3}{5}$

ڕاهێنانی ئازاد

بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانەکان	سەیری نموونە بکە
14-13	1
18-15	2
23-19	3
24-23	4

فرەهەنگاو بڕەکە بە سادەترین شێوە بنووسە، ڕێژە سێگۆشەییەکان θ لە جیاتی چەند جارەی θ بەکاربێنە

25. $\sin 3\theta$
26. $\sin 4\theta$
27. $\cos 3\theta$
28. $\cos 4\theta$
29. $\cos 2\theta+2\sin^2\theta$
30. $\cos 2\theta+1$
31. $\tan 2\theta\left(2-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$
32. $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$
33. $\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$
34. $\frac{\cos 2\theta-1}{\sin^2\theta}$

35 نەخشەی $y(t)=3.1\sin 2t$ بۆ پێوانەی کشانی سپرینگێك. لە ژێر کاریگەری تەنێك کە پێوەی هەڵواسرابێت بە پێی کات بە چرکە دەنوێنرێت.

أ نەخشەکە بە پێی ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ t لە جیاتی 2t بەبەکارهێنانی هاوتەنجامەکانی دوو ئەوەندە بنووسە.

ب نەخشەی $w(t)=3.8\cos t$ نموونەکە بۆ پێوانی کشانی سپرنگێکی تر لە ژێر کاریگەری تەنێك کە پێوەی هەڵواسرابێت. دووتەن بەهەریەکە لە دوو سپرینگەکەوە لەیەك کاتدا $t=0$ لە چ ساتێکدا کشانی دوو سپرینگەکە لە جاری یەکەمدا یەکسان دەبن.

ج لەو ساتەدا کشانی دوو سپرنگەکە چەند دەبێت؟

هەنگاوی جۆراو جۆر بەهاکانی $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە.

36 $\cos\theta=-\frac{3}{8}$ ؛ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

37 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ؛ $180^\circ<\theta<270^\circ$

38 $\sin\theta=\frac{2}{5}$ ؛ $0^\circ<\theta<90^\circ$

39 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$ ؛ $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$

بەبەکارهێنانی هاوتەنجامەکانی نیوە بەهای تەواوەتی بڕەکان بدۆزەوە

40 $\cos\frac{7\pi}{8}$

41 $\sin\frac{11\pi}{12}$

42 $\cos 105^\circ$

43 $\sin(-15^\circ)$

44 $\cos(-135^\circ)$

هاوتەنجامەکە بسەلمێنە

45 $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{\sin^2\theta}{2(1-\cos\theta)}$

46 $\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

47 $\frac{\tan\theta+\sin\theta}{2\tan\theta}=\cos^2\frac{\theta}{2}$

48 **بژمێری ڕوونکردنەوەیی** وێنەی ڕوونکردنەوەیی $y=\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{\sin 2x}$ بکێشە. بۆ دۆزینەوەی هاوتەنجامێکی سێگۆشەیی. ئەو هاوتەنجامە جەبریانە بسەلمێنە.

49 **هەنگاوی جۆراوجۆر** تۆپێکی گۆلف بەخێرایی سەرەتایی v_0 پی/چر هاوێژرا. بە پێی بەرزە گۆشەی θ نەخشەی $d(\theta)=\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{16}$ هەژماری ئەو ماوە ئاسۆییەکە تۆپەکە بڕیویەتی بکە.

أ نەخشەی پێشوو بەبەکارهێنانی ڕێژەی سێگۆشەی 2θ بنووسە.

ب ئەو دووریە ئاسۆییە هەژماربکە کە تۆپەکە دەیبڕێت لە کاتێکدا خێرایی بنەڕەتی 80 بێت لە چرکەیەکدا بەبەرزە گۆشەکانی 15° ، 30° ، 45° ، 60° ، 75°.

ج ئەگەر خێراییە سەرەتاییەکە نەگۆڕ بێت، کام گۆشە گەورەترین دووری ئاسۆییمان دەداتێ.

د **چی دەبێت ئەگەر...؟** خێرایی سەرەتایی 80 پێ/چر. دیاریبکە کام یەکێ لە دوو گۆشەکە پێویستە ببێتە بەرزە گۆشە بۆ ئەوەی دووری ئاسۆیی بڕاو لە 175 پێ کەمتر نەبێت.

50 **بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ڕوونبیکەوە چۆن بەهای تەواوەتی $\sin 7.5^\circ$ دەدۆزێتەوە؟

51 **بنووسە** چۆن دەزانیت لە چ کاتێکدا هاوتەنجامی دوو ئەوەندە و هاوتەنجامی نیوە بەکاردێت.

52 بەهای $\sin 2\theta$ چەندە ئەگەر $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $90° < \theta < 180°$ ؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ج) 1 (د) -1

53 بەهای $\cos 2\theta$ چەندە ئەگەر $\cos\theta = \sin\theta$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) $2\sin^2\theta$ (د) $2\cos^2\theta$

54 بەهای $\sin\frac{\theta}{2}$ چەندە ئەگەر بزانیت $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ و $90° < \theta < 180°$

(أ) $\frac{\sqrt{26}}{26}$ (ب) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$ (ج) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ (د) $-\frac{5\sqrt{26}}{26}$

55 بەهای تەواوەتی $\sin 157.5°$ چەندە؟

(أ) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (ج) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (د) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

56 **كورتە وەڵام** ڕاستی $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \cos\theta - \sin\theta$ پاسادان بكە. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

بەرەنگاری و فراوانكردن

57 $\tan 2\theta$ بەبەكارهێنانی $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بدۆزەوە.

58 $\tan\frac{\theta}{2}$ بەبەكارهێنانی $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ بدۆزەوە.

هاوتەنجامەكانی نیوە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوی بڕەكان بەكاربێنە

59 $\tan 7.5°$ **60** $\tan\frac{\pi}{16}$ **61** $\sin\frac{\pi}{24}$ **62** $\cos 11.25°$

63 **بنووسە** بەهاكانی θ كە پاسەدانی $\sin 2\theta = 2\sin\theta$ دەكات بدۆزەوە لە پێشدا بەبەكارهێنانی وێنەی ڕوونكردنەوەیی ئەم كارەبكە

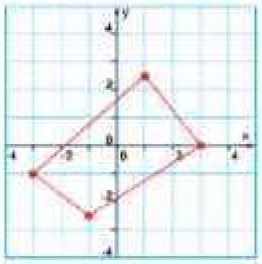
64 هاوتەنجامەكانی سەرجەم و جیاوازی بەكاربێنە بۆ بەدەستهێنانی دوو هاوتەنجام.

$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$ و $\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$

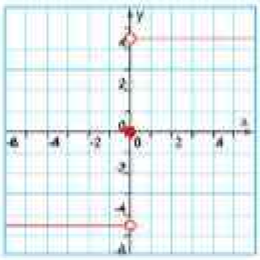
پێداچوونەوەی لولپێچی

تاقیكردنەوەی ڕاستەهێڵی ئەستوونی بەكاربێنە بۆ دیاریكردنی پەیوەندییەكە نەخشەیە یان نا
(پۆلەكانی پێشوو).

65



66



كۆبكەوە یان لێدەربكە. ئەو بەهایانەی x دیاریبكە والە نەخشەكە دەكەن پێناسە نەكراوبێت.
(پۆلەكانی پێشوو)

67 $\frac{3x-2}{x+7} + \frac{2x+14}{x+7}$ **68** $\frac{4x-1}{x} + \frac{6x-2}{2x}$ **69** $\frac{7x+4}{x+1} - \frac{5x+8}{x-3}$ **70** $\frac{x+9}{x^2} - \frac{x}{x+2}$

بەهای تەواوەتی بڕەكان بدۆزەوە. (وانەی 7-4)

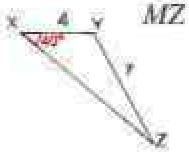
71 $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ **72** $\sin 105°$ **73** $\cos\frac{7\pi}{12}$ **74** $\cos 255°$

بەشی 7

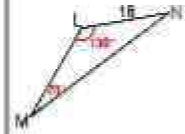
ڕێبەری خوێندن: پێداچوونەوە

پێوانەی هەریەک لەمانە بدۆزەوە درێژییەکە بۆ نزیکترین بەش لە دەیەک و پێوانەکە بۆ نزیکترین پلە نزیککەوە.

1 $\widehat{MZ}$

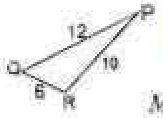


2 MN



3 EF

4 $M\hat{Q}$



وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکە بەکاربێنە بۆ وێنەکێشانی ئەم نەخشانە. فراوانی و کاتی خوولی دیاریبکە.

5 $f(x)=\cos 3x$

6 $g(x)=\cos\frac{1}{2}x$

7 $f(x)=-\frac{1}{3}\sin 3x$

8 $f(x)=2\sin\pi x$

9 $h(x)=\frac{1}{2}\cos 2x$

10 $g(x)=\frac{\pi}{2}\sin\pi x$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکە بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بەکاربێنە. وەخاڵی بەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی ڕوو بدۆزەوە.

11 $f(x)=\cos(x+\pi)$

12 $g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

13 $h(x)=\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

14 $f(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

زیندەزانی لە کرداری ڕۆشنەپێکهاتن ڕووەکەکان دووەم ئۆکسیدی کاربۆن CO_2 و ئاو بۆ شەکر و ئۆکسجین دەگۆڕێت لەسەر ئەم کردارە توێژینەوە دەکرێت بە پێوانەی بڕێک لە کاربۆن، کە ڕووەکەکە هەڵیدەمژێت (بەمایکرۆ مۆڵ) (Micromole) لە هەر مەتر چوار گۆشە لە چرکەدا دەپیورێت.

نەخشەی $C(t)=1.2\sin\frac{\pi}{12}(t-6)+7$ ڕێسایەکە بۆ پێوانی ئەو هێندە بە پێی کات t بەکاتژمێر.

15 وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە لە ماوەی دوو خولدا بکێشە.

16 کاتی خوولی نەخشەکە چەندە؟

17 گەورەترین بەهای ئەو نەخشەیە چەندە؟ و کەی ڕوودەدات؟

وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشە سێگۆشەییە بنەڕەتیەکە بۆ وێنەی کێشانی ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشانە بەکاربێنە خاڵەکانی بەکتر بڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و دەرکەنارەکان بدۆزەوە.

18 $f(x)=\frac{1}{4}\tan x$

19 $f(x)=\tan\pi x$

20 $f(x)=\tan\frac{1}{2}\pi x$

هاوتەنجامە سێگۆشەییەکان بسەلمێنە

21 $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta\frac{1}{\tan\theta}=1$

22 $\frac{\sin^2(-\theta)}{\tan\theta}=\sin\theta\cos\theta$

23 $\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)=\tan^2\theta$

24 $1+\cos^2\theta\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$

25 $\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}$

26 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$

27 $\sin^2\theta\tan\theta=\tan\theta-\sin\theta\cos\theta$

28 $\frac{\tan\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}$

بەبەکارهێنانی یەک تەخشەی سێگۆشەیی بڕەکە بنووسە

29 $\frac{1}{\tan\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

30 $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta\tan\theta$

31 $\tan(-\theta)\sin(-\theta)\cos(-\theta)$

32 $\dfrac{\cos\theta\frac{1}{\tan\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}$

بەهای تەواوەتی بڕەکە بدۆزەوە

33 $\sin\frac{19\pi}{12}$

34 $\cos 165^\circ$

35 $\cos 15^\circ$

36 $\tan\frac{\pi}{12}$

بەهای بڕەکان بدۆزەوە ئەگەر زانیتە $0^\circ < A < 90^\circ$
$\tan A = \frac{3}{4}$، $90^\circ < B < 180^\circ$ ، $\tan B = -\frac{5}{12}$

37 $\sin(A+B)$

38 $\cos(A+B)$

39 $\tan(A-B)$

40 $\tan(A+B)$

41 $\sin(A-B)$

42 $\cos(A-B)$

پۆتانی سەرەکانی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە کاتێک $A(0,0)$ ، $B(3,0)$ ، $C(4,2)$ ، $D(1,2)$ بێت. بە خولانەوەیەک چەقەکەی خاڵی بنەرەتە و گۆشەکەی θ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

43 $\theta = 30^\circ$

44 $\theta = 45^\circ$

45 $\theta = 60^\circ$

46 $\theta = 90^\circ$

پۆتانی سەرەکانی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە کاتێک $A(0,0)$ ، $B(5,2)$ ، $C(0,4)$ ، $D(-5,2)$ بێت بە خولانەوەیەک چەقەکەی خاڵی بنەرەتە و گۆشەکەی θ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

47 $\theta = 120^\circ$

48 $\theta = 180^\circ$

49 $\theta = 240^\circ$

50 $\theta = 270^\circ$

بەهای بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر زانیت $0^\circ < \theta < 90^\circ$
$\tan\theta = \frac{3}{4}$

51 $\sin 2\theta$

52 $\cos 2\theta$

53 $\tan\frac{\theta}{2}$

54 $\sin\frac{\theta}{2}$

بەهای بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر زانیت $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ و
$\cos\theta = \frac{3}{4}$

55 $\tan 2\theta$

56 $\cos 2\theta$

57 $\cos\frac{\theta}{2}$

58 $\sin\frac{\theta}{2}$

هاوتەنجامەکانی نیوە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوەتی بڕەکە بەکاربێنە.

59 $\sin\frac{\pi}{12}$

60 $\cos 75^\circ$

بەشی
7

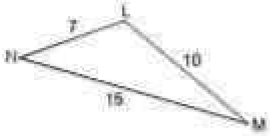
تاقیکردنەوەی بەش

هەر پێوانەیەك بدۆزەوە. درێژیەکە بۆ نزیکترین دەیەك و پێوانەی گۆشەکە بۆ نزیکترین پلە نزیکبکەوە.

1 $m\hat{B}$

2 RS

3 $m\hat{M}$



4 وێنەی ڕوونکردنەوەیی $f(x) = \cos x$ بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $g(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$ فراوانی و کاتی خوولی دیاریبکە

5 وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x) = \sin x$ بەکاربێنە. بۆ وێنەکێشانی نەخشەی $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری ئاسۆیی و لادانی بەرە دیاریکە.

6 وێنەی ڕوونکردنەوەیی $f(x) = \tan x$ نەخشەی $g(x) = 2\tan \pi x$ کاتی خوولی ویەکتر بڕینەکانی ئاسۆیی و دەرکەنارەکان دیارییکە.

7 ئەم هاوتەنجامە بسەلمێنە $\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}\cos^2\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

بەبەکارهێنانی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بڕەکە بنووسە.

8 $\left(\frac{1}{\cos\theta} + 1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)$

9 $\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

بەهای بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر زانیت $0^\circ < A < 90^\circ$ و $\tan A = \frac{3}{4}$ $180^\circ < B < 270^\circ$ و $\tan B = \frac{12}{13}$

10 $\sin(A + B)$

11 $\cos(A - B)$

12 پۆتانی سەرەکانی چوارلای $ABCD$ بدۆزەوە $A(0, 1)$ ، $B(2, 1)$ ، $C(3, 3)$ ، $D(-1, 3)$ بێت. بە خولانەوەیەك چەقەکەی خاڵی بنەرەتەوە پێوانەی گۆشەکەی 30° وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

بەهای بڕەکە بدۆزەوە ئەگەر بزانیت $90^\circ < \theta < 180^\circ$ و $\tan\theta = -\frac{12}{5}$

13 $\sin 2\theta$

14 $\cos 2\theta$

15 $\cos\frac{\theta}{2}$

16 هاوتەنجامەکانی نیوە بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوەتی بڕەی $\sin\frac{3\pi}{8}$.

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بەشی 7

1 بە های تەواوەتی $\tan 15^\circ$ چەندە؟

أ) $\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}$ ج) $\frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}$

ب) $2+\sqrt{3}$ د) $2-\sqrt{3}$

2 ماوەی نەخشەی $y=\frac{1}{3\tan 2x}$ لە کۆیدادەبین؟

أ) $2\pi n$

ب) $\frac{\pi n}{2}$

ج) $3\pi n$

د) $\frac{\pi n}{3}$

3 کاتی خولی نەخشەی $y=5\cos\frac{1}{3}x$ چەندە؟

أ) $\frac{2\pi}{5}$

ب) $\frac{5}{3}$

ج) $\frac{2\pi}{3}$

د) 6π

4 فلیمێك لە 14 دیمەنی گفتوگۆ و 10 دیمەنی ئەكشن پێكدێت. بە شێوەیەكی هەڕەمەكی دیمەنێك هەڵبژێرا. ئەگەری ئەوەی دیمەنەكە ئەكشن بێت چەندە؟

أ) $\frac{5}{12}$

ب) $\frac{7}{12}$

ج) $\frac{5}{7}$

د) $\frac{7}{5}$

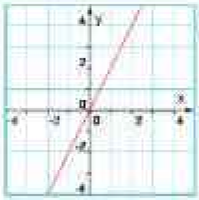
5 بەهای نەخشەی $f(x)=3x^3+4x^2+7x+10$ چەندە لە $x=-2$ دا.

أ) -44 ج) -12

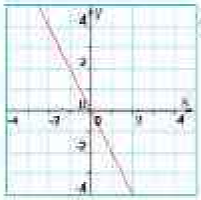
ب) 0 د) 36

6 کام لەمانە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی پێچەوانەی نەخشەکەیە، کاتێك $y=2$ و $x=-1$ ؟

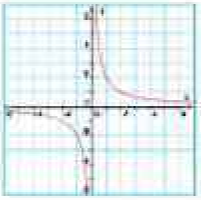
أ)



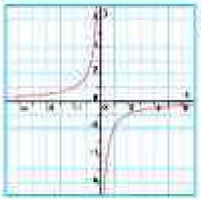
ج)



ب)



د)



7 هاوئەنجامەکانی نیوە بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوەتی $\cos 157.50^\circ$.

أ) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

ب) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

ج) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

د) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

8 پۆتانەکانی سەری چەماوەی نەخشەی $f(x)=x^2+6x-4$ چییە؟

أ) $(0, -4)$

ب) $(-3, -13)$

ج) $(-3, 5)$

د) $(3, 5)$

9 $ABCDE$ پێنجلایەکی قۆقزە $\hat{A}\cong\hat{B}\cong\hat{C}$ ، $\hat{D}\cong\hat{E}$ ، $m\hat{A} = m\hat{D}$ ، $m\hat{C}$ چەندە؟

أ) 67.5° ج) 154.3°

ب) 135° د) 225°

10 کام لەمانە یەکسان نییەبە $\sin 60^{\circ}$

(أ) $\cos 30^{\circ}$

(ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ج) $\frac{\tan 30^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}$

(د) $(\cos 60^{\circ})(\tan 60^{\circ})$

کورتە وەڵام

11 بەهای x چەندە کاتێك $5\sqrt{2x-7}+4=9$

12 بەهای $\cos\theta$ بدۆزەوە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە هەزار نزیکبکەوە

13 سەرجەمی ئەم زنجیرە ژمارەییە بدۆزەوە $\sum_{k=1}^{14}(3k-5)$

14 لە دوو سێگۆشەی ABC ، DEF ، $\hat{A}\cong\hat{F}$ و $\hat{B}\cong\hat{D}$ ئەگەر $AC=1.5$ و $DF=3$ و $EF=4.5$ پێویستە درێژی $\overline{AB}$ چەند بێت بۆ ئەوەی هەردوو سێگۆشەکە هاوشێوەبن.

کورتە وەڵام

15 یانەی شەترەنجی ئامادەیی سلێمانی 12 ئەندامە پیویستە بەرێوەبەری خوێندنگاکە 2 یاریکەر هەڵبژێری بۆ بە شداریکردن لە قارەمانێتی شەترەنجی عێراق .

(أ) بە چەند رێگا دەتوانین ئەم دوو یاریکەرە هەڵبژێرین

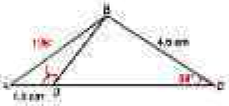
(ب) روونبکەوە بۆچی ئەو رێگایەت بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە هەڵبژارد.

16 یەکبەدوای یەکی ... ,2, 12, 36, 108, 324 بەکاربهێنە

(أ) پێناسەیەکی ئاشکرا بۆ رادەی n ی بنووسە

(ب) رادەی دەیەم کامەیە.

17 بۆ دۆزینەوەی هەر پێوانەیەك وێنەکە بەکاربێنە درێژییەکەی بۆ نزیکترین دە لە cm نزیکبکەوە.



(ج) درێژی $\overline{DC}$

(د) درێژی $\overline{AB}$

وەڵامی درێژ

18 خشتەی خوارەوە نمرەکانی خوێندکارەکانی پۆلی 10 لە بابەتی بیرکاری نیشاندەدات.

90	85	72	86	94	96
85	95	94	68	71	85
93	98	84	83	80	89

بدۆزەرەوە:

(أ) ناوەندە ژمێرەیی.

(ب) ناوەراستە.

(ج) باو.

(د) لێکنەچوون.

(هـ) لادانی پێوانەیی.

(و) مەودا.