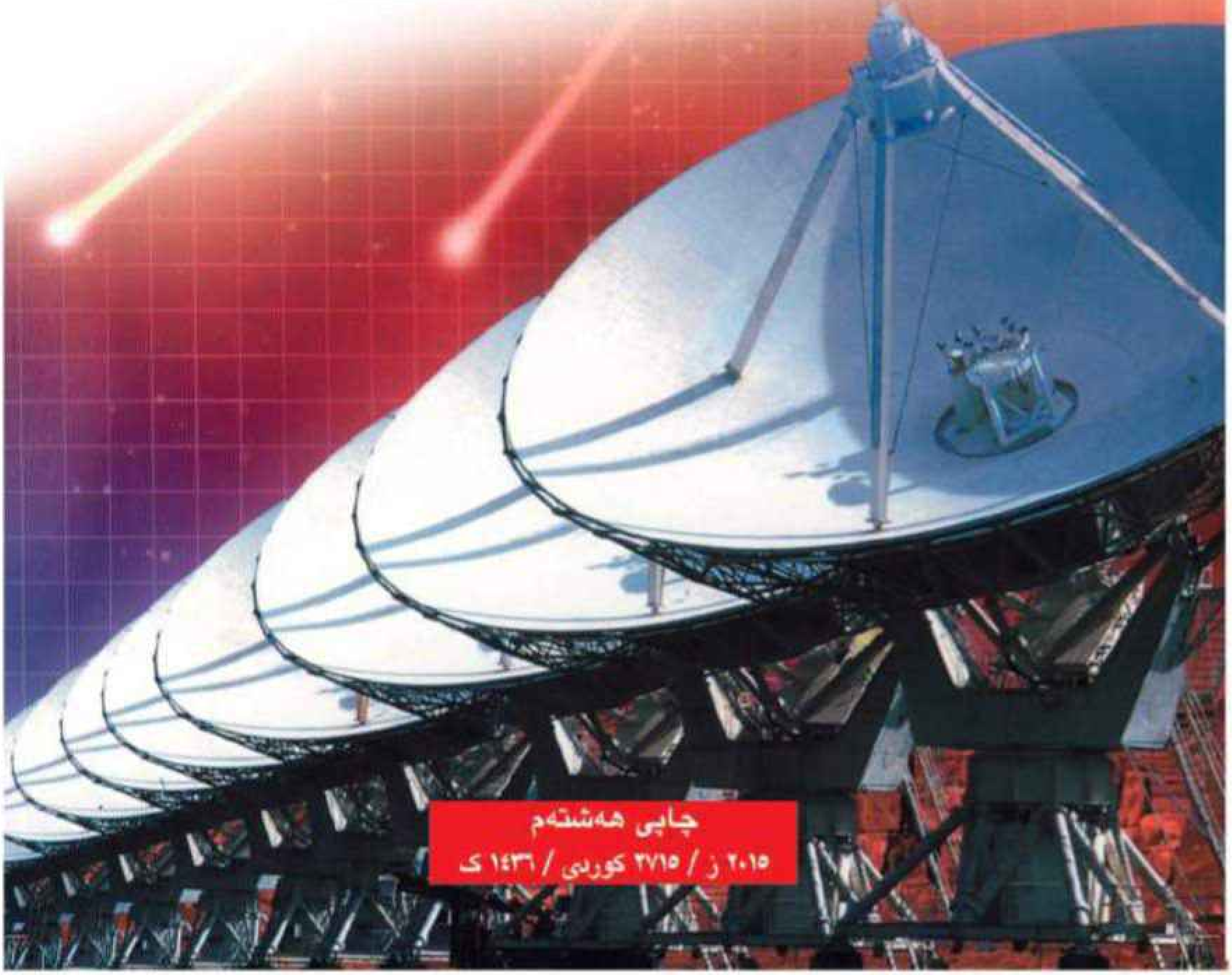
١٠

حكومەتی هەرێمی كوردستان - عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەكان

بیركاری بۆ هەمووان

كتێبی خوێندكار
پۆلی دەیەمی زانستی



چاپی هەشتەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ كوردی / ١٤٣٦ ك

سەرپەرشتی هونەری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ئاری محسن احمد

ناوەڕۆکی کتێبەکە

بەشی 1 ژمارەکان و کردارەکان

NUMBERS AND OPERATIONS

بەشی 2 نەخشەکان

FUNCTIONS

بەشی 3 بڕەکان و نەخشە دووجاکان

QUADRATIC EXPRESSIONS AND FUNCTIONS

بەشی 4 بڕەکان و نەخشە ڕادەدارەکان

POLYNOMIAL EXPRESSIONS AND FUNCTIONS

بەشی 5 بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان

RATIONAL EXPRESSIONS AND FUNCTIONS

بەشی 6 ئەگەر و ئامار

PROBABILITY AND STATISTICS

بەشی 7 ئەندازە

GEOMETRY

بەشی 8 سێگۆشەزانی

TRIGONOMETRY

ناوەڕۆکی کتێبەکە

1 ژمارەکان و کردارەکان NUMBERS AND OPERATIONS 2

1 کردارەکان لەسەر ژمارەکان Operations with Numbers 4
2 هاوکێشەکان Equations 9
3 لاسەنگەکان Inequalities 15
4 هێزەکان و ڕەگەکان Powers and Radicals 21
5 شیکارکردنی سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بەلەجیاتیدانان
Solving Linear Systems by Substitution 28
6 شیکارکردنی سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بەلابردن
Sloving Linear Systems by Cancellation 33
7 برە ڕەگییەکان Radical Expressions 38
پرۆژەی بەش: شێوازەکان لە پێدراوەکاندا 44
پێداچوونەوەی بەش 46
تاقیکردنەوەی بەش 47
تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو 48

2 نەخشەکان FUNCTIONS 50

1 نەخشەکان Functions 52
2 نەخشەی هێڵی Linear Functions 60
3 شێوەجیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ
Various Forms of the Equation of a Line 66
4 تەریببوون و ئەستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان
Parallel and Perpendicular Lines 72
5 شیکارکردنی سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی
Solving Linear Systems Graphically 77
6 نەخشەی بەهای ڕووت Absolute Value Functions 83
7 هاوکێشەکان و لاسەنگەکان کە بەهای ڕووتیان تێدایە
Absolute Value Equations and Inequalities 89
پرۆژەی بەش: پاشماوەکانی بۆشایی 96
پێداچوونەوەی بەش 98
تاقیکردنەوەی بەش 99
تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو 100

3 بڕەکان و نەخشە دووجاکان
QUADRATIC EXPRESSIONS AND FUNCTIONS
102

1 نەخشە دووجاکان Quadratic Functions 104
2 شیتەڵکردنی بڕەجەبرییە دووجاکان Factoring Quadratic Expressions 112
3 شیکاکردنی نەخشەی دووجا بە تەواوکردنی دووجای
Sloving Quadratic Function by Completing The Square 119
4 شیکارکردنی نەخشەی دووجا بە یاسا (دەستوور)
Sloving Quadratic Function by Formula 126
5 لاسەنگە دووجایەکان Quadratic Inequalities 132
پرۆژەی بەش: جیاوازی چییە 138
پێداچوونەوەی بەش 140
تاقیکردنەوەی بەش 141
تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو 142

4 بڕەکان و نەخشە ڕادەدارەکان
POLYNOMIAL EXPRESSIONS AND FUNCTIONS
144

1 ڕادەدارەکان Polynomials 146
2 نەخشە ڕادەدارەکان Polynomial Functions 152
3 لێکدان و دابەشکردنی ڕادەدارەکان
Multiplying and Dividing Polynomials 159
4 هاوکێشە و لاسەنگە ڕادەدارەکان
Polynomial Equations and Inequalities 168
پرۆژەی بەش:سامپڵ «نموونە» چییە 174
پێداچوونەوەی بەش 176
تاقیکردنەوەی بەش 177
تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو 178

5 برەکان و نەخشە ڕێژەییەکان
RATIONAL EXPRESSIONS AND FUNCTIONS
180

1 گۆڕانی پێچەوانە ونەخشەی هەڵگەڕاوە
182 .... Inverse variation and Inverse Function

2 نەخشە ڕێژەییەکان Rational Funtions 188

3 لێکدان و دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان
195 .... Multiplying and Dividing Rational Expressions

4 کۆکردنەوە و لێدەرکردنی برە ڕێژەییەکان
201 .... Adding and Subtracting Rational Expressions

5 هاوکێشەکان ولاسەنگە ڕێژەییەکان Rational Equations and Inequalities 207

6 نەخشەکانی ڕەگی دووجا Radical Functions 213

پرۆژەی بەش: کام ناوەند هەڵدەبژێریت؟ 218

پێداچوونەوەی بەش 220

تاقیکردنەوەی بەش 221

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو 222

6 ئەگەر و ئامار
PROBABILITY AND STATISTICS
224

1 دەروازەیەك بۆ ئەگەر Introduction to Probability 226

2 گۆڕینەکان و ڕیزکردنەکان
235 .... Permutations and Arrangements

3 گونجێنەکان Combinations 241

4 کۆکردنەوەی ئەگەرەکان Adding Probabilities 246

5 ڕووداوە سەربەخۆیەکان Independent Events 251

6 پێوەرەکانی پەرتبوون Measures of Dispersion 256

پرۆژەی بەش: ئەی گەشتیار لەگەڵ خۆتم بەرە 262

پێداچوونەوەی بەش 264

تاقیکردنەوەی بەش 265

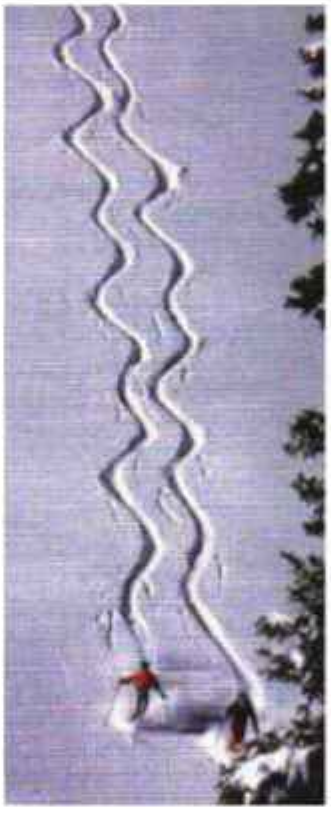
تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو 266

7 ئەندازە GEOMETRY 268

1 هەندێك لە دەسپێكەكانی ئەندازەی ئیقلیدس
Building of Euclidean Geometry 270
2 ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكان لە بۆشاییدا
Lines and Planes in Space 278
3 وێنە بینراوەكان Perspective Drawing 286
4 چەندلا ڕێكەكان Regular Polygons 294
5 هاوڕێژەی ئەندازەیی Geometric Proporiton 301
6 بازنە Circle 308
پرۆژەی بەش: بیركاری سەرسامكەر 316
پێداچوونەوەی بەش 318
تاقیكردنەوەی بەش 319
تاقیكردنەوەی كەڵەكەبوو 320

8 سێگۆشەزانی TRIGONOMETRY 322

1 شیكاركردنی سێگۆشەی وەستاو Solving Right Triangle 324
2 گۆشەكانی خولانەوە Angles of Rotation 331
3 پێوانەی بازنەیی Radian Measure 337
4 هاوتەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەكان
Fundamental Trigonometric Identities 343
پرۆژەی بەش: چەرخی شاری یاری 348
پێداچوونەوەی بەش 350
تاقیكردنەوەی بەش 351
تاقیكردنەوەی كەڵەكەبوو 352



بەشی یەکەم

ژمارەکان و کردارەکان
Numbers and Operations

1. کردارەکان لەسەر ژمارەکان.

2. هاوکێشەکان.

3. لاسەنگەکان.

4. هێزەکان و ڕەگەکان.

5. شیکارکردنی سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بەلەجیاتیدانان.

6. شیکارکردنی سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بەلابردن.

7. برە ڕەگییەکان.

پرۆژەی بەش

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بەشی 1

ژمارەکان و کردارەکان

Numbers and Operations

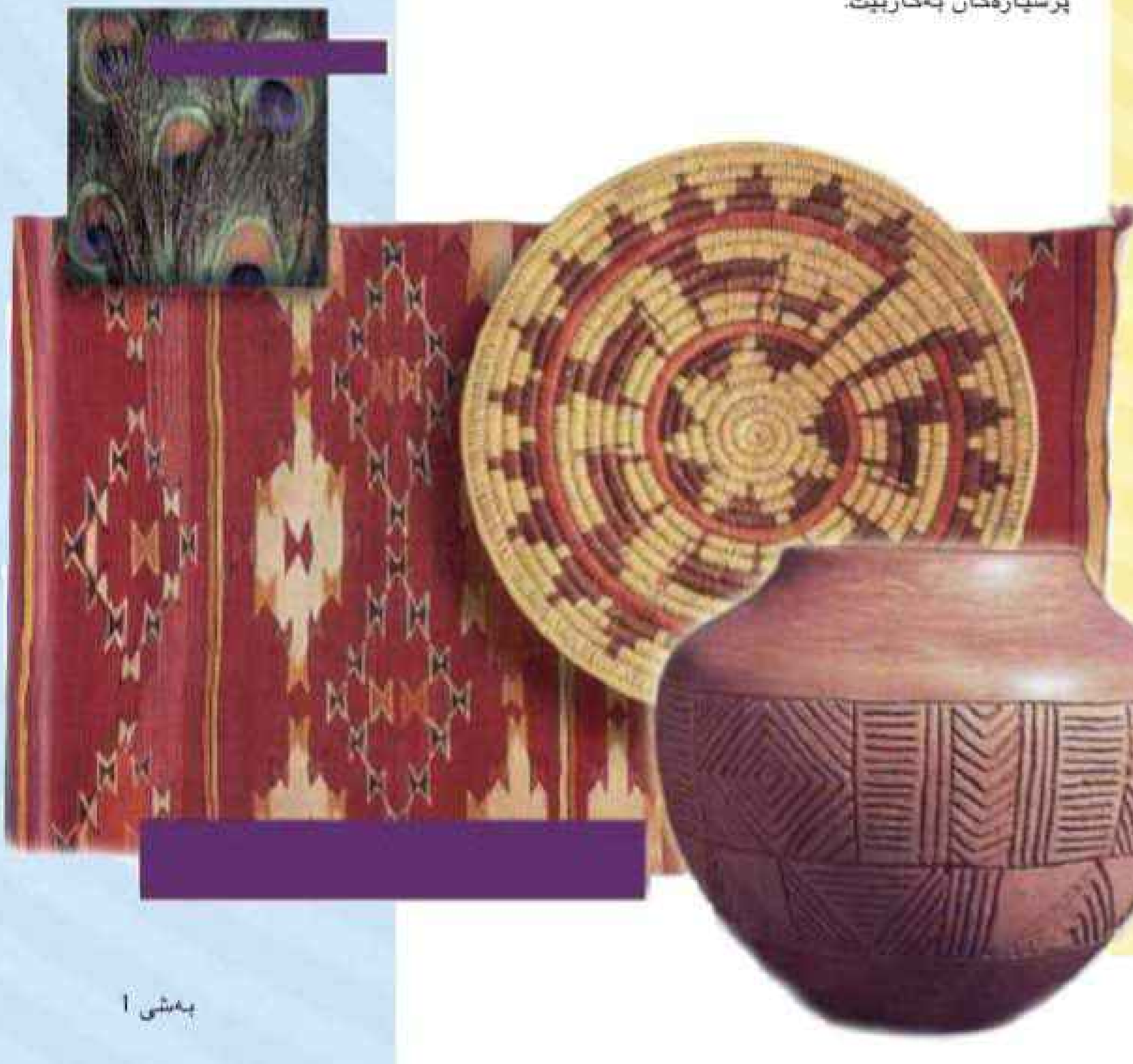
شێوازە جیاوازەکان بە درێژایی چاخەکان سەرنجی مرۆڤایەتیان وا لە وڵاتە جیاجیاکاندا ڕاکێشاوە کە هەندێکیان گەیشتوونەتە ئەو بڕوایەی کە جوانییەکی بێ وێنەیان هەیە. لەمانە شارستانییەتی کۆنەکان وەک شارستانیەتی وڵاتی نێوان دوو ڕووبار و ڕۆژهەڵاتی ناوەڕاست و باشووری ئەفریقا و ڕۆژئاوای ئەمریکا، شێوازی وایان ناسیوە کە جێگای بەسەر ژیانیانەوە جێ هێشتووە و زۆر و لە جێماوە هونەریانە کاریانکردۆتە سەر کە جێگەی ستایشی شێوازە جوانەکانن.

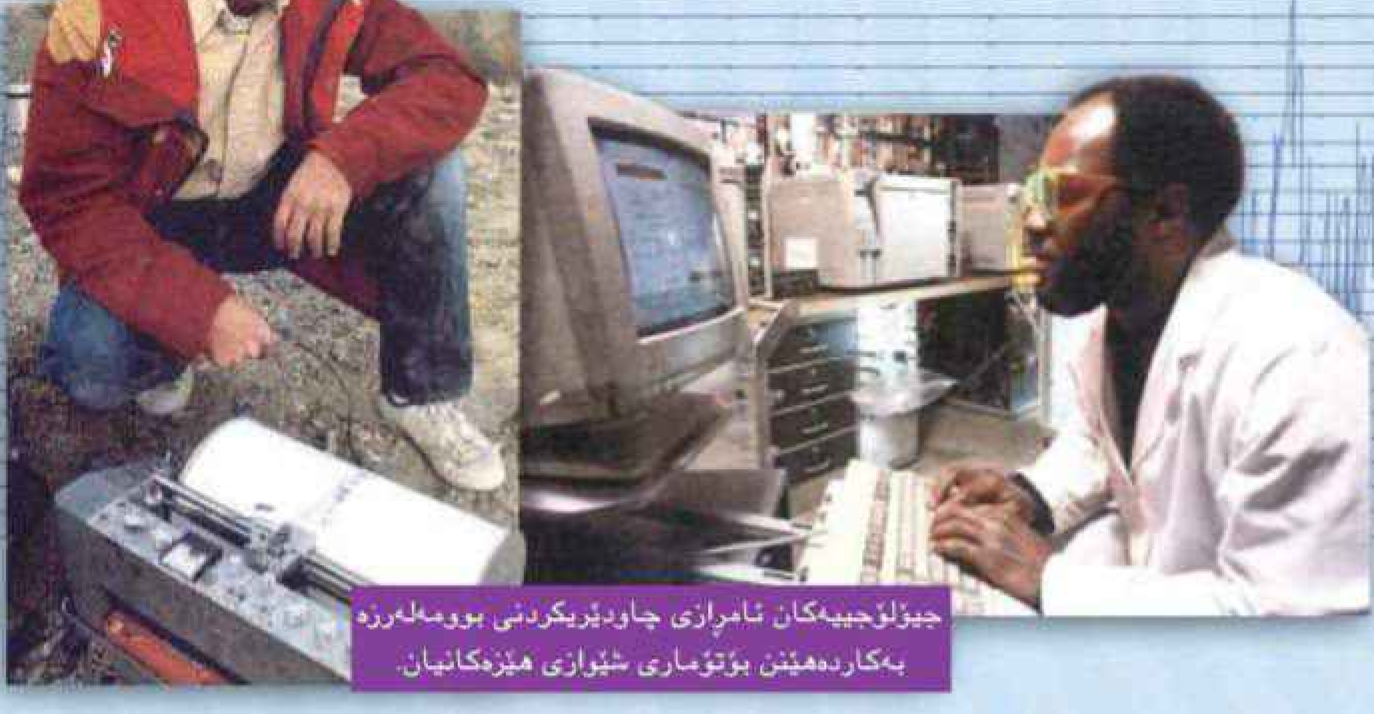
لە جیهانی تەکنەلۆژیای هاوچەرخدا شێوازەکان ڕێساکانی زۆر لە دۆزینەوەکانی زانستی و بیرکاری ئامادە دەکات. زاناکان شێوازەکان بۆ لێکۆڵینەوە سروشت و تێگەیشتن و خەمڵاندنی نەزانراوەکانی تیایدا بەکاردەهێنن. هەروەها زانا بیرکارییەکان بەدوای شێوازە ڕێگەکان دەگەڕێن لەکاتی لێکۆڵینەوەیان بۆ ژمارەکان. دەکرێ شێوازەکان وەک ئامرازێکی کارا بۆ شیکاری پرسیارەکان بەکاربێت.

وانەکان

1. کردارەکان لەسەر ژمارە ڕاستییەکان.
2. هاوکێشەکان.
3. لاسەنگەکان.
4. هێزەکان و ڕەگەکان.
5. شیکارکردنی سیستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بەلەجیاتیدانان.
6. شیکارکردنی سیستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بەلابردن.
7. بڕە ڕەگییەکان.

پرۆژەی بەش





جیۆلۆجییەکان ئامرازی چاودێریکردنی بوومەلەرزە بەکاردەهێنن بۆتۆماری شێوازی هێزەکانیان.

سەبارەت بە پرۆژەی بەشەکە

شێوازەکان یاریدەدەرت دەبێت بۆ دۆزینەوەی شیکار لە پێدراوەکانی پرسیارەکە. جەبر ئامرازی ئاسانکاریت بۆ دەکات بۆ گشتاندن و خەملاندن بەپشت بەستن بە شێوازەکان. لە پرۆژەی ئەم بەشەدا بە شێوازە بیرکارییەکان ئاشنا دەبیت لە لاکێشە زێڕینەکان و کۆمەڵێك لە شێوە بازنەییەکان. پاش تەواوبوونی ئەم پرۆژەیە لەتواناتدا دەبێت شیکردنەوەی شێوازەکان لە پێدراوەکاندا بەبەکارهێنانی خشتەکان و خاڵە ڕوونکراوەییەکان.

وانەی 1

کردارەکان لەسەر ژمارەکان
Operations With Numbers

بۆچی

لە ژیانی ڕۆژانەماندا ژمارە جۆراوجۆرەکان بەکاردەهێنین وەک 32 پلە بۆ دەربڕینی گەرمی کەش وهەوا، هەروەها ژمارەی دەبی وەک 41.25 هەزار دینار بەهای کەلوپەلێک بێت.

ئامانجەکان

- کۆمەڵە جیاوازەکانی ژمارەکان و پەیوەندی نێوانیان جیادەکاتەوە.
- سیفەتەکانی کردارەکان لەسەر ژمارە ڕاستییەکان و بەکارهێنانیان دەناسێت.
- بەهای نزیکی ژمارەیی بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان هەژمێر دەکات.

لە پۆلەکانی ڕابردوودا جۆری جیاوازت لە ژمارەکان ناسیوە.

کۆمەڵەی ژمارەکان Sets of Number

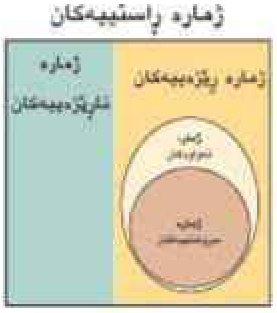
ژمارە سروشتییەکان **Natural Numbers** 0; 1; 2; 3; 4; ...

ژمارە تەواوەکان **Integers** ...; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; ...

ژمارە ڕێژەییەکان **Rational Numbers** $\frac{a}{b}$ کاتێک a ، b ژمارەی تەواو بن، $b \neq 0$.

ژمارە ناڕێژەییەکان **Irrational Numbers** ئەو ژمارانەن کە بەشی لای ڕاستی فاریزەکە ناکۆتا و نادووبارە بوو دەبێت.

ژمارە ڕاستییەکان **Real Numbers** هەموو ژمارە ڕێژەیی و ناڕێژەییەکانن



هێلکاری ڤن (Venn) کە لە بەرامبەردا هاتووە پەیوەندی نێوان کۆمەڵە جۆراوجۆرەکانی ژمارەکان دیاریدەکات. بۆ جیاکردنەوەی ژمارە ڕێژەییەکان و ناڕێژەییەکان، لە بیرت بێ کە ژمارە ڕێژەییەکان بەشی دەییەکەی کە کەوتۆتە لای ڕاستی فارزەکە دوا هاتووە یان دووبارەبووە. ئەگەر ژمارەی ڕێژەیی دووبارەبوو بێت دەتوانیت ئەم نموونەیەی خوارەوە بنووسیت: $3.2\overline{16} = 3.2161616...$

نموونە 1

ئەم ژمارانەی خوارەوە پۆلێن بکە لەگەڵ باسکردن.

−2.77 178.131313... 15.121221222...

شیکار

ژمارەی یەکەم ڕێژەییە چونکە بەشی لای ڕاستی فارزەکە دوا هاتووە، ژمارەی دووەمیش ڕێژەییە چونکە بەشی لای ڕاستی فارزەکە دووبارەبووە، بەڵام ژمارەی سێیەم ناڕێژەییە چونکە بەشی لای ڕاستی فارزەکە دوانە هاتووە و دووبارەبوو نیە.

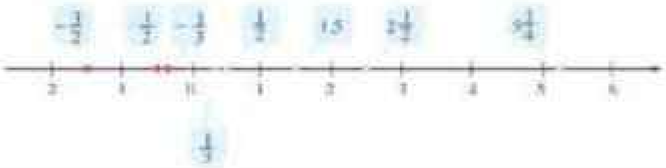
Number Line — هێڵی ژمارەکان

کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان سیفەتێکی گرنگی هەیە. دەتوانیت هەر ژمارەیەکی ڕاستی بنوێنیت بە خاڵێک لەسەر هێڵێکی ڕاستی ئاراستەکراو کە پێی دەوترێت تەوەری ژمارەکان و هەروەها هەر خاڵێکی سەر ئەم تەوەرەیە تەنها یەک ژمارەی ڕاستی دەنوێنێت.

نموونە 2

لەسەر تەوەری ژمارەکان ئەم ژمارانە بنوێنە $5\frac{1}{4}$، $-\frac{1}{3}$، $2\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{2}$، 1.5، $\frac{1}{3}$، $-\frac{3}{2}$.

شیکار



نموونە 3

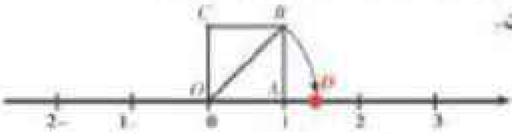
چۆن $\sqrt{2}$ لەسەر تەوەری ژمارەکان دەنوێنیت؟

شیکار

ژمارەی $\sqrt{2}$ تیرەی چوارگۆشەیەک دەنوێنێت کە درێژی لاکەی 1 یەکەی درێژی بێت.

لەم تێبینییەوە دەتوانیت بەم کارەی دێت هەڵسیت.

1. چوارگۆشەی $A\,B\,C\,O$ بکێشە



2. وێنەی خاڵی B بکێشە بە خولانەوەیەک (چەقەکەی خاڵی بنەڕەت O) بێت کە خاڵی B دەگوازێتەوە بۆ خاڵی D لەسەر تەوەری ژمارەکان. خاڵی D ژمارەی $\sqrt{2}$ دەنوێنێت.

هەوڵبدە ئایا دەتوانیت ژمارەی $\sqrt{5}$ لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنیت؟ باسیبکە.

Operations With Real Numbers — کردارەکان لەسەر ژمارە ڕاستییەکان

سیفەتەکانی کۆکردنەوە و لێکدان یارمەتیت دەدات لەسەر جێبەجێکردنی کردارە ژمێرییەکان بەخێرایی و بە ئاسانی. ئەم سیفەتانەش لەم خشتەی خوارەوە ڕوون کراوەتەوە.

سیفەتەکانی هەردوو کرداری کۆکردنەوە و لێکدانی ژمارە ڕاستییەکان

سیفەت	کۆکردنەوە	لێکدان
ئاڵوگۆڕ	$a+b=b+a$	$a\times b=b\times a$
یەکتربەستن	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$
دانەی بێ لایەنی سفر ویەک لە کرداری کۆکردنەوەی ولێکدان یەک لەدوای یەک	$a+0=a$	$a\times 1=a$
پێچەوانە و هەڵگەڕاوە «دژەکۆکردنەوە و دژە لێکدان»	$a+(-a)=0$	$b\times\frac{1}{b}=1;\ b\neq 0$
بەشینەوەی لێکدان بەسەر کۆکردندا	$a(b+c)=ab+ac$	

نموونە 4 ئەم برە جەبرییە $(a+2)(b+3)$ بکەرەوە.

شیکار

$(a+2)(b+3)=a(b+3)+2(b+3)$ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە

$=ab+3a+2b+6$ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە

هەوڵبدە بڕی جەبری $(a+b)(c-d)$ بکەرەوە و هۆی هەر هەنگاوێك دەربخە.

نموونە 5 کاتێك بازرگانێك داشکاندن بە بڕی 25% لە نرخی کاڵایەك دەخاتەڕوو و نرخە تازەکەی دەبێتە $t=c-0.25c$

کە t نرخە تازەکەیە ،و c نرخی بنەڕتییە. ڕوونیبکەوە کە $t=0.75c$

جێبەجێکردن
بازرگانی

شیکار $t=c-0.25c=1\times c-0.25\times c=(1-0.25)c=0.75c$

هەوڵبدە ڕوونیبکەوە کە نرخی تازەی کاڵایەك، نرخە بنەڕەتیەکەی c بێت پاش بەرزکردنەوەی نرخەکەی بە ڕێژەی $r\%$ دەبێتە $t=\left(1+\frac{r}{100}\right)c$.

ڕیزبەندی کردارەکان Order of Operation

بۆ ئەژمێرکردنی بەهای بڕێکی ژمارەیی پێویستە کردارە ژمێرەییەکان جێبەجێبکەیت بەپێی ئەم ڕیزبەندیەی لای خوارەوە

1. بڕەکان ئەژمێربکە بکە لەناو هێماکانی کۆبووەکاندا (رموز التجميع)، وەك کەوانە و کەرتەکان بەپێی هەنگاوەکانی 2 تا 4.
2. هێزەکان ئەژمێر بکە.
3. لێکبدەو دابەشبکە یەك لەدوای یەك لە چەپەوە دەستپێبکە.
4. کۆ بکەوە و لێکدەربکە یەك لەدوای یەك لە چەپەوە دەستپێبکە.

نموونە 6 بەهای بڕی $\frac{2^2(12+8)}{5}$ ئەژمێربکە بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

شیکار

$\frac{2^2(12+8)}{5}=\frac{2^2\times 20}{5}$ بڕی ناو کەوانەکە هەژمێربکە.

$=\frac{4\times 20}{5}$ تواناکان ئەژمێر بکە

$=\frac{80}{5}$ لێکدانبکە

$=16$ دابەشبکە.

هەوڵبدە بەهای $\frac{18-2\times 5}{15+3(-3)}$ هەژمێر بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە مامۆستا داوای لە قالاً و لانا و سەروین کرد ئەم بڕەیە $\frac{8-3}{5-2}$ هەژمارێکەن بەبەکارهێنانی بژمێر. هەریەکەیان بە ڕێگایەکی جیاواز بژمێریان بەکارهێنا.

قالاً: 8 - 3 ÷ 5 - 2

لانا: (8 - 3) ÷ 5 - 2

سەروین: (8 - 3) ÷ (5 - 2)

تۆش بژمێر بەکاربهێنە و وەڵامەکەت بەراورد بکە لەگەڵ وەڵامەکانیان.

کامیان ڕەچاوی ڕیزبەندی کردارەکانی کردووە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەم وشانەی خوارەوە چی دەگەیەنێت بۆتۆ ڕوونیبکەرەوە: ئاڵوگۆڕ، پەکتریەستن، بەشینەوە بەپێی هەردوو کرداری کۆکردنەوە و لێکدان بە هێنانەوەی نموونە باسیان بکە

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

2 پۆلێنی ئەم دوو ژمارەیە $\frac{2}{3}$ و $-2.131331333...$ بکە بە هەموو ئەو ڕێگایانەی لە توانادایە.

هەر یەک لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە بە دەربڕینی هۆی هەر هەنگاوێک.

3 $2(a+b)$ **4** $-3a+3a$ **5** $\frac{3(8+2)}{2}$

6 $\frac{7-1}{5-2}$ **7** $\frac{1}{4}(4\times5)$ **8** $-5(4y^2)$

9 بازرگانی ئەگەر هێمای گۆڕاوی a بۆقیستی ساڵانەی دڵنیایی لەسەر ئۆتۆمبێل بێت و هێمای گۆڕاوی m بۆقیستی مانگانە بێت، ئەوا ڕێسای $m=\frac{a}{12}+\frac{0.06a}{12}$ چۆنیەتی هەژمارکردنی قیستی مانگانە دیاردەکات کە پێویستە بدرێت. ڕوونیبکەرەوە کە دەتوانیت ئەم باسایە بەم شێوەیە $m=\frac{1.06a}{12}$ دیاریبکەیت. هۆی هەر هەنگاوێك بڵێ.

هەژماری ئەم بڕانە بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

10 $5^2+8+4-2$ **11** $(7-3^2)^2$

12 $\frac{5\times6+3\times7}{12}$ **13** $2\left[14-3(6-1)^2\right]$

جێبەجێکردن

شارەزاکە زیانەکانی ئۆتۆمبێلەکە هەڵدەسەنگێنێ کە خۆی کێشاوە بە ئۆتۆمبێلێکی تر.

ڕاهێنانی جێبەجێکردن

ئەم ژمارانە پۆلێنبکە

14 $\sqrt{3}$ **15** $\frac{2}{5}$ **16** $1.0\overline{63}$ **17** π

18 $\frac{\sqrt{36}}{2}$ **19** $\frac{9}{3}$ **20** $\frac{15}{2}$ **21** $5.121121112...$

ئەم ژمارانە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

22 $\frac{13}{2}$ **23** $3.\bar{6}$ **24** 1.5 **25** $\sqrt{10}$

هەر بڕێک بە بەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان هەژماربکە

26 $16\div2\times6-1$ **27** $6\div3-(10-3)^2$

28 $30-3\times2+6\div3$ **29** $5\times(2-3)^2$

سیفەتی بەکارهێنراو بۆ هەر یەکە لەمانە دیاریکە

30 $a(3b)=(3b)a$ **31** $(25x)y=25(xy)$

32 $(5+3)+2=5+(3+2)$ **33** $a+2-x=2-x+a$

34 $\frac{1}{a}\times a=1\ ;\ a\neq0$ **35** $\frac{3}{x}\times\frac{x}{3}=1\ ;\ x\neq0$

36 $-7+7=0$ **37** $2x+(-2x)=0$

38 $1(3x)=3x$ **39** $63=1\times 63$

40 $a(x^2+x)=ax^2+ax$ **41** $2(3-x)=6-2x$

بەهای ئەم بڕانە بەبەکارهێنانی بڕمێری زانستی هەژمار بکە

42 $3\times 2^2+3$ **43** $6\div 3\times 2$ **44** $2^2(2+3)+5$

45 $6\div(3-1)\times 5$ **46** $-3\times 25+16$ **47** $2^{(3-1)}+(3-1)$

48 $(2^2+1)+4\div 2$ **49** $\frac{8-2}{3}+(2+1)$ **50** $2\times 4+\frac{14}{5+2}$

بەرەنگاری

51 دەکرێ ژمارەیەک ڕێژەیی و ناڕێژەیی بێت لەهەمان کاتدا؟

بەستنەوە

52 ئایا دەتوانیت ژمارەی π لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنیت؟ ڕوونیبکەوە.

53 **ئامار** ڕۆژان دەیەوێت ناوەندی ئەم ژمارانە 8 ، 10 ، 14 ، 16 ئەژمێربکات کە لە بڕمێرەکەیدا دایناوە بەم شێوەیە: $\boxed{8}\ \boxed{+}\ \boxed{10}\ \boxed{+}\ \boxed{14}\ \boxed{+}\ \boxed{16}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$ و لە ئەنجامدا 36 ی دەستکەوت. ئایا ڕۆژان ڕاستی کردووە؟ پێویست بوو لە بڕمێرەکەیدا چی دابنێ باسبکە؟

54 **دەروازەیەک لەسەر شارستانییەتی میزۆپۆتامیا (عێراق)** بابلییەکان ژمارە ڕێژەییەکانیان بۆ نزیککردنەوە لە ژمارە ناڕێژەییەکان بەکارهێناوە. و زانیویانە کە تیرەی چوارگۆشە دەکاتە $\sqrt{2}$ لێکبدرێت لە درێژی لایەکی، و ژمارەی 1.4142 یان بەکارهێناوە وەك بەهای $\sqrt{2}$ بەکارهێناوە و وایان داناوە کە ژمارەی 1.4142 نزیکە لە $\sqrt{2}$ بۆ کاری پێداویستیە هەژمارکردنەکانیان.

أ بڕمێر بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای $\sqrt{2}$.

ب ئایا ئەم بەهایەی دەستتکەوتووە دەکاتە 1.4142 ؟

ج ئەو بەهایەی دەستتکەوتووە لە بڕمێرەکەوە لەسەرکاغەز بینووسە، پاشان سەرلەنوێ بیخە ناو بڕمێرەکە و هەژماری دووجاکەی بکە. ئایا ژمارەی 2 دەردەچێت؟ ڕوونیبکەوە.

جێبەجێکردن

55 یەکێك لە دەزگاکان مانگانە 2000 دینار بۆ هەر فەرمانبەرێك دەدات بە سیستمی دڵنیایی تەندروستی. ئەمەش نیوەی ئەو بڕە دەنوێنێت کە فەرمانبەرەکان بۆ هەمان مەبەست مانگانە دەیدەن، بڕی پارەی دراو لە ساڵێکدا بۆ دڵنیایی تەندروستی ئەو فەرمانبەرە چەندە لەلایەن فەرمانبەرەکەوە؟

دەروازەیەك لەسەر مێژوو

دۆڵی میزۆپۆتامیا دەکەوێتە نێوان هەردوو ڕووباری دیجلە و فوراتەوە. لەو شوێنەی کە هەردوو ڕووبارەکە سەرچاوە دەگرن تا یەك دەگرنەوە و دەڕژێنە ناو دەریای کەنداوی عەرەبی. بەو شوێنانە وتراوە میزۆپۆتامیا کە لەم دواییدا عەرەبەکان ئەو دۆڵەیان ناونا (وادي الرافدَيْن) واتە دۆڵی هەردوو ڕووبارکە.

ڕوانین بۆ دواوە

هەژماری ئەم بڕانە بکە و وەڵامەکان بە سادەترین شێوە ئەگەر کرا بنووسە

56 $\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}$ **57** $\frac{6}{11}\times\frac{2}{3}$ **58** $21\div\frac{7}{8}$ **59** $10\div\frac{5}{6}$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە

60 $3(x-5)=4$ **61** $\frac{x}{3}+9=2$

62 $3x-5=x+12$ **63** $\frac{1}{5}x-4=3(x-5)$

ڕوانین بۆ پێشەوە

64 شیکارکردنی هاوکێشەکان وا دەکات کە پێویستی بەبەکارهێنانی هەموو جۆرە ژمارەکان بێت. شیکاری هاوکێشەی $x+7=5$ ژمارەیەکی سالبە سەرەڕای ئەوەی هاوکێشەکە تەنها ژمارەی موجەبی تێدایە، و شیکاری $2x=5$ ژمارەیەکی ڕێژەییە سەرەڕای ئەوەی هاوکێشەکە تەنها ژمارەی تەواوی تێدایە.

أ نموونەیەکی نوێ بۆ هاوکێشەیەك بهێنەرەوە جگە لە ژمارەی ناسالب ژمارەیەکی تری تێدانەبێت و بەڵام شیکارەکەی ژمارەی سالب بێت.

ب نموونەیەکی نوێ بۆ هاوکێشەیەك بهێنەرەوە کە جگە لە ژمارەی تەواو ژمارەیەکی تری تیانەبێ و بەڵام شیکارەکەی ژمارەی ناتەواو بێت.

وانەی 2

هاوكێشەكان Equations

بۆچی

دەتوانین شیكاری زۆر لە پرسیارەكانی ژیانی ڕۆژانە بەبەكارهێنانی هاوكێشەكان ئەنجام بدەین كە لە تەرازوو دەچێت و هاوتایی وا دەكات كرداری یەكسانی لەگەڵ هەردوو تای تەرازووەكە ئەنجام بدەین (یان هەر لایەكی هاوكێشەكە)

ئامانجەكان

- سیفەتەكانی یەكسانی دەناسێت و بەكاریاندێنێت
- هاوكێشە هێڵییەكان دەنووسێت و بە جەبری و بەرووندكردنەوەیی شیكاریان دەكات
- هاوكێشە زۆر گۆڕاوەكان شیكاردەكات بە هەژماركردنی یەكێكیان بەپێی ئەوانی تر.

هاوكێشە **Equation** بریتییە لە یەكسانبوونی نێوان دوو بڕ گۆڕاوێك یان زیاتری تێدایە پێی دەوترێت نەزانراو **Unknown** .

$12x = 10$ هاوكێشەیەكی یەك گۆڕاوە كە ئەویش x ە.

$2x + 3y = 12$ هاوكێشەیەكی دوو گۆڕاوە كە بریتین لە x و y .

هەر ژمارەیەك پاساداتی هاوكێشەكە بكات بەلەجیاتیدانان (واتە بیگۆڕێت بۆ یەكسانبوونێكی ڕاست پاش دانانی ژمارەكە لەجیاتی نەزانراوەكە) پێی دەوترێت ڕەگی **Root** هاوكێشەكە. ژمارەی $\frac{5}{6}$ بۆ نموونە ڕەگە بۆ هاوكێشەی $12x = 10$ چونكە بەدانانی ئەو ژمارەیە لەجیاتی نەزانراوەكە وادەكات یەكسانەكە تەواوبێت: $12 \times \frac{5}{6} = 10$

شیكاركردنی هاوكێشە بریتییە لە دۆزینەوەی كۆمەڵە ژمارەیەك كە ڕەگەكانی هاوكێشەكەن، ئەو كۆمەڵەیە پێی دەوترێت كۆمەڵە شیكاری هاوكێشەكە **Solution Set of equation** . دەشێت ئەو كۆمەڵەیە تەنها یەك دانەی تێدابێت و هەروەها دەشێت لەیەك دانە زیاتری تێدابێ و یانیش دەكرێ ناكۆتا دانەی تێدابێ و دەشێت كۆمەڵەی شیكار هیچ دانەیەكی تێدانەبێت، واتە كۆمەڵەكە بەتاڵ **Empty Set** $\varnothing$ بێت.

سیفەتەكانی یەكسانبوون لە نێوان ژمارە ڕاستییەكان و سیفەتی لە جیاتیدانان بەكاردەهێنە لە كاتی شیكاركردنی هاوكێشەكان.

سیفەتی یەكسانبوون Properties of Equality

سیفەتی وێنەدانەوە	$a = a$
سیفەتی هاوجێبوون	ئەگەر $a = b$ ئەوا $b = a$
سیفەتی تێپەڕبوون	ئەگەر $a = b$ وە $b = c$ ئەوا $a = c$
سیفەتی كۆكردنەوە	ئەگەر $a = b$ ئەوا $a + c = b + c$
سیفەتی لێدەركردن	ئەگەر $a = b$ ئەوا $a - c = b - c$
سیفەتی لێكدان	ئەگەر $a = b$ ئەوا $ac = bc$
سیفەتی دابەشكردن	ئەگەر $a = b$ ئەوا $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ كاتێك $c \neq 0$
سیفەتی لەجیاتیدانان	ئەگەر $a = b$ بە لەجیاتیدانانی b لە a . لە هەر دەستەواژەیەكی بیركاری دروستدا هەر بە دروستی دەمێنێتەوە

شیكاركردنی هاوكێشەكان بە سادەكردنی بڕەكان و كۆكردنەوەی ژمارەكان دەستپێدەكات.

نموونە 1

جێبەجێکردن
پلەکانی گەرما

دوو جۆرە پێوەر هەیە بۆپێوانی پلەکانی گەرمی: پێوەری سەدی (Celsius) و پێوەری فەهرەنهایت (Fahrenheit) و پەیوەندی نێوان هەردوو پێوەرەکە برتییە لە $F = \frac{9}{5}C + 32$ هێمای F پلەی گەرمییە بە فەهرەنهایت و C هێمای پلەی گەرمییە بە پلەی سەدی. لە ڕاگەیاندنی کەش و هەوادا هاتووە کە پلەی گەرمی ئەمڕۆ 86 پلەیە لەسەر پێوەری فەهرەنهایتی.
پلەی گەرمییەکە بە پێوەری سەدی چەندە؟

شیکار

ڕێساکە	$F = \frac{9}{5}C + 32$
بە دانانی 86 لەجیاتی F	$86 = \frac{9}{5}c + 32$
بە دەرکردنی 32 لە هەردوولای هاوکێشەکەبەبەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن	$86 - 32 = \frac{9}{5}C + 32 - 32$
سادەکردن	$54 = \frac{9}{5}C$
بە لێکدانی هەردوولای هاوکێشەکە لە $\frac{5}{9}$ بەبەکارهێنانی سیفەتی لێکدان	$\frac{5}{9} \times 54 = \frac{5}{9} \times \frac{9}{5}C$
سادەیکە	$30 = C$
سیفەتی هاوجێبوون بەکاربهێنە	$C = 30$

نموونە 2

هاوکێشەی $2x + 7 = 5x - 9$ شیکاربکە.

شیکار

هاوکێشەکە	$2x + 7 = 5x - 9$
بە دەرکردنی 7 لە هەردوولا بەبەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن	$2x + 7 - 7 = 5x - 9 - 7$
سادە بکە	$2x = 5x - 16$
بە دەرکردنی 5x لە هەردوولا بەبەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن	$2x - 5x = 5x - 16 - 5x$
سادە بکە	$-3x = -16$
بە دابەشکردنی هەردوولا بەسەر 3- دا بەبەکارهێنانی سیفەتی دابەش	$\frac{-3x}{-3} = \frac{-16}{-3}$
سادە بکە	$x = \frac{16}{3}$

ساغبکەوە $2 \times \frac{16}{3} + 7 \stackrel{?}{=} 5 \times \frac{16}{3} - 9$

$\frac{32+21}{3} \stackrel{?}{=} \frac{80-27}{3}$

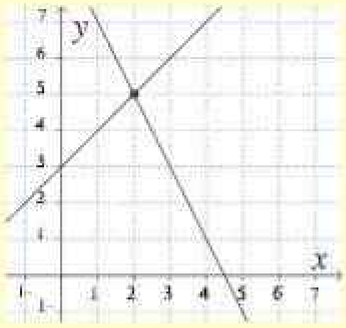
$\frac{53}{3} \stackrel{?}{=} \frac{53}{3}$ ڕاستە

کەواتە $x = \frac{16}{3}$ ڕەگی هاوکێشەکەیە

هەولبدە شیکاری هاوکێشەی $3x + 12 = -5x + 24$ بکە و ساغکردنەوەی شیکارەکەش بکە بەلەجیاتیدانان.

چالاکی

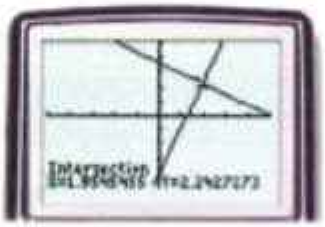
دۆزینەوەی شیکاری هاوکێشەکان بە ڕوونکردنەوەیی
Exploring Graphic Solution Method



1. ئەو دوو برە یەکسانە کامانەن کە ئەم هاوکێشەیان لێپێکدێت $x+3=9-2x$؟
2. لەهەمان ڕووتەختی پۆتانەکاندا وێنەی هەردوو ڕاستەهێڵی $y=x+3$ و $y=9-2x$ بکێشە.
3. بەهای پۆتانی سینی بۆ خاڵی یەکتربڕینی هەردوو ڕاستەهێڵەکە چەندە؟
4. بە لەجیاتیدانان پاسادانی بەهایەکە بکە، ئایا دەبێتە شیکاری هاوکێشەکە؟
5. ڕوونیبکەوە چۆن هاوکێشەی $2x+1=2-x$ بە ڕوونکردنەوەیی شیکاردەکەیت.

خاڵی چاودێری ✓

نموونە 3 هاوکێشەی $y=0.72x+3.65$ ، $y=3.24x-4.09$ بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە



شیکار

وێنەی ڕاستەهێڵی $y=3.24x-4.09$ و ڕاستەهێڵی $y=0.72x+3.65$ بکێشە بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی یان کاغەزی ڕوونکردنەوەیی و خاڵی یەکتربڕینی هەردوو ڕاستەهێڵەکە دیاریکە، پۆتانی سینی خاڵی یەکتربڕینەکە زۆر نزیکە لە ژمارە 3 و لەوانەیە 3.07 بێت. کەواتە شیکارەکە بە نزیکەیی دەکاتە 3.07 .

هەوڵبدە هاوکێشەی $2.24x-6.24=4.26x-8.76$ بە ڕوونکردنەوەیی شیکار بکە.

هاوکێشە پیتییەکان — Literal Equations

هاوکێشەی پیتی ئەو هاوکێشەیە کە دوو گۆڕاو یان زیاتری تێدایە. ئەو هاوکێشانە یاساکانی هەژمێرکردنی ڕووبەر و قەبارەکان دەگرێتەوە.

نموونە 4 پزیشکەکان یاسایەك بەکاردەهێنن بۆدەستنیشانکردنی بڕی ئەو دەرمانەی کە دەدرێتە منداڵەکان بەپێی ئەوەی دەدرێتە گەورەکان، ئەم یاسایەش بریتییە لە $c=\frac{a}{a+12}\times d$ کە c بڕی ئەو دەرمانەیە کە بە منداڵێك دەدرێت، a تەمەنی منداڵەکە بێت، d بڕی ئەو دەرمانەیە کە دەدرێتە گەورەیەك. شیکاری ئەم هاوکێشەیە بکە بەپێی گۆڕاوی d (واتە ئەم گۆڕاوە بەپێی گۆڕاوەکانی تر بدۆزەوە).

$c=\frac{a}{a+12}\times d$	هاوکێشەکە
$c(a+12)=(a+12)\frac{a}{a+12}\times d$	سیفەتی لێکدان بەکاربهێنە
$c(a+12)=ad$	سادەبکە
$\frac{c(a+12)}{a}=\frac{ad}{a}$	سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە
$d=\frac{c(a+12)}{a}$	سادەبکە

جێبەجێکردن
پزیشکی

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

هاوكێشەی نموونە ٤ بەپێی گۆڕاوی a شیكار بكە.

خاڵی چاودێری ✓

دوو هاوكێشە **هاوتا Equivalent** دەبن ئەگەر هەمان شیكاریان هەبێت. لەجیاتیدانان بەكاربهێنە بۆ ئەوەی ساغبكەیتەوە دوو هاوكێشەی $\frac{9}{5}x+32=86$ ، و $\frac{9}{5}x=54$ هاوتان.

ڕاهێـــــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیركاریدا

سیفەتی بەكارهێنراو بۆ شیكاری ئەم هاوكێشانە دیاربكە

1. $52=-2.7x-3$
2. $x+2.2=\frac{x}{5}$
3. $3x-5=2x-2$
4. باسبكە چۆن هاوكێشەیەكی هاوتای $4x-7=4$ دەستدەكەوێت.
5. باسبكە چۆن هاوكێشەی $\frac{2(x+3)}{7}=\frac{9(x-3)}{7}$ شیكاردەكەیت بە ڕوونكردنەوەیی.

ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو

ئەم هاوكێشانە شیكار بكەو شیكارەكانیش پاسادانبكە

6. $4x+12=20$
7. $\frac{x}{5}+3=4$
8. $-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}=2-3x$
9. $7-6x=2x-9$
10. هاوكێشەی $Ax+By=C$ شیكاربكە، كاتێك $B\neq0$ بۆ هەژمێركردنی y بەپێی گۆڕاوەكانی ترەوە.

ڕاهێنان و جێبەجێكردن

ئەم هاوكێشانە شیكاربكە

11. $2x-5=1$
12. $-2x-7=9$
13. $5x-3=12$
14. $20=6x-10$
15. $4-5x=19$
16. $3x+1=\frac{1}{2}$
17. $4x+80=-6x$
18. $7x=-2x+5$
19. $5x+3=2x+18$
20. $4x-3=x+7$
21. $\frac{1}{5}x+3=2$
22. $\frac{1}{4}x-\frac{5}{2}=-2$
23. $\frac{1}{2}x+2=0$
24. $\frac{1}{3}x=-x+4$
25. $x-5=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$
26. $-\frac{1}{3}x+1=\frac{3}{2}x-1$
27. $\frac{2}{3}x+9=\frac{1}{2}x+4$
28. $\frac{1}{4}x-3=6x$

29 $\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}x-1$

30 $\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}=x-3$

ئەم هاوکێشانە شیکار بکە و شیکارەکە بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.

31 $0.24x+1.1=2.56x-1.5$

32 $1.05x-4.28=+2.65x+4.1$

33 $0.67x-8.75=-0.48x+3.99$

34 $5.9(0.33x-1.33)=-1.03x-5.72$

شیکاری ئەم هاوکێشانە بکە بە هەژمارکردنی نەزانراوی دانراو لە نێوان دوو کەوانەی بەرامبەردا بەپێی نەزانراوەکانی تر

35 $\frac{1}{2}bh=A$ (b)

36 $P=2l+2w$ (w)

37 $\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ (r_2)

38 $A=\frac{1}{2}h(b_1+b_2)$ (b_2)

39 $A=\frac{1}{2}h(b_1-b_2)$ (h)

40 $Y=\frac{u+1}{u+2}$ (u)

41 $ax+b=cx+d$ (x)

42 $ax+b=cx+d$ (d)

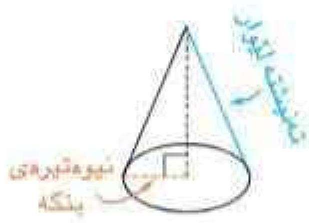
43 ئەگەر $y=4x+7$ هەبێت، لەجیاتیدانان بەکاربهێنە بۆنەوەی هاوکێشەی $-2x+y=19$ شیکاربکەی.

بەستنەوە

44 ئەندازە پێوانەی یەکێك لە دوو گۆشەی یەکتر پڕکەر دەکاتە دوو ئەوەندەی گۆشەکەی تر کە $45°$ ی بۆ زیادکرابێت. هاوکێشەیەك بنووسە و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی هەردوو گۆشەکە.

بەرەنگاری

45 ئەندازە یاسای $A=\pi rs+\pi r^2$ ڕێدەدات بۆ هەژمێرکردنی ڕووبەری قووچەك کاتێ، A هێمای ڕووبەری قوچەکەکە بێت، r نیوەتیرەی بنکەکەی بێت و s درێژی تەنیشتە لێوارەکەی بێت، یاساکە بنووسە بە هەژمێرکردنی تەنیشتە لێوارەکەی s بەپێی ڕووبەر A و نیوەتیوەی بنکەکەی r.



ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم بڕانە هەژمێر بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

46. $3(2-(5-3)-7)+2$
47. $-(-5^2)^3$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەم دەستەواژە بیرکاریانە چی دەگەیەنێت باسبکە

48. $y>-5$
49. $-3<x<3$
50. $-1\le y\le 1$
51. $x\ge -3$

وانەی 3

لاسەنگەکان Inequalities

بزۆجی

دەتوانین زۆر لە پێداویستییەکانی ژیانی ڕۆژانە بەبەکارهێنانی لاسنگەکان ئەنجام بدەین. نموونەش بۆ ئەمە ڕێژەی چەوری کە پێویستە مرۆڤ لە خواردنیدا زیاد نەکات بۆ ئەوەی تووشی سەرئێشە نەبێت.

ئامانجەکان

- لاسەنگەی هێڵی بە یەک گۆڕاو دەنووسێت و بە جەبری وبە ڕوونکردنەوەیی شیکاری دەکات.
- لاسەنگە هێڵیە ئاوێتەکان بە یەک گۆڕاودا بە جەبری وبە ڕوونکردنەوەیی شیکاردەکات.

جێبەجێکردن

خواردن

یەک لە لێکۆڵینەوەکان دەریخستووە کە ئەو کەسانەی بڕی چەوری لە خواردنەکانیاندا کەمدەکەنەوە بۆ کەمتر لە 20% لە بەهای ئەو گەرمۆکە گەرمیەی دەیخۆن کەمتر تووشی سەرئێشان دەبن، ئەگەرهێمای c بۆ گەرمۆکەی گەرمی خواردنی تاکێك دابنرێت، پێویستە ژمارەی گەرمۆکەی چەوری F زیاتر نەبێت لە 20% ی c ئەمە بەڕێگای ڕستەی بیرکاری $F \le 0.2c$ دەردەبڕدرێن.

نموونەی ئەم جۆرە ڕستەیە پێیدەوترێت لاسەنگە **Inequality**.

بە شێوەیەکی گشتی هەر ڕستەیەکی بیرکاری ئەم هێمایانەی ($\le$; $\ge$; $<$; $>$) تێدابێت بریتییە لە لاسەنگە.

بۆ شیکاری لاسەنگەکان، سیفەتەکانی لاسەنگە لە نێوان ژمارە ڕاستییەکاندا بەکاربهێنە.

سیفەتەکانی لاسەنگە Properties of inequality

سیفەتی کۆکردنەوە **Addition Property** ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $a+c \le b+c$

سیفەتی لێدەرکردن **Substraction Property** ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $a-c \le b-c$

سیفەتی لێکدان **Multiplications Property** ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $ac \le bc$ کاتێك $c>0$
، ئەوا $ac \ge bc$ کاتێك $c<0$

سیفەتی دابەشکردن **Division Property** ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $\frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$ کاتێك $c>0$
، ئەوا $\frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$ کاتێك $c<0$

ئەم سیفەتانەی سەرەوە بە ڕاستی دەمێننەوە بە بەکارهێنانی هێماکانی تری لاسەنگە.

کۆمەڵەی شیکاری **Solution Set** لاسەنگە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی کە بە لەجیاتیدانانی لە لاسەنگەکەدا لاسەنگەکە ڕاست دەبێت.

بۆ نموونە دوو ژمارە ڕاستی $\frac{1}{2}$ ، -1 دوو شیکارن بۆ لاسەنگەی $6x+1<13$ ، چونکە بە لەجیاتیدانانی هەر یەکێك لەو دوو ژمارەیە لەجیاتی نەزانراوی x دوو لاسەنگەی ژمارەیی ڕاستمان ئەداتێ.

$6x+1<13$	$6x+1<13$
$6\left(\frac{1}{2}\right)+1\overset{?}{<}13$	$6(-1)+1\overset{?}{<}13$
$3+1\overset{?}{<}13$	$-6+1\overset{?}{<}13$
$4\overset{?}{<}13$ ڕاستە	$-5\overset{?}{<}13$ ڕاستە

خاڵی چاودێری ✓ ئایا دەتوانیت هەندێ شیکاری تر بۆ لاسەنگەکەی پێشوو بدۆزیتەوە؟ بەلەجیاتی دانان ساغبکەوە.

نموونە 1 لاسەنگەی $4x-5\geq 13$ شیکاربکە .

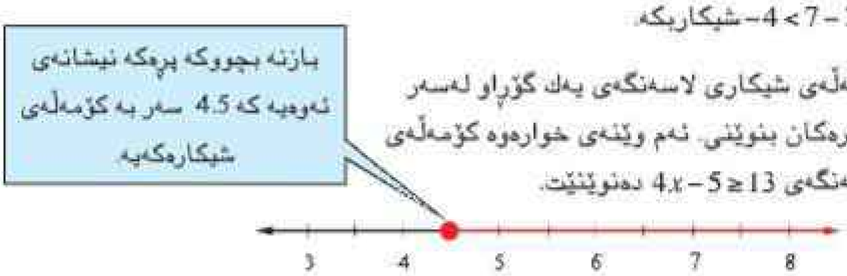
شیکار

$4x-5\geq 13$	لاسەنگەکەیە
$4x-5+5\geq 13+5$	سیفەتی کۆکردنەوە بەکاربهێنە
$4x\geq 18$	سادەکردن
$x\geq \frac{18}{4}=4.5$	سیفەتی دابەشکردن بەکاربهێنە

کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەکەی پێشوو بریتییە لە کۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستیانەی بچووکترنین لە 4.5 .

هەوڵبدە لاسەنگەی $3x-7<4-$ شیکاربکە.

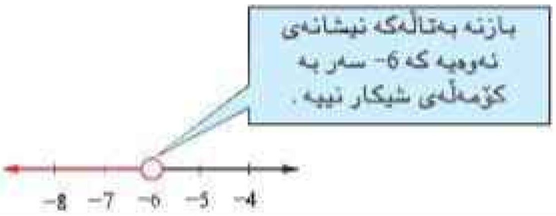
دەتوانی کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی یەك گۆڕاو لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنی. ئەم وێنەی خوارەوە کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $4x-5\geq 13$ دەنوێنێت.



نموونە 2 لاسەنگەی $4-3x>16-x$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

شیکار

$4-3x>16-x$	لاسەنگەکەیە
$4-3x+x>16-x+x$	سیفەتی کۆکردنەوە بەکاربهێنە
$4-2x>16$	سادەکردن
$4-2x-4>16-4$	سیفەتی دەرکردن بەکاربهێنە
$-2x>12$	سادەکردن
$\frac{-2x}{-2}<\frac{12}{-2}$	سیفەتی دابەشکردن بەسەر ژمارەیەکی سالب بەکاربهێنە
$x<-6$	سادەکردن



هەوڵبدە لاسەنگەی $5-7b>8-4b$ شیکاربکە.

نموونە
جێبەجێکردن
نەزموونەکان

3 نمرەی کۆتایی خوێندکار دیاریدەکرێت بە دوو نمرەی تاقیکردنەوە بە رێژەی دووسێیەک و ئەرکی ماڵەوە بە رێژەی سێیەک لە یەکێك لە خوێندگاکاندا. نمرەی سالار لە تاقیکردنەوەی مێژوودا 90 لە 100 بوو. **کەمترین نمرەی ئەرکی ماڵەوەکە پێویستە سالار وەریبگرێت چەندە بۆ ئەوەی نمرەی کۆتایی لە 93 لە 100 کەمتر نەبێت؟**

شیکار

دەتوانیت پێدراوەکانی پرسیارەکە بەم شێوەیەی خوارەوە بنووسیت.

$$\text{نمرەی کۆتایی} = \frac{2}{3}\left(\text{نمرەکانی تاقیکردنەوە}\right) + \frac{1}{3}\left(\text{نمرەکانی ئەرکی ماڵەوە}\right)$$

یان $f = \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ کە f نمرەی کۆتاییە، h نمرەی ئەرکی ماڵەوەیە بۆ ئەوەی f لە 93 کەمتر نەبێت پێویستە h شیکاری لاسەنگەی $93 \le \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ پێکبێنێت.

شیکاری ئەم لاسەنگەیە:

$93 \le \frac{1}{3}h + 60$	سادەبکە
$93 - 60 \le \frac{1}{3}h + 60 - 60$	سیفەتی لێدەرکردن بەکاربهێنە
$33 \le \frac{1}{3}h$	سادەبکە
$3 \times 33 \le 3 \times \frac{1}{3}h$	سیفەتی لێکدان بەکاربهێنە
$99 \le h$	سادەبکە

کەواتە، پێویستە نمرەی ئەرکی ماڵەوە لە 99 کەمتر نەبێت بۆ ئەوەی نمرەی کۆتایی لە 93 کەمتر نەبێت.

چالاکی

دۆزینەوەی شیکاری لاسەنگەکان بە ڕوونکردنەوەیی
Exploring Inequalities Grayphically

1. لاسەنگەی $2x - 3 < 3$ شیکاربکە.
2. وێنەی دوو ڕاستەهێڵی $y = 2x - 3$ و $y = 3$ لە هەمان ڕووتەختی بۆتان بکێشە.
3. بەهاکانی گۆڕاوی x دیاریکە کەوا دەکات ئەو خاڵەی سەر بە ڕاستەهێڵی $y = 3$ بەرزتر بێت لەو خاڵەی کە دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y = 2x - 3$.
4. ڕوونیبکەرەوە چۆن وەڵامی پرسیارەکەی پێشوو یارمەتیت دەدات بۆ شیکاری لاسەنگەکە.
5. لاسەنگەی $3x + 2 > 5$ بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە. هەنگاوەکان ڕوونبکەوە کە پێیان دەگەیتە شیکار.

ئایا ڕێگاکەی پێشوو بۆ شیکاری لاسەنگەی $2x - 3 > x + 4$ ؟ و هەروەها بۆ لاسەنگەی $3x + 1 \ge 4$ دەشێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

خاڵی چاودێری ✓

سەرنجێکی ڕەخنەگرانە

Compound Inequalities لاسەنگە ئاوێتەکان

ژوان ئەنجامی پشکنینی ڕێژەیی شەکری لە خوێنەکەی خۆیدا خوێندەوە، لەسەری نوسرابوو کە ئەم هێندە (s) پێویستە کەمتر نەبێت لە 750 ملیگرام لە لیترێکدا و زیاتر نەبێت لە 1100 ملیگرام لە لیترێکدا. کەواتە پێویستە s پاسادانی هەردوو مەرجی $s \ge 750$ و $s \le 1100$ بکات. واتە دەبێت شیکاری هاوبەش بۆ هەردوو لاسەنگەی $x \ge 750$ و $x \le 1100$ بێت.

کاتێك دوو لاسەنگە بە ئامرازی بەیەکبەستن «و»بەیەکتر دەبەسترێنەوە یا ∧ لاسەنگەیەکی ئاوێتەمان **Compound Inequality** دەستدەکەوێت.

بۆ شیکارکردنی لاسەنگەیەکی ئاوێتە بە ئامرازی «∧» بەیەکبەستراون، دەستبکە بە شیکارکردنی هەریەکە لە دوو لاسەنگەکە بەجیا و شیکارە هاوبەشەکەیان وەربگرە. واتە کۆمەڵەی شیکاری دوو لاسەنگەی ئاوێتە بە ئامرازی بەکتربەستنی «و» بریتییە لە کۆمەڵەی یەکتربڕینی هەردوو کۆمەڵەی شیکاری دوو لاسەنگەکە هەریەکیان بەجیا.

نموونە 4

شیکاری $(3x-4\le 17)$ وە $(2x+1\ge 3)$ بکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

شیکار

$3x-4\le 17$	و	$2x+1\ge 3$
$3x\le 21$	و	$2x\ge 2$
$x\le 7$	و	$x\ge 1$

کۆمەڵەی شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتەیە بریتییە لە کۆمەڵەی بەهاکانی x کە پاسادانی $1\le x\le 7$ دەکات. و لەسەر تەوەری ژمارەکان بەم شێوەیە دەنوێنرێت.

بەشێوەیەکی گشتی دەتوانی $(x<b)\wedge(x>a)$ بە شێوەی $a<x<b$ دەرببڕێت.

هەوڵبدە شیکاری $(x-5>-12)\wedge(-2x+5\ge 3)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

جۆرێکی تری لاسەنگە ئاوێتەکان کە بە ئامرازی «یان» دوو لاسەنگەکە دەبەسترێنەوە.

کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی ئاوێتە کە بە ئامرازی« ∨» بەستراونەتەوە بریتییە لە یەکگرتنی هەردوو کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەکان هەریەکەیان بەجیا.

نموونە 5

شیکاری $(3x+2\le -1)$ یان $(5x+1>21)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

شیکار

$3x+2\le -1$	یان	$5x+1>21$
$3x\le -3$	یان	$5x>20$
$x\le -1$	یان	$x>4$

هەوڵبدە شیکاری $(7x+1>36)\vee(2x\le 5)$ و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

ڕاهێنـــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 هەنگاوەکانی نواندنی کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $7x-7>0$ لەسەر تەوەری ژمارەکان ڕوونبکەوە.

2 کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $7x-7>0$ و کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $7x-7\geq 0$ بەچی جیاوازن؟ کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $7x-7>0$ و کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $7x-7<0$ بەچی جیاوازن.

3 ئایا هەردوو لاسەنگەی $x<16$ و $-x>-16$ هاوتان؟ ڕوونیبکەوە.

4 چۆن دەستەواژەی «x ژمارەیەکی سالب نییە» بەبەکارهێنانی ئامرازەکانی لاسەنگە دەنووسیت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

5 لاسەنگەی $3x+1<13$ شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

6 لاسەنگەی $a+4<4a-11$ شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

جیبەجێکردنەکان

7 **تاقیکردنەوەکان** نمرەی کۆتایی خوێندکار لە یەکێك لە خوێندگاکاندا بەیەکگرتنی نمرەی تاقیکردنەوەکان بە ڕێژەی $\frac{3}{4}$ و نمرەی کۆششی ڕۆژانە بە ڕێژەی $\frac{1}{4}$ دیاریدەکرێت. ئەگەر نمرەی کاروان لە کۆششی ڕۆژانەدا 92 لە 100 بێت ئەوا بەکەمترین نمرەی کاروان پێویستە وەریبگرێت لە تاقیکردنەوەکاندا بۆ ئەوەی نمرەی کۆتایی لە 80لە 100 کەمتر نەبێت چەندە؟

8 شیکاری لاسەنگە ئاوێتەی $(2x+3<15) \wedge (3x-7\geq -13)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

9 شیکاری لاسەنگە ئاوێتەی $(4x-6<14) \vee (2x+4\leq -10)$ بکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

لاسەنگەیەک بنووسە بگونجێت لەگەڵ ئەو شیکارەی لەسەر تەوەری ژمارەکان نوێنراوە

10

11

12

13

ئەم لاسەنگانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

14 $5x<10$

15 $-5x>10$

16 $-5x<-10$

17 $a+4<10$

18 $\frac{1}{3}a-1\geq -15$

19 $\frac{1}{5}b-2\leq 28$

20 $-x+8<41$

21 $-5x-15\leq 60$

22 $\frac{y}{2}\leq 10$

23 $-\frac{y}{32}<2$

24 $-6(b+4)<12$

25 $6-(4a-3)\geq 8$

26 $4y-12>7y-15$

27 $3(4y-5)<8y+3$

28 $-4x-3<-6x-17$

29 $-5(3x+2)\geq 4(x-1)$

شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتانە بکە و کۆمەڵە شیکارەکان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

30 $(x>-4)$ و $(x<2)$

31 $(x>-4)$ و $(x>2)$

32 $(x>-4)$ یان $(x>2)$

33 $(x>-4)$ یان $(x<2)$

34 $x > 2$ و $x < -4$

35 $x < 2$ و $x < -4$

36 $x < 2$ یان $x < -4$

37 $x > 2$ یان $x < -4$

شیکاری ئەم لاسەنگە ناوێتانە بکە. کۆمەڵەی شیکارەکان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

38 $n - 3 > 12$ و $n + 4 < 16$

39 $y + 4 > 7$ و $y - 2 < 4$

40 $x - 2 < 2$ یان $x + 7 > 4$

41 $x - 1 > 3$ یان $x + 8 < 5$

42 $2(x + 6) > -4$ و $-9x \geq -81$

43 $4(y - 3) \leq -8$ و $-5y < 40$

شیکاری ئەم لاسەنگە ناوێتانە بکە. کۆمەڵەی شیکارەکان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

44 $-4x \leq -20$ یان $20 - 3x \geq 11$

45 $5 - 4x \geq 17$ یان $14 - 3x \leq 2$

46 $8x \leq 3x - 15$ یان $2x > 7x - 10$

47 $\frac{1}{2}(16 - 4x) \geq 0$ یان $2x - 7 < 5x + 8$

48 شیکاری لاسەنگەی $-2a \leq 3x + a < 10$ بکە بە هەژماری بەهای نەزانراوی x بەپێی گۆڕاوەکانی تر.

بەرەنگاری

جێبەجێکردنەکان

49 **کاری خێرخوازی** یەکێك لە دامەزراوە خێرخوازەکان بڕیاریدا کە ڕاکێشانێکی خێرخوازی ئەنجامبدات لەسەر ئوتومبیلێك کە یەکێك لە کۆمپانیاکان بەخشیبووی. پێشبینی دامەزراوە خێرخوازەکە 1250 بلیت بە لایەنی کەمەوە بفرۆشێتەوە بە هیوای دەستکەوتنی 210 000 000 دینار.

کەمترین نرخ بۆ بلیتێك چەندە ئەگەر بزانیت تێچوونی ڕاگەیاندن 15 000 000 دینار بێت.

50 تێچووی بەرهەمهێنانی کاڵایەکی دیاریکراو بریتییە لە $C = 40x + 868$ و داهاتی فرۆشتن بریتییە لە $R = 54x$ ، هێمای x بریتییە لە ژمارەی یەکەکانی بەرهەمهێنراو، C هێمای تێچوونی بەرهەمی ئەم یەکانەیە.

أ لاسەنگەیەك بنووسە دەستکەوتی قازانج دەرببڕێت.

ب بەلایەنی کەمەوە دامەزراوەکە پێویستە چەند یەکە بفرۆشێت بۆ ئەوەی زەرەر نەکات؟

ج لاسەنگەکەی پێشوو بکە بە ڕوونکرنەوەیی شیکاریکە.

ڕوانینێك بۆدواوە

شیکاری ئەم هاوکێشە پێتیانە بکە بە هەژمێرکردنی نەزانراوی ناو دوو کەوانەکە بەپێی نەزانراوەکانی تر

51 $A = p + prt$ (t)

52 $SA = 2ab + 2ac + 2bc$ (a)

ڕوانینێك بۆپێشەوە

53 دوو ژمارە دیاریکە کە بەهای ڕووتی هەریەکەیان بکاتە 4.

وانەی 4

هێزەکان و ڕەگەکان

Powers and Radicals

ئامانجەکان

- بەهای بڕێك هەژمێرەکات کە هێزی تێدابێت.
- ئەو بڕانەی هێزیان تێدایە سادەکات بەبەکارهێنانی یاساکانی هێز

بۆچی

زۆرجار هێزەکان لە جێبەجێکردنە جیاوازەکاندا دەبینین. وەك چۆن لەفیزیادا، لەو چەقە هێزەی تووشی سواربوویەك دەبێت لەسەر چەرخێکی خێرا لە شاری یاری. دەکرێت ئەمە دەربڕین بەبەکارهێنانی هێزەکان.

جێبەجێکردنەکان
فیزیا

لەو یاریانەی کە زیاتر خەڵك پێی خۆشە لە شاری یاریدا، ئەو چەرخەیە کە دەسوڕێتەوە بە خێراییەکی زۆر بە دەوری تەوەرەیەکدا، کە دەبێتە هۆی دروستبوونی چەقەهێز. دەکرێت ئەو هێزە دەربڕێت بەم ڕێسایەی خوارەوە.

$$A = 4\pi^2 r T^{-2}$$

A هێمای چەقەهێز بێت

r نیوەتیرەی چەرخەکە بێت.

T کاتی پێویست بێت بۆ تەواوکردنی خولێکی تەواو

پێشتر مامەڵەت کردووە لەگەڵ هێمای a^n و پێی دەوترێت هێزی ژمارەی **Power** a بە توانی n ، واتە a بنچینەیە **Base** ، و n توانە **Exponent** و a^n دەخوێنرێتەوە a توان n .

هێزی ژمارەیەکی ڕاستی   Power of a Real Number

ئەگەر a ژمارەیەکی ڕاستی بێت ئەوا :

$a^n = \overbrace{a \times a \times \ldots \times a}^{n \text{ جار}}$ (n جار) کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی مووجەب بێت.

$a^n = 1$ کاتێك $n = 0$ کەواتە $a^0 = 1; a \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت و $a \neq 0$.

ناکرێت ژمارەی a بکاتە سفر لە بڕی a^0 چونکە 0^0 پێناسە نەکراوە. نموونەی 1 بۆمان ڕووندەکاتەوە کە چۆن پێناسەی $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ بەکاردێت.

نموونە 1

بە گەڕانەوە بۆنموونەی چەقەهێز، هەژمێری تاوداني ئەو هێزە بکە، کە سواربوویەك لە چەرخێکدا دەسوڕێتەوە نیوەتیرەکەی 6m بێت بە خێرایی یەك خول لە دوو چرکەدا.

شیکار

بەهای بڕی $A = 4\pi^2 rT^{-2}$ هەژمێر بکە کاتێك $r = 6$ ، $T = 2$ ، ئەمەت دەستدەکەوێت.

$$A = 4\pi^2 rT^{-2} = 4\pi^2(6)(2)^{-2} = \frac{24\pi^2}{2^2} = \frac{24\pi^2}{4} = 6\pi^2 \approx 59.2$$

هەوڵبدە هەژماری تاوداني ئەو هێزە بکە کە سواربوویەك بۆ یەك خول لە 5 چرکەدا دەسوڕێتەوە لە چەرخێکدا نیوەتیرەکەی 6 مەترە.

چالاکی

Exploring Properties of Exponents دۆزینەوەی سیفەتەکانی هێز

1. دووبارە $a^3 \times a^5$ بنووسە وە بە شێوەی هێز بە ڕێگای هەڵوەشاندنەوەی هەریەك لە هەردوو هێزەکە و دووبارە کۆکردنەوەی کۆڵکەکان. ئەو کردارە کامەیە کە دەتوانیت بیکەیت لەسەر هەردوو توانەکە بۆ ئەوەی هەمان ئەنجامت دەستبکەوێت؟
2. دووبارە بڕی $(a^3)^5$ بە شێوەی هێز بنووسەوە بە ڕێگای هەڵوەشاندنی هەردوو هێزەکە و دووبارە کۆکردنەوەی کۆڵکەکان. ئەو کردارە کامەیە کە دەتوانیت بیکەیت لەسەر هەردوو توانەکە بۆ ئەوەی هەمان ئەنجامت دەستکەوێت؟
3. چۆن بڕی $(a^3 \times a^7)^2$ بە سادەترین شێوە دەنووسیت بە شێوەی هێز، بێ هەڵوەشاندنەوەی هێزەکان. ئەمە ڕوونبکەوە.

خاڵی چاودێری ✓

ئەو چالاکییەی سەرەوە یارمەتیت دەدات بۆ بەدەستهێنانی ئەم سیفەتانەی خوارەوە بۆ هێزەکان کاتێك $a \neq 0$ ، $b \neq 0$

Properties Exponents $b \neq 0$ ، $a \neq 0$ سیفەتەکانی هێز

لێکدانی هێزەکان	Product of Powers	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
دابەشبوونی هێزەکان	Divide of Powers	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
هێزی هێزەکان	Power of a Power	$(a^m)^n = a^{mn}$
هێزی ئەنجامی لێکدان	Power of a Product	$(ab)^n = a^n \times b^n$
هێزی ئەنجامی دابەشکردن	Power of a Quotient	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ، $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

لەم وانەیەدا وای دادەنێین هەموو ژمارە بەکارهێنراوەکان بۆ بنچینەی هێزی توان سالب بریتیە لە ژمارەی جیاواز لە «سفر».

نموونە 2

بڕی $3x^2y^{-2}(-2x^3y^{-4})$ سادەبکە. ئەنجام بەبەکارهێنانی هێزەکانی توانی موجەب بنووسە.

شیکار

$3x^2y^{-2}(-2x^3y^{-4})$	بڕەکەیە
$= 3(-2)x^2x^3y^{-2}y^{-4}$	سیفەتی ئاڵوگۆڕ لە لێکدان بەکاربهێنە
$= -6x^{3+2}y^{-2+(-4)}$	سیفەتی لێکدانی هێزەکان بەکاربهێنە
$= -6\frac{x^5}{y^6}$	سادەکردن و بەکارهێنانی $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

هەوڵبدە بڕی $2z(3x^2)(5z^{-3})$ سادەبکە پاشان ئەنجامەکە بە بەکارهێنانی هێزەکانی توان موجەب بنووسە.

شیکارکردنی پرسیارەکان **بەدوای شێوازێکدا بگەڕێ** سەرنج بدە لەوەی لە هێزی ژمارەی سالب ڕوودەدات.

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$$
$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$
$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$$
$$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$$

تێبینی بکە هێزی ژمارەی سالب بریتییە لە ژمارەیەکی موجەب کاتێك توانەکە جووت بێت و دەکاتە ژمارەیەکی سالب کاتێك توانەکە تاك بێت.

پێویستە ئاگاداری ئەوە بیت کە بنچینەی سالب و توانی سالب تێکەڵ نەکەیت.

توانی جووت	توانی تاك
$(-2x)^{-2}$	$(-2x)^{-3}$
$=\frac{1}{(-2x)^2}$	$=\frac{1}{(-2x)^3}$
$=\frac{1}{(-2)^2x^2}$	$=\frac{1}{(-2)^3x^3}$
$=\frac{1}{4x^2}$	$=\frac{1}{-8x^3}=-\frac{1}{8x^3}$

نموونە 3 بڕی $\left(\frac{-y^7}{2x^{12}y^3}\right)^4$ سادەبکە ئەنجامەکە بە توانی موجەب بنووسە.

شیکار

$\left(\frac{-y^7}{2x^{12}y^3}\right)^4 = \frac{(-y^7)^4}{(2x^{12}y^3)^4}$ سیفەتی هێزەکانی ئەنجامی بەشکردن بەکاربهێنە

$= \frac{y^{28}}{16x^{48}y^{12}}$ سیفەتی هێزی هێز بەکاربهێنە

$= \frac{y^{28-12}}{16x^{48}}$ سیفەتی دابەشبوونی هێز بەکاربهێنە

$= \frac{y^{16}}{16x^{48}}$ سادەبکە

هەوڵبدە بڕی $\left(\frac{-3x^2y^5}{2y^2x^7}\right)^3$ سادەبکە و ئەنجامەکە بە توانی موجەب بنووسە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە هەریەکە لە a ، b ، c بدۆزەوە کاتێك $(x^{-2}y^3z^2)(y^az^bx^c) = x^{-3}y^4$.

ڕەگەکان Radicals

دەتوانیت ئەو هێزانەی توانەکانیان ڕێژەیین بە شێوەیەکی تر بنووسیت کە ڕەگەکان لەخۆبگرێت. بڕی $a^{\frac{1}{3}}$ دەکاتە $\sqrt[3]{a}$ چونکە $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3}\times 3} = a^1 = a$. ئەم پەیوەندییە ڕاست دەبێت بۆ هەموو هێزێك کە توانی ڕێژەیی هەبێت.

واتە دەتوانیت بڕی $a^{\frac{2}{3}}$ بە چەند شێوەیەك وەك لە خوارەوە دێت بنووسیت.

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}\times 2} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$$

Powers With Rational Exponents — **ئەو هێزانەی کە توانی ڕێژەییان هەیە**

ئەگەر a ژمارەیەکی ڕاستی موجەب بێت ئەوا :

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ کاتێك n ژمارەیەکی تەواوی موجەبە و گەورەترە لە 1 .

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} = \sqrt[n]{a^{m}}$ کە m ، n دوو ژمارەی تەواوین و n موجەب بێت.

ئەم نموونەیەی خوارەوە پێناسەکەی سەرەوە ڕووندەکاتەوە.

نموونە 4 **هەژمێری بەهای هەریەکە لەم دوو بڕەیە $16^{\frac{1}{4}}$ وە $27^{\frac{4}{3}}$ بکە.**

شیکار

$$16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{4\times\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$$

$$27^{\frac{4}{3}} = (3^3)^{\frac{4}{3}} = 3^{3\times\frac{4}{3}} = 3^4 = 81$$

وەڵامەکەت بەبەکارهێنانی بژمێر پاسەدانبکە

هەوڵبدە **هەژماری بەهای هەریەکە لەم دوو بڕەیە $36^{\frac{3}{2}}$ و $64^{\frac{1}{3}}$ بکە.**

جێبەجێکردنەکان
پزیشکی

پزیشکەکان بۆ خەمڵاندنی ڕووبەری گشتی مرۆڤ ڕێسایەك بەکاردەهێنن بە پشتبەستن بە درێژی و کێش، ئەوەش بۆ هەژمێری بڕی هەندێك دەرمان کە دەیدرێتێ و ڕێساکە ئەمەیە $S = 0.007184 \times W^{0.425} \times H^{0.725}$ کە S ڕووبەری گشتییە بە مەتر دووجا، W کێشە بە کیلۆگرام و H درێژییە بە سانتیمەتر.

نموونە 5 **هەژمێری ڕووبەری گشتی مرۆڤێك بکە کێشەکەی 57.2kg و درێژییەکەی 152.5cm بێت. وەڵامەکەت بنووسە بۆ نزیکترین بەشی دەیی لە مەتر دووجا.**

شیکار

$$S = 0.007184 \times W^{0.425} \times H^{0.725}$$
$$= 0.007184 \times (57.2)^{0.425} \times (152.5)^{0.725}$$
$$\approx 1.54$$

بەم پێیە ڕووبەری گشتی ئەو مرۆڤە بە نزیکەیی دەکاتە $1.5m^2$.

هەوڵبدە هەژماری ڕووبەری گشتی مرۆڤێك بکە کە کێشەکەی 62.3kg و درێژی 180cm بێت. وەڵامەکە بنووسە بۆنزیکترین بەشی دەیی لە مەتر دووجادا.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. ڕوونیبکەوە بۆچی ئەم دوو بڕە یەکسان نین $a^5 \times a^3$ و $(a^5)^3$.
2. ڕوونیبکەوە بۆچی ئەم دوو بڕە یەکسان نین ab^3 و $(ab)^3$
3. ڕوونیبکەوە چۆن هەژمێری 5^{-2} دەکەیت.
4. ڕوونیبکەوە چۆن $4^{\frac{3}{2}}$ هەژمار دەکەیت بەبەکارهێنانی پێناسەی هێزەکان کە توانی ڕێژەییان هەیە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

جێبەجێکردنەکان

5 **فیزیا** هەژمێری تاودانی چەقەهێزی نموونەی (سامپڵ) فرۆکەیەك بکە کە دەسوڕێتەوە بە خێرایی یەك خول لە چرکە و نیوێکدا بە دەوری تەوەرەیەکدا کە 3m لێوەی دوورە.

ئەمانە سادەبکە. وەڵامەکان تەنها بەبەکارهێنانی توانی موجەب بنووسە

6 $a^4 \times a^2$ **7** $\frac{x^9}{x^3}$

8 $(y^3)^6$ **9** $(a^3b^7)^4$

10 $(y^5y^{-2})^4$ **11** $\left(\frac{-2x^3y}{5x^7}\right)^2$

12 $\left(\frac{a^3b^{-1}}{a^{-2}b^2}\right)^{-2}$ **13** $\left(\frac{1}{x^{-1}y^3z^0}\right)^{-1}$

هەژماری ئەم بڕانە بکە

14 $(100)^{\frac{1}{2}}$ **15** $(9)^{\frac{3}{2}}$ **16** $(27)^{\frac{1}{3}}$ **17** $(64)^{\frac{2}{3}}$

18 **پزیشکی** بەبەکارهێنانی بژمێر هەژمێری ڕووبەری کەسێك بکە کێشەکەی 53.64kg و درێژییەکەی 167.64cm بێت، وەڵامەکەت نزیکبکەوە بۆنزیکترین بەش لە سەد.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەمانە هەژمار بکە

19 3^0 **20** 9^0 **21** $(5a)^0$ **22** $(2^52^3)^0$

23 6^{-1} **24** 4^{-2} **25** $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ **26** $\left(\frac{4}{5}\right)^2$

27 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ **28** $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$ **29** $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ **30** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

31 $(49)^{\frac{1}{2}}$ **32** $(27)^{\frac{2}{3}}$ **33** $(64)^{\frac{4}{3}}$ **34** $(25)^{\frac{3}{2}}$

35 $(36)^{\frac{6}{4}}$ **36** $8^{\frac{2}{6}}$ **37** $-(64)^{\frac{2}{3}}$ **38** $(81)^{-\frac{3}{2}}$

ئەم بڕانە سادەبکە. وەڵامەکان تەنها بە توانی موجەب بنووسە.

39 y^5y^2 **40** $-2b^3b^5$ **41** $\frac{m^9}{m^5}$ **42** $\frac{bb^4}{b^2}$

43 $\frac{x^2y^{-5}}{x^4}$ **44** $\frac{x^5m^2}{xm^{-4}}$ **45** $\left(\frac{-2y^2}{x^3}\right)^7$ **46** $\left(\frac{2b^4}{d^2}\right)^3$

47 $\left(\frac{3x^4}{y^{-2}}\right)^{-1}$ **48** $\left(\frac{15xy^3}{3y^2}\right)^{-1}$

49 $\left(\frac{2x^{-3}}{(2x)^3}\right)^{-1}$ **50** $\left(\frac{-7y^{-2}}{x^5}\right)^6$

51 $-2y^3(5xy^4)$ **52** $(6x^5)(3x^5)(x^0)$

53 $(-5m^4m^5)^2$ **54** $(-3x^2y^7)^3$

55 $\left(\frac{-2b^5y^{-1}}{m^3}\right)^3$ **56** $\left(\frac{3b^2y^3}{b^{-1}}\right)^{-5}$

57 $\left(\frac{5b^2x^{-2}}{x^{-3}}\right)^{-1}$ **58** $\left(\frac{x^{-2}y}{b^{-1}}\right)^5$

59 $\left(\frac{4b^2y^{-3}}{b^{-1}y^2}\right)^2$ **60** $\left(\frac{15b^2x^{-2}}{-3bx^{-3}}\right)^{-2}$

61 $(2x^4y)^3$ **62** $(3xb^{12})^3$

63 $(x^{-3}y^{-1})(x^{-3}y^0)^2$ **64** $(x^{-3}y^2)(-2x^3y^7)^{-3}$

65 $\left[\frac{(x^3y^5)^2}{x^5y^2}\right]^{-1}(x^{-3}y^0)^2$

بۆ هەژمارکردنی بەهای ئەم بڕانە بژمێر بەکاربهێنە

66 $12^{6.05}+8.8^{3.24}$ **67** $3.3^{2.7}-5^{1.9}+0.63^{0.95}$

68 $0.005^{21.53}+9.05^{0.034}$ **69** $71.33^{0.44}+478.2^{0.4}$

70 $11.7^6+29.3^{1.23}-6^{-2.2}$ **71** $89^{3.5}-5.25^{9.25}+324^{0.05}$

بەرەنگاری

72 ڕوونیبکەوە $y^{a-b}=\frac{1}{y^{b-a}}$ ، کە $y\neq0$

73 ڕوونیبکەوە $\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x-y}=-\frac{1}{xy}$

بەستنەوە

74 ئەندازە ڕێسای $h=\frac{3}{\pi}Vr^{-2}$ کە h بەرزی قووچەکێکمان بەپێی قەبارەکەی V و نیوەتیرەی بنکەکەی r دەداتێ.

أ هەژماری بەرزی قوچەکێك بکە قەبارەکەی $200cm^3$ و نیوەتیرەی بنەکەکەی 4cm . وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە دە بنووسە.

ب ڕێساکەی سەرەوە بنووسە بەبەکارهێنانی تەنها توانی موجەب.

جێبەجێکردنەکان

75 ئەندازەی بیناسازی هاوکێشەی $F=5\times10^{-3}r^4l^{-2}$ ئەوپەڕی باری ئەستوونی بیناییەکمان بە تەن دەداتێ کاتێك F ئەوپەڕی بار بێت بەتەن و l بەرزی ئەستوونە کەبێت بە مەتر و r نیوەتیرەی بنکەی ئەستوونەکە بێت بە سانتیمەتر.

أ هەژمێری ئەوپەڕی باری ئەستوونێك بکە بەرزیەکەی 2m و نیوەتیرەی بنکەکەی 50cm .

ب ڕێساکەی پێشوو بەبەکارهێنانی توانی موجەب بنووسە.

کیمیا تیشکدانەوەی پلۆتۆنیۆم *Plotonium* زۆر بە هێواشی کەم دەکات. ڕێژەی سەدی پلۆتۆنیۆمی ماوە (A) پاش x ساڵ دیاریدەکرێت بەم ڕێسایەی خوارەوە.

$A=100\times\left(0.5^{\frac{x}{24360}}\right)$ ڕێژەی سەدی پلۆتۆنیۆمی ماوە دیاریبکە پاش.

76 100 ساڵ **77** 500 ساڵ **78** 1000 ساڵ **79** 5 000 ساڵ

فیزیا پەستانی هەوا کەم دەبێتەوە بە بەرزبوونەوە لە ڕووی ئاستی دەریا. ئەم پەستانە دیاریدەکرێ بەپێی ڕێسای $P = 14.7(10)^{-0.000064a}$ کە a بەرزییە لە ڕووی دەریا بە مەتر و p پەستانی هەوایە بە مللیمەتری جیوە.

80 پەستانی هەوا لە شارێکدا دەکاتە چەند کە 1610m لە ڕووی ئاستی دەریا بەرزە.

81 پەستانی هەوا لە چیای ئیڤەریست چەند دەبێت کە بەرزیەکەی لە ڕووی دەریاوە 8848m ـە؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

شیکاری ئەم لاسەنگە ناوێتانە بکە. کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

82 $x < 1$ و $x > -3$

83 $x > \frac{1}{2}$ و $x > -\frac{1}{4}$

84 $x < 1$ یان $x > -3$

85 $x > \frac{1}{2}$ یان $x > -\frac{1}{4}$

هەژمێری ئەم بڕانە بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

86 $2(3-1)+6\div 3\div 2$

87 $3(9-12)-2(7-3)-1$

88 $3\times 5^2 - 4(5-8)^2 + 3$

89 $(5-3)^{\frac{10-8}{13-12}}$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

90 **وەچەکان** دایك و باوکت نەوەی یەکەمن لە وەچەکانت (باوانت). ئەو کاتە هەردوو باپیرە و هەردوو داپیرە (نەنك) دەبنە نەوەی دووەم. بەڵام نەوەی سێیەم 4 باپیر و 4 داپیر دەگرێتەوە و هەروەها. ڕێسایەك بنووسە کە ڕێگات پێدەدات بە هەژماری وەچەکان لە n نەوە. هێزەکان بەکاربهێنە لە نووسینی ئەم ڕێسایە.

وانەی 5

شیکارکردنی سیستمی هێڵییەکان بەلەجیاتیدانان

Solving Linear Systems by Substitution

بۆچی

زۆرجار پێویستت بە شیکارکردنی سیستمێک دەبێت کە لەدوو هاوکێشەی هێڵی پێکهاتووە و وەڵامی تەواوت دەداتێ بەبێ نزیککردنەوە وەک فرۆشیارێک لە بازاردا پێویستی بە دیاریکردنی نرخی هەر کاڵایەک هەیە بەوردی بۆ ئەوەی قازانجی پێویستی دەستبکەوێت

ئامانجەکان

- سیستمێک کە لە دوو هاوکێشەی هێڵی پێکهاتووە بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاردەکات.

لە پۆلی نۆهەمدا فێری سیستمی هاوکێشە هێڵیەکان بوویت و هەڵسایت بە شیکارکردنی هەندێکیان. و لەم پۆلەدا فێری چەند ڕێگایەک دەبیت بۆ شیکارکردنی ئەم جۆرە سیستمانە. و هەروەها لەسەرەتادا فێری ڕێگای لەجیاتیدانان دەبیت.

چالاکی

دۆزینەوەی ڕێگای لەجیاتیدانان — Exploring Substitution

جێبەجێکردنەکان

پێشبرکێی ئۆتۆمبێل

پێشبرکێی ئوتومبیلەکان لەشاری سبرنغ لە وولاتە یەکگرتووەکانی ئەمریکا ئەنجامدەدرێت یەکێکە لە گرنگترین پێشبرکێی ئوتومبیلەکان. لەم پێشبرکێیەدا هەر ئوتومبێلێك دوو شوفێری لێیدەخورێت و هەریەك لەو شوفێرانە چەند خولێك ئەنجام دەدەن. تیپی ستیف و مایکل 157 خولیان ئەنجامدا، ئەگەر مایکل 21 خولی لە ستیف کەمتر ئەنجام دابێت، ئایا هەریەکەیان چەند خولی ئەنجامداوە؟

1. بە نووسینی هاوکێشەکان دەستپێبکە بۆ ئەوەی نموونەیەکی بیرکاری بۆ شیکاری پرسیارەکە بدۆزیتەوە. نەزانراوی x هەڵبژێرە بۆ نواندنی ژمارەی خولەکانی کە ستیف ئەنجامیداوە و نەزانراوی y هەڵبژێرە بۆ نواندنی ژمارەی خولەکان کە مایکل ئەنجامیداوە سستەمێکی دوو هاوکێشەیی هێڵیت بە دوو نەزانراو x ، y دەست دەکەوێ
$$\begin{cases} x+y=157 \\ y=x-21 \end{cases}$$

شیکاری پرسیار

2. ڕێگای خەملێنە و ساغبکەوە بۆ دۆزینەوەی بەهای x ، y بەکاربهێنە کە دەبنە شیکاری سستەمی دوو هاوکێشە.
3. سەیری هاوکێشەی دووەم بکە $y=x-21$ ، ئەم زانیارییە دەربارەی y چۆن بەکاردەهێنیت لە هاوکێشەی یەکەمدا؟
4. لەبەر ئەوەی $y=x-21$ ،پێویستە لە هاوکێشەی یەکەمدا لە جیاتی y بەهای $x-21$ دابنێیت پاشان هاوکێشەی دەستکەوت بۆ دۆزینەوەی بەهای y شیکاربکە.
5. لە هاوکێشەی دووەمدا بەهای نەزانراوی x دابنێ بۆ هەژماری بەهای y .

خاڵ چاودێری ✓

6. بەهای x و y بەراوردبکە لەگەڵ ئەو دوو بەهایەی لە ڕێگەی بخەملێنەو ساغبکەوە دەستتکەوتووە. ئایا ئەم دوو ئەنجامە جووتن؟ ڕوونیبکەوە.

ئەگەر بەهای یەکێك لەدوو نەزانراوی سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی بزانیت، ئەوا دەتوانیت سیستمەکە بە لەجیاتی دانانی بەهای ئەم نەزانراوە لە یەکێك لە دوو هاوکێشەکە شیکاربکەیت. ئەم ڕێگایە بەبۆ شیکاری سستەمەکە پێی دەوترێت ڕێگای لەجیاتی دانان **Substitution method**.

نموونە 1 سیستمی $\begin{cases} 8x+2y=19 \\ x=3 \end{cases}$ بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە

شیکار

لەبەر ئەوەی $x=3$ ، دەتوانیت لەجیاتی x لە هاوکێشە یەکەمدا بەهاکەی دابنێی.

هاوکێشەی دەستکەوتوو شیکاربکە بۆ دۆزینەوەی بەهای نەزانراوی y.

$$8(3)+2y=19$$
$$24+2y=19$$
$$2y=-5$$
$$y=-2.5$$

جووتە ڕێکخراوی $(3, -2.5)$ شیکاری سستەمەکەیە

ڕاستی شیکارەکە ساغبکەوە بە لەجیاتیدانانی x و y لە هاوکێشەی یەکەمدا

$$8(3)+2(-2.5)\overset{?}{=}19$$
$$24+(-5)\overset{?}{=}19$$
$$19=19$$ ڕاستە

نموونە 2 سستەمی $\begin{cases} 15x-5y=30 \\ y=2x+3 \end{cases}$ شیکاربکە بە ڕێگای لەجیاتیدانان.

شیکار

لەجیاتی y بەهای $2x+3$ لە هاوکێشەی یەکەمدا دابنێ پاشان هاوکێشە دەستکەوتووەکە شیکاربکە.

$$15x-5(2x+3)=30$$
$$15x-10x-15=30$$
$$5x-15=30$$
$$5x=45$$
$$x=9$$

بەهای 9 لە جیاتی x لە هاوکێشەی دووەمدا دابنێ پاشان هاوکێشە دەرچووەکە شیکاربکە.

$$y=2(9)+3$$
$$=18+3$$
$$=21$$

شیکارەکە بریتییە لە جووتە ڕێکخراوی $(9, 21)$.

ڕاستی شیکارەکە ساغبکەوە بە لەجیاتیدانانی بەهای x و y لە دوو هاوکێشە سەرەکییەکەدا.

$$15(9)-5(21)\overset{?}{=}30$$
$$135-105\overset{?}{=}30$$
$$30=30$$ ڕاستە

$$21\overset{?}{=}2(9)+3$$
$$21\overset{?}{=}18+3$$
$$21=21$$ ڕاستە

هەوڵبدە ئەم سستەمانە بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە.

أ $\begin{cases} 2x+5y=14 \\ y=5 \end{cases}$

ب $\begin{cases} -3x+2y=31 \\ x=0.5y+6 \end{cases}$

نموونە 3

سستەمی $\begin{cases}3x+y=4\\5x-7y=11\end{cases}$ بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە.

شیکار

بۆ ئەوەی ڕێگای لەجیاتیدانان بەکاربهێنیت، شیکاری هاوکێشەی یەکەم بکە بۆ هەژمارکردنی بەهای y بەپێی x.

$$3x+y=4$$
$$3x+y-3x=4-3x$$
$$y=4-3x$$

ئاسانترین هاوکێشە بۆشیکارەکە هەڵبژێرە.

لەجیاتی y لە هاوکێشەی دووەمدا بەهاکەی $4-3x$ دابنێ پاشان هاوکێشەکەی شیکاربکە.

$$5x-7y=11$$
$$5x-7(4-3x)=11$$
$$5x-28+21x=11$$
$$26x-28=11$$
$$26x=39$$
$$x=1.5$$

لەجیاتی x بەهای 1.5 لە هاوکێشەی یەکەمدا دابنێ پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$$3(1.5)+y=4$$
$$4.5+y=4$$
$$y=-0.5$$

شیکار بریتییە لە جووتە ڕێکخراوی $(1.5, -0.5)$.

ڕاستی شیکارەکە ساغبکەوە بەلەجیاتیدانانی بەهای x و y لە هەردوو هاوکێشە بنەڕەتییەکەدا.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بۆچی لە نموونەی 3 دا هەستایت بە هەژمارکردنی نەزانراوی y بەپێی x لە هاوکێشەی یەکەمدا لە جیاتی هەژمارکردنی x بەپێی y ؟

هەوڵبدە سستەمی $\begin{cases}6x-2y=11\\x+3y=4\end{cases}$ بەڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە.

نموونە 4

جێبەجێکردنەکان
بازرگانی

سۆران لە یاریەکانی کۆتایی تۆپی پێدا کڵاو دەفرۆشێت، 100 کڵاوی وەرزی پێشووی لاماوە و 300 کڵاوی تازەی هەیە. سۆران لەم وەرزە دەیەوێت هەموو کڵاوەکان بە 000 300 5 دینار بفرۆشێت. دەبێ نرخی چەند بۆ کڵاوی تازە و کڵاوی کۆن دابنێت بۆ گەیشتن بەو ئامانجە، ئەگەر بزانیت نرخی کڵاوێکی تازە 7000 دیناری لە نرخی کڵاوێکی کۆن زیاترە.

شیکار

بە هەڵبژاردنی دوو نەزانراو دەستپێدەکەم. با نەزانراوی d بۆ هێمای نرخی کڵاوە کۆنەکە هەڵدەبژێرم و هێمای n نرخی کڵاوێکی تازە بێت.
سستەمی دوو هاوکێشەکە بنووسە بۆ شێکای پرسیارەکە

$$\begin{cases}300n+100d=5\,300\,000\\n=d+7\,000\end{cases}$$

لەجیاتی n لە هاوکێشەی یەکەمدا نرخی $d+7000$ دابنێ پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$$300\,(d+7000)+100d=5\,300\,000$$
$$300d+2\,100\,000+100d=5\,300\,000$$
$$400d+2\,100\,000=5\,300\,000$$
$$400d=3\,200\,000$$
$$d=8\,000$$

لەجیاتی d نرخی 8 000 لە هاوکێشەی دووەمدا دابنێ پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$$n=8\,000+7\,000$$
$$n=15\,000$$

شیکارەکە بریتیە لە (8000 ، 15 000) سۆران پێویستە کڵاوە تازەکان بە نرخی 15 000 دینار بفرۆشێت و کڵاوە کۆنەکان بە 8 000 دینار بفرۆشێت.

ڕاهێـــــــــنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەگەر بزانیت $x = 42$، ئەوا چۆن لە جیاتیدانان بەکاردێنێت بۆشیکاری هاوکێشەی $y = x + 8$؟

2 دوو هاوکێشەی $-4x + y = 2$ و $2x + 3y = 34$ هەبێت، ئاسانترین نەزانراو و ئاسانترین هاوکێشە هەڵبژێرە بۆ دەستپێکردنی شیکار و هۆی هەڵبژاردنەکەت دیاریکە پاشان شیکاریان بکە.

3 ڕوونیبکەوە چۆن لەجیاتیدانان بە کاردەهێنێ بۆ شیکارکردنی سیستمی $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم سیستمانە بەلەجیاتیدانان شیکار بکە پاشان پاسادانی شیکارەکە ساغبکەوە.

4 $\begin{cases} 5x = 3y + 12 \\ x = 5 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

8 سەرجەمی دوو ژمارە دەکاتە 27 ، گەورەکەیان 3 ی زیاترە لەوەی تریان ئەم دوو ژمارەیە کامانەن.

ئەم سستەمانە شیکاربکە

9 $\begin{cases} 2x + 8y = 1 \\ x = 2y \end{cases}$

10 $\begin{cases} x = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

12 $\begin{cases} y = 5 - x \\ 1 = 4x + 3y \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x + y = -92 \\ 2x + 2y = -98 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x + y = 4 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 6y = x + 18 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 10x = 4y - 2 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2y + x = 4 \\ y - x = -7 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 4y - x = 15 \\ y + x = 6 \end{cases}$

19 $\begin{cases} y = x - 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ -3x - 6y = -24 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 5x - 7y = 31 \\ -4x + 2y = -14 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 3x + y = 21 \\ 10x + 5y = 65 \end{cases}$

23 $\begin{cases} -3y = 9x + 24 \\ 6y + 2x = 32 \end{cases}$

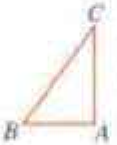
24 $\begin{cases} 12x + 4y = 22 \\ 3x - 8y = -10 \end{cases}$

25 $\begin{cases} 11x + 4y = -17 \\ -6x + y = 22 \end{cases}$

26 $\begin{cases} -5x + 7y = -41 \\ 7x + y = 25 \end{cases}$

بەستنەوە

27 **ئەندازە** درێژی و پانی لاکێشەیەک بدۆزەوە ئەگەر زانیت چێوەکەی یەکسانە بە 208m و درێژییەکەی دوو ئەوەندەی پانیەکەیەتی.



28 **ئەندازە** سەرجەمی پێوانەی دوو گۆشەی B و C لە سێگۆشەی بەرامبەردا دەکاتە $90°$. هەژماری پێوانەی هەریەکە لە گۆشەکانی سێگۆشەکە بدۆزەوە ئەگەر بزانیت پێوانەی گۆشەی B $30°$ کەمترە لە دوو ئەوەندەی پێوانەی گۆشەی C.

بەستنەوە

29 **بیردۆزی ژمارەکان** ژمارەی x چواری کەمترە لە سێ ئەوەندەی ژمارە y، ئەگەر دوو ئەوەندەی y کەم بکرێتەوە لە کۆی 3 لەگەڵ دوو ئەوەندەی x دەکاتە 11. ئەو دوو ژمارەیە چەندن؟

سستەمی دوو هاوکێشەی هێڵی بۆهەر پرسیارێک بنووسە پاشان شیکاریانبکە

30 **بۆخۆشی** باڵۆنێک لە زەویەوە بەرزبووەوە بە خێرایی 4m لە خولەکێکدا، و لە هەمان کاتدا باڵۆنێکی تر لە بەرزی 756m دەستیکرد بە هاتنە خوارەوە بەخێرایی 3m لە خولەکێکدا پاش چەند خولەک دوو پەرەشوتەکە بەیەکتردەگەن.

31 **کاری خێرخوازی** کۆمەڵەی چاودێری خێرخوازی ئاهەنگێکی سازکرد و تەنیا دیاری پێشکەشکرا بۆ گەوران و منداڵان کرد کە ژمارەیان 210 کەس بوون بەمە 935 هەزار دیناری تێچوو. ئەگەر نرخی دیاری بۆ گەورە 6 هەزار دینار بێت و بۆ منداڵان 3.5 هەزار دینار بێت ئەوا

أ هاوکێشەیەک بنووسە کە کۆی هەردوو بڕی پارەکە بە تەواوی دەربخات.

ب هاوکێشەیەک بنووسە کە ژمارەی تەواوی کەسەکان دیاریکات.

ج هەردوو هاوکێشەی دەستتکەوتووە شیکاربکە. ژمارەی گەورەکان چەندن؟ ژمارەی منداڵاکان چەندن؟

32 **دەروازەیەک لەسەر رۆشەنبیری چینی** ژمارەیەک لە جوتیارانی چینی هاوبەشیان کرد لە داینکردنی نرخی ئامێرێکی کشتوکاڵیدا، ئەگەر هەریەکێکیان 8 پارچە پارە بدات، بڕی پارەکە 3 پارچە زیاتر دەبێت لە بڕی پێویست، و ئەگەر هەر یەکێکیان 7 پارچە پارەبدات، بڕی پارەکە 4 پارچە کەمتردەبێت لە بڕی پێویست. ئایا ژمارەی جوتیارەکان چەندە؟ و نرخی ئامێرەکەش چەندە؟

ڕوانینێک بۆ دواوە

33 **بۆ خۆشی** لە پێشبڕکێیەکی ڕاکردندا نەسرین 20 مەتر پێش شنۆ کەوت، و شنۆ 5 مەتر لە دوای ژیان ، و ژیان بە 10 مەتر لە دوای بەهارە، بەڵام شیرین بە 15 مەتر لە پێش بەهارەوەیە. ڕیزبەندی ڕاکەرەکان چۆنە؟

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە

34 $\frac{x}{15}=3$

35 $\frac{3}{x}=15$

36 $\frac{15}{x}=3$

37 $\frac{x}{3}=15$

38 42% ی ژمارەیەک دەکاتە 12.6 . ژمارەکە کامەیە؟

ڕوانینێک بۆ پێشەوە

لەجیاتیدانان بەکاربهێنە بۆشیکارکردنی هەریەک لەم سیستمانە (تێبینیبکە سیستەمەکە لە 3 هاوکێشە 3 نەزانراوەکانە

39 $\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ y+3z=3 \\ z=2 \end{cases}$

40 $\begin{cases} 2x+3y+5z=44 \\ 2y-6z=4 \\ z=4 \end{cases}$

وانەی 6

شیکارکردنی سیستمە هێڵییەکان بەلابردن

Solving Linear Systems by Cancellation

ئامانجەکان

- سیستمێك لە دوو هاوكێشەی هێڵی پێكهاتووە بە ڕێگای لابردن شیكاردەكات.

بۆچی

لابردن ڕێگایەکی نوێیە کە شیکارێکی خێرا دەدا بەدەستەوە بۆ سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی ئاڵۆز کە لەم وانەیەدا دێتە پێش.

جێبەجێکردنەکان

بەکرێدانی ئوتومبیل

نووسینگەی هەوار هەڵدەستێت بە بەکرێدانی ئوتومبیل. گەشتیارێك بڕێك پارە دەدات بەرامبەر هەر ڕۆژێك بۆ بەکرێگرتنی ئۆتۆمبیلێك و بڕێکی تر پارە دەدات بۆ هەر کیلۆمەترێك ئۆتۆمبیلەکە دەیبڕێت. ڕزگار و زانا هەریەکەیان ئۆتۆمبیلێك دەگرن لە نووسینگەی هەوار بەکری بۆ گەشتێك. گەشتی ڕزگار 2 ڕۆژی خایاند و 125 کیلۆمەتری بڕی و گەشتەکەی زانا 4 ڕۆژی خایاند و 350 کیلۆمەتری بڕی، ڕزگار287.25 هەزار دیناری دا، و زانا 697.50 هەزار دیناری دا. کرێی ڕۆژێکی ئۆتۆمبیلەکە دیاربکە و تێچووی کیلۆمەترێك.

دەتوانیت سستەمێکی دوو هاوکێشەی هێڵی بنووسیت، پاشان بۆ دیاریکردنی هەردوو کرێیەکە شیکاریان بکەیت.

شیکاری پرسیارەکە

بە پێناسەکردنی هەردوو نەزانراوی پرسیارەکە دەستپێبکە.

نەزانراوی d : هێمای کرێی ئوتومبیلەکە بێت لە ڕۆژێکدا

نەزانراوی k : هێمای پارەی کرێی یەك کیلۆمەتر بێت .

لە زانیارییەکانی سەرەوەدا دەتوانیت سستەمی هەردوو هاوکێشە بنووسیت.

$$\begin{cases} 2d + 125k = 287.250 \\ 4d + 350k = 679.500 \end{cases}$$

بێگومان دەتوانیت ئەم سیستمە بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکەیت بەڵام ئەمە کارێکی ئاسان نییە. لەم وانەیەدا فێری ڕێگایەکی تازە دەبیت بۆشیکارکردنی سیستمە ئاڵۆزەکان.

چالاکی

Using Inverses — بەکارهێنانی دژەکان

سستەمی ئەم دوو هاوکێشەیە $\begin{cases}3x+2y=7\\5x-2y=9\end{cases}$ شیکاردەکەیت.

1. ئەم دوو هاوکێشەیە دوو ڕادەی دژ بەیەکتری تێدایە. کامانەن؟
2. سیفەتی کۆکردنەوە لە یەکسان بووندا بەکاربهێنە بۆ ئەوەی هاوکێشەیەکت دەستبکەوێت لە هەردوو هاوکێشەکەوە ($3x+2y$ و $5x-2y$ و 7 لەگەڵ 9 کۆبکەوە). هاوکێشە تازەکە چەند نەزانراوی تێدایە.
3. هاوکێشە تازەکە شیکاربکە بۆ دیارکردنی بەهای نەزانراوەکە. پاشان بەهای نەزانراوەکە لە یەکێك لە دوو هاوکێشە سەرەکییەکاندا دابنێ. هاوکێشە دەرچووەکە شیکاربکە بۆ دیارکردنی بەهای نەزانراوی دووەم.
4. پاسادانی ئەوە بکە کە هەردوو بەهای دەستکەوتوو بۆ دوو نەزانراوی x و y دەبنە شیکاری سستەمی دوو هاوکێشەکە .
5. ڕوونیبکەوە چۆن دژەکان بەکاردەهێنیت بۆ شیکاری سستەمی هاوکێشەکان.

خاڵی چاودێری ✔

Cancellation Method — ڕێگای لابردن

لە چالاکییەکەی پێشوودا ڕێگای لابردنت بەکارهێنا بۆشیکارکردنی سستەمی دوو هاوکێشە. ئەم ڕێگایە بەکاردەهێنرێت بۆ لابردنی دژەکانی یەکێك لە دوو نەزانراوەکە.

نموونە

1 ڕێگای لابردن بەکاربهێنە بۆشیکاری ئەم سستەمە $\begin{cases}3x+4y=7\\2x-4y=13\end{cases}$.

شیکار

سیفەتی کۆکردنەوە لە یەکسانیدا بەکاربهێنە بۆ دەستکەوتنی هاوکێشەیەك تەنها x ی تێدابێ کە لە هەردوو هاوکێشەکەوە دەردەچێت و هاوکێشەکە شیکاربکە.

$$\begin{aligned}3x+4y&=7\\2x-4y&=13\\\hline 5x+0&=20\\5x&=20\\x&=4\end{aligned}$$

تێبینیبکە $4y$ و $-4y$ دژی یەکترن

بۆ دیاریکردنی بەهای y لەجیاتی بەهای x 4 دابنێ لە هاوکێشەی یەکەمدا.

$$\begin{aligned}3x+4y&=7\\3(4)+4y&=7\\12+4y&=7\\4y&=-5\\y&=-1.25\end{aligned}$$

شیکاری سستەمەکە دەبێتە $(4, -1.25)$

بەهای x بە 4 و بەهای y بە -1.25 لە هەردوو هاوکێشە سەرەکییەکەدا دابنێ بۆ پاسادانکردنی شیکارەکە:

$$\begin{aligned}3(4)+4(-1.25)&\stackrel{?}{=}7\\12+(-5)&\stackrel{?}{=}7\\7&=7\end{aligned}$$

ڕاستە

$$\begin{aligned}2(4)-4(-1.25)&\stackrel{?}{=}13\\8-(-5)&\stackrel{?}{=}13\\13&=13\end{aligned}$$

ڕاستە

تێبینی ئەوە بکە کە هاوکۆلکەی y لە هەردوو هاوکێشەکەدا دژی یەکترن. ئەمەش وا دەکات کە شیکاری ئەم جۆرە سستەمانە ئاسان بێت.

جاری وا هەیە هەردوولای یەکێك لە هاوکێشەکان یان هەردووکیان لە ژمارەیەك بدرێت بۆ بەدەستهێنانی دوو دژەکە و لابردنی یەکێك لە دوو نەزانراوەکە. ئەگەر هاوکۆڵکەی یەکێك لە دوو نەزانراوەکە 1 بێت کارەکە ئاسانە، بەڵام دەکرێت ئەم بیرۆکەیە جێبەجێبکرێت لەسەر ئەو سیستمانەی زیاتر ئاڵۆزن وەك سیستمی نموونە 2.

نموونە 2 ڕێگای لابردن بەکاربهێنە بۆشیکارکردنی سیستمی $\begin{cases}2x+3y=1\\5x+7y=3\end{cases}$

شیکار

هەردوو لای هاوکێشەی یەکەم لە ژمارە 5 بدە و هەروەها هەردوولای هاوکێشەی دووەم لە 2– بدە بۆ ئەوەی دوو ژمارەی دژ دەستکەوێت.

$\begin{cases}(5)2x+(5)3y=(5)1\\(-2)5x+(-2)7y=(-2)3\end{cases}$ یان $\begin{cases}10x+15y=5\\-10x-14y=-6\end{cases}$

سیفەتی کۆکردنەوە لە یەکسانیدا بەکاربهێنە بۆ ئەوەی هاوکێشەیەکی تازەت دەستبکەوێت تەنها یەك نەزانراوی تێدابێت ئەویش بریتییە لە y ، پاشان ئەم هاوکێشەیە شیکاربکە. لەجیاتی y بەهاکەی لە هاوکێشەی یەکەمدا دابنێ بۆ دیاریکردنی بەهای x .

$$\begin{aligned}10x+15y&=5\\-10x-14y&=-6\\\hline y&=-1\\2x+3y&=1\\2x+3(-1)&=1\\2x-3&=1\\2x&=4\\x&=2\end{aligned}$$

شیکارەکە دەبێتە (1– ,2) .

پاسادانی شیکارەکە بکە بە دانانی بەهای هەردوو نەزانراوەکان لە هەردوو هاوکێشەکەدا.

$2(2)+3(-1)\overset{?}{=}1$ $5(2)+7(-1)\overset{?}{=}3$

$4+(-3)\overset{?}{=}1$ $10+(-7)\overset{?}{=}3$

$1=1$ ڕاستە $3=3$ ڕاستە

نموونە 3 ڕێگای لابردن بەکاربهێنە بۆشیکارکردنی ئەو پرسیارەی لە سەرەتای وانەکە باسکرا $\begin{cases}2d+125k=287.25\\4d+350k=679.50\end{cases}$.

شیکار

هەردوولای هاوکێشەی یەکەم لە 2– بدە.

$\begin{cases}(-2)2d+(-2)125k=(-2)287.25\\4d+350k=679.50\end{cases}$

سیفەتی کۆکردنەوە لە یەکسانیدا بەکاربهێنە بۆ بەدەستکەوتنی هاوکێشەیەکی نوێ کە یەك نەزانراوی تێدابێ ئەویش k ،پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$$\begin{aligned}-4d+(-250k)&=-574.50\\4d+\ \ 350k&=\ \ 679.50\\\hline 100k&=105\\k&=1.05\end{aligned}$$

لەجیاتی k بەهاکەی دابنێ لە هاوکێشەی یەکەمدا بۆ دیاریکردنی بەهای d .

$$\begin{aligned}2d+125(1.05)&=287.25\\2d+131.25&=287.25\\2d&=156\\d&=78\end{aligned}$$

شیکاری سیستمی هاوکێشەکانی پێشوو بریتییە (1.05 ;78) دەتوانیت پاسادانی ڕاستییەکەی بە لەجیاتیدانان بکەیت، کرێی ئوتومبیل لە ڕۆژێکدا 78 هەزار دینار و بڕی تێچووی یەك کیلۆمەتر 1.05 هەزار دینارە.

هەوڵبدە هەریەکە لەم سستەمانە بە ڕێگای لابردن شیکاربکە.

أ) $\begin{cases}2x-y=7\\5x+4y=11\end{cases}$ ب) $\begin{cases}3x-2y=6\\5x+7y=41\end{cases}$

ڕاهێنـــــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

هەردوو ڕادە دژەکە لە هەریەک لەم سیستمانە دەستنیشانبکە و ڕوونبیکەرەوە چۆن شیکاری دەکەیت.

1 $\begin{cases} x+7y=13 \\ x-7y=5 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 5x+3y=20 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2a+b=6 \\ -2a-3b=8 \end{cases}$

جێبەجێکردنەکان

ئەو هەنگاوانەی پێویستن بۆ شیکارکردنی هەریەک لەم سیستمانە بە ڕێگای لابردن باسبکە.

4 $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x+6y=7 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 9a+2b=2 \\ 21a+6b=4 \end{cases}$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

شیکاری سستەمەکان بە لابردن بکە، پاشان پاساداتی شیکارەکە بکە.

7 $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 4x+3y=13 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 3x+5y=-10 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x-4y=0 \end{cases}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

سیستمەکان بە لابردن شیکاربکە و پاساداتی ڕاستی شیکارەکە بکە.

11 $\begin{cases} -x+2y=12 \\ x+6y=20 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2a+3b=18 \\ 5a-b=11 \end{cases}$

13 $\begin{cases} -4x+3y=-1 \\ 8x+6y=10 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 5x-3y=11 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 2x=2-9y \\ 21y=4-6x \end{cases}$

16 $\begin{cases} -x-7=3y \\ 6y=2x-14 \end{cases}$

17 $\begin{cases} \frac{2}{3}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}y \\ y=3x-12 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 0.6x=3.2y+4.6 \\ 2.9y=0.3x+4.8 \end{cases}$

19 $\begin{cases} b=1.5k+4 \\ 0.8b+0.4k=0 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x=3y-12 \\ \frac{1}{3}x=4y+5 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 2x-7y=20 \\ 5x+8y=-1 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 2x-5y=-14 \\ -7x+4y=-5 \end{cases}$

23 $\begin{cases} 3x-2y=-26 \\ 5x+3y=9 \end{cases}$

24 $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y=-\frac{17}{15} \\ \frac{8}{5}x-\frac{7}{6}y=-\frac{3}{10} \end{cases}$

سیستمی دوو هاوکێشە بۆهەر پرسیارێک بنووسە. باشترین ڕێگا هەڵبژێرە بۆشیکاری سیستمەکە. سیستمەکە شیکاربکە و پاسادانی ڕاستی شیکارەکە بکە

جێبەجێکردنەکان

25 **بیرکاری بۆ بەکاربەر** مامۆستای بیرکاری بڕیاریدا ئاهەنگێک بۆ خوێندکارانی خۆی بەبۆنەی جەژنی نەورۆزەوە سازبدات، 3 کارتۆن کێک و 3 شوشە شەربەتی بۆ خوێندکارانی هۆبەی «أ» کڕی بە 54 هەزار دینار. و 4 کارتۆن کێک و 6 شوشە شەربەتی بۆ خوێندکارانی هۆبەی «ب» کڕی بە 78 هەزار دینار. نرخی هەریەک لە کارتۆنێک کێک و شوشەیەک شەربەت چەندە؟

26 **داهات** بارام پاسەوانە لە یەکێک لە گۆڕەپانەکانی وەستانی ئۆتۆمبیل. داهاتێکی نەگۆڕی هەیە بەرامبەر 15 ڕۆژ کارکردن لە مانگێکدا و بۆ هەر ڕۆژێکی زیاد کاربکات کرێیەکی زیادەی هەیە. بارام 25 ڕۆژ لە مانگی یەکەم کاریکرد بەمە 720 هەزار دیناری وەرگرت و 22.5 ڕۆژ لە مانگی دووەم کاریکرد بەمەش 641.25 هەزار دیناری وەرگرت. کرێیە نەگۆڕەکەی وکرێی ڕۆژانەکەی چەندە؟

27 **بازرگانی** یەکێک لە تۆمارگاکان دوو جۆر شریتی مۆسیقا دەفرۆشێت یەکێکیان شریتی هەڵپەرکێ و ئەوی تریان شریتی مۆسیقای کلاسیکییە. نرخی شریتێکی هەڵپەرکێ دەکاتە 21 پارچەپارە و نرخی شریتی مۆسیقای کلاسیکی 33 پارچەپارەیە. تۆمارگاکە لە یەکێک لە ڕۆژەکاندا 25 شریتی لە هەردوو جۆر فرۆشت و بەمەش دەستکەوتەکەی 693 پارچەپارە بوو، تۆمارگاکە چەند شریتی هەڵپەرکێ و چەند شریتی مۆسیقای کلاسیکی فرۆشتووە؟

28 **بەکرێدانی خانوو** کرێچییەک لەگەڵ کرێی مانگی یەکەمدا بارمەتیەک دادەنێ. جوامێر لە مانگی یەکەمدا 270 000 دیناریدا و بە درێژای ساڵەکە 2 085 000 دیناری دا. ئەوا بەهای هەریەکە لە بارمتە و کرێی خانووەکەی لە مانگێکدا چەندە؟

29 **گەشتیاری** ئوتێلێک دوو جۆر پیشاندانی خستەڕوو یەکەمیان 2 شەو 4 ژەمە خواردن دەگرێتەوە بەنرخی 61 500 دینار و دووەمیان 3 شەو 8 ژەمە خواردن دەگرێتەوە بە نرخی 102 750 دینار، ئایا تێچووی شەوێک چەندە؟ تێچوونی ژەمە خواردنێک چەندە؟

ڕوانینێک بۆ دواوە

شیکاری ئەم هاوکێشانە بکە.

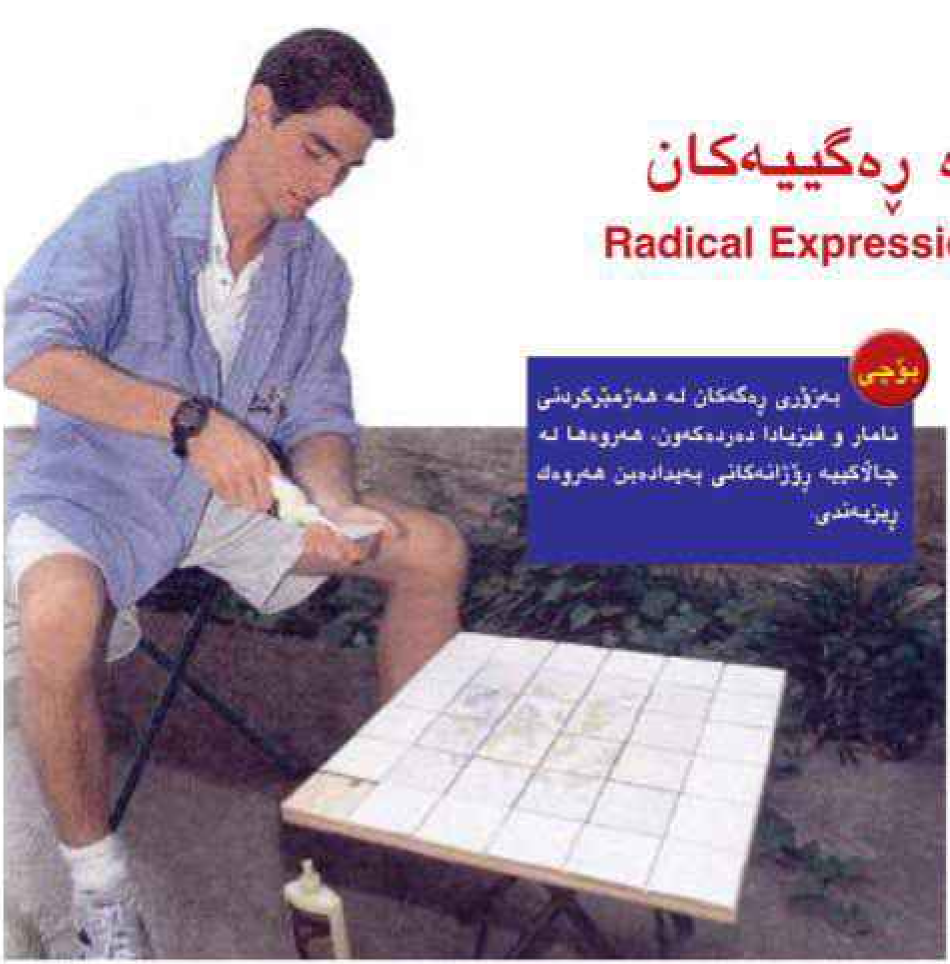
30 $-5=-x+7$ **31** $3x-2=2x+1$ **32** $\frac{1}{2}x+3=2$

ڕوانینێک بۆ پێشەوە

33 **تەکنەلۆجیا** وێنەی دوو ڕاستەهێڵی $2x-3y=6$ و $4x-6y=18$ بکێشە لە هەمان ڕووتەختی پۆتانەکاندا. باسی ئەوە بکە کە دەستتکەوتووە.

وانەی 7

بڕە ڕەگییەکان
Radical Expressions



بۆچی

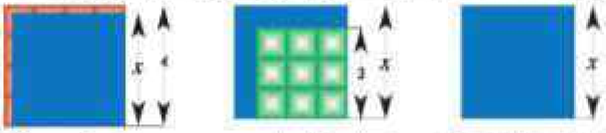
بەزۆری ڕەگەکان لە هەژمێرکردنی ئامار و فیزیادا دەردەکەون، هەروەها لە چالاکییە ڕۆژانەکانی بەیدادەبن هەروەک ڕیزبەندی.

ئامانجەکان

- بەهای بڕێک هەژمار دەکات ڕەگەکانی تێدابێت.
- ئەو بڕانەی کە ڕەگیان تێدابێت سادەدەکات

خەملاندنی ڕەگی دووجا — Estimating Square Root

ڕووبەری چوارگۆشە شینەکەی سانا 12 یەکە دووجایە. چۆن درێژی لایەکی چوارگۆشەی دیاردەکەیت؟ بیرت بێت کە ڕێسای هەژمێری ڕووبەری چوارگۆشەیەك بەشێوەی $x^2 = 12$ دەبێت کاتێك گۆڕاوی x درێژی لایەکی چوارگۆشە شینەکە بێت. کەواتە درێژی لایەکی چوارگۆشەکە بریتییە لە ڕەگی دووجای ژمارە 12 . چونکە 12 دووجای تەواو نییە. کەواتە دەبێ درێژی لایەکی x بخەملێنی. تێبینی بکە کە 12 دەکەوێتە نێوان دوو دووجای تەواوی 9 ، 16 .



ڕووبەری چوارگۆشەکە لە 9 نزیکترە وەك لە 16 ، لەمەوە دەردەچێت کە درێژی لایەکی چوارگۆشەکە دەکەوێتە نێوان 3.4 و 3.5 هەژمێری دووجای ژمارەی دەیییەکانی بکە کە لە دوو ڕەنووس پێکدێن پاش فارزەکە دەکەونە نێوان 3.4 و 3.5 .

$3.42^2 = 11.6964$	$3.41^2 = 11.6281$	$3.4^2 = 11.56$
$3.45^2 = 11.9025$	$3.44^2 = 11.8336$	$3.43^2 = 11.7649$
$3.48^2 = 12.1104$	$3.47^2 = 12.0409$	$3.46^2 = 11.9716$
	$3.5^2 = 12.25$	$3.49^2 = 12.1801$

کەواتە، باشترین خەملاندن بۆ ڕەگی دووجای ژمارە 12 بریتییە لە 3.46 .واتە، $\sqrt{12} \approx 3.46$.

ڕەگی دووجا Square Root

ئەگەر a ژمارەیەکی ڕاستی سالب نەبێت، ئەوا دوو ڕەگی دووجای هەیە یەکێکیان مووجەبە و دەنووسرێت $\sqrt{a}$ وئەوی تریان سالبە و دەنووسرێت $-\sqrt{a}$ و هەریەك لەو دوو ژمارەیە پاسادانی ئەم سیفەتە دەکەن: $\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}\right) = a$ و $\left(-\sqrt{a}\right)\left(-\sqrt{a}\right) = a$

Simplify Radical Expressions — سادەکردنی برە ڕەگییەکان

برە ڕەگییەکان **Radical Expressions** ئەو برانەن ڕەگیان تێدایە و کاتێك دەتەوێت برە ڕەگییەکان کۆبکەیتەوە یان لێکیان دەربکەیت دڵنیابە ئەو ژمارانەی دەکەونە ژێر هێمای ڕەگەکە یەکسانن. بۆ نموونە ، دەتوانیت دوو بڕی $2\sqrt{5}$ و $4\sqrt{5}$ کۆبکەیتەوە و لەمەوە $2\sqrt{5}+4\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ دەستکەوێت.

نموونە 1

ئەم برانە سادەبکە.

أ $5\sqrt{6}-2\sqrt{6}$ ج $5+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3$

ب $8\sqrt{3}+6\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ د $b\sqrt{x}+y\sqrt{x}$

شیکار

أ سیفەتی بەشینەوە بۆ کۆکردنەوەی ڕادە لێکچووەکان بەکاربهێنە پاشان هەژمێری بکە. کۆڵکەی هاوبەش بریتییە لە $\sqrt{6}$.

$$5\sqrt{6}-2\sqrt{6}=(5-2)\sqrt{6}=3\sqrt{6}$$

ب ڕیزبەندی ڕادەکان بکە بۆ ئاسانکردنی سادەکردنەوەکە

$$5+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3=5-3+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}=2+4\sqrt{7}$$

ج ڕیزبەندی ڕادەکان بکە بۆ ئاسانکردنی سادەکردنەکە.

$$8\sqrt{3}+6\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}=8\sqrt{3}-\sqrt{3}+6\sqrt{2}+2\sqrt{2}=7\sqrt{3}+8\sqrt{2}$$

د مامەڵە لەگەڵ گۆڕاوەکان بکە وەك ئەوەی ژمارەبن.

$$b\sqrt{x}+y\sqrt{x}=(b+y)\sqrt{x}$$

هەوڵبدە ئەم برانە سادەبکە أ $4\sqrt{6}-\sqrt{6}$ ب $y+2\sqrt{x}-2y-3\sqrt{x}$

چالاکی

Operations with Radical Expressions — برە ڕەگییەکان و کردارەکان

بۆ ئەنجامدانی کردارەکان پەیوەندی نێوان ڕەگەکان و هێزەکان و توانە ڕێژەییەکان بەکاربهێنە.

1. بە دوو ڕێگا $\sqrt{9\times16}$ هەژمێربکە.

   أ $\sqrt{9\times16}=\sqrt{144}=?$ ب $\sqrt{9\times16}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}=?$

2. سێ نموونە بهێنەرەوە بۆ دڵنیابوون لە ڕاستی پەیوەندی $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

3. هەژمێری $\sqrt{9+16}$ و $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ بکە و ئەنجامەکانیان بەراوردبکە.

4. سێ نموونە بهێنەرەوە ڕوونی بکاتەوە $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ هەموو کات ڕاست نییە

خاڵی چاودێری ✓

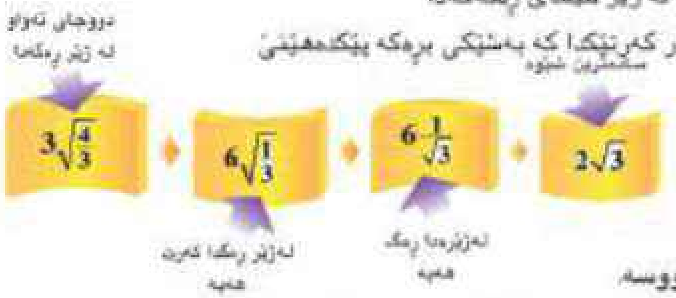
سیفەتی لێکدانی ڕەگە دووجاکان — Multiplying Square Roots

ئەگەر دوو ژمارەی ڕاستی a ، b سالب نەبن ئەوا:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

ڕەفتارکردن لەگەڵ برە ڕەگییە سادەکراوەکان ئاسانترە لە ڕەفتارکردن لەگە؛ ئەو برانەی سادەنەکراون. بڕی ڕەگی بە سادەترین شێوە **Simplist form** دەبێت، ئەگەر ئەم مەرجانەی خوارەوەی تێدابێت:

1. نەبوونی دووجای تەواو لەنێوان کۆلکەکانی ژمارەکە لەژێر هێمای ڕەگەکەدا.
2. نەبوونی کەرت یان کەرتەکان لە ژێر هێمای ڕەگەکەدا.
3. نەبوونی ڕەگەکان لەژێرەی هەر کەرتێکدا کە بەشێکی برەکە پێکدەهێنێ (بیرت بێت ڕێژەکردنی ژێرە).



نموونە 2 ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە

أ $\sqrt{12}$ ب $\sqrt{400}$ ج $\sqrt{a^2}$ د $\sqrt{a^5b^{10}}$

شیکار

بەدوای دووجا تەواوەکاندا بگەڕێ لە نێوان هاوکۆلکەکاندا. سیفەتی لێکدانی ڕەگە دووجاکان بەکاربهێنە ڕەگی دووجای ئەو دووجایە سادەبکە. کۆلکەکانی تر بەجێبهێڵە.

أ $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

ب $\sqrt{400} = \sqrt{4} \times \sqrt{100} = 2 \times 10 = 20$

لەبەر ئەوەی هێمای ڕەگی دووجا ڕەگێکی سالب نییە لەمەوە $\sqrt{a^2}$ سالب نییە. هێمای ڕووت بەکاربهێنە بۆ نیشانی ئەو، کاتێک توانی گۆڕاوەکە لەژێر هێمای ڕەگەکەدا جووت بێت، و توانی گۆڕاوەکە لە دەرەوەی هێمای ڕەگدا بێت، پاش سادەکردن تاک بێت.

ج $\sqrt{a^2} = |a^1| = |a|$

د $\sqrt{a^5b^{10}} = \sqrt{a(a^2)^2(b^5)^2} = a^2|b^5|\sqrt{a}$

هەوڵبدە $\sqrt{72m^2n^5}$ سادەبکە

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بۆچی بەکارهێنانی هێمای بەهای ڕووت لەمانەی خوارەوە بەپێویست نازانرێت.

أ $\sqrt{b^3} = b\sqrt{b}$ ب $\sqrt{b^4} = b^2$

نموونە 3 ئەم برانە سادەبکە

أ $\left(5\sqrt{3}\right)^2$ ب $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$

ج $\sqrt{2}\left(6 + \sqrt{12}\right)$ د $\left(3 - \sqrt{2}\right)\left(4 + \sqrt{2}\right)$

شیکار

أ بیرت بێ کە دووجای هەر ژمارەیەک دەکاتە لێکدانی ژمارەکە لەخۆی. ئەم بیرۆکەیە جێبەجێبکە پاشان کۆلکەکان پێش لێکدان ڕیزبەند بکە.

$$\left(5\sqrt{3}\right)^2 = \left(5\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{3}\right) = (5 \times 5)\left(\sqrt{3} \times \sqrt{3}\right) = 25 \times 3 = 75$$

ب سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان بەکاربهێنە. ئەنجامی لێکدانەکە کە لە ژێر هێمای ڕەگەکەدایە شیتەڵبکە پاشان سادەیبکە. $\sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{3 \times 6} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

ج سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە بۆ ئەوەی لێکدان و شیکردنەوە و سادەکردن ئەنجامبدەیت.

$$\sqrt{2}\left(6+\sqrt{12}\right)=6\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{12}=6\sqrt{2}+\sqrt{2\times12}$$

$$=6\sqrt{2}+\sqrt{24}=6\sqrt{2}+\sqrt{6\times4}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$$

د $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)=12+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2=10-\sqrt{2}$

هەوڵبدە ئەمانە کورتبکەرەوە

أ $\left(2\sqrt{7}\right)^2$ ب $\sqrt{2}\left(4-\sqrt{8}\right)$

سیفەتی دابەشکردنی ڕەگە دووجاکان Dividing Square Roots

ئەگەر a ، b دوو ژمارەی ڕاستی موجەب بن ئەوا:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

نموونە 4 ئەم بڕانە سادەبکە.

أ $\sqrt{\frac{16}{25}}$ ب $\sqrt{\frac{7}{16}}$ ج $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}}$ د $\sqrt{\frac{9}{5}}$

شیکار

پاش بەکارهێنانی سیفەتی دابەشکردنی ڕەگەکان، ڕەگی دووجای هەریەکە لەمانەی خوارەوە بنووسە سەرە و ژێرەی هەریەکیان بە جیا سادەبکە.

أ $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$ ب $\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

ج $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}}=\frac{|a|b\sqrt{b}}{|c|}$ د $\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

ژێرەی دوا وەڵام ڕەگی تێدایە. ئەگەر دەتەوێت خۆتی لێ ڕزگاربکەی، بڕەکە لە بڕی $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ بدە کە یەکسانە بە 1.

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

بەم کردارەش دەوترێت ڕێژەکردنی ژێرە.

هەوڵبدە ئەم بڕانە سادەبکە.

أ $\sqrt{\frac{4}{24}}$ ب $\sqrt{\frac{4}{3}}$ د $\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$

ڕاهێنــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ڕوونیبکەرەوە چۆن پەڕەی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان بەکاردێنیت بۆ دیاریکردنی ڕەگی دووجای ژمارەی 16 (دووجای تەواو).

2 ڕوونیبکەرەوە چۆن پەڕەی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان بەکاردێنیت بۆ دیاریکردنی ڕەگی دووجای ژمارەی 19 (دووجای تەواو نییە).

3 ڕوونیبکەرەوە $\sqrt{7}$ چۆن دەخەمڵێنی بەبێ بەکارهێنانی ژمێرە یان پەڕەی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان.

4 چۆن شیتەڵکردن بەکاردەهێنیت بۆ سادەکردنی بڕێکی ڕەگی وەك بڕی $5\sqrt{90x^3y^4}$.

5 سادەترین شێوە بۆ بڕێکی ڕەگی چییە؟

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

هەژماری ئەم ڕەگە دووجایانە بکە.

6 $\sqrt{36}$ 7 $-\sqrt{64}$ 8 $\pm\sqrt{81}$ 9 $-\sqrt{121}$

ئەم بڕانە سادەبکە.

10 $8\sqrt{3}-6\sqrt{3}$ 11 $9+3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+4$

ئەم بڕە ڕەگیانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

12 $\sqrt{32}$ 13 $\sqrt{x^2y^7}$ 14 $\sqrt{27x^6}$ 15 $\sqrt{a^7b^3}$

ئەم بڕانە سادەبکە.

16 $\left(7\sqrt{11}\right)^2$ 17 $\sqrt{2}\times\sqrt{10}$ 18 $\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)$

19 $\sqrt{\frac{9}{4}}$ 20 $\sqrt{\frac{6}{49}}$ 21 $\sqrt{\frac{225}{18}}$ 22 $\sqrt{\frac{x^7y^{14}}{z^3}}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم ڕەگە دووجایانە هەژمار کە. ئەگەر ڕەگەدوووجاکان ڕێژەیی نەبوون ئەوا بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

23 $\sqrt{225}$ 24 $-\sqrt{169}$ 25 $-\sqrt{11}$ 26 $\sqrt{\frac{4}{9}}$ 27 $-\sqrt{40}$

28 $-\sqrt{27}$ 29 $\sqrt{1000}$ 30 $\sqrt{10000}$ 31 $-\sqrt{0.04}$ 32 $\sqrt{0.059}$

بەبەکارهێنانی شیتەڵکردن ئەمانە سادەبکە.

33 $\sqrt{49}$ 34 $\sqrt{196}$ 35 $\sqrt{576}$ 36 $\sqrt{3600}$ 37 $\sqrt{192}$

38 $\sqrt{75}$ 39 $\sqrt{98}$ 40 $\sqrt{1620}$ 41 $\sqrt{264}$ 42 $\sqrt{648}$

وادابنێ a ، b ژمارەی موجەب بن. و دیاریکە ڕستەکە ڕاستە یان نا.

43 $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 44 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 45 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

46 $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$ 47 $\sqrt{8}\times\sqrt{18}$ 48 $\sqrt{48}\times\sqrt{3}$ 49 $\sqrt{54}\times\sqrt{6}$

50 $\sqrt{\frac{64}{16}}$ 51 $\sqrt{\frac{96}{2}}$ 52 $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}$ 53 $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$

54 $\sqrt{5}\times\sqrt{15}$ 55 $\sqrt{98}\times\sqrt{14}$ 56 $\sqrt{\frac{56}{8}}$ 57 $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{8}}$

ئەم بڕانەسادە بکە و وایدابنێ هەموو گۆڕاوەکان سالب نین و هەموو ژێرەکان جیاوازن لە سفر.

58 $\sqrt{a^4b^6}$ 59 $\sqrt{x^8y^9}$ 60 $\sqrt{\frac{a^6}{b^{10}}}$ 61 $\sqrt{\frac{x^3}{y^6}}$

ئەو کردارانەی لە توانات دا هەیە ئەنجامیان بدە و وەڵامەکەت بە سادەترین شێوە بنووسە.

62 $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$ **63** $4\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\sqrt{5}$ **64** $\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

65 $\left(4+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)$ **66** $\frac{6+\sqrt{18}}{3}$ **67** $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

ئەمانە سادەبکە.

68 $\left(3\sqrt{5}\right)^2$ **69** $\left(4\sqrt{25}\right)^2$ **70** $\sqrt{12}\times\sqrt{6}$

71 $\sqrt{72}\times\sqrt{32}$ **72** $3\left(9+\sqrt{5}\right)$ **73** $\sqrt{5}\left(6-\sqrt{15}\right)$

74 $\sqrt{6}\left(6+\sqrt{18}\right)$ **75** $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)$ **76** $\left(\sqrt{3}-4\right)\left(\sqrt{3}+2\right)$

بەرەنگـــاری

77 $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)^2$ **78** $\sqrt{12}\left(\sqrt{3}+8\right)^2$ **79** $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-4\right)^2$

گــرێـدان

ئەندازە: درێژی لایەکی ئەو چوارگۆشەیە دیاریکە کە ڕووبەرەکەی دەکاتە:

80 250m^2 **81** 144m^2 **82** 28m^2

جێبەجێکردنەکان

83 باخچەکان: لەبەر دەرگای ماڵی شیرین باخچەیەکی چوارگۆشەیی هەیە ڕووبەرەکەی دەکاتە 676m^2، درێژی لایەکی چەندە؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەمانە سادەبکە.

84 $\left(-a^2b^2\right)^3\left(a^4b^2\right)^3$ **85** $\frac{x^5y^7}{x^2y^3}$ **86** $\left(\frac{20x^3}{-4x^2}\right)^3$

ئەمانە لێکبدە.

87 $(2x-4)(2x-4)$ **88** $(3d+5)(2d-6)$ **89** $(6b+1)(3b-1)$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەو هێزانەی توانیان ڕێژەییە بۆ دەربڕینی ڕەگەکان بەکاردێن بەشێوەی $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ دەنووسرێن کاتێك a ژمارەیەکی سالب نییە، n ژمارەیەکی تەواوە کە لە 2 کەمتر نییە. بۆ نموونە
$3=\sqrt[3]{27}$ چونکە $27=3^3$ و $2=\sqrt[4]{16}$ چونکە $16=2^4$
یاسای هێزەکان بۆسادەکردنی بڕەکان بەکاربهێنە. نموونەش بۆ ئەمە :

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=x^{\frac{8}{2}}=x^4$$

ئەمانە سادەبکە.

90 $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4\left(x^5\right)^{\frac{1}{3}}$ **91** $(xy)^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2$

92 $\left(x^3y^{\frac{3}{2}}\right)^6(xy)^{\frac{1}{2}}$

پرۆژەی بەش

شێوازەکان لە پێدراوەکاندا

مرۆڤ شێوازەکانی بەکارهێناوە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە سەرەتاکانی بیرکردنەوەی بیرکاریانەدا. لەم پرۆژەدا شێوازەکان بەکاردەهێنرێن بۆ شیکارکردنی پرسیارە جۆراوجۆرەکان و بۆ قووڵ بوونەوەی زیاتر لە جیهانی جەبردا.

چالاکی 1

زانا گریگییەکان بایەخیان بە بنیاتنانی لاکێشەکان داوە و وایان داناوە کە ئاسوودەن بۆ سەیرکردن. ئەم لاکێشانەیان جیاکردۆتەوە بەپێی ڕێژەی درێژیان بۆپانیان (بە نزیکەی 1.618) و ناویان لێناون لاکێشە زێڕینەکان **Golden Rectangles** و ئەم ڕێژەیان ناوناوە بە ڕێژەی زێڕین **Golden Ratio**. دوای ئەوە زانایانی دەروونناسی گەیشتوونەتە ئەوەی کە مرۆڤ بەبێ هەستکردن ئەو شێوە لاکێشانەیان لا پەسندترە کە نزیکن لە لاکێشە زێڕینەکان. لەلایەکی ترەوە زانای بیرکاری ئیتاڵی فیبوناتشی ژمارەی یەك لەدواییەکی پێکهێناوە کە بە ناوی خۆیەوە ناسراون. ژمارەی یەکەمیان 1 و دووەمیان 2 بەلام ژمارەکانی تر هەریەکیان دەکاتە سەرجەمی دوو ژمارەی پێش خۆی.

1. دە ژمارەی یەکەم لە ژمارەکانی فیبوناتشی بنووسە.
2. بژمێر بۆ تەواوکردنی خشتەکەی خوارەوە بەکاربهێنە، بۆ هەژمێرکردنی ڕێژەی هەر ژمارەیەك بۆ ژمارەکەی پێش خۆی.
3. وێنەی لاکێشەکان بکێشە کە درێژی و پانیان بریتین لە دوو ژمارەی یەك دوای یەکی فیبوناتشی. سانتیمەتر یان ملیمەتر بەکاربهێنە بۆ یەکەی درێژی.
4. بەراوردی ڕێژەی درێژی بۆ پانی لە هەر جارێکدا لەگەڵ ڕێژی زێڕین بکە.
5. کام لەم لاکێشانەی خوارەوە لە لاکێشەی زێڕین نزیکە.

ژمارەی فیبوناتشی	ژمارەی دوای ئەو	ڕێژەی ژمارەی دوا بۆ ژمارەکە
3	5	1.667
5	8	?
8	13	?
?	?	?
?	?	?
?	?	?

ا پسوولەی 3 × 5   ب وێنەی 5 × 7

ج وێنەی 5 × 8   د وێنەی 8 × 10

6. ئایا لەگەڵ ئەو کەسانەدایت کە دەڵێن چاو بە سەیرکردنی لاکێشە زێڕینەکان ئاسوودە دەبێت.

چالاکی 2

1. لەگەڵ هاوڕێکانتدا 20 شێوەی بازنەیی هەڵبژێرە. چێوە (c) و تیرە (d) بۆ هەریەکەیان بپێوە. خشتەیەک بۆ پێدراوەکان دروستبکە.
2. ڕێژەی چێوە بۆ تیرە $\frac{c}{d}$ لە هەر بازنەیەک هەژماربکە.
3. جووتە ڕێکخراوی (d ، c) لە ڕووتەختی پۆتاندا بنوێنە.
4. ڕاستەیەکی ڕوون بەکاربهێنە بۆ وێنەکێشانی ئەو ڕاستە هێڵەی گەورەترین ژمارەی خاڵدا یان بەنزیکیاندابڕوات.
5. لاری ئەو ڕاستەهێڵە هەژمێربکە.
6. پەیوەندی نێوان ئەو لارییەی هەژمێرت کردووە و ژمارەی π چییە؟ لەمەوە ڕێسایەک بوختە بکە کە ڕێت پێدەدات بە هەژمێرکردنی چێوەی بازنە بە زانینی تیرەکەی. ئەو ڕێسایە چییە؟

1 پێداچوونەوە

لە پرسیاری 1 تا 5 یەکسانی سیفەتێك لە سیفەتەکانی کردارەکانی سەر ژمارە ڕاستییەکان دەردەبڕێت. کامانەن؟

1 $a(2b)=(2b)a$

2 $2\times1=2$

3 $b\left(\frac{1}{b}\right)=1$

4 $3x+0=3x$

5 $5(2-x)=5\times2+5(-x)$

بەهای بڕەکان لە پرسیاری 6 تا 9 هەژمێربکە

6 $(-1)\times(5+3)^2-11$

7 $\frac{(11-5)^2}{3\times2}$

8 $\frac{(6-12)^5}{-3^2}$

9 $\frac{32-(13+4)}{(-3)^2}$

ئابووری نرخی پێویست لەسەر سارا گەیشتە 88 هەزار دینار لە بەکارهێنانی ئینتەرنێتدا. و ئەم بڕە پارە بۆ هاوبەشیکردن و نرخەکەی کە 55 هەزار دینارە لە مانگێکدا و تێچوونی بەکارهێنانی ئینتەرنێت کە نرخی 3 هەزار دینارە بۆ هەر کاتژمێرێك.

10 هاوکێشەیەك بنووسە کە بڕی پارەی پێویست لەسەر سارا بنوێنێت کاتێك x هێمای کاتژمێرەکان بێت.

11 هاوکێشەکە شیکاربکە ژمارەی کاتژمێرەکان دیاربکە کە سارا ئینتەرنێتی بەکارهێناوە.

12 هاوکێشەی $F=\frac{9}{5}C+32$ شیکاربکە بە هەژمارکردنی C بەپێی F.

شیکاری ئەم لاسەنگە ناوێتانە بکە و کۆمەڵە شیکارەکانیان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

13 $-4x>-18$ وە $-3x-8\leq7$

14 $-3x<-5$ یان $4x-3<29$

15 هەژمێری بەهای بڕی $\left(\frac{5^{-2}\times5^{3}}{5^2}\right)^2$ بکە.

بڕەکان لە پرسیاری 16 تا 18 سادەبکە

16 $x^4(3x)^2$

17 $\frac{(ab^2)^3}{c^2}$

18 $\left(\frac{p^{-1}q^2}{p^{-2}}\right)^{-4}\times\left(\frac{p^{-3}q^{-3}}{p^{-3}q^{-1}}\right)^{-3}$

شیکاری سستەمی هاوکێشەکان بە لابردن بکە لەهەردوو ڕاهێنانی 19 و 20.

19 $\begin{cases}9x+2y=2\\21x+6y=4\end{cases}$

20 $\begin{cases}2y=3x-6\\y=x-2\end{cases}$

شیکاری سستەمی هاوکێشەکان بکە بە لە جیاتیدانان لە هەردوو ڕاهێنانی 21 و 22 .

21 $\begin{cases}y=2x-4\\7x-5y=14\end{cases}$

22 $\begin{cases}2x+10y=-2\\6x+4y=20\end{cases}$

بڕەکانی هەردوو ڕاهێنانی 23 و 24 سادەبکە.

23 $\sqrt{x^2y^4}\,(x^5y)^{\frac{1}{2}}$

24 $\frac{(24m^8n)^{\frac{1}{2}}}{(mn^2)^{\frac{1}{2}}}$

لە پرسیاری 25 تا 28 بڕەکان بە سادەترین شێوە بنووسە بەمەرجێك ژێرەیان ڕێژەیی بێت.

25 $\sqrt{\frac{5}{25}}$

26 $\sqrt{\frac{3}{49}}$

27 $\sqrt{\frac{16}{5}}$

28 $\sqrt{\frac{6}{14}}$

1 تاقیکردنەوەی بەش

بەجێبەجێکردنی ڕیزبەندی کردارەکان ئەم بڕانە هەژماربکە.

1 $5+2(7-4)^2$ **2** $12-9\div3+2\times5$

3 $\frac{4+6}{2}+2\times5$ **4** $5\times4\div2+3^{(4-1)}$

ئەو سیفەتە کامەیە کە لە هەر جارێکدا بەکارهاتووە ئەگەر زانیت هەموو گۆڕاوەکان ژمارەی ڕاستین.

5 $5x\times1=5x$ **6** $7a-14=7(a-2)$

7 $\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2}{a}\right)=1$ **8** $4(xy)=(xy)\times4$

هەر بڕێک لەمانە سادەبکە ئەگەر زانیت هەموو گۆڕاوەکان جیاوازن لەسفر.

9 $y^3(x^2y)$ **10** $\frac{(9by)^2}{(3bxy)^3}$

11 $\frac{14x^{-3}a^4}{35x^5a^3}$ **12** $\left(\frac{3x^4k^{-1}}{8x^{-2}k^3}\right)^{-2}$

13 فیزیا دەتوانین جولە ووزە بپێوین بە بەکارهێنانی ڕێسای $k=\frac{1}{2}mv^2$ بپێوین کاتێك m بارستایی بە کیلۆگرام و v خێرایی بە مەتر لە چرکەیەکدا و k جولە وزەیە بەجول. جولە ووزەی تەنێك چەندە کە بارستاییەکەی 100 کگم بێت وبە خێراییەکەی 5 م/چ دەجولێت.

هەریەکە لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

14 $4x-3=17$ **15** $\frac{x}{3}-2=16$

16 $2x-0.8=2.4$ **17** $8x+4=2x-32$

18 ئەندازە بە دوو گۆشە دەوترێت تەواوکەری یەکترن کاتێك کۆی پێوانەکانیان بکاتە 90 پلە. هاوکێشەیەك بنووسە و شیکاریبکە بۆ هەژمێرکردنی پێوانەی هەریەك لە دوو گۆشەی یەکتر تەواوکەر. ئەگەر زانیت پێوانەی یەکێکیان 30 پلەی زیاترە لەوی تریان.

19 هاوکێشەی $m=\frac{1}{2}xk^2$ شیکاربکە بە هەژمێری k بەپێی دوو گۆڕاوەکەی تر.

هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە و شیکارەکەیان بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە

20 $-3x-6>15$

21 $2(4x-5)<6x-6$

هەریەکە لەم لاسەنگە ناوێتانە شیکاربکە و شیکارەکە بە ڕوونکردنەوەی بنوێنە.

22 $(3x+4>7)\wedge(2x-3<5)$

23 $(5x\geq3)\vee(-2+4x\leq10)$

24 بژێوی 5 منداڵ لەگەڵ 3 گەورەدا بۆ باخچەی ئاژەڵان چوون و 80 هەزار دیناریان پێبوو. لاسەنگەیەك بنووسە هەژمارکردنی بەرزترین ڕادەی بۆ نرخی بلیتی منداڵێك ئەگەر بزانیت بلیتی گەورە بە 14 هەزار دینارە. بەرزترین ڕادە چەندە؟

هەریەك لەم سیستمانە بە لەجیاتیدانان شیکاربکە و پاسادانی شیکارەکانیان بکە.

25 $\begin{cases}2x-3y=1\\y=x-2\end{cases}$ **26** $\begin{cases}x+y=3\\2x+3y=3\end{cases}$

27 ژمارەکان کۆی دوو ژمارە دەکاتە 7 . چوار ئەوەندەی یەکەمیان 1 ی زیاترە لە 5 ئەوەندەی دووەمیان. ئەم دوو ژمارەیە دیاریبکە بە ڕێگای نووسینی سیستمی هاوکێشەکان و شیکارییکە.

هەر سیستمێك لەمانە بە لابردن شیکار بکە و پاسادانی شیکارەکە بکە.

28 $\begin{cases}x+y=1\\x-2y=-8\end{cases}$ **29** $\begin{cases}5x+2y=24\\2x-12=4y\end{cases}$

30 $\begin{cases}\frac{1}{3}x-y=4\\2x-6y=12\end{cases}$ **31** $\begin{cases}4x+3y=0\\y-x=-7\end{cases}$

32 بەکارداچوون نرخی 3 تێنووس و 4 پەرتووك دەکاتە 7 250 دینار و نرخی 5 تێنووس و 2 پەرتووك دەکاتە 6 600 دینار. هەژمێری نرخی هەریەکە لە تێنووس و پەرتووك بکە لە ڕێگای نووسینی سستەمی هاوکێشەکان و شیکارەکەی.

هەژمێری بەهای هەریەك لەم بڕانە بکە.

33 $\left(3\sqrt{81}\right)^2-31$ **34** $\frac{1}{5}\left(\left(\sqrt{9}\right)^3+\left(\sqrt{64}\right)^2+2\right)$

هەریەك لەم بڕانە سادەبکە و وای دابنێ کە بەهای هەموو گۆڕاوەکان موجەبن.

35 $5\sqrt{8x^3y^6}\times\left(2x^5y\right)^{\frac{1}{2}}$ **37** $\left(5-\sqrt{12}\right)-\left(2\sqrt{27}+8\right)$

36 $\frac{8\sqrt{5x^7y^9}}{\sqrt{25x^3y^5}}$ **38** $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-2\sqrt{5}\right)$

1

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 کام لەم ژمارانەی خوارەوە ڕێژەیی نییە؟

أ $178.259\,259...$ ب $\sqrt{7}$

ج $\sqrt{49}$ د -2315

2 کام ژمارە لەمانەی خوارەوە تەواوە؟

أ $17.\overline{259}$ ب $\sqrt{142}$

ج $(27)^{\frac{1}{3}}$ د $\frac{1235}{16}$

3 دوو ژمارەی -5 و 3.25 بە دوو خاڵ لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە و دووری نێوانیان هەژمار بکە.

4 دوو ژمارەی $3.\overline{7}$ وە $-2.\overline{4}$ بە دوو خاڵ لەسەر تەوری ژمارەکان بنوێنەو دووری نێوانیان هەژمێربکە.

5 یەکسانیەکەی $3+(5+7)=(3+5)+7$ ؛ چ سیفەتێکی کردارەکان دەردەبڕێت.

6 یەکسانیەکەی $2(a+b)=2a+2b$ ؛ چ سیفەتێکی کردارەکان دەردەبڕێت.

7 کرداری لێدەرکردن سیفەتی ئاڵوگۆڕی هەیە؟ بە نموونە ڕوونیبکەوە.

8 نموونەیەك بهێنەرەوە ڕوونیبکاتەوە دابەشبوون سیفەتی ئاڵوگۆڕی نییە.

9 هاوکێشەی $4x-9=\frac{3x-15}{2}$ شیکاربکە.

10 گۆڕاوی b بەپێی گۆڕاوەکانی تر هەژماربکە لە ڕێسای $x=\frac{ab-1780}{q}$.

11 ئەم هاوکێشەیە شیکاربکە
$\frac{3x-2.5}{5}-123=5.6(2.1x-12.4)+3.26$.

12 لاسەنگەی $-x+4\leq 2(1-2x)$ شیکار بکە و لەسەر تەوەری ژمارەکان کۆمەڵە شیکارەکە بنوێنە.

13 کام لەم ژمارانە شیکار نییە بۆ لاسەنگەی
$5x-6(x+9)<1$

أ 15 ب -35

ج 18.25 د -55

14 بەهای بڕی $27^{\frac{2}{3}}$ چەندە؟

أ 3.5 ب 3

ج 9 د 6

لە پرسیاری 15 تا 17 بەهای بڕەکە هەژمێربکە.

15 $75-\frac{3(4+12\div 2)^2}{3+2}$

16 $\frac{6^2\times 6^{-3}}{6^{-1}}$

17 $\left[3(1+2)+3\right]2^2$

18 بڕی $\left(\frac{2x^{-2}y^3}{x^2y^{-3}}\right)^{-1}$ سادەبکە.

سیستمی دوو هاوکێشەکەی خوارەوە بە لەجیاتیدانان پاشان بە لابردن شیکاربکە.

19 $\begin{cases}11x+4y=-17\\ -6x+y=22\end{cases}$

20 $\begin{cases}1.5x+2y=9.5\\ 2.25x-0.5y=5.5\end{cases}$

21 ئایا بۆ سستەمی دوو هاوکێشەی $\begin{cases}2x-3y=11\\ 6x-9y=22\end{cases}$ شیکار هەیە.

22 بە لەجیاتیدانانی سیستمی دوو هاوکێشەی $\begin{cases}3x-3y=1\\ x+y=4\end{cases}$ شیکاربکە.

لە پرسیارەکانی 23 تا 26 بڕە ڕەگییەکان سادەبکە.

23 $\left(\sqrt{3}+2\right)\left(-1+\sqrt{3}\right)$

24 $\left(3\sqrt{5}+2\right)-\left(3+2\sqrt{20}\right)$

25 $\frac{2}{\sqrt{15}}$

26 $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

بەشی دووەم

نەخشەکان
Functions

1. نەخشەکان.
2. نەخشەی هێڵی.
3. شێوەجیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ.
4. تەریبیوون و ئەستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان.
5. شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی.
6. نەخشەی ڕووت.
7. هاوکێشەکان و لاسەنگەکان کە بەهای ڕووتیان تێدایە.

پرۆژەی بەشەکە.

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بەشی 2

نەخشەکان Functions

نەخشەکان لە پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە بەکاردێت لە میانەی بەکارهێنانی هێندەکان بۆ دەربڕینی گۆڕانەکان و پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو، نموونە لەسەر ئەوە دەتوانریّ پەیوەندی نێوان خێرایی سوڕانەوەی شەمەندەفەر و ئەو هێزەی سەرنشینەکان لە شوێنەکانیان جێگیردەکات بەهۆی نەخشە بنوێنرێت.

وانەکان

1. نەخشەکان.
2. نەخشەی هێڵی.
3. شێوەجیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ.
4. تەریببوون و ئەستوون بوونی ڕاستەهێڵەکان.
5. شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی.
6. نەخشەی ڕووت.
7. هاوکێشەکان و لاسەنگەکان کە بەهای ڕووتیان تێدایە.

پرۆژەی بەشەکە

دەربارەی پرۆژەی بەش

پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە زۆرجار ئاڵۆزن. یان هەندێ هۆکار کە کاریان تێدەکەن نەزانراون. لەبەرئەو هۆیە مرۆڤ نموونە بیرکارییەکان بەکاردەهێنێت بۆ نواندنی ئەو جۆرە پرسیارانە و خەمڵاندنی شیکارە چاوەڕوانکراوەکان دەکات. لەمیانەی ئەنجامدانی کارەکانت نەخشە بەکاردەهێنیت بۆ دۆزینەوەی ئەو نموونە بیرکاریانەی پەیوەستن بەزیادبوونی پاشەڕۆی بۆشایی (گەردون) کە بەدەوری زەوی دەخولێتەوە.

پاش تەواوبوونت لە پرۆژەی ئەم بەشە توانات دەبێت لەسەر:

- بەکارهێنانی خشتە بۆ نواندنی پەیوەندی نێوان کات (بەساڵ) و هێندی پاشەڕۆی بۆشایی و دیاریکردنی نەخشەی گونجاو کە نموونەی بیرکاری ئەو پەیوەندییە پێکبهێنێ.
- دۆزینەوەی چەند نموونەیەك بۆ لێکۆڵینەوە لەسەر کۆبوونەوەی جۆرە جیاوازەکانی پاشەڕۆیەکانی بۆشایی و لێکۆڵینەوەیان.
- دیاریکردنی جۆرە نەخشەیەك بۆ لێکۆڵینەوەی پەیوەندی نێوان بەرزی و هێندی پاشەڕۆی بۆشایی لەو بەرزیەدا.

وانەی 1

نەخشەکان Functions

بۆچی

نەخشەکان و پەیوەندییەکان بەزۆری بەکاردێن بۆ بنیات نانی نموونەی بیرکاری کە ژیانی رۆژانە یان یاسای زانستی دەردەبڕن.

ئامانجەکان

- نواندنی پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو بە ڕوونکردنەوەیی.
- دیاریکردنی بواری پەیوەندییەکە و مەوداکەی.
- بڕیاردانی ئەوەی کە ئایا پەیوەندییەکە نەخشە دیاریدەکات.
- هەژمێرکردنی بەهای نەخشە کاتێك گۆڕاوەکە بەهای دیاریکراو وەردەگرێت.

چالاکی

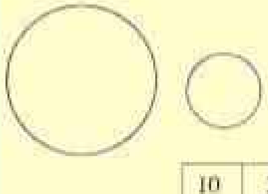
پەیوەندییەکان و نەخشەکان Relations and function

1. کارزان پەڕاوی تەلەفۆنی کردەوە و بینی:

ناو	ژمارەی تەلەفۆن
شکری	235 246
هیوا	456 987
خەسرەو	852 369
شایان	369 852
ڤیان	741 236

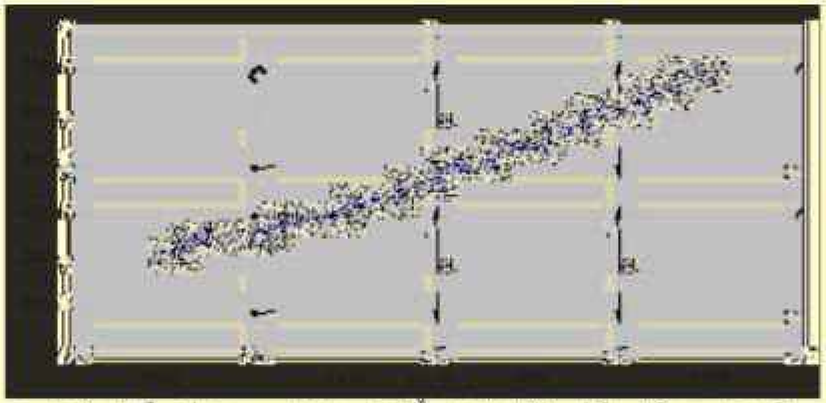
ژمارەی تەلەفۆنی ڤیان چەندە؟ ژمارەی تەلەفۆنی خسرەو چەندە؟

2. بژمێر بەکاربێنە بۆ تەواوکردنی ئەو خشتەیەی دێت کە ڕووبەری بازنەت دەداتێ بەپێی بەها جیاوازەکانی نیوەتیرەکەی، پاشان ڕوونیبکەوە چۆن خشتەکەت تەواوکرد.



نیوەتیرە	1	1.5	4	0.5	0.75	3	0	2.5	10
ڕووبەر	3.14								

3. ئەم وێنە ڕوونکردنەوەی خوارەوە پێشکەوتنی بەرهەمی جیهانی گەنم لە نیوەی دووەمی سەدەی بیستەم بە ملیۆنەها تەن ڕووندەکاتەوە.



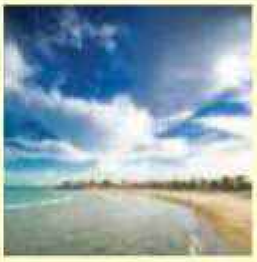
بەرهەمی جیهان لە گەنم (ملیۆنەها تەن)

وێنە ڕوونکردنەوەییەکە بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی بەرهەمی جیهانی گەنم بۆ ئەوەی ئەو خشتەیەی دێت تەواوبکەیت.

ساڵ	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
بڕی بەرهەمی گەنم	220						

4. ئەم خشتەیەی دێت تێکڕای پلەکانی گەرمی لە کەرکوك لە هەفتەی یەکەمی مانگی نیسان دیاردەکات.

ڕۆژانی حەفتە	شەممە	یەکشەممە	دووشەممە	سێ شەممە	چوارشەممە	پێنجشەممە	هەینی
تێکڕای پلەی گەرمی	25	24	23	20	22	24	25



تێکڕای پلەی گەرمی ڕۆژی یەکشەممە چەندبووە؟

تێکڕای پلەی گەرمی ڕۆژی چوارشەممە چەندبووە؟

ڕۆژی پێنج شەممە چەندبووە؟

ئەگەر چوار نموونەی پێشووت پشکنی دەبینیت هەریەکەیان دوو گۆڕاوی تێدایە. و بەهای یەکێك لەو دوو گۆڕاوانە بەهای ئەوی تریان دیاریدەکات.

5. ئەم خشتەیەی دێت تەواوبکە بەدیاریکردنی گۆڕاوی یەکەم لەهەر نموونەیەك کە بەهای گۆڕاوی دووەم دیاردەکات.

خاڵی چاودێری ✓

نموونە	گۆڕاوی یەکەم	گۆڕاوی دووەم
1		
2		
3		
4		

باس لەهەبوونی پەیوەندی **Relation** نێوان دوو گۆڕاوی x و y دەکات، ئەگەر بەهاکانی یەکێکیان زانراو بێت وەك x ئەوا بەهاکانی دووەم y دیاریدەکات، لەو بارەدا دەڵێین گۆڕاوی یەکەم گۆڕاوێکی ئازادە **Independent Variable** و دووەم گۆڕاوێکی پەیوەستە **Dependent Variablde**.

نەخشەکان Functions

لە نموونەی یەکەم دوودڵ نەبیت لە وەڵامی ئەو پرسیارە: **نمرەی تەلەفۆنی خەسرەو چەندە؟** چونکە گۆڕاوی ئازادەکە **ناوە**، دوو بەهای گۆڕاوی پەیوەستی لە بەرامبەرە. بەڵام لە نموونەکانی تر، تۆ توشی ئەم کێشەیە نابیت چونکە هەر بەهایەکی گۆڕاوی ئازاد بەرامبەر تەنها یەك بەهای گۆڕاوی پەیوەستە.

بە پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاوی x و y دەڵێت نەخشە Function ئەگەر هەر بەهایەکی وەك a لە بەهاکانی گۆڕاوی x تەنها یەك بەهای وەك b لە بەهاکانی گۆڕاوی y بەرامبەری بێت، ئەو بەها تاکانەی b پێی دەوترێت وێنەی Image نەخشەکە بە گۆڕاوی یەکەم دەوترێ گۆڕاوی ئازاد و گۆڕاوی دووەم پەیوەست.

خاڵی چاودێری ✓

سەر لەنوێ چوار نموونەکە شیبکەوە، و لەهەر بارێکدا دیاریبکە پەیوەندیەکە نەخشەیە یان نا، وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

نموونە 1

ئایا پێدراوەکانی ئەم خشتەیە نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

.A

بەهاکانی گۆڕاوی پەیوەست y	بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد x
−3.6	1
−3.6	2
4.2	3
4.2	4
10.7	5
12.1	6
52	52

.B

بەهاکانی گۆڕاوی پەیوەست y	بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد x
7	3
8	3
10	3
42	4
34	10
18	11
52	52

شیکار

.A پێدراوەکانی خشتەی یەکەم نەخشە دەنوێنن چونکە هەر بەهایەك لە بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد x یەك بەهای گۆڕاوی پەیوەستی y بەرامبەریەتی.

.B پێدراوەکانی خشتەی دووەم نەخشە نانوێنن، چونکە بەهای 3 بۆ گۆڕاوی ئازاد سێ بەهای گۆڕاوی y کە 7، 8، 10 بەرامبەریەتی واتە خشتەی b تەنها پەیوەندی دەنوێنێت.

شێوەکانی پێناسەی نەخشە Different Ways to define a function

ئەگەر بڕوانیتە نموونەکانی پێشوو دەبینیت زۆر شێوە بۆ پێناسەی نەخشە هەیە دەتوانین پێناسەی نەخشە بکەین بەهۆی:

1. **خشتەی بەهاکان Table of Values** : نەخشە پێناسەدەکرێت لەم بارەدا بەهۆی خشتەیەکی دوو ستوونی، یەکەمیان بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد بگرێتە خۆی، و ئەویتریان بەهاکانی گۆڕاوی پەیوەستی بەرامبەریان بگرێتەوە، بە مەرجێك بەهای گۆڕاوی ئازاد و بەهای گۆڕاوی بەرامبەری لەهەمان ڕیز بنووسرێت.

نموونە : نەخشەی نموونە 1

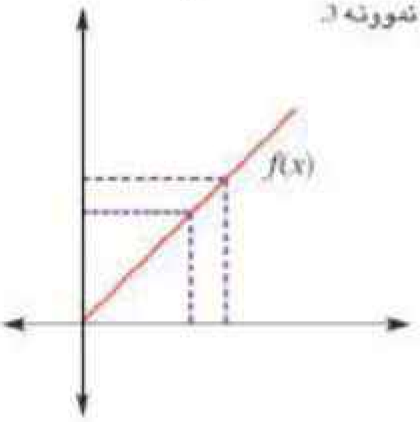
پەیوەندیەکی پێناسکراو بەهۆی خشتەوە نەخشە پێك ناهێنێت، ئەگەر ستوونی گۆڕاوی ئازاد بەهایەك بگرێتەخۆ لە بەرامبەری دوو بەهای جیاواز بۆ گۆڕاوی پەیوەست هەبێت.

لێرەوە پەیوەندی پێناسەکراو بەهۆی خشتەوە لە نموونەی یەکەم نەخشە نانوێنێت، چونکە بەهای گۆڕاوی ئازاد (خەسرەو) دوو بەهای جیاوازی گۆڕاوی بەستراو (ژمارەی تەلەفۆن) بەرامبەریەتی.

2. ڕێسا **Rule**: نەخشە پێناسەدەکرێت بەهۆی ڕێسایەك یان یاسایەك، کە بەهای گۆڕاوی پەیوەست بەپێی گۆڕاوی ئازاد دەردەبڕێت.

نموونە : نەخشەی نموونەی دووەم کاتێك بەهای گۆڕاوی پەیوەست A (ڕووبەری بازنە) دەردەبڕێت بەپێی گۆڕاوی ئازاد نت (نیوە تیرە) ئەم ڕێسایە ئەمەیە: $A(r)=\pi r^2$

3. **وێنەی ڕوونکردنەوەیی Graph** پێناسەدەکرێت بەهۆی وێنەی ڕوونکردنەوەیی کاتێك بەهای گۆڕاوی ئازاد لەسەر تەوەرەی سینەکان و بەهای گۆڕاوی پەیوەست لەسەر تەوەرەی صادەکان y بن. بەهای گۆڕاوی پەیوەست کە بەرامبەر بەهای گۆڕاوی x لە بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد تانی ئەو خاڵە دیاریدەکات کە لەسەر وێنە ڕوونکردنەوەییەکەیە کاتێك بڕی سینی خاڵەکە دەکاتە x . نموونە: نەخشەی نموونە 3.



تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ستوونی Vertical Line Test

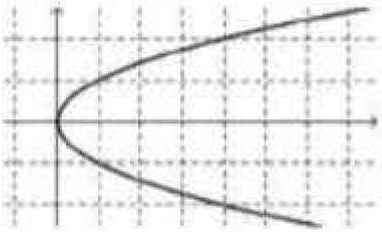
ئەگەر ڕاستەهێڵێکی ستوونی وێنەیەکی ڕوونکردنەوەی لە خاڵێك زیاتر بڕی، ئەوا ئەم وێنە ڕوونکردنەوەییە نەخشە نانوێنێت.

نموونە 2

أ) ئایا وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر نەخشەیە؟ ڕوونبکەوە.

شیکار

أ) نەخێر نەخشە نیە چونکەبۆ هەر بەهایەکی موجەب x دوو بەهای گۆڕاو y بەرامبەرە، هەروەها ڕاستەهێڵی ستوونی وێنەکە لە دوو خاڵی جیاواز دەبڕێت .



بۆ لێکۆڵینەوەی نەخشەیەکی وەك $f(x)$، پێویستە ئەم خالانە جێبەجێبکەیت:

1. دیاریکردنی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی گۆڕاوی ئازاد x کە دەتوانێت هەژمارەی وێنەکەی $y=f(x)$ بکەیت. ئەو کۆمەڵەیە پێی دەوترێ بواری پێناسەی نەخشەکە یان بەکورتی **بواری نەخشەکە Domain**.
2. دیاریکردنی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی گۆڕاوی پەیوەست دەیگرێتەوە، وپێی دەوترێت **مەودای نەخشەکە Range**.
3. نواندنی نەخشەکە بە ڕوونکردنەوەی، واتە نواندنی هەموو جووتە ڕێکخراوەکانی (x,y) کاتێك x دانە بێت لەبواری نەخشەکە و $y=f(x)$ کۆمەڵەی ئەو خالانە پێیان دەوترێت **هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە Graph**.
4. پوختەکردنی سیفەتەکانی نەخشە لەمیانی لێکۆڵینەوەی هێڵی ڕوونکردنەوەیی.

چۆن هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەك دروستدەکەیت

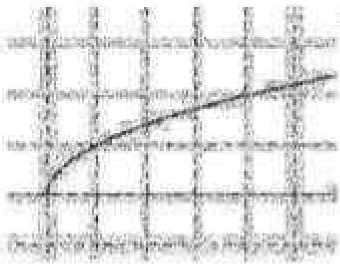
ئەگەر نەخشەکە بەهۆی خشتەی بەهاکان پێناسە کرابێت، هەموو خاڵەکانی (x,y) کە لە خشتەکەدا هاتووە بنوێنە، پاشان ئەو خالانە بە هێڵێکی گونجاو بگەیەنە.

ئەگەر نەخشەکە بە ڕێسا پێناسەکرابێت، خشتەی بەهاکانی نەخشەکە پێکبهێنە و خاڵەکانی بنوێنە و هێڵی ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە بەڕێگای پێشوو. هەروەها دەتوانیت بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی یان کۆمپیوتەر هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشیت.

بەرەنکاری

ڕاهێـــــــــنـــــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا



1. جیاوازی نێوان نەخشە و پەیوەندی ڕوونبکەرەوە، نموونەیەك لەسەر وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ پەیوەندییەك بهێنەرەوە نەخشە نەبێت.
2. سێ ڕێگا بۆ پێناسەکردنی نەخشە باسبکە.
3. چۆن بواری نەخشەی پێناسەکراو بەهێڵی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر دیاردەکەیت، و چۆن مەوداکەی دیاریدەکەیت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەو خشتانەی دێن نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

4

x	y
5	3
8	4
5	7
9	2

5

x	y
0	3
1	8
2	8
3	−7

6

x	y
10	7
20	11
30	9
40	7

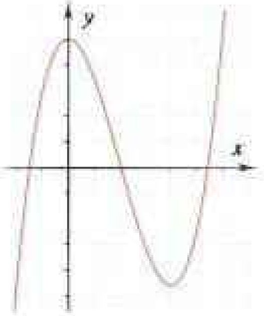
7

x	y
3	9
2	2
8	−3
2	1

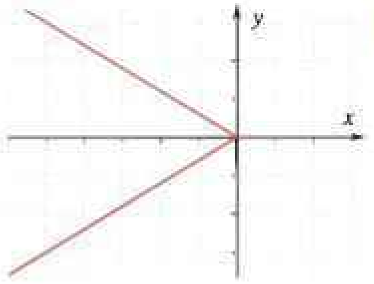
دیاریبکە ئەگەر ئەو وێنە ڕوونکردنەوەییانە نەخشە دەنوێنن یان نا، هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

دیاریبکە ئەگەر ئەو وێنە ڕوونکردنەوییانە نەخشە دەنوێنن یان نا. هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

8



9

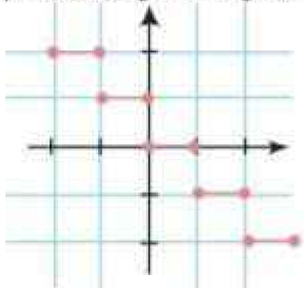


جێبەجێکردنەکان

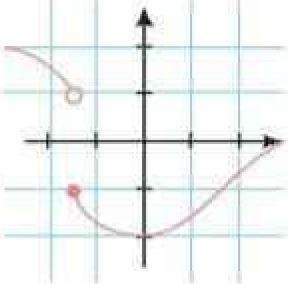
10 ئۆتۆمبێلەکان گۆڕاوی A ئەو ئۆتۆمبیلانە دەنوێنێت کە ڕێگایان پێدراوە لەشارەکەتدا ڕێبکەن و گۆڕاوی N تابلۆی ژمارەیی ئەو ئۆتۆمبیلانە دەنوێنێت. ئایا پەیوەندیەك لەنێوان A و N دا هەیە؟ ئەگەر وەڵامەکەت «بەڵێ»یە ئایا ئەو پەیوەندیە نەخشەیە؟ کام لە دوو گۆڕاوەکە و گۆڕاوی ئازادە و کامیان گۆڕاوی پەیوەستە؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە؟

بوار ومەودای نەخشەی نوێنراو بەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە دیاریبکە.

11



12



13 بەهای نەخشەی $f(x) = x^2 + 2x - 1$ هەژمێربکە کاتێك $x = 3$ و کاتێك $x = 1.5$.

جێبەجێکردنەکان

14 داهات زێڕنگرێك 24 هەزار دینار لەهەر کاتژمێرێکی کاردا وەردەگرێت، سەرەڕای 20 هەزار دینار بۆ پشکنین ودۆزینەوەی تێکچوونەکان.

أ نەخشەیەك بنووسە داهاتی زێڕنگرەکە R بەپێی ژمارەی کاتژمێرەکانی کار x بنوێنێت.

ب داهاتی زێڕنگرەکە هەژمێربکە ئەگەر 5.5 کاتژمێر کاربکات.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئایا ئەم خشتانەی دێن نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەرەوە.

15

x	0	2	2	4
y	3	−5	1	7

16

x	1	2	3	4
y	6	6	9	9

17

x	4	4	6	6
y	−2	2	−3	3

18

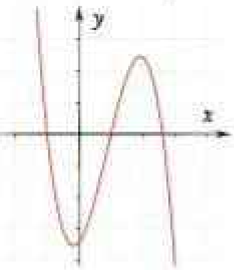
x	−5	−3	−1	1
y	8	8	−2	−2

19

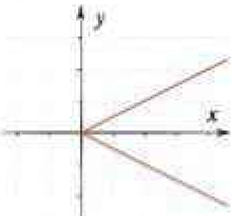
x	−2	−2	0	2
y	−5	−3	4	6

ئایا ئەو وێنە ڕوونکردنەوانەی خوارەوە نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەرەوە.

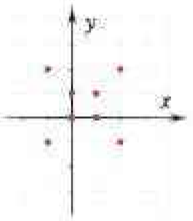
20



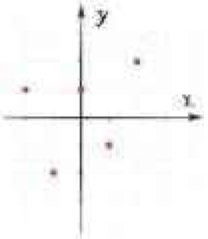
21



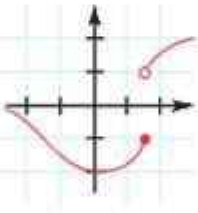
22



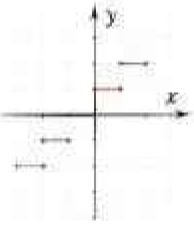
23



24



25



بەهای نەخشەکە بەلەجیاتیانان هەژمێرکە.

26 $f(x)=2x-6$ کاتێك $x=1$ و کاتێك $x=3$.

27 $f(x)=5-3x$ کاتێك $x=1$ و کاتێك $x=3$.

28 $f(x)=\frac{2x-1}{5}$ کاتێك $x=-9$ و کاتێك $x=1$.

29 $f(x)=\frac{x-4}{5}$ کاتێك $x=-9$ و کاتێك $x=9$.

30 $f(x)=2x^2-3x$ کاتێك $x=3$ و کاتێك $x=-2.5$.

31 $f(x)=-x^2+4x-1$ کاتێك $x=2$ و کاتێك $x=1.5$.

32 $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ کاتێك $x=-1$ و کاتێك $x=\frac{3}{4}$.

33 $f(x)=-4x^2$ کاتێك $x=\frac{3}{2}$ و کاتێك $x=-2$.

هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بە بەکارهێنانی بزمێرەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە لە پاشان بوار و مەودای دیاریبکە.

34 $y=-\frac{x}{2}$ **35** $y=-\frac{2}{3}x-5$ **36** $y=-2x^2$ **37** $y=\left(\frac{x}{2}\right)^2$

38 $y=2$ **39** $y=-6$ **40** $y=x^2$ **41** $y=x^2+2$

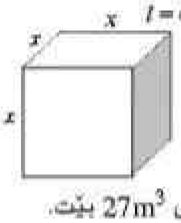
42 هێڵی ڕوونکردنەوەی بۆ نەخشەیەك بکێشە بوارەکەی $-3\le x\le 3$ و مەوداکەی $-5\le y\le 5$ بێت.

43 هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ نەخشەیەك بکێشە بوارەکەی $-2\le x\le 5$ و مەوداکەی $0\le y\le 4$ بێت.

بەرەنگاری

بەهای نەخشەی $f(t)=t^2-3$ لەهەر بارێکدا هەژماربکە.

44 $t=\sqrt{2}$ **45** $t=\sqrt{2}-1$ **46** $t=c+\sqrt{2}$



ئەندازە هێمای گۆڕاوی V بۆ قەبارەی شەشپاڵوی بەرامبەر دابنێ.

47 نەخشەیەك بنووسە قەبارەی شەشپاڵوی V بەپێی درێژی لایەکی x بداتێ.

48 ڕووبەری ڕوویەك لە ڕووەکانی شەشپاڵوەکە هەژماربکە کاتێك قەبارەکەی $27m^3$ بێت.

49 **بەکارچوون** بەهای بزمێرەکان زۆر بەخێرایی دادەبەزێت. دەزگایەک وای دانا کە بەهای بزمێر لە هەر ساڵێکدا بەتێکڕای 15% لەنرخی بنەڕەتی دادەبەزێ.

أ نەخشەیەک بنووسە کە بەهای بزمێرێکت بداتێ بەپێی تەمەنی بەساڵ، ئەگەر زانیت دەزگاکە نرخی 3 200 دیناری نرخەکەی دەدات.

ب نرخی بزمێرەکە پاش سێ ساڵ دەبێتە چەند؟

50 **بەکارچوون** فرۆشگایەکی جلوبەرگ داشکانێکی بەرێژەی 30% بۆ هەموو جلوبەرگەکان ئاشکراکرد.

أ دانا 47.25 هەزار دیناریدا بۆ نرخی کراسێک لەوەرزی داشکاندا، نرخی کراسەکە لە بنەڕەتدا چەند بووە؟

ب زانا پانتۆڵێکی کڕی نرخەکەی 25 هەزار دیناربوو پێش وەرزی داشکان، نرخە نوێیەکەی چەندە؟

ڕوانین بۆ دواوە

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێک بە شێوەی $y=mx+b$ بنووسە بەزانینی لاریەکەی m و خاڵێکی وەک A پێیابدا دەڕوات.

51 $m=5$ $A(2, 3)$

52 $m=-3$ $A(4, 1)$

53 $m=\frac{1}{5}$ $A(4, -1)$

54 $m=-\frac{2}{3}$ $A(-8, -3)$

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێک بنووسە لەسەر شێوەی $y=mx+b$، بەزانینی دوو خاڵ کە پیایدا دەڕوات.

55 $(1, 4); (-3, 0)$

56 $(0, 2); (-1, 1)$

57 $(2, 3); (0, 0)$

58 $(-2, -5); (5, -1)$

59 بڕەی $2+[7-(3-5)-2]3$ بە بەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان هەژمار بکە.

ڕوانین بۆ پێشەوە

60 ڕێتەی ڕوونکردنەوەیی بۆ پەیوەندی $y=x^2-3x-10$ پێکبهێنە لە نێوان x و y، ڕوونیبکەرەوە بۆچی ئەم پەیوەندیە نەخشە دەنوێنێت، بوار و مەودای ئەم نەخشەیە دیاریکە.

وانەی 2

نەخشەی هێڵی
Linear Functions

بۆچی

نەخشەی هێڵی سادەترین نەخشەی جەبرییە و هەروەها لە بنیاتنانی نموونەکانی بیرکاری لەبارەکانی ژیانی ڕۆژانەدا زۆر بەکاردێن

ئامانجەکان

- نەخشەی هێڵی دەناسێت.
- نەخشەی هێڵی بۆ بنیاتنانی سامپڵەکانی بیرکاری بەکاردەهێنێت.
- بواری نەخشەی هێڵی و مەوداکەی و خاڵەکانی یەکتربڕینی لەگەڵ دوو تەوەری پۆتانەکاندا دیاریدەکات.

جێبەجێکردنەکان

فیزیا

چالاکی

دۆزینەوەی نەخشەی هێڵی Exploring linear function

دەزانیت کە پلەی کولانی ئاو 100 پلەی سەدییە. بەڵام ڕەنگە نەزانیت کە 100 پلەی سەدی پلەی کولانی ئاوە لە شوێنێك لەئاستی ڕووی دەریابێت (بەرزییەکەی لە ڕووی دەریا سفر بێت) پلەی کولانی ئاو دەگۆڕێت بەگۆڕانی بەرزی شوێنەکە لە ڕووی دەریاوە. ئەو پلەیە لەسەر چیاکانی هیمالایا کەمترە لە 100 پلەی سەدی بەڵام زیاترە لە 100 پلەی سەدی لەدەریای مردوو. ئەم خشتەیەی دێت هەندێك شوێنی جیهان و بەرزییەکانی دیارکردوە، لەئاستی ڕووی دەریا وپلەی کولانی ئاو تێیاندا.

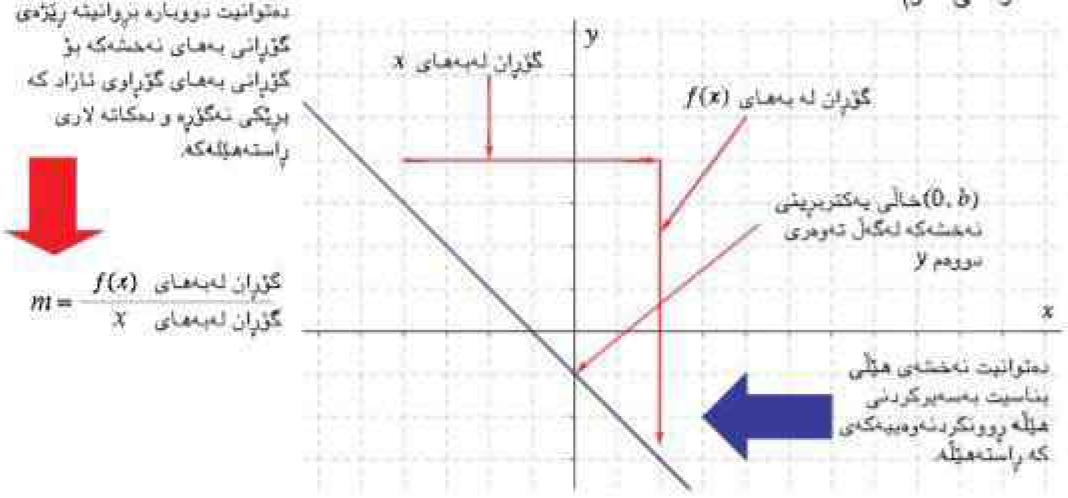
ئاو	بەرزی لەڕووی دەریاوە	پلەی کولانی ئاو
بەسرە (عیراق)	0	100
فریبورغ (سویسرا)	586	99.68
سوفەر (لبنان)	1 250	99.315
کۆلۆرادۆ (ئەمریکا)	1 832	98.995
قورنە سەودا (لبنان)	3 220	98.23
دەریای مردوو	−420	100.23

1. پێدراوەکانی خشتەکە لە ڕووتەختی پۆتاندا بنوێنە کە تەوەری یەکەم x بۆ بەرزی لەڕووی دەریا بە مەترە، و تەوەری دووەم y بۆ پلەکانی گەرمی بە پێوەری سەدی دابنێ.
2. نێوان خاڵەکان بە پارچە ڕاستەهێڵ بگەیەنە، چی تێبینی دەکەیت؟
3. ئایا پەیوەندی نێوان بەرزی لەڕووی دەریا و پلەی کولانی ئاو نەخشەیە؟ ئەوە ڕوونبکەوە.
4. وێنە ڕوونکردنەوەییە دەستکەوتووەکەت بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی پلەی کولانی ئاو لەبەرزی 3000 مەتر لەڕووی دەریاوە.
5. وێنە ڕوونکردنەوەییە دەستکەوتووەکەت بەکاربهێنە، بۆ خەمڵاندنی بەرزی شوێنێك لەڕووی دەریا، ئەگەر بزانیت پلەی کولانی ئاو تیایدا 97 پلە بێت.
6. لەکوێدا وێنە ڕوونکردنەوەکە تەوەری y دەبڕێت؟ ئەم خاڵە چی دەنوێنێت؟

نەخشەی هێڵی Linear Function

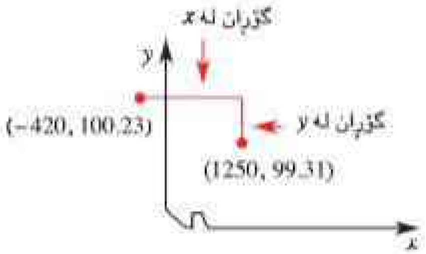
نەخشەی هێڵی نەخشەیەکە، ڕوونکردنەوەییەکەی هێڵێکی ڕاستە، ڕێسای نەخشەی هێڵی بەم شێوەیە دەنووسرێت $f(x)=mx+b$.

دەتوانیت نەخشە هێڵییەکان بۆ بنیاتنانی نموونەی بیرکاری بەکاربێنیت بۆ هەندێ لە پەیوەندییەکانی نێوان دوو گۆڕاو وەك پەیوەندییەکەی پێشوو (بەرزی لەڕووی دەریا و پلەی کولانی ئاو).



ڕێژەی گۆڕانی بەهای نەخشەی هێڵی $f(x)$ بۆ گۆڕانی بەهای x نەگۆڕ دەمێنێتەوە وئەو ڕێژەیە پێی دەوترێت لاری **Slope** نەخشەی هێڵی.

نموونە 1



أ پێدراوەکانی خشتەی لاپەڕەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی چۆنیەتی گۆڕانی پلەی کولانی ئاو کاتێك بەرزی لەڕووی دەریا دەگۆڕێت.

ب ڕێسای نەخشەی پلەی کولانی ئاو بەپێی بەرزی لەڕووی دەریاوە بنووسە.

شیکار

أ x بەکاربێنە بۆ بەرزی بە مەتر لەڕووی دەریا و y بۆ پلەی کولانی ئاو بەپێوەری سەدی. دوو بەها بۆ گۆڕاوی سەربەخۆی x بەکاربهێنە و دوو بەها بۆ نەخشەی بەرامبەریان وەك بەرزی سوفەر لە لوبنان و دەریای مردوو لە ئوردن. ڕێژەی گۆڕانی پلەی کولانی ئاو بۆ گۆڕانی بەرزی لەڕووی دەریا هەژمێربکە بۆ ئەوەی لاریت دەستکەوێ.

ڕێژەی گۆڕان $m=\frac{\text{گۆڕان لە نەخشە}}{x \text{ گۆڕان لە}}=\frac{99.31-100.23}{1250-(-420)}=-0.00055$

ئەمەش واتە زیادبوونی مەترێك لەبەرزی لەڕووی دەریا دەبێتە هۆی گۆڕان لەپلەی کولانی ئاو بەبڕی -0.00055 پلە.

ب پلەی کولانی ئاو = پلەی کولانی ئاو لە ئاستی ڕووی دەریا + ڕێژەی گۆڕان × بەرزی.

$f(x) \quad = \quad 100 \quad +(-0.00055)x$

کەواتە ڕێسای نەخشەکە، $f(x)=100-0.00055x$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

ئایا پلەی کوڵانی ئاو زیاددەکات ئەگەر بەرزی لەڕووی دەریاوە زیادبکات یان کەمدەکات؟

ڕوونیبکەرەوە چۆن خشتەکەی سەرەتای وانەکە بەکاردەهێنیت بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارە.

ڕوونیبکەوە چۆن هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=100-0.00055x$ بەکاردەهێنیت.

بەرەنگاری

شارا ڕێسای نەخشەی هێڵی هەروەك لەبەرامبەردا هاتووە دۆزیەوە.

ڕێگاکانی شارا باسبکە.

دوو شوێنی تر لەخشتەکە بۆ دۆزینەوەی ڕێسای نەخشەکە بەکاربهێنە.

ئایا هەمان ڕێسات دەستدەکەوێت.

$m = -0.00055$

$f(x) = mx + b$

$f(x) = -0.00055x + b$

$100 = -0.00055 \times 0 + b$

$\Longrightarrow b = 100$

کەواتە ڕێسای نەخشەکە بریتییە لە:

$f(h) = -0.00055h + 100$

نموونە 2 هەژمێری $f(9)$ بکە کاتێك $f(x)=\frac{1}{3}x+17$ بەهای x چەندە ئەگەر $f(x)=-1$ ؟

شیکار

لەجیاتی x بەهای 9 دابنێ.

$$f(9)=\frac{1}{3}\times 9+17$$
$$=3+17$$
$$=20$$

لەجیاتی $f(x)$ بەهای 1– دابنێ و شیکاریبکە.

$$f(x)=\frac{1}{3}x+17$$
$$-1=\frac{1}{3}x+17$$
$$-18=\frac{1}{3}x$$
$$-54=x$$

بەرەنگاری

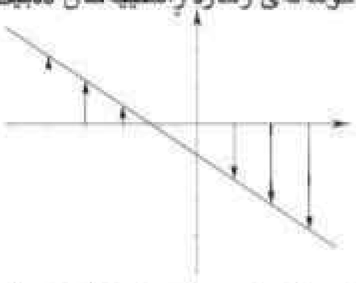
ڕوونیبکەرەوە چۆن نەخشەی نموونە 1 بەکاردەهێنی بۆ دیاریکردنی پلەی کوڵانی ئاو لە شوێنێك 8000 مەتر لەڕووی دەریاوە بەرزبێت، ئەو پلەیە دیاریکە.

بەرەنگاری

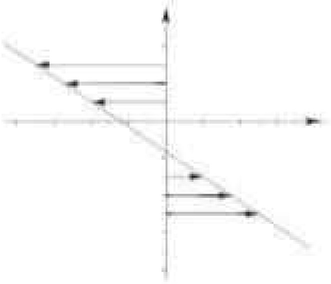
ڕوونیبکەرەوە چۆن نەخشەی نموونە 1 بەکاردەهێنیت بۆ دیاریکردنی بەرزی شوێنێك لەڕووی دەریا پلەی کوڵانی ئاو تێیدا 85 پلەی سەدی بێت، ئەو بەرزیە دیاریبکە.

خوێندنی نەخشەی هێڵی Studying linear function

ڕێسای نەخشەی هێڵی $f(x)=mx+b$ ڕێگادەدات بە هەژمێرکردنی بەهای نەخشەکە کاتێك بەهای گۆڕاوی $f(x)$ هەرچەند بێت. لەوەوە دەردەچێت کە نەخشەکە پێناسە دەکرێت لەهەر ژمارەیەکی ڕاستییدا، بەم پێیە بوارەکەی دەبێتە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان. بەشێوەیەکی تر لەوانەیە بۆ هەر ژمارەیەکی ڕاستی بەهایەکی نەخشەی هێڵی هەبێت، چونکە دەتوانی هەژمێری بەهای گۆڕاوی x بکەیت، ئەگەر بەهای نەخشەکە بزانی، لەوەوە دەردەچێت کە مەودای نەخشەی هێڵی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان دەبێت.



هێڵە ڕوونکردنەوەیی نەخشە هێڵییەکە دیاری دەکات کە بوارەکەی هەموو تەوەری x دەگرێتەوە.



هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشە هێڵیکە دیاریدەکات کە مەوداکەی هەموو تەوەرەی y دەگرێتەوە.

کاتێك نەخشەکە بارێکی ژیانی ڕۆژانە دەنوێنێت، بوار و مەودای نەخشەکە سنووردراو دەبێت

نموونە

3 لوتکەی ئیڤرست کە دەکەوێتە چیاکانی هیمالایا بەرزییەکەی 8848m مەترە لەڕووی دەریا بە بەرزترین شوێن لەڕووی زەوی دادەنرێت و هەروەها دەریای مردوو کە 420m مەتر لە ڕووی دەریا نزمە، بە نزمترین شوێنی ڕووی زەوی دادەنرێت، ئەو دوو زانیارییەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بەوردی بوار و مەودای نموونەی 1 دیاریبکەیت.

شیکار

نەخشەی نموونەی 1 نموونەیەکی بیرکاری پێکدێنێت، لە ڕاستیدا لەوەوە دەردەچێت کە گۆڕانی سەربەخۆ سنوردراوە بەچەند بەهایەکی دیاریکراو، بەپێی دوو زانیارییەکەی پێشوو ئەو بەهایانە وەردەگرێت کە دەکەوێتە نێوان 420− ، 8848 لەبەرئەوە بواری نەخشەی نموونەی 1 کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی ئەو لاسەنگە $-420 \le h \le 8848$ پاسادان دەکات. بۆ دیاریکردنی مەودا لەم بارەدا دەبینین کە بەهایەکەی کەمدەکات هەر چەند بەرزی h زیادبکات، ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە بەرزترین بەهای بەرامبەر نزمترین بەهای گۆڕاوە ئازادەکەیە $f(-420)=100.23$ و نزمترین بەهای بەرامبەر بەرزترین بەهای گۆڕاوی x دەبێت واتە $f(8848)=95.13$ وەهەروەها مەودای نەخشەی نموونە 1 کۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستییانەیە کە $95.13 \le y \le 100.23$ پاسادانەدەکات.

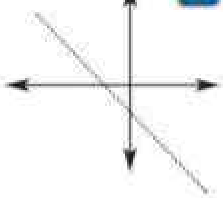
ڕاهێنان

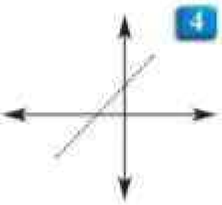
بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

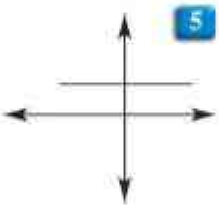
1 چۆن پاسادانی ئەوە دەکەیت کە خاڵێك پۆتانەکەی زانراو بێت دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵێك هاوکێشەکەی زانراوبێت.

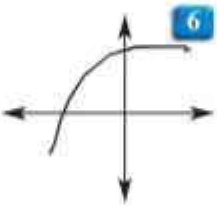
2 ڕوونیبکەوە چۆن ڕێسای نەخشەی هێڵی دەدۆزیتەوە بەزانینی هێڵی ڕوونکردنەوەیی.

ئایا ئەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە نەخشەی هێڵی دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

3


4


5


6


ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئایا ئەم نەخشانە هێڵین؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

7 $f(x)=2-x^2$

8 $f(x)=-3x-6$

9 $g(x)=4+10x$

10 $f(x)=x^3-x$

11 $f(x)=\frac{3}{2}x+4$

12 $g(x)=\frac{1}{x}$

جێبەجێکردنەکان

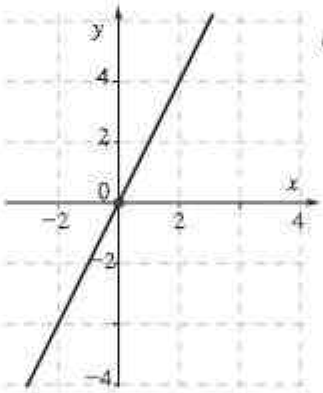
بیرکاری بەکارچوون

13 خشتەی خوارەوە تێچوی پەیوەندی کردنەکانی مۆبایل دیاریدەکات لەگەڵ تێچوونە نەگۆڕەکەی کە بەهاکەی 2 سەنتە لەهەر خولەکێك.

ژمارەی خولەك	1	2	3	4	5	6
تێچوو بە سەنت	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00

خشتەکە بەکاربێنە بۆ نووسینی نەخشەیەك، بوار و مەودای ئەو نەخشەیە دیاربکە.

14 وێنەی بەرامبەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەکی هێڵی دیاردەکات، خشتەی بەهاکانی پێکبهێنە و ڕێساکەی بنووسە.



جووتە ڕێکخراوەکە تەواوبکە بەمەرجێک خاڵەکە بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y = -4x + 21$.

15 (5, ?) **16** (?, 9)

17 (0, ?) **18** (?, 0)

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

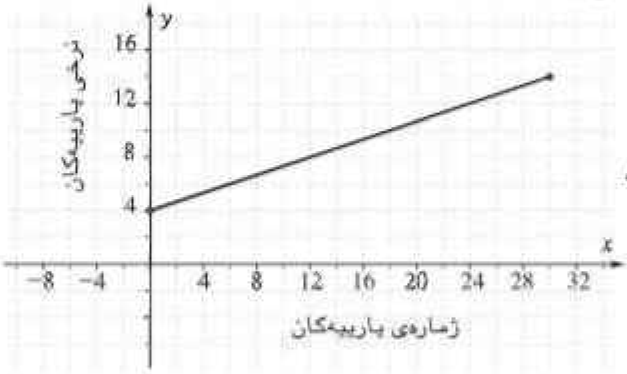
جووتە ڕێکخراوەکە تەواوبکە بەمەرجێک خاڵەکە بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y = 2x - 14$.

19 (8, ?) **20** (10, ?) **21** (0, ?) **22** (?, 0)

23 (5, ?) **24** (−5, ?) **25** (3, ?) **26** (?, 3)

27 (?, 6) **28** (?, −4) **29** (?, −7) **30** (?, 10)

31 ئەندازەی بۆتان وێنەی ڕوونکردنەوەییەکە پەیوەندی نێوان ژمارەی یارییە ئەلکترۆنییەکان (نێوان 0 و 30) ونرخەکەی دیاریدەکات. خشتەی بەهاکانی ئەم نەخشەیە پێکبهێنە و ڕێساکەی بنووسە.



32 ئوتومبێلەکان کاتێک تانکی سووتەمەنی ئوتومبێلەکەت پڕ دەکەیت، بڕی سووتەمەنی لە تانکیەکە نەخشەیەکە، گۆڕاوە سەربەخۆیەکەی ژمارەی خولەکەکانە وای دابنێ کە ئەو سووتەمەنییەی دەڕژێتە ناو تانکیەکە بە تێکڕای 18 لیترە لەهەر خولەکێکدا و فراوانی تەنکیەکە بەگاتە 35 لیتر.

أ ڕێسای نەخشەیەک بنووسە بڕی ئەو سووتەمەنییەی کە دەڕژێتە ناو تانکیەکە بەپێی کات بنوێنێت.

ب بوار و مەودای ئەم نەخشەیە دیاریبکە.

33 بۆخۆشی یانەی گەنجان CD دەفرۆشێت وەک لەو خشتەیەی دێت دیارکراوە، لەگەڵ پارەی بەشداربوونی لەیانەکە کە بریتییە لە 25 هەزار دینار.

ژمارەی CD	0	2	4	6	8	10	12	14
تێچوون	25	45	65	85	105	125	145	165

نەخشەیەک بنووسە ئەمە بنوێنێت؟

34 **بۆخۆشی** یانەی ژیان CD دەفرۆشێت وەك لەم خشتەی خوارەوە دیاریکراوە لەگەڵ پارەی بەشداربوون لە یانەکەدا کە دەگاتە 35 هەزار دینار.

ژمارەی CD	0	2	4	6	8	10	12	14
تێچوون	35	51	67	83	99	115	131	147

نەخشەیەك بنووسە ئەمە بنوێنێت.

بەرەنگاری

35 **تەکنەلۆژیا** بڕمێرەی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکەی دوو ڕاهێنانی پێشوو لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا. بەراوردی نێوان دوو خستنەڕووەکە بکە. کام یانەیان خستنەڕووی باشتر پێش کەش دەکات؟ ئەوە ڕوون بکەرەوە.

ڕوانینێك بۆ دواوە

خشتەی بەهاکانی هەر نەخشەیەك پێکبهێنە بەلەجیاتیدانانی بەهاکانی

10 ,5 ,4 ,3 , 2, 1 لەجیاتی x و هێڵە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە

36 $y = 2x + 1$ **37** $y = 5x - 1$

بەهزری بەهای ژمارەیی هەر بڕێك لەمانە هەژمێربکە

38 $300 - 196$ **39** 10×30 **40** $\frac{480}{16}$ **41** $1\,000 \times 1\,000$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	4	9	16	25	36	49	64

42 لەخشتەی سەرەوە بکۆڵەوە ئایا نەخشەی هێڵی دەنوێنێت؟

43 ڕێسای پەیوەندی نێوان x و y بنووسە، پێدراوەکانی خشتەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە و لە وەڵامەکەی پێشووت ساغبکەوە.

وانەی 3

شێوە جیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

Various forms of the equation of a line

ئامانجەکان

- شێوە جۆراوجۆرەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ دەناسێ.
- هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەشێوە جیاوازەکانی دەنووسێت.

بۆچی

هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکە ڕۆڵێکی گرنگ لەبیرکاری دەگێڕێ، وە سادەترین نەخشەی جەبری دەنوێنێ و هەروەها بۆ بنیاتنانی نموونەی زۆربەی کێشەکانی ژیان بەکاردێت.

چالاکی 1

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری-یەکتربڕین — Slope-Intercept Form

ئەوزاد سەردانی کۆمپانیایەکی بەکرێدانی ئوتومبیلی کرد. فەرمانبەری کۆمپانیاکە پێی ڕاگەیاند دەبێ 100 هەزار دینار بدات کاتێك ئوتومبێل وەردەگرێت و 1.5 هەزار دینار بدات بۆ هەر کیلۆمەترێك دەیبڕێت.

1. ئەم خشتەیەی دێت تەواوبکە.

ژمارەی کیلۆمەترەکان	10	20	30	
ئەوەی پێویستە بیدات	$1.5 \times 10 + 100$			

2. هاوکێشەی گوزمەی y کە پێویستە بیدات بەپێی ژمارەی کیلۆمەترەکانی x بنووسە.
3. ئەم هاوکێشەیە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

جێبەجێکردنەکان

بازرگانی

هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری – یەكتربڕین Slope - Intercept Form

هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری – یەكتربڕین بریتییە لە $y = mx + b$ كاتێك m و b دوو ژمارەی ڕاستیین، ژمارەی m لاری ڕاستەهێڵەكەیە و b تانی خاڵی یەكتربڕینی ڕاستەهێڵەكەیە لەگەڵ تەوەرەی y.

نموونە 1 لاری ڕاستەهێڵ و خاڵی یەكتربڕین لەگەڵ تەوەری y دیاریكە

أ $y = 3x - 4$ ب $y = -5x + 3$ ج $y = 5$

شیكار

أ لاری 3 و خاڵی یەكتربڕین $(0 ,-4)$

ب لاری 5– و خاڵی یەكتربڕین $(0 ,3)$ ج لاری 0 و خاڵی یەكتربڕینی $(0 ,5)$

هەوڵبدە ئەو ڕاستەهێڵە بكێشە كە ئەو هاوكێشەیە $y = 2x - 8$ دەنوێنێ.

چالاكی 2

هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری–خاڵێك Slope - Point Form

ئەگەر لاری ڕاستەهێڵ m و خاڵێك (h, k) كە پێیدا دەڕوات بزانیت، ئەوا دەتوانیت هاوكێشەكەی بنووسی.

1. هاوكێشەی ڕاستەهێڵ لەسەر شێوەی لاری و یەكتربڕین ئەوەیە $y=mx+b$ پەیوەندی نێوان لاری m وهاوكۆڵكەی x لەم پەیوەندییەدا چییە؟ چۆن هاوكێشەی ڕاستەهێڵ دەنووسیت بۆ دەربڕین لەم پەیوەندییە؟
2. هاوكێشەیk استەهێڵێك بەخاڵی (h, k)دا دەڕوات بنووسە بەلەجیاتیدانانی بەهای h لەجیاتی x و بەهای لەجیاتی y.
3. هاوكێشەكە شیكاربكە و دەرئەنجامی بەهایb بەپێی h ، k ، m دەربخە.
4. لەجیاتی b بەهاكەی دابنێ، هاوكێشەی ڕاستەهێڵەكە بە شێوەی لاری – خاڵەكە بنووسە.

هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری ـ خاڵێك Slope - Point Form

هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری – خاڵێك بریتییە لە $y - y_1 = m(x - x_1)$ كاتێك

- m لاری ڕاستەهێڵەكەیە.
- (x_1, y_1) پۆتانی خاڵەكەیە كە ڕاستەهێڵەكە پێیدا دەڕوات.

نموونە 2 هاوكێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە لاریەكەی 2– و بەخاڵی $(1 , -1)$ دا دەڕوات پاشان وێنەكەی بكێشە

شیكار

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-1) = -2(x - 1)$$
$$y + 1 = -2x + 2$$
$$y = -2x + 1$$

هەوڵبدە هاوكێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە كە لاریەكەی (3)یە و بە خاڵی$(-2, -1)$ دا بەڕوات پاشان وێنەكەی بكێشە

چالاکی 3

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەدوو خاڵدا بڕوات — Two Points Form

هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە بە دوو خاڵی (5, 3) و (7,4) دا دەڕوات.

1. لاری ڕاستەهێڵەکە هەژمێربکە.
2. هاوکێشەکەی بنووسە بە شێوەی لاری – خاڵ. پاشان بە شێوەی لاری – یەکتربڕین.

هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵدا دەڕوات — Two Points Form

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێک بە دوو خاڵی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دا دەڕوات.

دەبێتە

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

هەوڵبدە: هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە دوو خاڵی (5, 65) و (7, 71) دا دەڕوات بنووسە بە شێوەی لاری – یەکتربڕین.

شێوەی گشتی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ — Standard Form

چالاکی 4

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەسەر شێوەی گشتی — Standard Form

کارگێڕی باخچەی ئاژەڵان بلیتی چوونە ژوورەوە بە 10هەزار دینار دیاریکردووە بۆ گەورەکان و بە 5 هەزار دینار بۆ منداڵان، دەستکەوتی ڕۆژی چوارشەممە گەیشتە 1 350 دینار.

جیبەجێکردنەکان
بۆ خۆشی

1. x بەکاربهێنە بۆ نیشاندانی ژمارەی گەورەکان و y بۆ نیشاندانی ژمارەی بچووکەکان. دەستکەوتی ڕۆژی چوارشەممە 1 350 دینار بوو. ئەمە بە هاوکێشەیەک دەربڕە؟
2. خشتەکە تەواوبکە بۆ پێکهێنانی خشتەی جووتە ڕێکخراوەکان کە هاوکێشەکە ساغدەکەنەوە.
3. بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشە دەستکەوتوەکەت بنوێنە بە بەکارهێنانی جووتەڕێکخراوەکان. وێنە ڕوونکردنەوەییە کێشراوەکە چۆنە؟
4. دڵنیابە لە وەڵامەکەت لە تایبەتمەندی وێنە ڕوونکردنەوەکە لە ڕێگای شیکارکردنی هاوکێشەکە.

خشتەیەکی بەها

x	y
50	
	120
	70
120	

خاڵی چاودێری ✓

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەسەر شێوەی گشتی — Standard Form

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەسەر شێوەی گشتی ئەمەیە $ax + by + c = 0$ کاتێک

- a و b و c ژمارەی ڕاستین.
- یەک لە دوو ژمارەی a و b بەلایەنی کەمەوە یەکسان نییە بە 0.

نموونە 3

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەشێوەی گشتی بنووسە

أ $y = -2x + 3$ ب $x = -13y + 4$ ج $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

شیکار

أ $y = -2x + 3$

$2x + y = 3$

ب $x = -13y + 4$

$x + 13y = 4$

ج $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

$\frac{3}{4}x - 2 - 3y = 0$

$\frac{3}{4}x - 3y = 2$

ئەم شێوەیە شێوەی گشتییە چونکە دەنووسرێ $\frac{3}{4}x + (-3)y = 2$

نموونە 4 هەر هاوکێشەیەک بە شێوەی لاری-یەکتربڕین بنووسە.

أ $2y-2x=6$ ب $6x+4y=4$ ج $\frac{3}{4}y-6x=3$

شیکار

أ
$$2y-2x=6$$
$$2y=2x+6$$
$$y=x+3$$

ب
$$6x+4y=4$$
$$4y=-6x+4$$
$$y=-\frac{3}{2}x+1$$

ج
$$\frac{3}{4}y-6x=3$$
$$\frac{3}{4}y=6x+3$$
$$y=8x+4$$

هەوڵبدە هاوکێشەی $y-23=5(x-4)$ بەشێوەی لاری-یەکتربڕین بنووسە پاشان بە شێوەی گشتی بنووسە.

هاوکێشەی دوو ڕاستەهێڵی ئاسۆیی و ستوونی Horizontal and Vertical Lines

هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ئاسۆیی بریتییە لە $y=b$ کاتێك b یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ تەوەری y دەنوێنێت، لاری ڕاستەهێڵە ئاسۆیەکە هەردەم دەکاتە 0 .

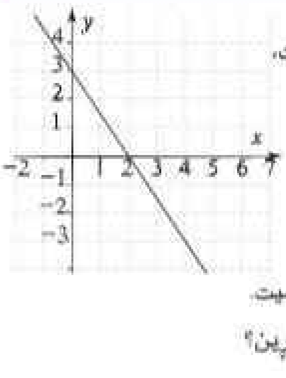
هاوکێشەی ڕاستەهێڵی ستوونی بریتییە لە $x=b$ کاتێك b یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ تەوەرەی x دەنوێنێت، لاری ڕاستەهێڵی ستوونی پێناسەنەکراوە.

شێوە جیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ Various Form of the Equation of a Line

ناوی شێوەکە	شێوەی هاوکێشەکە	نموونە
لاری - یەکتربڕین	$y=mx+b$	$y=3x+5$
گشتی	$ax+by=c$	$3x-2y=5$
لاری - خاڵ	$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-2=-3(x-1)$
بە دوو خاڵدا بڕوات	$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$	$y-65=\frac{71-65}{7-5}(x-5)$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا



1 هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە لارییەکەی m وبەخاڵی بنەڕەتدا بڕوات،

2 چۆن ڕاستەهێڵی $y=mx+b$ دەگۆڕێت کاتێك بەهای b بگۆڕێت؟

3 چۆن ڕاستەهێڵی $y=mx$ دەگۆڕێت کاتێك بەهای m بگۆڕێت؟

4 چۆن شێوەی لاری – خاڵ بەکاردەهێنرێت بۆ نووسینی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە دوو خاڵی $(1,1)$ ، $(-2,4)$ دا بڕوات؟

5 ڕوونیبکەوە چۆن هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی وێنەی بەرامبەر دەنووسیت.

6 چۆن هاوکێشەی $3x+3y+2=0$ دەنووسیت بەشێوەی لاری - یەکتربڕین؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێک بەشێوەی گشتی بنووسە

7 $y=3x+7$ **8** $2y=3x-4$ **9** $3x=-7y-17$

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێک بە شێوەی لاری - بەکتربڕین بنووسە، ئەگەر لاری وئەو خاڵەی پێیدادەڕوات زانراوبێت.

10 لاری: 2، خاڵ: (3,4)

11 لاری: -2، خاڵ: $(-3, 4)$

12 لاری: $\frac{1}{3}$، خاڵ: $(3, -4)$

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێک بە شێوەی لاری - بەکتربڕین و بەشێوەی گشتی بنووسە

13 $y-50=8(x-4)$ **14** $3y=9x+15$ **15** $y=10(-4x+3)$

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێک بە شێوەی لاری - بەکتربڕین بنووسە ئەگەر دوو خاڵ زانرا کە پێیاندا دەڕوات.

16 $(-2, 5)$ ،$(5, -2)$ **17** $(-4, 4)$ ،$(-3, 3)$ **18** $(-3, -2)$ ،$(3, 2)$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

پۆتانی خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ دوو تەوەری پۆتان دیاریبکە

19 $y=4x+5$ **20** $y=8x-1$ **21** $y=-3x+5$

22 $y=-2x+13$ **23** $y=17x-4$ **24** $y=-5x-9$

25 $y+x=10$ **26** $3x-2y=12$ **27** $5x+4y=12$

28 $4x-5y=20$ **29** $2x-7y=14$ **30** $9x+y=18$

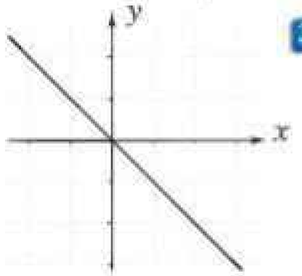
لاری ڕاستەهێڵەکە و یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەرەی ستوونی دیاریکە، بەبێ کێشانی وێنەکەی

31 $y=-5x$ **32** $y=-5x+3$ **33** $y=7$

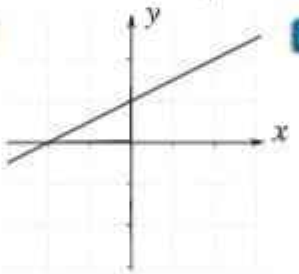
34 $x=7$ **35** $y=7-x$ **36** $y=\frac{1}{3}x-5$

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەشێوەی لاری یەکتربڕینی بنووسە

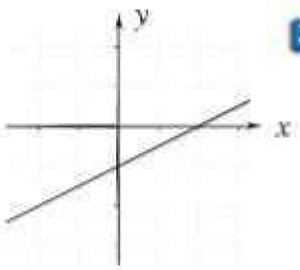
37



38



39



40 لاری ڕاستەهێڵێک چەندە کە هاوکێشەکە $6x+2y=40$ ؟

ناتوانرێ هاوکێشەی ڕاستەهێڵ $x=4$ بنووسرێت لەشێوەی لاری - یەکتربڕین چونکە لارییەکەی پێناسە نەکراوە، بەڵام دەتوانرێت بەشێوەی $1\times x+0\times y=4$ بنووسرێت، ئەم خشتەیە تەواوبکە.

	هاوکێشەی پێدراو	شێوەی لاری - یەکتربڕین	شێوەی گشتی
41	$x=1$		
42	$y=4$		
43	$x+y=5$		
44	$y=4x$		
45	$x=4y$		

بەرەنگاری

46 وێنەی دوو ڕاستەهێڵی $4x+2y=12$ و $2x+y=10$ بکێشە. چی تێبینی دەکەیت؟

جێبەجێکردن

47 **زینگە** وا دابنێ کە بەرزی ئاو لە ڕووبارێك لە ڕووبارەکاندا 34 cm ە و ئەو بەرزییە زیاددەکات بەتێکڕای 5cm ڕۆژانە. هاوکێشەیەك بنووسە بەرزی ئاوەکە وژمارەی ڕۆژەکان بنوێنێت ئەم هاوکێشەیە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە، پاش چەندرۆژ بەرزی ئاوەکە دەبێتە 260cm؟

بەرەنگاری

48 **پاشەکەوت** باوکی دانا بلیتی بەشداربوونی لە یانەیەکی وەرزشی بە بەهای 40 هەزار دینار بۆ کوڕەکەی کڕی. دانا بەپێی ئەم بلیتە هەر ڕۆژێك سەردانی یانەکە بکاتە 1 هەزار دینار دەدات لەجیاتی ئابونەی ئاسایی کە دەکاتە 3.5 هەزار دینار. چەند جار دانا دەتوانێت بڕوات بۆ یانەکە تاوەکو باوکی زەرەرمەند نەبێت لە کڕینی بلیتەکە؟

جێبەجێکردن

49 **بازرگانی** نرخی بلیتی چوونە ژوورەوەی ئاهەنگ 5 هەزار دینار بۆ گەوران و3 هەزار دینار بۆ بچووکەکان بوو، هاوکێشەیەك بنووسە دەستکەوتی ئاهەنگێك کە گەیشتە 700هەزار دینار دیاری بکات بە بەکارهێنانی x بۆ ژمارەی گەوران و y بۆ ژمارەی بچووکان، لاری ئەو ڕاستەهێڵەی ئەو هاوکێشەیە دەینوێنێت چەندە؟ و یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری y چەندە؟

تێڕوانینێك بۆدواوە

50 ڕێسای $d=vt$ دووری بەمەتر کە ئۆتۆمبیلێك دەیبڕێت، کە بە خێرایی v مەتر لە چرکەیەکدا لەماوەی t چرکە دەردەبڕێت، ئەو ڕێسایە بەکاربێنە بۆهەژمارکردنی ئەو دووریەی ئۆتومبیلەکە لە 4 چرکە دەیبڕێت، ئەگەر زانیت بەخێرایی 50 مەتر لە چرکەیەکدا دەڕوات.

51 ڕێسای هەژمارکردنی چێوەی بازنەی P بەپێی نیوەتیرەکەی r بنووسە. لەپاشان ئەم ڕێسایە بەکاربهێنە بۆ هەژماردکردنی چێوەی بازنەیەك نیوەتیرەکەی 8cm بێت ژمارە 3.14 بەکاربێنە وەك بەهای نزیکراو بۆ ژمارە π .

خشتەکە بوونسەوە، پاشان تەواوبکە، کەرتەکان بە سادەترین شێوە بنووسە

	شێوەی کەرتی	شێوەی دەیی	ژمارەکە وەك ڕێژەی سەدی
52		$0.\overline{3}$	$33\frac{1}{3}\%$
53		0.875	
54			2%
55	$\frac{1}{10}$		
56			$12\frac{1}{2}\%$
57	$\frac{2}{3}$		
58	$\frac{1}{6}$		
59			0.01%
60		0.80	
61	$\frac{2}{5}$		

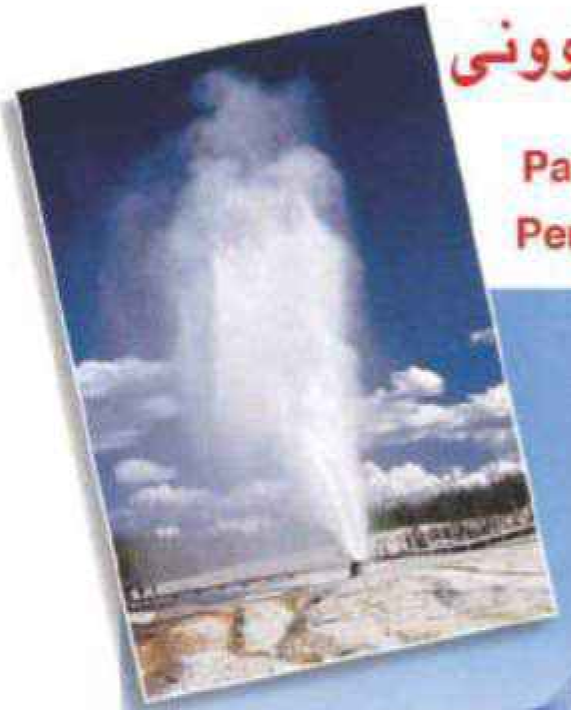
جێبەجێکردن

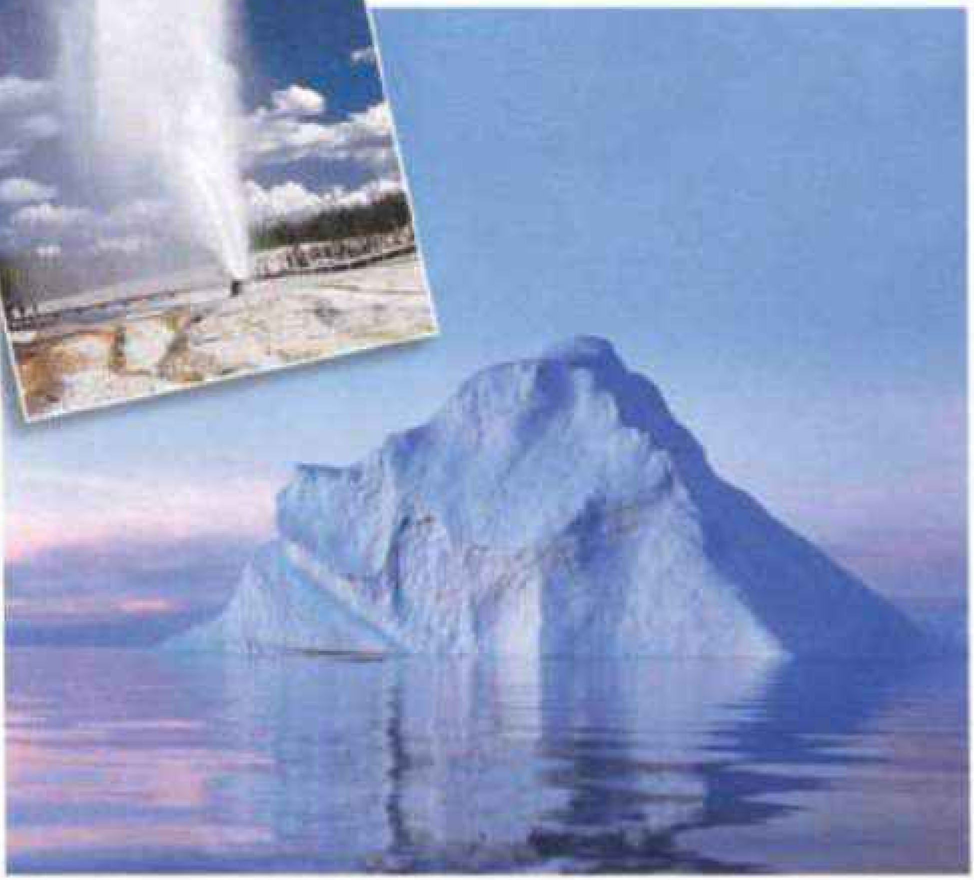
ڕوانینێك بۆ پێشەوە

62 لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا دوو ڕاستەهێڵی $y=2.12x-3.7$ و $y=x+5.4$ بکێشە پۆتانی هەموو خاڵە یەکتربڕینەکانی نێوانیان دیاریبکە.

وانەی 4

تەریببوون و ستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان Parallel and Perpendicular Lines





ئامانجەکان

- تەریببوونی دوو ڕاستەهێڵ یان ستوونبوونیان بە بەراوردکردنی لاریەکانیان جیادەکاتەوە
- هاوکێشەی ڕاستەهێڵی تەریب بە ڕاستەهێڵێکی تر یان ستوون لەگەڵیدا دەنووسێت

بۆچی

دوای ناسینی ڕاستەهێڵە تەریبەکان یان ستوونەکان لەڕێگەی بەراوردکردنی لارییەکانیان بە مەسەلەیەکی گرنگ دادەنرێت بۆ جیاکردنەوەی پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵەکان بەپێی ئەوەی وێنەکانیان بکێشین

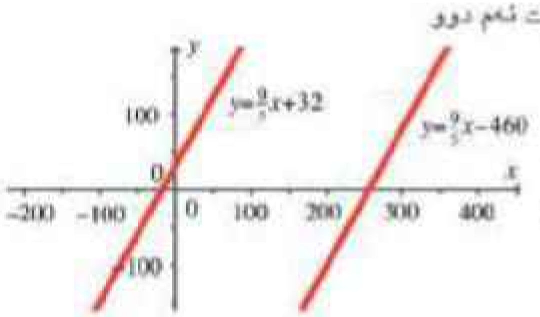
پەیوەندییە ڕاستەوخۆکان

فیزیا

ئاو بەشێوەی جۆراوجۆرەکانی دەردەکەوێت بەپێی پلەکانی گەرمی، دەیبەستێ لەپلەکانی گەرمی زۆر نزم وەک لە چیای بەفری وێنەکەدا دیارە، یان دەگۆڕێت بۆ هەڵم لەپلەی گەرمی بەرز وەک دیارە لەم هەڵسەی لەزەوی بەرز دەبێتەوە.

	فەهرنهایت	سەدی	کالڤن
کولانی ئاو	212	100	373
بەستنی ئاو	32	0	273
سفری ڕووت	-459	-273	0

خشتەی بەرامبەر پلەکانی گەرمی بەسێ پێوەر دیاردەکات، پێوەری فەهرنهایت و پێوەری سەدی و پێوەری کالڤن. گۆڕینی پلەی گەرمی لە پێوانی سەدی بۆ پێوانی فەهرنهایت بەپێی یاسای $F=\frac{9}{5}C+32$ دەبێت و پێوانی کالڤن بۆ پێوانی فەهرنهایت بەپێی یاسای $F=\frac{9}{5}K-459.4$ دەبێت دەتوانرێت ئەم دوو هاوکێشەیە بخەینەجیاتیدانانی y لەبری هەر F و x لەبری c یان K. $y=\frac{9}{5}x+32$ و $y=\frac{9}{5}x-460$ بڕوانە ئەو دوو ڕاستەهێڵەی دوو هاوکێشەکە دەنوێنن تەریبن و لارییان یەکسانە



وانەی 4-2

ڕاستەهێڵە تەریبەکان Parallel Lines

ئەگەر لاری دوو ڕاستەهێڵ یەکسان بوون ئەوا تەریب دەبن.

ئەگەر دوو ڕاستەهێڵی نا ستوون تەریب بوون ئەوا لارییەکانیان یەکسان دەبن (ئەستوونی سەر تەوەری سینی نەبن).

نموونە 1

به شێوەی لاری - یەکتربڕین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y=3x-7$ و تەوەری ستوونی لە 4 دا ببڕێت بنووسە.

شیکار

لاری ئەو ڕاستەهێڵە دەکاتە 3 و لەبەرئەوەی تەوەری y لە 4 دا دەبڕێت، ئەوا هاوکێشەکەی دەبێتە $y=3x+4$.

هەوڵبدە به شێوەی لاری - یەکتربڕین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y=0.5x+5$ و تەوەری ستوونی لە -2 دابڕێت بنووسە.

لە بیرت بێت دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون دەبن ئەگەر یەکتریان بڕی و گۆشە وەستاویان پێکهێنا. لەم چالاکیەی دێت پەیوەندی نێوان لارییەکانی دوو ڕاستەهێڵی ستوون دەدۆزێتەوە.

چالاکی

دۆزینەوەی پەیوەندی نێوان ئەستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان و لارییەکانیان
Relation between Slope and Perpendicular Line

لەم چالاکییەدا پێویستمان بە ڕاستەی وەستاو و کاغەزی ڕوونکردنەوەیی هەیە کە دوو تەوەری رووتەختی پۆتانی لەسەر بێت.

1. ئایا دوو ڕاستەهێڵی $y=-2x+3$ و $y=0.5x-2$ یەکتردەبڕن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.
2. ئەو دوو ڕاستەهێڵە لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە بە ڕوونکردنەوەیی، پۆتانی خاڵی یەکتربڕینیان دیاریکە.
3. بەڕای تۆ پەیوەندی نێوان دوو ڕاستەهێڵەکە چیە؟ ڕاستەی وەستاو بەکاربێنە بۆ ساغکردنەوەی وەلامەکت.
4. لاری ڕاستەهێڵی یەکەم و لەلاری ڕاستەهێڵی دووەم لێکبدە و ئەنجامی لێکدانەکە چییە؟

ڕاستەهێڵە ئەستوونەکان Perpendicular Lines

ئەگەر ئەنجامی لێکدانی لاری دوو ڕاستەهێڵ بکاتە -1 ئەوا ستوون دەبن.

ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ستوون بن ئەوا ئەنجامی لێکدانی لارییەکانیان دەکاتە -1 .

نموونە 2

بنووسە بە شێوەی لاری - یەکتربڕین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی تەوەری ستوونی دەبڕێت لە 4 دا و ستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی $y=3x+2$.

شیکار

لاری ڕاستەهێڵەکە دەکاتە $-\frac{1}{3}$ چونکە ستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=3x+2$ کە لارییەکەی دەکاتە 3 هاوکێشە داواکراوەکە ئەمەیە $y=-\frac{1}{3}x+4$.

هەوڵبدە بە شێوەی لاری - یەکتربڕین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی تەوەری ستوونی دەبڕێت لە 6 دا ستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=4x+2$ بنووسە.

نموونە 3

بە شێوەی لاری ـ خاڵ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بەخاڵی $(4,5)$دا دەڕوات و ستوونە بە ڕاستەهێڵی $2x+3y=7$ بنووسە.

شیکار

دەستبکە بە نووسینی هاوکێشەی ڕاستەهێڵە دراوەکە بەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ دەبێت لاری ڕاستەهێڵە ستوونەکە بکاتە $\frac{3}{2}$. و لەبەرئەوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەشێوەی لاری ـ خاڵ بریتییە لە: $y-y_1=m(x-x_1)$ ئەوا هاوکێشەی داواکراوەکە دەبێتە $y-5=\frac{3}{2}(x-4)$

هەوڵبدە بنووسە، لەشێوەی لاری ـ خاڵ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بەخاڵی$(-2,3)$ دەڕوات، و ستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی $4x-2y=-6$.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ڕوونبکەوە چۆن هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك تەریب بە ڕاستەهێڵی $y=4x+3$ دەنووسی؟

2 ڕاستەهێڵێك لاریەکەی $\frac{2}{3}$ ڕوونبکەوە چۆن لاری ڕاستەهێڵی ستوون لەگەڵی دەدۆزیەوە؟

3 چۆن لاری ڕاستەهێڵی ستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=\frac{1}{3}x+2$ دیاردەکەیت؟

4 ڕوونبکەرەوە چۆن هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك ستوون بێ لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=4x+3$ دەدۆزیەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بنووسە، بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی ستوونی ببڕێت لە 5 دا و تەریب بەو ڕاستەهێڵە پێدراوەکە.

5 $y=2x+3$ 6 $y=-3x$ 7 $4y=x$ 8 $y=-6x+2$

بنووسە، بەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی ستوونی ببڕێت لە 5دا و ستوون بێ لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵە پێدراوەکە.

9 $y=3x-3$ 10 $y=-3x$ 11 $5y=x$ 12 $-6y=x$

بنووسە، بەشێوەی لاری ـ خاڵ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵی$(4,5)$ بڕوات و ستوون لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵە پێدراوەکە.

13 $2x+3y=4$ 14 $x-3y=8$ 15 $-2x-8y=16$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

لاری هەریەك لەم ڕاستەهێڵانە دیاریکە.

16 $y=4x+10$ 17 $3x+y=7$ 18 $10=-5x+2y$

19 $4x-3y=12$ 20 $y=\frac{1}{3}x-3$ 21 $3x-y=7$

22 $2x-y=14$ **23** $3x+2y=51$ **24** $13=20x-5y$

25 $3y=-4x+2$ **26** $\frac{2}{3}x+6y=1$ **27** $4x+\frac{1}{4}y=8$

لاری ڕاستەهێڵی ستوون لەگەڵ ئەم ڕاستەهێڵانە دیاری بکە.

28 $y=-\frac{1}{3}x+10$ **29** $-\frac{1}{2}x-y=20$ **30** $13=-x+y$

31 $3x+12y=12$ **32** $y=5x+10$ **33** $3x+y=2$

34 $20=-5x+2y$ **35** $4x+4y=12$ **36** $2y=5x+11$

37 $-4x+8y=17$ **38** $12x+3y=10$ **39** $4y=20x-3$

بنووسە بەشێوەی گشتی هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بەخاڵی (2،3) دەڕوات و تەریب بەو ڕاستەهێڵەی دراوە.

40 $x+y=1$ **41** $3x=7y+2$ **42** $y=2x-3$

43 $3y=2x$ **44** $7x-2y=10$ **45** $11=3y+2x$

بنووسە بەشێوەی لاری ـ بەکتربڕین. هاوکێشەیەك بۆ ئەو ڕاستەهێڵەی بەم پێدراوانە دیاریکراوە.

	بڕوات بە	تەریب بە ڕاستەهێڵی
46	(3, −5)	$5x-2y=10$
47	(−2, 7)	$y=3x-4$
48	(2, 4)	$y=7$
49	(2, −4)	$y=3x-4$
50	(−1, 4)	$y=2x+5$

	بڕوات بە	ستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی
51	(3, −5)	$5x+2y=10$
52	(2, 7)	$y=3x-4$
53	(2, −4)	$y=7$
54	(−2, 4)	$3x+y=5$
55	(−1, 4)	$y=2x-5$

وێنەی ڕاستەهێڵی $y=5x$ بکێشە

56 ڕاستەهێڵێك تەریب بە ڕاستەهێڵی $y=5x$ بکێشە و هاوکێشەکەی بنووسە.

57 ڕاستەهێڵێك ستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=5x$ بکێشە هاوکێشەکەی بنووسە.

چی دەتوانیت بڵێیت دەربارەی لاری هەر یەکە لەم ڕاستە هێڵانەی خوارەوە؟

58 تەریب بێت بە ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی

59 ستوون بێت لەگەڵ ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی

60 تەریب بێت بە ڕاستەهێڵێکی شاوڵی

61 ستوون بێت لەگەڵ ڕاستەهێڵێکی شاوڵی

بەستنەوە

ئەندازە **هاوکێشەکانی چوار ڕاستەهێڵ بنووسە کە یەکتریان بڕیبێت بۆ ئەوەی لاکانی چوارگۆشەیەك دروستبکەن.**

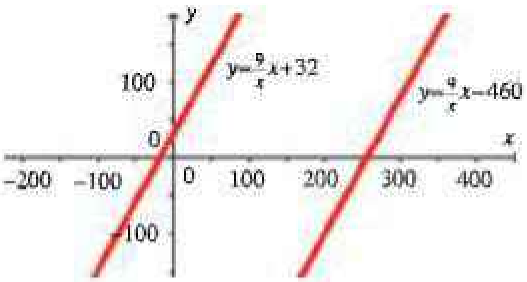
62 تەریب بن بە دوو تەوەری پۆتان

63 تەریب نەبن بە دوو تەوەری پۆتان

جێبەجێکردن

64 **ئەندازە** یەکێك لە لایەکانی چوارگۆشەیەك دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y=\frac{3}{4}x+5$ هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکان کە دەشێت بکەونە سەر لاکانی تری چوارگۆشەکە بنووسە.

65 **فیزیا** یاسایەك بنووسە بۆ گۆڕینی پلەکانی گەرمی لە پێوانەی فەرنهایت بۆ پێوانەی سەدی، یاسایەکی تر بۆ گۆڕینی پێوانەی فەرنهایت بۆ پێوانەی کالفن، ئەو دوو یاسایە لەشێوەی هاوکێشە بنووسە، بە بەکارهێنانی x بۆ پلەکانی گەرمی بە پێوانەی فەرنهایت و y بۆ پلەکانی گەرمی لە پێوانەی کالفن یان پێوانەی سەدی. دوو ڕاستەهێڵەکە بکێشە.



هاوکێشەی $y=\frac{9}{5}x+32$ گۆڕین لە پێوانەی سەدی بۆ پێوانەی فەرنهایت دەکات و هاوکێشەی $y=\frac{9}{5}x-460$ بۆ گۆڕینی لەپێوانەی کالفن بۆ پێوانە فەرنهایتی دەکات.

66 پەیوەندی نێوان دوو ڕاستەهێڵی ڕاهێنانی 65 چییە؟ لاری هەریەکەیان بنووسە.

بەرەنگاری

67 پەیوەندی نێوان ئەو دوو ڕاستەهێڵە ڕاهێنانی 66 و ئەو دوو ڕاستەهێڵەی کە گۆڕینی پێوانەی کالفن و سەدی بۆ پێوانەی فەرنهایت دەنوێنن چییە؟

ڕوانین بۆ دواوە

68 کەوانەکان لە شوێنی پێویست دابنێ بۆ ئەوەی یەکسان بوونەکە ڕاست بێت.

$$2\times 7+35\div 7-10=2$$

ئەمانە بەسادەترین شێوە بنووسە.

69 $2x^2+3y+4y+3x^2$

70 $3x+2+4y-2+3y$

71 $2x+3xy+5x^2-7xy$

72 $3x+4y+2x+5-6y$

73 $4x^2+5x+8+11x^2+3x$

74 $3xy+2x+4y-xy$

75 $9x^2+5xy+2x-4x^2$

76 $4y^2-12y+6xy+3y$

ڕوانین بۆ پێشەوە

چەند جووتە ڕێکخراو شیکارێك بۆ سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی بە دوو گۆڕاو پێکدەهێنێت ئەگەر ئەو دوو ڕاستەهێڵەی ئەو هاوکێشەیە دەنوێنن.

77 تەریب بن؟

78 ستوون بن؟

وانەی 5

شیکارکردنی سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی
Solving Linear Systems Graphically

بۆچی

سستەمی هاوکێشەکانی هێڵی بۆ شیکارکردنی ڕووداوەکانی ژیانی ڕۆژانە زۆربەی جار بەکاردێت بەتایبەتی لەکارگێڕی و ئابووری. لەهەندێ باردا دۆزینەوەی شیکاری تەواو زۆرگرنگ نییە بەڵام پێویستە شیکارێکی نزیکی بدۆزینەوە و لەهەندێ باردا داواکراو ئەوەیە ئەگەر شیکاری هەبێت تەنها یەك شیکار یان زۆرتر لە شیکارێك. لەم بارانەدا شیکاری ڕوونکردنەوەی بۆ سستەمی هاوکێشەکانی هێڵی یارمەتیمان دەدات بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکراوەکە

ئامانجەکان

- سستەمی دوو هاوکێشەی هێڵی شیکاردەکات بە ڕوونکردنەوەیی.
- سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی پۆلێندەکات.

شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بەڕوونکردنەوەیی
Solving Linear Systems Graphically

لەبەشی پێشوو چۆنیەتی شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵیەکان فێربوویت بە بەکارهێنانی لەجیاتیدانان یان لابردن، لە هەریەکە لەم دوو ڕێگایە پێویستە بەهای یەکێك لە دوو نەزانراوەکە دیاریبکەین پاشان بەهای ئەویتریان دیاریبکەین. لە بارێکی تر، شیکاری پرسیارێکی ژیانی ڕۆژانە لەوانەیە تەنها پێویستی بە دۆزینەوەی بەهای نزیکەیی شیکارەکەیە، و لەوانەیە پێویست بە وەڵامدانەوەی پرسیارێکی سادە بێت وەك ئایا شیکاری سستەمی هاوکێشەکان هەیە؟ و ژمارەیان چەندە ئەگەر هەبن؟ لەم وانەیە ڕێگای شیکارکردنی ئەو سستەمانە فێردەبیت و وەڵامی خێرا بۆ ئەم پرسیارانە مسۆگەردەکەیت.

چالاکی 1

شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی Solving Linear Systems Graphically

پێویستمان بە بژمێری ڕوونکردنەوەیی یان کاغەزی ڕوونکردنەوەی هەیە.

شیکاری ڕوونکردنەوەی سستەمی $\begin{cases} y = 3x+1 \\ y = -x+5 \end{cases}$ دەکەین.

1. چی دەڵێیت دەربارەی خاڵی (c, d) بەپێی دوو ڕاستەهێڵی $y = 3x+1$ و $y = -x+5$ کاتێك جووتەڕێکخراوی (c, d) شیکارێکی ئەو سستەمە دەبێت؟
2. هەردوو ڕاستەهێڵەکە لەهەمان ڕووتەختی پۆتان بکێشە.
3. بەهای نزیکەیی بۆ پۆتانی خاڵی یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵەکە بدۆزەوە.
4. شیکارێکی نزیکەیی سستەمەکە بدۆزەرەوە.

خاڵ چاودێری ✓

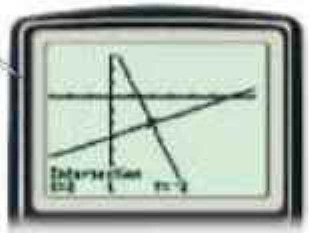
نموونە 1

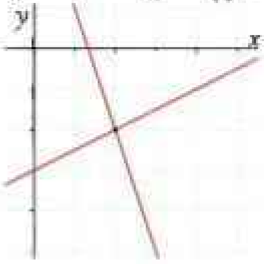
بە ڕوونکردنەوەیی سستەمی $\begin{cases}3x+y=4\\x-2y=6\end{cases}$ شیکاربکە.

شیکار

بۆ کێشانی ڕاستەهێڵی $3x+y=4$ ، خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەرەی y دیاربکە لەڕێگای دانانی سفر لەجیاتی گۆڕاوی x ودۆزینەوەی بەهای گۆڕاوی y کە بەهایە بەرامبەرەکەیەتی $y=4$ دەستدەکەوێت، کەواتە ڕاستەهێڵەکە بە خاڵی $(0,4)$ دا دەڕوات، دیسان خاڵی یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ تەوەرەی x دیاربکە بەدانانی بەهای سفر لەجیاتی گۆڕاوی y و دۆزینەوەی بەهای x ی بەرامبەری $x=\frac{4}{3}$، دەستدەکەوێت کەواتە ڕاستەهێڵەکە بەخاڵی $\left(\frac{4}{3},0\right)$ دادەڕوات، ئێستا ڕاستەهێڵەکە بکێشە.

شاشەکە وەك ئەمەی خوارەوە پێناسەکراوە 7 ;3- ئاسۆیی و 3 ;7- ستوونی بۆ ئەوەی وێنەی بەرامبەر دەست بکەوێ.





ڕێگای پێشوو بەکاربێنە بۆ کێشانی ڕاستەهێڵی $x-2y=6$ دوو ڕاستەهێڵەکە یەکتردەبڕن لە خاڵی $(2,-2)$. شیکارەکە $(2,-2)$.

پاسدانی شیکارەکەبکە بەلەجیاتیدانانی ژمارە 2 لەبری x و ژمارە2- لەبریy.

$3x+y\overset{?}{=}4$ $\qquad$ $x-2y\overset{?}{=}6$

$3\times2+(-2)\overset{?}{=}4$ $\qquad$ $2-2(-2)\overset{?}{=}6$

$6-2\overset{?}{=}4$ ڕاستە $\qquad$ $2+4\overset{?}{=}6$ ڕاستە

چالاکی 2

پۆلێنکردنی سستەمەکانی هاوکێشە هێڵیەکان Classifying Linear Systems

پێویستت بە بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی یان کاغەزی ڕوونکردنەو هەیە.

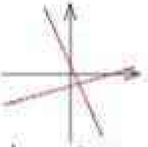
$\begin{cases}y=2x-1\\y=-x+5\end{cases}$
$\begin{cases}y=2x-1\\y=2x+1\end{cases}$
$\begin{cases}y=\frac{8-3x}{4}\\y=-\frac{3}{4}x+2\end{cases}$

1. بە ڕوونکردنەوەیی سستەمی یەکەم بنوێنە لە خشتەی بەرامبەر.
   A . ئایا دوو ڕاستەهێڵەکە یەکتردەبڕن؟
   B . ئایا سستەمەکە تەنها یەك شیکاری هەیە؟ ئەو شیکارە چییە ئەگەر هەیە؟ وئەگەر سستەمەکە شیکاری نییە، سستەمەکە بگۆڕە بۆ ئەوەی تەنها یەك شیکارت دەستکەوێ و هەژمێریبکە.
2. ئەوەی پێی هەڵساوی ڕوونیبکەوە بە بەکارهێنانی سیستمی دووەم لەپاشان سێیەم.
3. پەیوەندی نێوان ئەو دوو ڕاستەهێڵەکە ڕوونبکەوە.
   • کاتێك سستەمەکە شیکاری نەبێت.
   • کاتێك سستەمەکە ژمارەیەکی ناکۆتا شیکاری هەبێت.
   • کاتێك سستەمەکە تەنها یەك شیکاری هەبێت.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

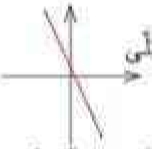
کاتێك هەوڵ دەدەیت بە ڕوونکردنەوەیی سیستمێکی دوو هاوکێشەی هێڵی شیکاربکەیت، یەکێك لەو سێ بارانەی خوارەوە دەبێت.

دوو ڕاستەهێڵی یەکتربڕ



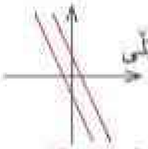
سستەمی سنووردراو

دوو ڕاستەهێڵی جووت



سستەمی بێ سنوور

دوو ڕاستەهێڵی تەریب



سستەمی ستەم

پۆلێنی سستەمەکانی هاوکێشەی هێڵی Classifying Linear Systems

سستەمەکانی هاوکێشەی هێڵی پۆلێن دەکرێن بۆ سێ جۆری بنەڕەت:

- سستەمی ستەم **Inconsistent** : سیستمێکە شیکاری نییە.
- سستەمی سنووردراو **Independent** : سیستمێکە تەنها یەك شیکاری هەیە.
- سستەمی بێ سنوور **Dependent**: سیستمێکە ژمارەیەکی بێ سنوور شیکاری هەیە.

نموونە 2

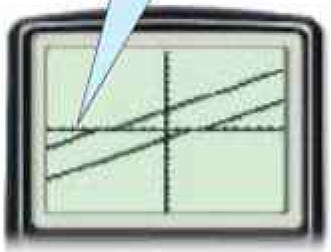
هەریەکە لەم سستەمانە پۆلێن بکە و شیکارەکەی دیاریکە ئەگەر هەبێت.

أ $\begin{cases} x+y=5 \\ x-5y=-7 \end{cases}$

ب $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+5=2y \end{cases}$

شیکار

لەبەر ئەوەی دوو ڕاستەهێڵەکە یەکتر دەبڕن ئەوا سستەمێکی دیاریکراوە شیکارەکەش (3, 2) .



لەبەر ئەوەی دوو ڕاستەهێڵەکە تەریبن ئەوا سستەمکە ئەستەمە.

هەوڵبدە سستەمی $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=-2x+4 \end{cases}$ پۆلین بکە و شیکارەکەی دیاربکە ئەگەر هەبێت .

سەرنجێکی رەخنەگرانە سستەمی $\begin{cases} y=mx \\ y=nx \end{cases}$ پۆلین بکە کاتێك n ، m جیاواز بن لە سفر . لە هەموو بارەکانی لەتوانادایە بکۆڵەرەوە.

نموونە 3

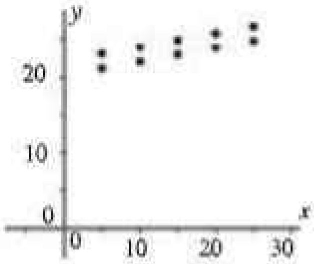
جێبەجێکردنەکان
زانستە کۆمەڵایەتیەکان

ئامارەکان دەربارەی تەمەنی هاوسەرگیری بۆ نێرینە و مێینە لە یەکێك لە وڵاتان دەرکەوتووە وەك پێدراوەکان لە وێنەی بەرامبەردا دیاریکراوە. خشتەیەك پێکبهێنە ئەو پێدراوانە پوختکاتەوە. ئایا کاتێك دێت تەمەنی هاوسەرگیری لای نێرینەکان و مێینەکان یەکسان بن ئەگەر کارەکە هەر بەم شێوەیە بڕوات؟

شیکار

بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارە،پێدراوە تایبەتییەکانی هەردوو ڕەگەز لە هەمان تەوەری پۆتان بنوێنە.

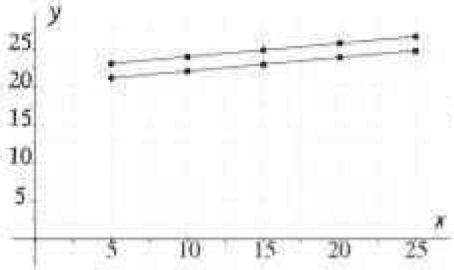
پاش ساڵی 1970	تەمەنی هاوسەرگیری پیاوان	تەمەنی هاوسەرگیری ژنان
5	23.02	21.14
10	23.92	22.04
15	24.82	22.94
20	25.72	23.84
25	26.62	24.74



بڕوانە خاڵەکانی پەیوەست بە هەردوو ڕەگەزەکە دەکەونە سەر هەمان ڕاستەهێڵ. لاری ڕاستەهێڵی پەیوەست بە نێرینەکان دەکاتە $m_1 = \frac{24.82-23.02}{15-5} = -0.18$ و هەروەها لاری ڕاستەهێڵی پەیوەست بە مێینەکان دەکاتە $m_2 = \frac{22.94-21.14}{15-5} = 0.18$. بۆ ئەوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵی پەیوەست بە نێرینەکان بنووسێت $y = 0.18x + b$ بەبەکارهێنانی خاڵی $(10, 23.92)$ بەهای b دیاریکە واتە، $23.92 = 0.18x + b$ دەستدەکەوێت و هەروەها $b = 23.92 - 1.8 = 22.12$. و هاوکێشەی پەیوەست بە نێرینەکان دەبێتە $y = 0.18x + 22.12$. دەتوانیت هاوکێشەی ڕاستەهێڵی پەیوەست بە مێینەکان بە هەمان ڕێگا بدۆزیتەوە $y = 0.18x + 20.24$.

تەمەنی هاوسەرگیری لای نێرینەکان لەگەڵ تەمەنی هاوسەرگیری لای مێینەکان یەکسان دەبێت ئەگەر سستەمی هاوکێشەکانی دێت شیکاری هەبێت.

$$\begin{cases} y = 0.18x + 22.12 \\ y = 0.18x + 20.24 \end{cases}$$



بۆ ئەوەی وەڵام بدۆزیتەوە سستەمەکە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاریکە. نواندنی ئەم دوو هاوکێشەیە بە ڕوونکردنەوەیی دوو ڕاستەهێڵی تەریب و ئەگەر کار بە هەمان شێوە بڕوات ئەوا یەکسان بوونی سستەمەکە کە دەکاتە یەکسانبوونی تەمەنی هاوسەرگیری لای دوو ڕەگەزەکە بێ هیوایە.

هەوڵبدە سستەمی $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 18x - 2y = 4 \end{cases}$ شیکاریکە بەڕێگەی لەجیاتیدانان پاشان شیکارەکە پاسادابکە.

ڕاهێـــــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ڕوونبکەرەوە چۆن بە ڕوونکردنەوەیی سستەمی $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 4y = -9 \end{cases}$ شیکاردەکەیت؟

2 چۆن بە ڕوونکردنەوەیی سستەمی $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$ دەنوێنیت؟ ڕوونبکەرەوە چۆن شیکارەکە دەخەملێنی بە سەیرکردنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی. بۆچی پێویستە ڕاستی خەمڵاندنەکەت ساغبکەیتەوە.

3 ڕوونبکەوە چۆن ڕێسای ئەخشەی هێڵی دەدۆزێتەوە بە زانینی وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی.

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

هەریەک لەو سیستمانە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاریکە

4 $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$ **5** $\begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2y = -x - 9 \end{cases}$ **6** $\begin{cases} 2x + 3y = -12 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

هەر سستەمێک بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە و شیکارەکە بخەملێنە. خەمڵاندنەکە نزیکبکەرەوە بۆ نزیکترین دە.

7 $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 2 \\ y = -\frac{2}{3}x \end{cases}$ **8** $\begin{cases} 2y - x = 6 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$

9. لانە 4000 دیناری پێیە لە پارچەکانی 250 دینار و 500 دیناری ژمارەی هەریەک لە پارچەکان لەهەر چەشنێک چەندە، ئەگەر ژمارەی هەموو پارچەکان 13 پارچە بێت.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هەر سیستەمێک پۆلێن بکە.

10. $\begin{cases} x-y=-4 \\ 3x+y=8 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ 4y-12=-3x \end{cases}$

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەک لەو سیستەمانە بنوێنە و پۆلێنیان بکە. شیکارەکە بە ڕوونکردنەوەیی دیاربکە کاتێک سیستمەکە سنوورداربێت.

12. $\begin{cases} 6x+4y=12 \\ 2y=6-3x \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x+4y=-10 \end{cases}$

14. $\begin{cases} y=2x-1 \\ 6x-y=13 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+3y=13 \\ 2x-3y=-9 \end{cases}$

16. $\begin{cases} y=-2x-7 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

18. $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+y=4 \\ x+2y=8 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x-6y=9 \\ \frac{1}{2}x=y+\frac{3}{2} \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x+5y=-7 \\ 3x-6y=24 \end{cases}$

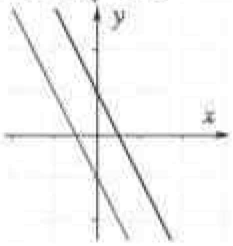
21. $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 2x-4y=-6 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x-y=2 \\ -3x+y=1 \end{cases}$

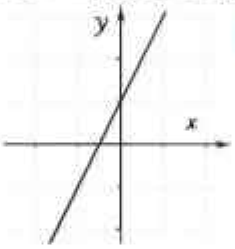
23. $\begin{cases} 6x-3y=9 \\ 3x+7y=47 \end{cases}$

ئەو سیستەمەی بە ڕوونکردنەوەیی نوێنراوە پۆلێن بکە. شیکارەکە بنووسە ئەگەر تاکانە بوو.

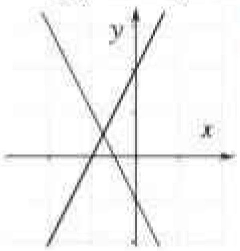
24.



25.



26.



27. ئایا ئەم جووتە ڕێکخراوانە شیکاری سیستەمەکە پێکدێنێ؟

أ (1, 3) ؛ $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ x-y=11 \end{cases}$

ب (5, −2) ؛ $\begin{cases} 4x-3y=26 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

ج (2, 1) ؛ $\begin{cases} 2x-y=8 \\ x+3y=5 \end{cases}$

د (5, 2) ؛ $\begin{cases} 4x-2y=16 \\ -8x+4y=-32 \end{cases}$

هـ یەک لەو چوار سیستەمەی پێشوو سنووردراو نیە، بیدۆزەرەوە، پاشان سێ جووتە ڕێکخراوی تر بنووسە هەریەکەیان شیکارێک بێت بۆی

هەر سستەمێك بە ڕوونكردنەوەیی بنوێنە و پۆلێنی بكە. شیكاری سستەمەكە بدۆزەوە بۆ نزیكترین بەش لەسەد ئەگەر پێویستبوو.

28 $\begin{cases} y = 5x + 2.72 \\ y = 3.6x + 3.126 \end{cases}$

29 $\begin{cases} y = 4.3x - 0.44 \\ y = -2x + 4.6 \end{cases}$

30 $\begin{cases} -\frac{2}{5}x + y = -\frac{1}{10} \\ 3y - 2x = -\frac{5}{6} \end{cases}$

31 $\begin{cases} \frac{1}{7} = \frac{1}{14}x + \frac{11}{2}y \\ y = 4x + 14 \end{cases}$

32 $\begin{cases} 0.7y = 0.8x + 0.78 \\ -\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 2.1 \end{cases}$

33 $\begin{cases} 0.001y + \frac{4}{5}x = 0.2014 \\ 0.8x - 0.02y = 0.172 \end{cases}$

ئەندازە **باخێكی لاكێشەیی چێوەكەی 130m. سێ ئەوەندەی درێژییەكەی دەكاتە دە ئەوەندەی پانییەكەی.**

34 درێژی و پانی باخەكە هەژمێربكە.

35 ڕووبەرەكەی هەژمێربكە.

36 تاقیگەكان كارمەندێكی تاقیگە دووگیراوەی تێكەڵكرد سوێری یەكەمیان10%وسوێری دووەمیان4%بڕەی هەریەك لەگیراوەكان چەندە بۆئەوەی گیراوە دەستكەوتووەكە 500mg بێت وسوێرییەكەی 6% بێت.

37 فڕۆكەوانی فڕۆكەیەك لەبەرزی 7000m نزمبۆوە بەتێكڕای 450m لەخولەكێكدا. فڕۆكەیەكی تر لەبەرزی 375m بەرزدەبێتەوە بەتێكڕای 575m لە خولەكێكدا. سیستەمێك لەدوو هاوكێشەی هێڵی بنووسە ڕێگابدات بە هەژمێركردنی ژمارەی خولەكەكان پێش ئەوەی هەردوو فڕۆكەكە لەهەمان بەرزی دابن سستەمەكە بە ڕوونكردنەوەیی شیكاربكە.

ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەو بڕانە سادەبكە.

38 $-4x + 2x$

39 $3y + (-2x) - 3y$

40 $x - y + x$

41 $5b^0$

42 $36^{\frac{1}{2}}$

43 $25^{\frac{1}{2}}$

44 $9^{\frac{3}{2}}$

45 $\left(\frac{2x^3}{x^{-2}}\right)^2$

46 $\left(\frac{y^{-1}n^2}{n^{-3}}\right)^{-3}$

47 $\left(\frac{2q^3b^{-2}}{-q^2b^{-3}}\right)^{-1}$

48 $3(5-2x)-(8-6x)=-9+2(3x+4)-10$ شیكاربكە.

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

49 ئەو سستەمەی دێت كە یەكێكیان هاوكێشەی هێڵیە و ئەوی تریان هێڵی نیە شیكاربكە بە ڕوونكردنەوەیی. $\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = 4x \end{cases}$

وانەی 6

نەخشەی بەهای ڕووت Absolute Value Function

ئامانجەکان

- بەهای ڕووتی ژمارەی ڕاستی دەناسێت و هەژماریدەکات.
- نەخشەی بەهای ڕووت دەناسێت و دانەکانی دیاریدەکات.
- نەخشەی بەهای ڕووت بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت.

بۆچی

ئەو پێوەرانەی پێی هەڵدەستین کە ڕێژەیەکی گونجاوی هەڵەی تێدایە بە بەکارهێنانی نرخی ڕووت دەری دەبڕین ئەمەش لەزۆر بواردا ڕوودەدات وەك پیشەسازی.

جێبەجێکردنەکان

ئامار

چالاکی 1

کارکردن بە نەخشەی ڕووت Exploring Absolute

قوتابیانی پۆلی دە هەڵسان بە چالاکییەك، کە ئامانجەکەی پێوانی ئەو هەڵەیە، کە مرۆڤ تێیدەکەوێت، کاتێك مەزەندەی تێپەڕبوونی کاتی یەك خولەك دەکات. خوێندکاران بەش بوونە چەند کۆمەڵێکی دوو دوو، یەکێکیان هەردوو چاوی هاوڕێکەی بەست و داوای لێکرد دەستی بەرزکاتەوە پاشان نزمی بکاتەوە، پاش ئەوەی کە وایزانی کە یەك خولەك تێپەڕبووە، خوێندکاری یەکەم ئامێری پێوانەی کاتی بەکارهێنا بۆ پێوانی کاتی نێوان بەرزکردن ودابەزینی دەستی خوێندکاری دووەم، و ئەوەی دەستی کەوت تۆماری کرد، پاش ئەوە دوو خوێندکارەکە ڕۆڵیان گۆڕییەوە. خشتەی بەرامبەر ئەنجامەکانی ئەو چالاکییە پیشان دەدات.

خوێندکار	کاتی مەزەندەکراو بە خولەك	هەڵە	هەڵەی ڕووت
لاڤین	49		
داليا	59		
دوین	51		
کلارا	65		
ئەردین	68		
دەرهێن	77		
ئارین	66		
یارا	54		
ئالان	67		
نوزاد	46		
پەیوەند	62		
ئارا	61		
سارا	53		
شارا	64		

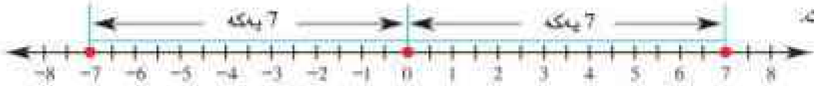
1. ئەو هەڵەیەی هەر خوێندکارێك تێیدەکەوێت هەژماربکە بەلێدەرکردنی 60 لەژمارەی چرکەکان مەزندەکراوە کە لەیەك خولەك و ئەوەش لەستوونی سێیەم تۆماربکە. ئەگەر ئەو جیاوازییە سالب بوو، ئەوە دەگەیەنێت کە خەمڵاندنی خوێندکارەکە کەمتربووە لە خولەکێکی تەواو، بەڵام ئەگەر جیاوازییەکە موجەب بوو ئەوە دەگەیەنێت مەزەندەی خوێندکارەکە پتربووە لە خولەکێکی ڕاستی،

زاناکان بە زۆری گرنگی بەماوەی دووری خەملاندن لەبەهای ڕاستەقینە دەدەن، بێ وەستان لەسەرئەوەی خەملاندنەکە زیاترە یان کەمترە لەبەها ڕاستەقینەکەی ئەو دوورییە پێی دەوترێت هەڵەی ڕووت **Absolute Error** . نموونە لەسەر ئەوە ڕێباز وای خەملاند کە خولەکێك تێپەڕیوە پاش 67 چرکە هەڵەکەی $7 = 60 - 67$، و سارا وای خەملاند کە خولەکێك تێپەڕیوە پاش 53 چرکە هەڵەکەی $-7 = 60 - 53$ ، هەریەکەیان 7 چرکە لەبەهای ڕاستی دوورکەوتەوە ئەمەش ئەوە دەردەبڕێ کە هەریەکەیان هەڵەیەکی ڕاستی کردوە برەکەی دەکاتە 7 چرکە، ژمارە 7 بەهای ڕووت **Absolute Value** بۆ هەریەکە لە دوو ژمارەی 7 و 7- واتە ڕووتی هەریەکەیانە بۆ دەربڕینی ئەمە دەنووسین$7 = |-7| = |7|$.

2. لەستوونی چوارەم دووری خەملێنراوی لەبەهای ڕاستی خولەکێك تۆماربکە واتە بەها ڕووتەکەی.

3. بەراورد لەنێوان هەر ژمارەیەك لەستوونی سێیەم و بەهاکەی لەستوونی چوارەم بکە، پەیوەندی نێوان نیشانەی ژمارەکە و نیشانەی بەها ڕووتەکەی چییە؟

دەتوانی بەهای ڕووتی ژمارەی ڕاستی بنوێنیت بە بەکارهێنانی هێڵی ژمارەکان. بەهای ڕووتی ژمارەی ڕاستی دەکاتە دووری نێوان ئەو خاڵەی دەینوێنی لەسەر هێڵی ژمارەکان و خاڵی بنەڕەت:



دووری نێوان خاڵی ژمارە 7 وخاڵی بنەڕەت دەکاتە 7 یەکە بەهای ڕووتی ژمارە کەدەکاتە 7 واتە دەکاتە 7 واتە $|7| = 7$

دووری نێوان خاڵی ژمارە7− و خاڵی بنەڕەت دەکاتە 7 یەکە بەهای ڕووتی ژمارە 7− $|-7| = 7$

تواندنی ئەندازەی پێشوو دەمان گەیێنێتە ئەم لێکدانەوە جەبرییەی دێت:

بەهای ڕووتی ژمارەیەکی ڕاستی هەمان ژمارەیە، ئەگەر ژمارەکە سالب نەبێت، و پێچەوانەکەی ئەگەر سالیب بوو.

بەهای ڕووتی ژمارەی ڕاستی — Absolute Value of Real Number

پێناسەی جەبری
$$\begin{cases} |x| = x & x \ge 0 \\ |x| = -x & x < 0 \end{cases}$$
ئەگەر

پێناسەی ئەندازەیی $|x|$ ئەو دوورییە لەسەر تەوەرەی ژمارەکان لەنێوان خاڵی x و خاڵی بنەڕەت.

نموونە 1

هەژمێربکە

أ $|8-2|$ ب $|2-8|$ ج $|3-3|$

شیکار

أ $|8-2| = |6| = 6$ ب $|2-8| = |-6| = 6$ ج $|3-3| = |0| = 0$

هەوڵبدە هەژمێربکە

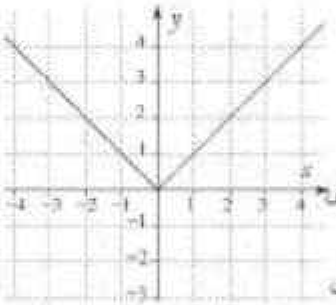
أ $|5-14|$ ب $|12-2|$

نەخشەی بەهای ڕووت — Absolute Value Function

نەخشەی بەهای ڕووت ئەو نەخشە پێناسەکراوەیە بە ڕێسای $f(x) = |x|$.

نموونە

2



أ بواری نەخشەی بەهای ڕووت و مەوداکەی چیە؟

ب هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بەهای ڕووت بکێشە.

شیکار

أ لەبەرئەوەی تۆ دەتوانیت هەژمێری بەهای ڕووتی هەر ژمارەیەکی ڕاستی بکەیت، ئەوا بواری نەخشەی بەهای ڕووت بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان. و لەبەرئەوەی بەهای ڕووتی هەر ژمارەیەکی ڕاستی دەکاتە ژمارەکە خۆی ئەگەر سالب نەبێت و پێچەوانەکەی ئەگەر سالب بێت، ئەوا بەهای ڕووتی هەر ژمارەیەکی ڕاستی هەموو کات ژمارەیەکی سالب نییە کەواتە مەودای نەخشەی بەهای ڕووت کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی سالب نین.

ب خشتەی بەهای نەخشەی بەهای ڕووت پێکبهێنە

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

بەڕوونکردنەوەیی خاڵەدیاریکراوەکانی ئەم خشتەیە بنوێنە و بیانگەیەنە بەهێڵێکی گونجاو.

هەوڵبدە بواری هەریەکە لەو نەخشانە و مەوداکەیان دیاریبکە پاشان وێنە ڕوونکردنەوەکەیان بکێشە.

أ $y=2|x|$ ب $y=|x-2|$

چالاکی 2

کارکردن لەسەر نەخشەی بەهای ڕووت Exploring Absolute Value Functions

پێویستت بەکاغەزی ڕوونکردنەوەیی یان بژمێری ڕوونکردنەوەیی هەیە.

1. لەهەمان ڕووتەختی ڕوونکردنەوەیی، هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ هەریەکە لەم دوو نەخشەی $y=|x|$ و $y=|x-3|$ بکێشە.
2. چۆن کەمکردنەوەی 3 لە گۆڕاوی x کاردەکاتە سەرهێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بەهای ڕووت. — خاڵی چاودێری ✓
3. لەهەمان ڕووتەختی ڕوونکردنەوەیی، هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ هەریەکە لەم دوو نەخشەیە $y=|x|$ و $y=|x|-3$ بکێشە. — خاڵی چاودێری ✓
4. چۆن کەمکردنەوەی 3 لەگۆڕاوی y کاردەکاتە سەرهێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بەهای ڕووت.
5. لەهەمان ڕووتەختی ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لەم دوو نەخشەیە $y=|x|$ و $y=-|x|$ بکێشە. — خاڵی چاودێری ✓
6. چۆن پێچەوانەکردنەوەی گۆڕاوی y لەشوێنی سەرهێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بەهای ڕووت کاردەکات.

لە نموونەی پێشوو دەربارەی هەندێ نەخشە گردارت کرد لە نەخشەی بەهای ڕووتەوە وەرگیرابوون، واتە نەخشەی بەهای ڕووت ڕۆڵی پێکهێنەری ئەو نەخشانەیە لێرەوە پێی دەوترێت: نەخشەی بنەڕەت (دایک) هەروەها نەخشە پێکهێنراوەکان لەنەخشەی بنەڕەت (دایک) دەست دەکەون بەچەند جێگۆڕکەیەکی جەبری و دەستکەوتنی هێڵی بەیانی ئەو نەخشانە بەچەند جێگۆڕکەیەکی ئەندازەیی دەبن، کە لەهێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەت (دایک) پەیدادەبن. خشتەی بەرامبەر جێگۆڕکێی ئەندازەیی بەرامبەر بە جێگۆڕکێ جەبرییەکە پیشان دەدات، و ڕێدەدات بە کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دروست بوو لەهێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی دایک $y=|x|$.

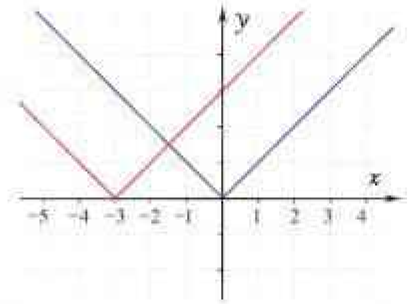
جێگۆڕکێ جەبری	جێگۆڕکێ ئەندازەیی
$y=\|x\| \to y=\|x-a\|$	ڕاکێشانی ئاسۆیی بۆلای ڕاستە a یەکە
$y=\|x\| \to y=\|x+a\|$	ڕاکێشانی ئاسۆیی بۆلای چەپە a یەکە
$y=\|x\| \to y=\|x\|-b$	ڕاکێشانی ستوونی بۆخوارەوە b یەکە
$y=\|x\| \to y=\|x\|+b$	ڕاکێشانی ستوونی بۆ سەرەوە b یەکە
$y=\|x\| \to y=-\|x\|$	ڕێنەدانەوەکەی لەتەوەرەی سینی
$y=\|x\| \to y=\|-x\|$	ڕێنەدانەوەکەی لەتەوەرەی صادی

$b>0$ $a>0$

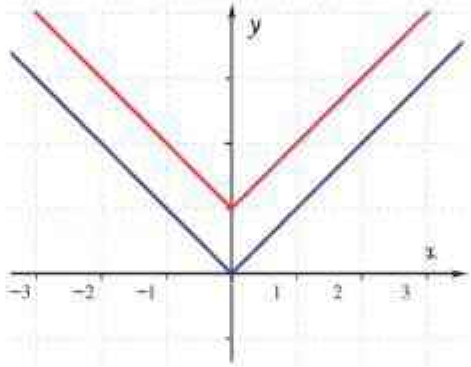
نموونە 3 لەهەمان ڕووتەختی بۆتاندا هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەت $y=|x|$ بکێشە لەپاشان جێگۆڕکێی گونجاو دیاریکە و بەکاریبهێنە بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی پەیدابوو.

أ $y=|x+3|$ ب $y=|x|+1$

شیکار



أ زیادکردنی 3 بۆ گۆڕاوی x لە نەخشەی بنەڕەت دەبێتە ڕاکێشانی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکە ئاسۆیی 3 یەکە بۆلای چەپ.



ب زیادکردنی 1 بۆ گۆڕاوی y لەنەخشەی (بنەڕەت) دایك دەبێتە هۆی ڕاکێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەیی بەستوونی 1 یەکە بۆ سەرەوە.

ڕاهێنــــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 جیهان خەملاندی کەخولەکێك تێپەڕیووە پاش 51 چرکە و ئاری خەملاندی کە خولەکێك تێپەڕیووە پاش 68 چرکە ڕوونیبکەوە چۆن بەراوردی بڕی دووهەڵەکە دەکەیت.

2 نموونەیەك لەسەر ژمارەی b بێنەوە پاسادانی $|b|=-b$ بکات ڕوونیبکەرەوە.

3 باسی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بەهای ڕووت بکە.

4 ئایا بەهای ڕووتی ژمارەیەك دەگرێت سالب بێت؟ ڕوونیبکەرەوە.

5 ئایا بەهای ڕووتی ژمارەیەك دەگرێت بکاتە سفر؟ ڕوونیبکەرەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هەژمێریکە.

6 $|5-12|$ 7 $|13-12|$ 8 $|-3-3|$ 9 $|4-4|$

10 بواری نەخشە و مەوداکەی دیاریکە پاشان هێڵی ڕوونکردنەوەی بکێشە.

أ $y=|x+1|$ ب $y=|x|+3$

11 لەهەمان ڕووتەختی بۆتاندا هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی ڕووت $y=|x|$ بکێشە و هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەوسێ نەخشەیەش بکێشە. ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییە دیاریکە کە ڕێدەدات بە دەستکەوتنی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی پێکهاتوو کە لە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دایك (بنەڕەت) دەردەچێت.

أ $y=|x+1|$ ب $y=|x|+1$ ج $y=-|x|+1$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

بەهای ڕووتی هەریەك لەو ژمارانە هەژمێربکە.

12 17 **13** -33 **14** -7.11 **15** 8.67

16 $\frac{4}{3}$ **17** -2.5 **18** $-3\frac{5}{11}$ **19** 79.2

هەژمێربکە.

20 $|13-24|$ **21** $|0-3|$ **22** $|4-12|$ **23** $|1-11|$

24 $|0-(-3)|$ **25** $|1-27|$ **26** $|11-3|$ **27** $|-14-(-14)|$

28 $|-13+13|$ **29** $|-5-2|$ **30** $|5-(-3)|$ **31** $|-11-11|$

32 $|-5+(-5)|$ **33** $|0-5|$ **34** $|5-10|$ **35** $|-5-10|$

بوار و مەودای هەریەك لەو نەخشانە دیاریبکە.

36 $y=|x+4|$ **37** $y=|x-5|$ **38** $y=|x|+2$

39 $y=|x|-4$ **40** $y=-|x+4|$ **41** $y=-|x-5|$

42 $y=-|x|+2$ **43** $y=-|x|-4$ **44** $y=-4|x|$

45 $y=\frac{1}{2}|x|$ **46** $y=4|x|-1$ **47** $y=4|x-1|$

لەهەمان ڕووتەختی پۆتانێدا هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بەهای ڕووت$y=|x|$ و هێڵی ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بکێشە. جێگۆڕکێی ئەندازەی دیاربکە کە ڕێدەدات بەدەستکەوتنی هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەت.

48 $y=|x+4|$ **49** $y=|x-5|$ **50** $y=|x|+2$

51 $y=|x|-4$ **52** $y=-|x+4|$ **53** $y=-|x-5|$

54 $y=-|x|+2$ **55** $y=-|x|-4$

$|a-b|$ و $|b-a|$ لە پرسیاری 56 تا 59 هەژمێربکە.

56 $a=5;\ b=3$ **57** $a=5;\ b=-3$

58 $a=-5;\ b=3$ **59** $a=3;\ b=5$

60 کام پوختەت دەستدەکەوێت بە پشت بەستن بەوەی هەژمێرت کردووە لە پرسیاری 56 تا 59 کە تایبەتە بە $|a-b|$ و $|b-a|$.

61 جێگۆڕکییەکان نەخشەی پێکهاتوو لەنەخشەی بنەڕەت $y=|x|$ بنووسە بەم جێگۆڕکێیەی دیارکراوە.

أ ڕاکێشانی ئاسۆیی بۆلای چەپ ماوەی 4 یەکە.

ب ڕاکێشانی ستوون بۆلای خوارەوە ماوەی 2 یەکە.

ج ڕاکێشانی بۆلای چەپ 5 یەکە لەپاشان کشان بۆ خوارەوە 2 یەکە.

د ڕاکێشانی بۆ سەرەوە 5 یەکە، لەپاشان وێنەدانەوە لەدەوری تەوەری سینی.

ه وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری سینی لەپاشان کشان بەرەو سەرەوە بە 2 یەکە.

62 **کیمیا** چوار خوێندکار بڕی سۆدیۆمی کەلە 4 تورەگە خوێ دۆزیویانەتەوە بەم شێوەیەی خوارەوە بوو، هەڵەی هەر خوێندکارێك و هەڵە ڕووتەکەیان دیاربکە ئەگەر زانیت وەڵامی ڕاست 8.2mg .

أ شۆنی دۆزییەوە 8.2mg

ب ڕوناك دۆزییەوە 9.0mg

ج نوری دۆزییەوە 8.1mg

د هەوار دۆزییەوە 8.4mg

گەشتەکان دانا بە ئوتومبیلەکەی لە دهۆك دەرچوو بۆ خانەقین بەخێراییەك تێکڕاییەکەی 140 کیلۆمەتر لەکاتژمێرێکدا و بە کەرکوك دائێپەڕی پاش 3 کاتژمێر ئەگەر هێمای گۆڕاوی x بۆ کات بەکاتژمێر لەدەستپێکی دەرچوونی دانا لە دهۆك دابنرێ، دووری نێوان دهۆك و کەرکوك دەکاتە $d = 140 \times |x - 3|$.

63 دانا چەند کیلۆمەتری بڕی پاش دوو کاتژمێر لە دەستپێکەوە؟ دوورییەکەی لە کەرکوکەوە لەو دەمە چەندە ؟

64 دانا چەند کیلۆمەتری بڕی پاش 4 کاتژمێر لەدەستپێکەوە؟ دوورییەکەی لە کەرکوکەوە لەو دەمە چەندە.

تێڕوانینێك بۆ دواوە

65 دوا سێ ژمارە بنووسە: 2 ، 6 ، 10 ، 14 ، 18 ، ؟ ، ؟ ، ؟ .

66 مازن 6 هەزار دیناری لایە چەند وێنە دەتوانێت بکڕێت ئەگەر نرخی هەر وێنەیەك یەك هەزار و چارەگێك بێت.

هەژمێربکە

67 $-3 + 4$ 68 $-3 \times (0.3)$ 69 $-15 - (-15)$ 70 $60 \div 3$

71 $\sqrt[3]{125}$ 72 $-1.4 - (-3)$ 73 $4\left(-1\frac{1}{2}\right)$ 74 $(-3.2) + 4$

75 لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا هێڵی ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بکێشە ئەم هێڵانە لە چیدا لەیەکدەچن و لەچیدا جیاوازن.

أ $y = x + 2$ ب $y = \frac{3}{2}x - 1$ ج $y = x$

هەریەك لەم هاوکێشانە لەشێوەی لاری - یەکتربڕین بنووسە

76 $3x + 2y = 1$ 77 $4x = 2y$

78 $4y = 0$ 79 $2x - 2y = 17$

هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

80 $x + 7 \leq 3$ 81 $x - 3 \geq 2$

82 $x + 15 \leq -1$ 83 $x - 3 > 4$

تێڕوانینێك بۆ پێشەوە

84 دووری نێوان خاڵی بنەڕەت و خاڵی (x, y) لە ڕووتەختی پۆتاندا هەژماردەکرێت بە ڕێسای $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ دووری نێوان خاڵی بنەڕەت و هەریەك لەم خاڵانە هەژمێربکە.

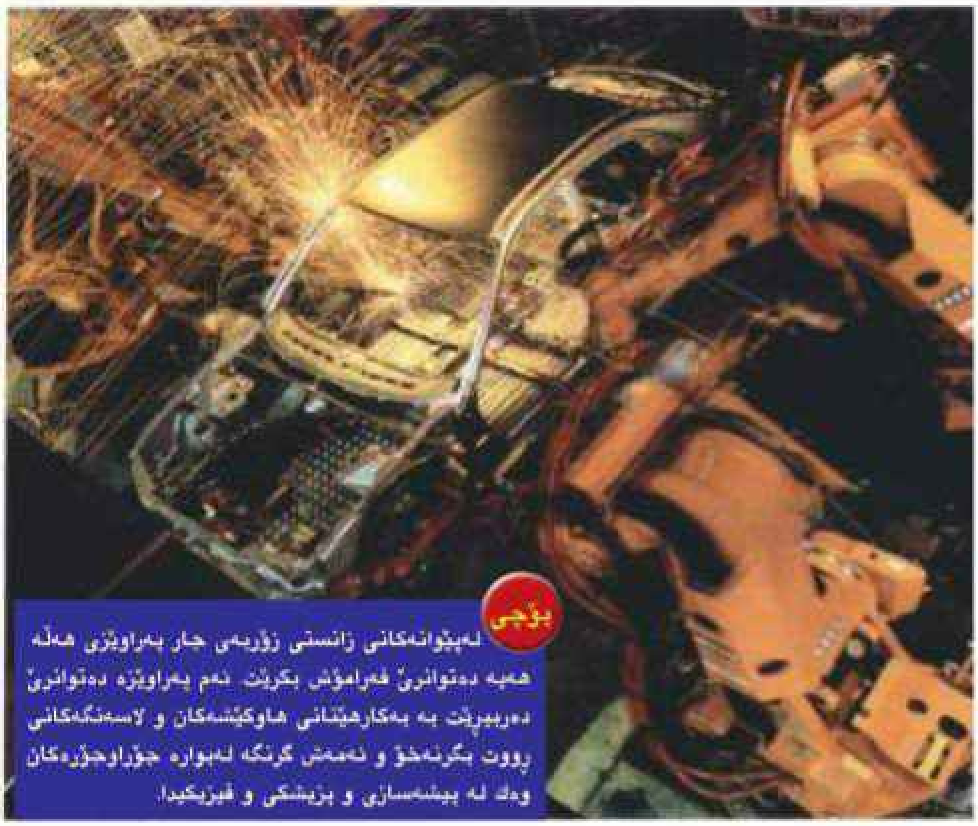
أ $(3, 4)$ ب $(12, 5)$ ج $(-8, 6)$ د $(-15, -20)$

وانەی 7

هاوکێشەکان و لاسەنگەکان کە بەهای ڕووتیان تێدایە
Absolute Value Equations and Inequalities

ئامانجەکان

- بەجەبری و بەڕوونکردنەوەیی هاوکێشە سادەکانی نەخشەی ڕووت دەگرنەخۆ شیکاردەکات.
- بەجەبری و بەڕوونکردنەوەیی لاسەنگە سادەکانی نەخشەی ڕووت دەگرنەخۆ شیکاردەکات.
- بە بەکارهێنانی بەهای نەخشەی بەهای ڕووت پرسیارەکان شیکاردەکات.



بۆچی

لەپێوانەکانی زانستی زۆربەی جار بەراوێزی هەڵە هەیە دەتوانرێ فەرامۆش بکرێت. ئەم بەراوێزە دەتوانرێ دەرببڕێت بە بەکارهێنانی هاوکێشەکان و لاسەنگەکانی ڕووت بگرنەخۆ و ئەمەش گرنگە لەبوارە جۆراوجۆرەکان وەک لە پیشەسازی و پزیشکی و فیزیکیدا.

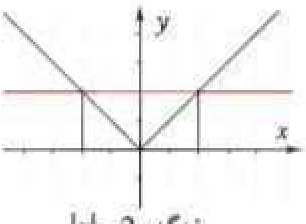
جێبەجێکردنەکان
پیشەسازی

یەکێك لە کۆمپانیاکان پەیکی دداناوی بەرهەم دەهێنێ، کە لە دروستکردنی ئوتومبێلەکاندا بەکاردێت بەپێی ستاندەری دیارکراو ئەگەر تیرەی پەیکەکە لە پێویست گەورەتر بوو، ئەوا پێکهێنانی ئەستەم دەبێت و ئەگەر بچووکتربێ ئەوا ئوتومبیلەکە بەشێوەی گونجاو ناڕوات بەراوێزی هەڵەی ڕێپێدراو لەپێوانی تیرەی ئەم پەیکە چەندە؟

هاوکێشەکان کە نەخشەی بەهای ڕووتیان تێدایە Absolute Value Equations

هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ نەخشەی ڕووت بەهای یارمەتیدەرە بۆ تێگەیشتنی هاوکێشەکانی نەخشە ڕووت و شیکارکردنیان، لەم وێنە ڕوونکردنەوەیانەی دێت ووردبەرەوە:

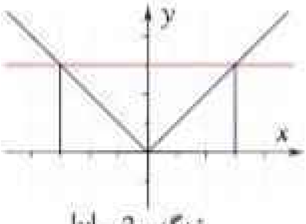
$y = 2$ وە $y = |x|$



ئەگەر $|x| = 2$

ئەوا $x = 2$ یان $x = -2$

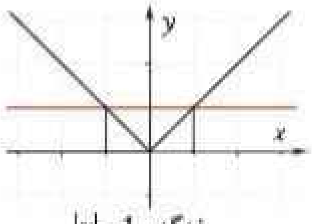
$y = 3$ وە $y = |x|$



ئەگەر $|x| = 3$

ئەوا $x = 3$ یان $x = -3$

$y = 1$ وە $y = |x|$



ئەگەر $|x| = 1$

ئەوا $x = 1$ یان $x = -1$

لەوەی پێشوو ئەم دەرئەنجامانەمان دەستدەکەوێت.

هاوکێشەی نەخشەی بەهای ڕووت — Absolute Value Equation

کۆمەڵە شیکاری هاوکێشەی $|x|=a$ کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی موجەب بێت پێکدێت لە دوو ژمارەی a و $-a$.

کۆمەڵە شیکاری هاوکێشەی $|x|=0$ پێکدێت لە ژمارە 0

هاوکێشەی $|x|=a$ شیکاری نییە کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی سالب بێت.

$|x|$ ژمارەیەکی سالب نییە چونکە بەپێی پێناسەکەی دووری نێوان خاڵی بنەڕەت و ئەو خاڵەی پۆی x لەسەر هێڵی ژمارەکان دەنوێنێ. بەڵام ئەو هاوکێشانەی بەهای ڕووتیان تێدایە لەوانەیە شیکاریان ببێتە سالب.

خاڵی چاودێری ✓ هاوکێشەی $|x|=5$ شیکاربکە.

نموونە 1 هاوکێشەی $|2x+3|=4$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکار لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

شیکار

هاوکێشەی $|2x+3|=4$ لەم دوو بارەدا پاسادان بکە.

$2x+3=4$	یان	$2x+3=-4$
$2x=1$	یان	$2x=-7$
$x=0.5$	یان	$x=-3.5$

پاسادان بکە ئەگەر $x=0.5$ ئەوا $|2x+3|=|2(0.5)+3|=|4|=4$

و ئەگەر $x=-3.5$ ئەوا $|2x+3|=|2(-3.5)+3|=|-4|=4$

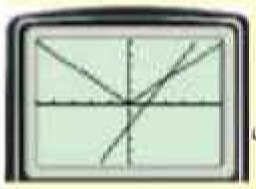
دەتوانیت دووبارە بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی پاسادانی شیکارەکە بکەیت.

هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لە دوو نەخشەی $y=|2x+3|$ و $y=4$ بکێشە لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا پۆیەکانی سینی یەکتربڕینی دوو هێڵە ڕوونکردنەوەکە دیاربکە، دەبینی لە خاڵی $(-3.5, 4)$ و لەخاڵی $(0.5, 4)$ یەکتردەبڕن. بەڵام نواندنی کۆمەڵەی شیکار لەسەر تەوەری ژمارەکان ئەمەیە.

هەوڵبدە هاوکێشەی $|3x+5|=7$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکار لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

چالاکی

دۆزینەوەی شیکارەکان — Exploring Solutions



وێنەی بەرامبەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لە دوو نەخشەی $y=|x|$ $y=2x-2$ دەنوێنێ واتە شیکاری ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $|x|=mx+n$ کاتێك $m=2$ ، $n=-2$ دەنوێنێ.

1. لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا دوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y=|x|$ و $y=2x-2$ بکێشە، ژمارەی خاڵەکانی یەکتربڕین چەندە؟ بە ڕوونکردنەوەیی شیکاری هاوکێشەکە دیاربکە

بخەمڵێنە و پاسادان بکە: بیر لەژمارەی شیکارەکانی هاوکێشەی $|x|=y=mx+n$ بکەوە.

2. هەوڵبدە بەهایەکی گۆڕاوی m بدۆزیتەوە و بەهایەکی تر بۆ گۆڕاوی n بەمەرجێك دوو هێڵە ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y = mx + n$ و $y = |x|$ یەکترببڕن لەدوو خاڵدا، بەڕوونکردنەوەیی لەباشی هەڵبژاردنەکە دڵنیابە و شیکاری هاوکێشەی $|x| = mx + n$ بنووسە.

3. هەوڵبدە بەهایەکی گۆڕاوی m بدۆزیتەوە و بەهایەکی تر بۆ گۆڕاوی n بەمەرجێك دوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y = mx + n$ وە $y = |x|$ یەکترنەبڕن بە ڕوونکردنەوەیی لەباشی هەڵبژاردنەکە دڵنیابە.

4. هەوڵبدە بەهایەکی گۆڕاوی m بدۆزیتەوە و بەهایەکی تر گۆڕاوی n بەمەرجێك دوو هێڵی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەی $y = mx + n$ وە $y = |x|$ یەکتربېڕن لە ژمارەیەکی ناکۆتا لەخاڵدا بە ڕوونکردنەوەی لەباشی هەڵبژاردنەکە دڵنیابە.

5. بەپشت بەستن بەمانەی پێشەوە، ژمارەی شیکارە توانراوکانی هاوکێشەی $|x| = mx + n$ بەکورتی باسبکە.

نموونە

2 هاوکێشەی $|x-3| = 3x+5$ شیکاربکە.

شیکار

$$|x-3| = 3x+5$$

$x - 3 = 3x + 5$ یان $x - 3 = -(3x + 5)$

$2x = -8$ یان $4x = -2$

$x = -4$ یان $x = -0.5$

پاسادان

$x = -4$ | $x = -0.5$

$|-4-2| \overset{?}{=} 3(-4)+5$ | $|-0.5-3| \overset{?}{=} (3(-0.5)+5)$

$|-7| \overset{?}{=} 3(-4)+5$ | $|-3.5| \overset{?}{=} -1.5+5$

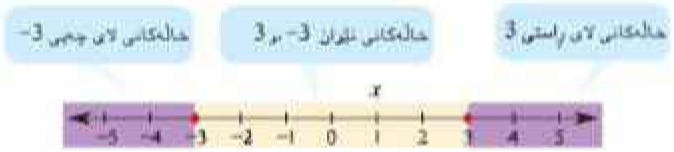
$7 \overset{?}{=} -7$ هەڵەیە | $3.5 \overset{?}{=} 3.5$ ڕاستە

شیکارەکە $x = -4$ فەرامۆش دەکرێ چونکە دەبێتە هۆی هەڵەی «$7 = -7$»
بەڵام شیکاری $x = -0.5$ پەسەندە دەتوانیت پاسادانی وەڵامەکەت
بە ڕوونکردنەوەیی بکەیت لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لە دوو نەخشەی $y = |x-3|$ و $y = 3x+5$ وێنەی بەرامبەرت دەستدەکەوێت.

هەوڵبدە هاوکێشەی $|x-4| = x+1$ شیکاربکە.

ئەو لاسەنگانەی بەهای ڕووتیان تێدایە Absolute Value Inequalities

دوو خاڵی 3 و 3− کۆمەڵە شیکاری هاوکێشەی $|x| = 3$ لەسەر تەوەرەی ژمارەکان دەنوێنن، ئەو دوو ژمارەیە تەوەرەکە بۆ سێ بەش بەشدەکەن.



لاسەنگەی نەخشەی بەهای ڕووت Absolute Value Inequality

کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $|x|<a$ کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی موجەبە پێکدێت لەکۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی x کە ساغکردنەوەی $-a<x<a$ دەکات.

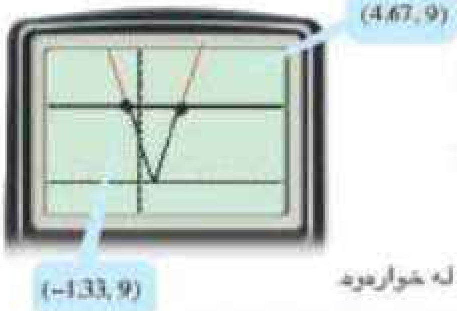
کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $|x|>a$ کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی موجەبە پێکدێت لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی x کە ساغکردنەوەی $x<-a$ یان $x>a$ دەکات.

کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $|x|>a$ کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی ناموجەبە پێکدێت لە هەموو ژمارە ڕاستییەکاندا. لاسەنگەی $|x|<a$ شیکاری نییە کاتێك a ژمارەیەکی ڕاستی موجەب نەبێت.

دەتوانیت بیرۆکەی وەك ئەوانە بۆ دوو لاسەنگەی $|x|\geq a$ ، $|x|\leq a$ داڕێژی.

نموونە 3

لاسەنگەی $|5-3x|>9$ شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە



شیکار

$|5-3x|>9$ (لاسەنگە لە جۆری $|x|>a$)

$5-3x>9$ یان $5-3x<-9$

$-3x>4$ یان $-3x<-9-5$

$x<-\frac{4}{3}$ یان $x>\frac{14}{3}$

کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان دەنوێنین وەك لە خوارەوە

پاسادان

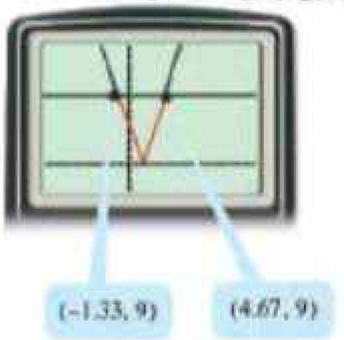
ڕاستی وەڵامەکە بە ڕوونکردنەوەیی پاسادان بکە لەهەمان تەوەرەی پۆتاندا وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=9$ و هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y=|5-3x|$ بکێشە. وێنەکە دیاردەکات ئەگەر $x<-\frac{4}{3}\approx-1.33$ یان $x>\frac{14}{3}\approx4.67$ ئەوا ئەو حاڵەی پۆتانی x لەسەر هێڵی ڕوونکردنەوەی بۆ نەخشەی $y=|5-3x|$ بەرزترە لەو حاڵەی پۆتانی x لەسەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی $y=9$ ئەمەش ئەوە دەسەلمێنێت کە پۆتانی y یەکەم $(|5-3x|)$ گەورەترە لەهی صادی دووەم.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بۆچی ئاراستەی لاسەنگە لەشیکاری ڕاهێنانی پێشوودا گۆڕا؟

هەوڵبدە لاسەنگەی $|3x-7|>1$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکەش لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

نموونە 4

لاسەنگەی $|3x-5|<9$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە



شیکار

$|5-3x|<9$ (لاسەنگە لە جۆری $|x|<a$)

$5-3x<9$ و $5-3x>-9$

$-3x<4$ و $-3x>-14$

$x>-\frac{4}{3}$ و $x<\frac{14}{3}$

کۆمەڵەی شیکار لەسەر تەوەری ژمارەکان بەم شێوەیە دەبێت.

پاسادان بکە

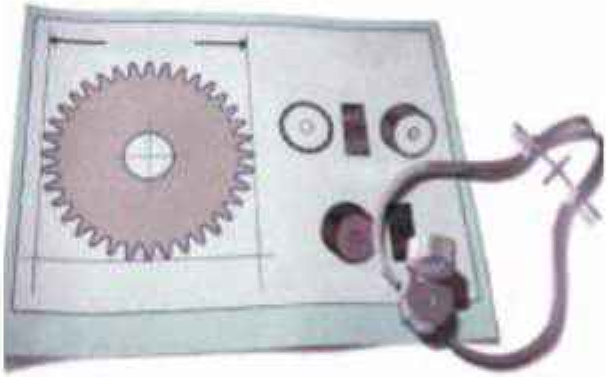
نموونەی پێشوو دیاریدەکات ئەگەر $-\frac{4}{3} < x < \frac{14}{3}$ ئەوا ئەو خاڵەی پۆیەکەی لەسەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y = |5 - 3x|$ بێ نزمترە لەپۆی ئەو خاڵەی پۆیەکە لەسەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y = 9$ بێ ئەمەش ئەوە دەسەلمێنێ کە تانی یەکەم $(|5 - 3x|)$ بچووکترە لەتانی دووەم 9 .

خاڵی چاودێری ✓ بەراورد لەنێوان دوو لاسەنگەی دوو نموونەکەی پێشوو بکە؟ ڕوونیبکەرەوە.

نموونە 5

جێبەجێکردنەکان

پیشەسازی

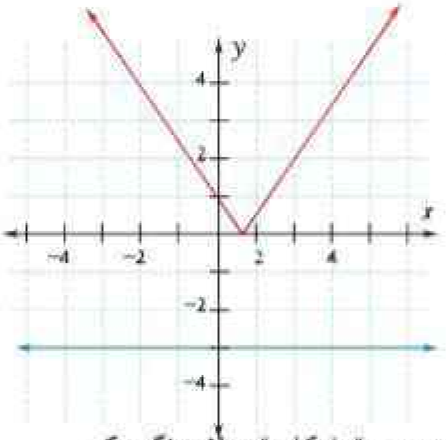


لاسەنگەیەك بنووسە نەخشەی بەهای ڕووت بگرێتەخۆ بۆ دیارکردنی پەراوێزی هەڵەی پەسەندکراو لەنێوانی تیرەی دداناوی دیارکراو لەسەرەتای وانەکە، ئەگەر زانیت تیرەی پەپکەکە دەبێت بکاتە 3.5 لەگەڵ پەراوێزی هەڵە کە دەکاتە ± 0.01 یە

شیکار

با هێمای d بۆ تیرەی پەپکەی دداناوی بێت، پێویستە ئەو گۆڕاوە مەرجی $3.5 - 0.01 \le d \le 3.5 + 0.01$ پاسادان بکات، واتە $-0.01 \le d - 3.5 \le 0.01$ لاسەنگەی $|d - 3.5| \le 0.01$ پەراوێزی هەڵەی پەسەند دیاریدەکات.

هەوڵبدە لاسەنگەی $12.00 - 0.01 \le a \le 12.00 + 0.01$ لەشێوەی لاسەنگەیەکی نەخشە ڕووت لەخۆبگرێ بنووسە. ئەو لاسەنگانەی نەخشەی ڕووت لەخۆدەگرن هەیانە شیکاری نییە، لەکاتێکدا لاسەنگەی تریان هەیە کۆمەڵە شیکاریان کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان دەبێت، لاسەنگەی $|2x - 1| < -3$ شیکاری نییە، چونکە ژمارە $|2x - 1|$ ناکرێت بچووکتر بێت لە ژمارەیەکی سالب. لەبارێکی تردا وێنەی بەرامبەر دیاری دەدات کە هەر ژمارەیەکی ڕاستی شیکارە بۆ لاسەنگەی $|2x - 1| > -3$ و لەمەوە کۆمەڵەی شیکاری ئەم لاسەنگەیە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە.



خاڵی چاودێری ✓ لاسەنگەیەکی بەهای ڕووت هێمای $\ge$ لەخۆبگرێت بنووسە و بێ شیکاربێت، لاسەنگەیەکی تربەهای ڕووت هێمای $\le$ لەخۆبگرێت بنووسە، و کۆمەڵە شیکاری کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان بێت.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ئەگەر لاسەنگەی $|x| \le a$ بێ شیکاربێت، ئەوا چی دەڵێیت دەربارەی بەها توانراوەکانی ژمارە a و دەربارەی کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $|x| > a$ ؟

ڕاهێنــــــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئایا هاوکێشەی $3=4+|3x-5|$ شیکاری هەیە؟ ڕوونیبکەرەوە.

2 بۆچی هەموو جارێك پاسادانی ڕاستی شیکاردەکەیت کە هاوکێشەیەك بەهای ڕووتی تیابێ.

3 بۆچی دەشێ هاوکێشەیەك بەهای ڕووتی تیابێ، دوو شیکاری هەبێت؟ ڕوونیبکەرەوە.

4 نواندنی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ چۆنیەتی باسکردنی کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەیەك کە بەهای ڕووتی تیابێ یەکسان بێت بەکۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان.

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە و پاسادانی شیکارەکەش بکە.

5 $\|x-10\|=4$	6 $\|2x-5\|=3$	7 $10=\|7-3x\|$
8 $x+4=\|x-2\|$	9 $\frac{1}{2}x+1=\|x-2\|-1$	10 $\frac{1}{2}x+1=\|x+3\|$

ئەم لاسەنگانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکەش لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

11 $2<\|x-4\|$	12 $\|2x+1\|\geq 5$	13 $\|x+5\|<\frac{1}{2}$
14 $\frac{1}{2}\|2x+1\|\geq 2$	15 $3\|x+1\|\leq 2$	16 $3\|x+1\|+3>2$

17 ئارام تیرێکی گرتە نیشانەیەك کە 9 مەتر لێوەی دوور بوو تیرەکە لە دووری کەمتر لە 60cm لە نیشانەکەوە کەوتەوە.

أ لاسەنگەیەك بنووسە کە بەهای ڕووتی تێدابێ و ئەو دوورییە دەربڕێ کە تیرەکە بڕیویەتی.

ب ئەو لاسەنگەیە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکەش لەسەر ڕاستەهێڵی ژمارەکان بنوێنە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

18 **هێڵێك بکێشە کە هەریەکە لە هاوکێشەکان یان لاسەنگەکانی لای ڕاست بۆ شیکارەکەی لە لای چەپ بگەیێنێ.**

$\|x+2\|=4$	$-6<x<2$
$\|x+2\|<4$	$x=-6$ یان $x=2$
$\|x+2\|<-4$	$x<-6$ یان $x>2$
$\|x+2\|>-4$	شیکاری نییە
$\|x+2\|>4$	کۆمەڵە شیکار کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانە.
$\|x+2\|=-4$	شیکارەکە باس نەکراوە.

هەریەك لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

19 $\|x+4\|=8$	20 $\|x-5\|=12$	21 $\|2+x\|=10$
22 $\|8-x\|=1$	23 $\|x-2\|=9$	24 $\|x+5\|=1$
25 $\|2x-15\|=11$	26 $\|3x+12\|=18$	27 $\|10-4x\|=28$
28 $\|5+4x\|=17$	29 $\|5x-6\|=2$	30 $\|10-3x\|+5=\frac{1}{2}$
31 $\|10x+2\|-18=120$	32 $\|4-3x\|-9=3$	33 $\|2x-8\|+2=1$

شیکاری هەریەك لەم لاسەنگانە بکە.

34 $|x-4|>1$ **35** $|x+5|\le 7$ **36** $|3x|>15$

37 $|-2x|\le 12$ **38** $|4x|\le -8$ **39** $|3-x|\ge -5$

40 $|2+5x|\le 3$ **41** $|2x-3|<11$ **42** $|4x+6|\le 14$

43 $\left|\frac{2x+3}{-5}\right|<3$ **44** $|4x-5|\ge 15$ **45** $|2x-1|\ge -5$

46 $|5x+3|>-2$ **47** $|7-6x|<-4$ **48** $|9x+4|\le -11$

49 $-2|4x+1|\le -4$ **50** $-2|4x+2|\ge -4$ **51** $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|<-7$

پوختە

دەتوانیت لاسەنگەیەك بەهای ڕووتی تیابێ بەسێ شێوە دەربڕیت

زارەکی	جەبری	ڕوونکردنەوەیی
دووری نێوان x و ژمارەی 3 کەمترە لە ژمارەی 5	$|x-3|<5$	

ئەو دوو شێوە دەربڕینەی لە پرسیارەکانی **52** تا **54** دا نیە بیانووسە

52 دووری نێوان x و ژمارە 7 کەمترە لە 4 **53** $|x-4|<1$

54

بەرەنگاری

جێبەجێکردنەکان

55 لاسەنگەی $\left|\frac{4x}{3}\right|\le 2x+5$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکەی لەتەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

لاسەنگەیەك بنووسە کە بەهای ڕووتی تێدابێت و دەربڕین بۆ هەریەکە لە پرسیاری 56 ، 57 پاشان شیکارەکەی بنووسە

56 کێشی رزگار 60kg بەڵام پزیشکەکەی پێ ڕاگەیاندوە کە کێشەکەی لەکێشی نموونەییەوە دوورە بەڕێژەی 5%. ئەو بەها پەسەندە چەندە بۆ کێشی رزگار؟

57 یەکێك لە پەیمانگەکانی ئامار بڵاویکردەوە کە 68% ئەو کەسانەی سەیری فیلمی سینەمایی دەکەن لەکاتی سەیرکردنەکانیاندا کێك دەخۆن. ڕێژەی سەدی بەرزترین و نزمترین ئەو کەسانە دیاریبکەکە کێك دەخۆن لەکاتی سەیرکردنیاندا بۆ فلیمەکان ئەگەر بزانیت ڕێژەی هەڵەی بڵاوکراوەکەی پەیمانگاکە 3% بێت.

ڕوانینێك بۆ دواوە

شیکاری ئەم هاوکێشانە بکە.

58 $\frac{2}{x}=\frac{4}{5}$ **59** $\frac{x-3}{4}=\frac{2x}{16}$ **60** $\frac{10x}{-60}=\frac{2x-10}{8}$

61 شیکاری هاوکێشەی $P=2v+2w$ بکە بە هەژمێری گۆڕاوی v بەپێی گۆڕاوەکانی تر.

هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکانیشیان لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

62 $4x-5<\frac{1}{3}(8x+3)$ **63** $x-9\ge\frac{1}{6}(21+x)$

هەریەکە لەم لاسەنگە ئاوێتانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکانیشیان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

64 $(x>2)\wedge(x\le -1)$ **65** $(x\le -2)\vee(x>-4)$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

66 هێڵی ڕوونکردنەوەیی ئەخشەی $f(x)=(x-3)(x+2)$ بکێشە بە دیاریکردنی یەکتربڕینەکەی لەگەڵ تەوەری ئاسوویی. بەراورد بکە لە نێوان هاوکۆڵکەی ڕادەرەکە کە لەپێناسەی ئەخشەکە دەکات و یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری x

بەش پرۆژەی

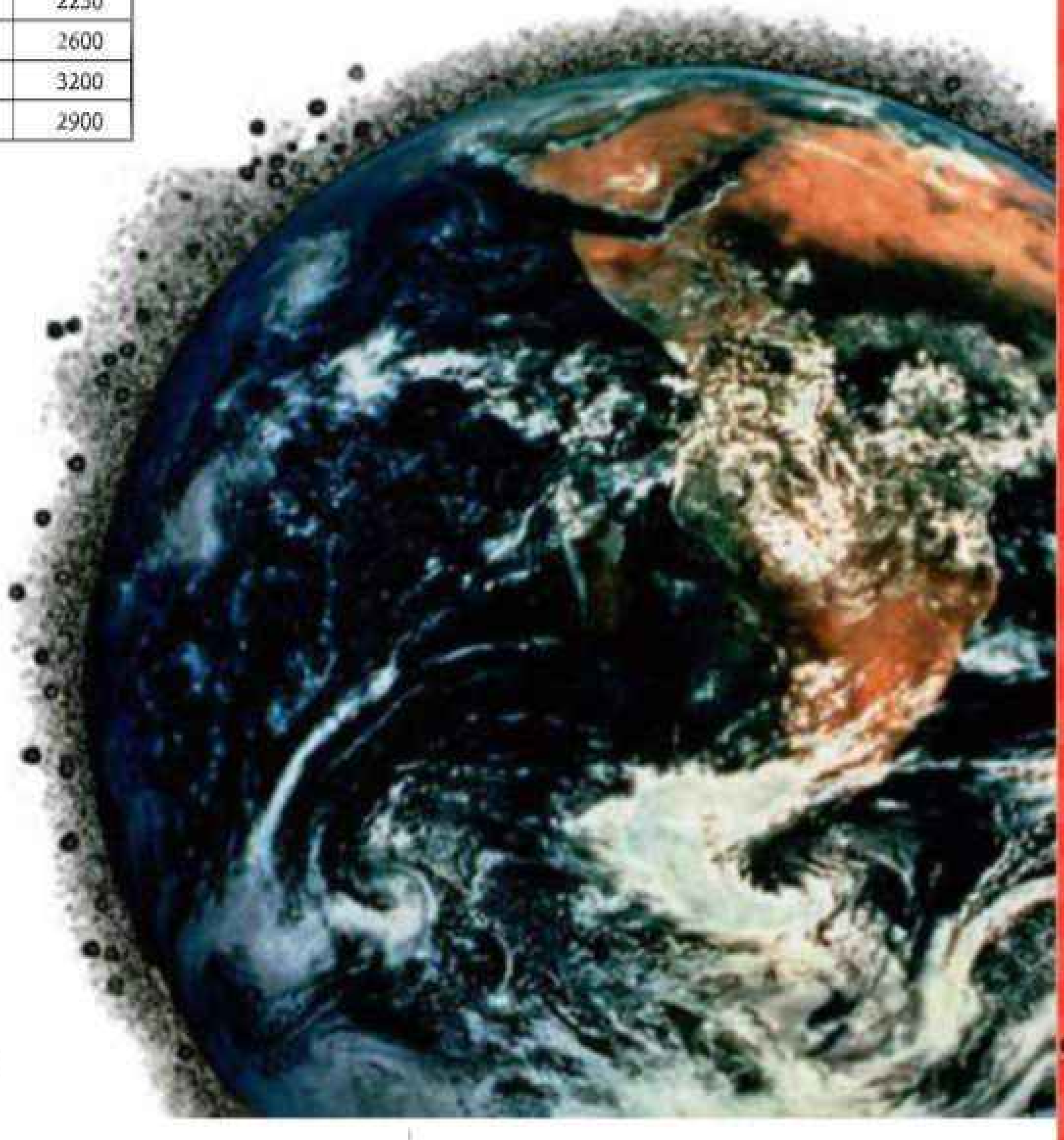
پاشماوەکانی بۆشایی ئاسمان

مرۆڤ لەساڵی 1957 ەوە هەستاوە بەهەزارەها چالاکی لەبۆشاییدا. لەمیانەی ناردنی مانگە دەستکردەکان و هەڵسان بەگەشتی بۆشایی. ئەم ئەرکانە بەملیۆنەها پاشماوەیان بەجێ هێشتووە لەو بۆشاییەی نزیکە لە زەوییەوە. بوونی ئەم پاشماوە قەبارە جیاوازانە وای پێویست کردووە کە لە چالاکیە تازەکاندا لەبەر چاوبگیرێت. ئەگەر پاشماوە قەبارە بچووکەکان ترسناک نەبن لەسەر چالاکیە تازەکان، بێ گومان پاشماوە قەبارە گەورەکان ترسناکن. بۆیە پێویستە ئەو پاشماوانە تۆماربکرێن و پێدراوەکان بەبەردەوامی نوێبکرێتەوە.

ئەم خشتەییەی بەرامبەر ژمارەکانی مەزەندەکراو دەنوێنێت بۆ پاشماوەکانی مانگە دەستکردەکان و پارچەبووەکان لەنێوان ساڵانی 1965 و 1990 کە بەسەر ماوەکان بۆ 5 ساڵ بەشکراوە.

خشتەی پاشماوەکانی بۆشایی

ساڵ	مانگەکان	پارچەی لێبووەوە
900	175	1965
1850	350	1970
2250	525	1975
2600	700	1980
3200	875	1985
2900	1050	1990



چالاکی 1

1. پێدراوەکانی خشتەکەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ هەژمێری تێکڕای گۆڕانی ژمارەی مانگە دەستکردەکان لەنێوان ساڵی 1965 و1990 ئەم تێکڕایە لە ماوەکانی 5 ساڵدا هەژماربکە و بەراوردی ئەم تێکڕایانە لەگەڵ تێکڕای گۆڕان لەسەر ماوەی گشتی نێوان 1965 و 1990 بکە.

2. نموونەیەکی بیرکاریانە پێك بێنە لەسەر شێوەی نەخشەیەکی هێڵی بۆ گشت پێدراوەکانی مانگەدەستکردەکان. هێمای x بۆ ساڵ دابنێ و ساڵی 1965 با ساڵی سفر بێت.

پاسادانی نموونەکەت بکە بە بەکارهێنانی پێدراوەکانی خشتەکە.

چالاکی 2

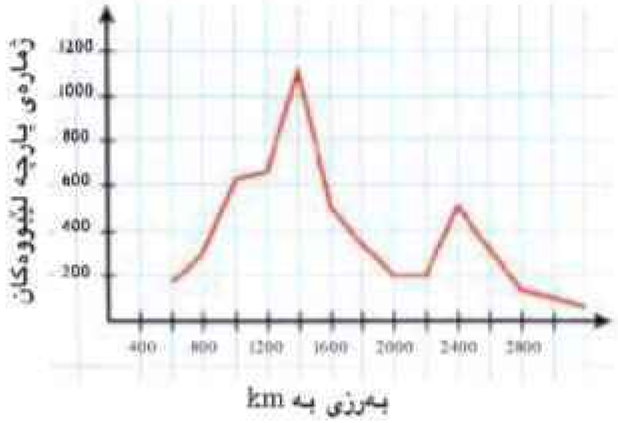
1. پێدراوەکانی پارچە لێبۆوەکان لە خشتەکەدا بنوێنە بەمەرجێ تەوەرەی سینەکان تواندنی ساڵەکان بێت (سفر بۆ ساڵی 1965 دابنێ) و تەوەرەی صادەکان تواندنی پارچە لێبۆوەکان بێت.

2. وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە کە بەگونجاوی دەزانی بۆ تواندنی ژمارەی پارچە لێبۆوەکان بەدرێژایی ساڵەکان. ئەو باوە باس بکە کە لە وێنەکەوە هەڵیدەهێنجێ.

ئایا باوەڕت وایە نموونەی دەستکەوتووەکەت ڕێگات پێدەدات بۆ دانانی مەزەندەی دوارۆژ کەهێشتی پێیبەسترێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

چالاکی 3

1. وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەرت بەکاربهێنە کە دابەشکردنی پاشماوەکانی بۆشایی بەپێی بەرزی نیشان دەدات ڕوونیبکەرەوە چۆن ژمارەیان دەگۆڕێت بەگۆڕانی بەرزی.



2. تێبینی بکە کە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە کە ژمارەی پاشماوەکان بەپێی بەرزی دیاری دەکات، بریتین لە چەند پارچە ڕاستەهێڵێك ئەمەش ئەوە دەگەیێنێ کە ڕێسای ئەم نەخشەیە دەگۆڕێت بەگۆڕینی ماوەکانی بەرزی، کە هێڵێن لەهەموو ماوەکاندا، ئەم ماوانە دیاریبکە و هاوکێشەی ئەم پارچە ڕاستەهێڵانە بەسەر ماوەکان دیاریبکە.

3. هاوکێشەکان بەکاربهێنە کە پێی گەیشتووی بۆ مەزندەکردنی ژمارەی پاشماوەکان لەبەرزی 725km پاشان لەبەرزی 2100km. گفتوگۆبکە لە سوودی ئەو نموونەی دەستکەوتووە.

2 پێداچوونەوەی بەش

ئایا ئەم وێنە ڕوونکردنەوە نەخشە دەنوێنێ؟

1

2

3

4 ئایا خشتەی بەرامبەر نەخشە دەنوێنێ؟

x	y
2	3
1	-2
0	0
2	-5
3	6

بواری نەخشەو مەوداکەی دیاریکە.

5 $f(x)=3x^2-2x+1$

6 $f(x)=11x-2$

7 $f(x)=3x^2-2$

8 $f(x)=2-3x$

دەروون ناسی زانایانی دەروونناسی پلەی زیرەکی کەسێك دیاریدەکەن لەڕێگەی هەژمێری ڕێژەی تەمەنی هزری بۆ تەمەنی بە سال، و لێکدانی ئەو ڕێژەیە لە ژمارە 100 لەپاشان نزیکردنەوەی ئەنجام بۆنزیکترین ژمارەی تەواو.

9 پلەی زیرەکی کەسێك تەمەنی بە سالّ 15 سالّ بێت و تەمەنە هزریەکەی بەدواییەکدا 10 ،14 ،15 ،18 ، 25.

10 پەیوەندی نێوان تەمەنی هزری و پلەی زیرەکی بۆ ئەو کەسە دەربیرە بەهۆی خشتە و وێنەی ڕوونکردنەوەیی و ڕێسا.

11 ئایا پەیوەندی نێوان تەمەنی هزری و پلەی زیرەکی نەخشەیە؟

12 کام نەخشە هێلّی نییە؟

أ $f(x)=-2x+1$ ب $f(x)=11x-2$

ج $f(x)=3x^2-2$ د $f(x)=2-3x$

هاوکێشەی ڕاستەهێلّ بنووسە لە پرسیارەکانی13تا 18.

13 لاری 3- و بەخالّی (5, 8) دەبڕوات.

14 لاری سفر وبەخالّی(4, -5)دابڕوات.

15 بەدوو خالّی (3, 4) و (5, 4) دابڕوات.

16 بەدوو خالّی (6.8, 2) و (3.6, 6) دابڕوات.

17 بەخالّی (1- ,4) دابڕوات و ستوون بێت لەسەر ڕاستەهێلّی $y=-3x-5$.

18 بەخالّی (2- ,3-) دابڕوات و تەریب بێت بە ڕاستەهێلّی $y=3.6x-5$.

هاوکێشەی هەریەك لەم ڕاستەهێلّە بەشێوەی گشتی بنووسە.

19 $y+9=4x-8$

20 $3x+y+6=9$

بەڕوونکردنەوەیی ئەم سستەمە هێلّیە شیکاربکە.

21 $\begin{cases} x+6y=3 \\ 3x+y=-8 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 8x+6y=2 \\ x+2y=-3 \end{cases}$

23 وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشەیە دروستبکە.

$$f(x)=\frac{1}{2}|x|+1$$

24 ئەو جێگۆڕکیانە چین کە نەخشەی $f(x)=-|x+2|-3$ پەیدادەکەن لەنەخشەی دایك (بنەڕەت)؟

هاوکێشەکە شیکاربکە.

25 $\left|\frac{1}{2}x\right|=20$

26 $12|2x|=108$

27 $\frac{3}{2}|x+4|-5=22$

لاسەنگەکە شیکاربکە

28 $\left|\frac{1}{2}x\right|>20$

29 $-5|6x-7|\leq 35$

30 $|6x-7|\leq -35$

ئەندازە لە سێگۆشەکانی 90 – 60 – 30 پەیوەندی نێوان درێژی ژێ (d) و درێژی لا (s) بەرامبەر گۆشەی 30° پەیوەندی ڕاستەوانەیە واتە ڕێژەی یەکەم بۆ دووەم ناگۆڕێت.

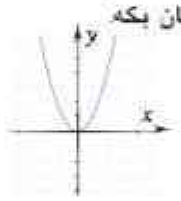
31 ئەو ڕێژەیە دیاریکە ئەگەر زانیت درێژی ژێ دەکاتە 45 کاتێك درێژی لا 22.5 بێت.

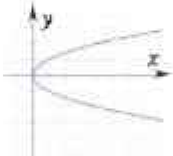
32 d بەپێی s بنووسە.

33 بەهای s هەژمێربکە کاتێك $d=13\text{cm}$.

2 تاقیکردنەوەی بەش

ئەگەر وێنە ڕوونکردنەوەییەکان نەخشە دەنوێنن باسیان بکە

1 

2 

بەهای هەریەکە لەم نەخشانە هەژماربکە کاتێک x بەهای -2 ،سفر، 2 یەک لەدوابیەک وەربگرێت

3 $f(x)=5x^2-4x+7$

4 $f(x)=x^2+x-4$

5 **بەکارچوون** کارگێڕی زانکۆیەک باجی تۆمارکردنی بەم شێوەیە دانا: 480 هەزار دینار باجی بەئەندام بوون، 900 هەزار دینار بۆ هەر وانەیەک کە خوێندکار هەڵیدەبژێرێ، نەخشەیەک بنووسە کە تێچوونی تۆمارکردنی خوێندکارێک بنوێنێ لە x وانەدا و تێچوونی تۆمارکردن لە 3 وانەدا چەندە؟

6 **بازرگانی کارگێڕی** دەزگایەکی چاککردنی ئوتومبیل 50 هەزار دینار وەردەگرێ بۆ وەرگرتنی ئوتومبیلێک و دەست نیشانکردنی هۆی لەکارکەوتنەکەی و 45 هەزار دینار بۆ هەر دەمژمێرێک کە کرێکارەکانی کاری چاکردنی تیادەکەن، نەخشەیەک بنووسە کە تێچوونی چاکردنەوەی ئوتومبیلێک بەپێی ژمارەی کاتژمێرکانی چاکردنەوە دیاردەکات.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەریەک لەم نەخشانە بکێشە

7 $y=2x$ 8 $y=2x+5$

9 $y=1$ 10 $x=2$

هاوکێشەی هەریەک لەم ڕاستەهێڵانە لەسەر شێوەی لاری یەکتربڕین و برگەی صادی بنووسە

11 لاریەکەی 2 و بەخاڵی $(-1, 5)$دابڕوات.

12 لاریەکەی سفر و بەخاڵی $(-5, 7)$ دابڕوات.

13 بەدوو خاڵی $(3, 5)$، $(-4, -7)$دابڕوات.

14 بەڕاستەهێڵی $y=4x+3$ تەریب بێت بەخاڵی $(1, 2)$ دابڕوات.

15 بەخاڵی $(-5, 9)$ دابڕوات، ئەستوون بێت لەسەر ڕاستەهێڵی $2x+3y=4$

16 **نەخشەکان** سارا تەماشای نەخشەی عێراقی کرد کە بەپێوەری $\frac{1}{5000\ 000}$ کێشرابوو واتە هەریەک سەنتیمەتر لەسەر نەخشەکە لەسەر زەوی 5000 000 cm دەنوێنێ، سارا لەسەر نەخشەکە دووری نێوان هەولێر و کەرکوکی پێوا کە 8.4cm بوو دووری نێوان ئەم دوو شارە لەسەر زەوی چەندە؟

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لەم سستەمانە بنوێنە و جۆرەکەی (نەستەمە یان سنوردارە یان بێ سنوورە) دیاری بکە

17 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=-8 \end{cases}$ 18 $\begin{cases} 4x+2y=24 \\ 2x-12=-y \end{cases}$

19 $\begin{cases} \frac{1}{3}x-y=4 \\ 2x-6y=12 \end{cases}$ 20 $\begin{cases} 4x+3y=0 \\ y+\frac{4}{3}x=-7 \end{cases}$

21 **ئەندازە** کۆی دوو گۆشەی تەواوکەر 90 پلەیە پێوانەی هەریەکە لەو دوو گۆشەیە چەندن ئەگەر پێوانە یەکێکیان 30 پلەی زیاتربێت لەوی تریان؟

شیکاری ڕوونکردنەوەیی بۆ هەریەک لەم سستەمانە جێبەجێ بکە.

22 $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ y=x-2 \end{cases}$ 23 $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$

هەریەکە لەم هاوکێشانە شیکاربکە

24 $|3x+1|=4$ 25 $|5x-7|=7$

26 $\left|\frac{1}{2}x-4\right|=3$ 27 $|x-5|=2$

هەریەکە لەم لاسەنگانە شیکاربکە

28 $|5x+3|\geq -2$ 29 $|2x+13|\leq -3$

30 $\left|\frac{3}{5}x+6\right|\geq 9$ 31 $\left|\frac{3}{2}x+8\right|<3$

جێگۆڕکێ ئەندازەیی کە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی $y=|x|$ دەگۆڕێت بۆ وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە دیاربکە.

32 $y=|x-3|$ 33 $y=|x+5|$

34 $y=|x|+2$ 35 $y=|x|-3$

بە ڕوونکردنەوەیی ئەمانە شیکار بکە.

36 $|x-5|+3=0$

37 $|x+4|=5$

38 $|x+13|\leq -3$

2 تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کامەیە کە بەدوو خاڵی $(-1, -4)$ $(3, 8)$ دا دەڕوات؟

أ $y=\frac{1}{2}x+7$	ب $y=-\frac{1}{3}x+9$
ج $y=3x-1$	د $y=-3x-7$

2 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی ئەستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی $y=5x-3$ و بەخاڵی $(10, 3)$ دا دەڕوات کامەیە.

أ $y=-\frac{1}{5}x+5$	ب $y=-\frac{1}{5}x-3$
ج $y=-5x-3$	د $y=-5x-5$

3 کام لەمانەی خوارەوە وەسفی جێگۆڕکێ لەوێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بەهای ڕووت دەکات بۆ وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە $f(x)=-|x-2|$.

أ ڕاکێشانی ئاسۆیی بەمەودای 2 بۆ لای ڕاست و بەوێنە دانەوە بەدەوری تەوەرەی صادەکاندا.

ب ڕاکێشانی ئاسۆیی بەماوەی 2 بۆ لای ڕاست پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x.

ج ڕاکێشانی ئاسۆیی بەماوەی 2 بۆ لای چەپ پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری y.

د ڕاکێشانی ئاسۆیی بەماوەی 2 بۆ لای چەپ پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری x .

4 نموونەیەک بهێنەوە بۆ پەیوەندییەک نەخشە پێک نەهێنێت، وەباسی بکە لەبەرچی؟

5 کام لەم نەخشانە نەخشەی هێڵی نین؟

أ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$	ب $y=\frac{3-4x}{7}$
ج $y=\frac{7}{3-4x}$	د $y=3-x$

6 کام لەمانەی خوارەوە لاری و بەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری y دیاریدەکەن بۆ ڕاستەهێڵی $2x+3y=2$

أ $-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}$	ب $\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}$
ج $-2; 2$	د $2; -2$

7 لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بە دووخاڵی $(2,-1)$ $(-5, 0)$ دا دەڕوات کامەیە؟

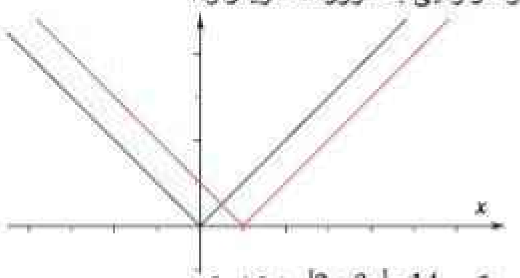
أ -7	ب -3
ج $\frac{1}{7}$	د $-\frac{1}{7}$

8 کام لەمانەی خوارەوە ڕاستەهێڵێکە کە تەوەری y نابڕێت

أ $y=4$	ب $x=-4$
ج $x+y=2$	د $y=3x$

9 هاوکێشەی $|2+3x|=14$ شیکاربکە.

10 هاوکێشەی ئەو نەخشەیە کامەیە لەوێنە ڕوونکراوەیی بەسوورەکە نوێنراوە.



11 لاسەنگەی $|2+3x|\geq 14$ شیکاربکە.

12 کام لەم ڕاستەهێڵانەی خوارەوە تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y=-2x-3$

أ $y=-2x+2$	ب $y=2x-2$
ج $y=2x+2$	د $y=-0.5x-2$

13 ئەو هاوکێشەی بنووسە کە بەدووخاڵی $(-3, 6)$ $(-5, 8)$ دا دەڕوات.

14 خاڵی بەکتربڕینی ڕاستەهێڵی $3x-5y=2$ لەگەڵ تەوەری y کامەیە؟ بیدۆزەرەوە.

15 لاری ڕاستەهێڵی $3x-5y=2$ دیاربیکەو وێنەکەی بکێشە.

16 مەودای نەخشەی $f(x)=-\left(\frac{x}{3}\right)^2$ کامەیە؟

17 ئایا سستەمی هێڵی $\begin{cases} 3y=4x-1 \\ x=\frac{4}{3}y \end{cases}$

18 سنووردارە یان ستەمە یان بێ سنوورە.

هاوکێشەی ئەو نەخشەیەی پەیدادەبێت لە نەخشەی $y=|x|$ بە ڕاکێشانێکی ستوونی بۆ سەرەوە بەمەودای 2 بنووسە.

بەشی سێیەم

بڕەکان و نەخشە دووجاکان

Quadratric Functions and Terms

1. نەخشە دووجاکان.
2. شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان.
3. شیکارکردنی نەخشەی دووجا بەڕێگای تەواوکردنی دووجا.
4. شیکارکردنی نەخشەی دووجا بە یاسا (دەستوور).
5. لاسەنگە دووجاکان.

پڕۆژەی بەشەکە.

پێداچوونەوە.

تاقیکردنەوەی بەش.

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو .

بەشی 3

بڕەکان و نەخشەی دووجاکان

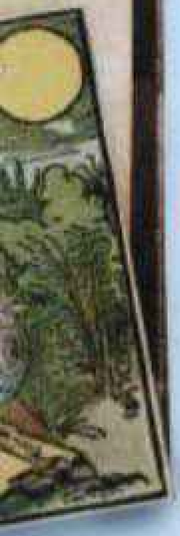
Quadratric Functions and Terms

کتێبی (الجبر والمقابلة)ی زانای ئسلامی محمد بن موسی الخوارزمی لە کتێبە بەراییەکان بوو کە باسی جەبری دەکرد. جیهان لەو کتێبە ووشەی جەبری بۆ بەجێما کە دواتر لە زۆربەی زمانەکانی جیهان بەکاردەهات لەگەڵ چەند گۆڕانێك لە دەربڕین. خوارزمی ووشەی «الجبر»ی بەکارهێنا لە مامەڵەکردن لەگەڵ هاوکێشەکان بە مەبەستی شیکارکردنیان، جەبری هاوکێشە بە پێی خوارزمی واتا زیادکردنی ژمارەیەك بۆ هەردوو لای هاوکێشەکە بۆ ئازادکردنی لە نەزانراو و دیاری کردنی بەهاکەی. خوارزمی پشتی بەزانستی جەبر بەست بۆ ئەنجامدانی لێکۆڵینەوەی زانستی لە بوارەکانی جوگرافیاو گەردوون زانی.

وانەکان

1. نەخشە دووجاکان.
2. شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان.
3. شیکارکردنی نەخشەی دووجا بەڕێگای تەواوکردنی دووجا.
4. شیکارکردنی نەخشەی دووجا بە یاسا (دەستوور).
5. لاسەنگە دووجاکان.

پرۆژەی بەش.



ئەستەرلاب سەرەتاییترین ئامێربوو کە زاناکان بۆ لێکۆڵینەوەی شوێنی ئەستێرەکان بەکاریان هێنا.

چەند لاپەڕەیەك لە كتێبی خوارزمی دەربارەی جەبر

دەربارەی پڕۆژەی بەش

بێ گومان زۆر نموونەت دیوە نەخشەی دووجای تێدا بەكارهێنراوە، بۆ دروست كردنی نموونەیەكی بیركاری بە مەبەستی لێكۆڵینەوە لە بارێكی ژیانی ڕۆژانەمان. لەم بەشە پەیوەندی نێوان نەخشەی دووجاو جیاوازی نێوان ژمارەیەك و دوابیەكەی لە شێوازی ژمارەیت بۆ ڕووندەبێتەوە.

دوای تەواوكردنت بۆ بەشەكە توانات دەبێت لەسەر بەكارهێنانی:

- بەكارهێنانی ڕێگەی جیاوازی دواهاتوو بۆ دیاریكردنی ڕێسای نەخشەكە.

وانەی 1

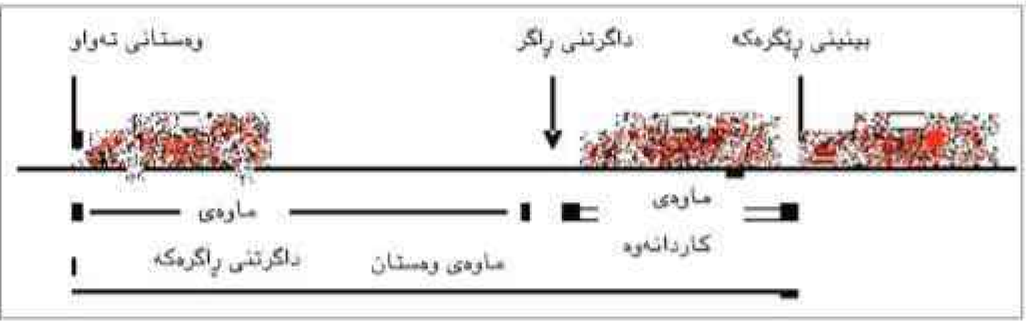
نەخشە دووجاکان Quadratric Functions

بۆچی

دەتوانیت زۆر لەبارەکانی ژیانی ڕۆژانەت بە بڕێکی دووجا بنوێنێت. نموونە بۆ ئەوەش ئەو ماوەیەی ئۆتۆمبیلێک دەیبڕێت کە شوفێرەکەی هەوڵی ڕاگرتنی دەدات لەوکاتەی تێبینی ڕێگرێک دەکات تا بە تەواوی دەیوەستێنێت.

بڕە جەبرییە دووجاکان Quadratic Algebraic Expressions

ئەو دوورییەی کە ئۆتۆمبیلێک دەیخایەنێت لە کاتی تێبینیکردنی شوفێرەکەی بۆڕێگرێک تاوەستانی بە تەواوەتی لە دوو دووری پێکدێت وەک لەم وێنەیەدا دیارە:



دەتوانین ماوەی پێویست بۆ وەستانی ئوتۆمبیلەکە بەم بڕە جەبریە دەربېڕین $d(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{160}x^2$ ، کاتێک x خێرایی ئۆتۆمبیلەکە بە km/h ،

$d(x)$ دووری وەستانی تەواوبێت بەمەتر، بڕی $d(x)$ پێکدێت لە کۆی ڕادەی $\frac{1}{5}x$ کە دووری کاردانەوەکە و ڕادەی $\frac{1}{160}x^2$ دووری شیلانی ڕاگرەکە دەنوێنێت.

ئەگەر خشتەیەکت دروستکرد بۆ بەهای $d(x)$ بە بەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی، سەرنجی ئەوە دەدەیت کە دووری پێویست بۆ وەستانی تەواو 25m کاتێک خێرایی 50km/h و 82m ، کاتێک خێرایی 100km/h بەو پێیە دووری تەواوی پێویست بۆ ڕاوەستان سێ ئەوەندە زیادی کرد کاتێک خێراییەکە دوو ئەوەندە زیاد بکات.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ئایا پەیوەندی نێوان خێرایی x ودووری وەستان d پەیوەندیەکی هێڵییە؟ ڕوونیبکەرەوە.

ئامانجەکان

- ناسینەوەی نەخشە دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ ونواندنی بەڕوونکردنەوەیی.
- وێنە ڕوونکردنەوەیی نەخشە دووجاکان دەنوێنێت و ئاوی (بڕگەی هاوتا) بەکار دەهێنێت بۆ هێڵکاری ڕوونکردنەوەییەکەی.
- سەری بڕگە هاوتاو تەوەرەکەی دەناسێت.
- ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشە دیاری دەکات بەڕوونکردنەوەیی.
- باری کراوەیی بڕگە هاوتا دیاریدەکات بەپێی نیشانەی هاوکۆلکەی a

جێبەجێکردنەکان

فیزیا

تەکنەلۆجیا

بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی

بڕە دوجاییەکان Quadratic Expressions

بڕە دووجاییەکان ئەو بڕانەن کە بە شێوەی : ax^2+bx+c دەنوسرێن کاتێك کە c ، b ، a ژمارەی ڕاستیین و $a \neq 0$ و بە a ، b ، c دەوترێت هاوکۆلکەکانی بڕە دووجاکە.

سادەترین بڕی دووجا x^2. بە شێوەیەکی گشتی ئەگەر بڕێکی هێڵی لە بڕێکی هێڵی تر بدەیت ئەوا بڕێکی دووجات دەستدەکەوێت وەك لەم چالاکییەدا دەبینرێت.

چالاکی 1

بڕە دووجاکان و بڕە هێڵییەکان Quadratic and Linear Expressions

1. ئەم خشتەیە تەواو بکە.

بڕی یەکەم	بڕی دووەم	ئەنجامی لێکدانی هەر دوو بڕەکە
$2x-2$	$2x+1$	$(2x-2)(2x+1)=4x^2-2x-2$
$x+1$	$x+1$	
$2x$	$-2x+1$	
$-x+2$	$0.5x+1$	

2. هاوکۆلکەکانی بڕە دووجاکە لەهەر بارێکی پرسیاری پێشوو دیاریبکە.
3. بڕی $(mx+n)$ لە بڕی $(px+q)$ بدە. ئەنجامەکە بە شێوەی بڕێکی دووجا بنووسە، هاوکۆلکەکانی بڕی ئامانج بە پێی n ، m ، p ، q دیاریبکە.

خاڵی چاودێری ✔

نەخشەی دووجا Quadratic Functions

لەبەشی پێشوودا نەخشە هێڵییەکان فێربوویت ولەم بەشەدا جۆرێکی نوێ لە نەخشەکان فێردەبیت کە نەخشەی دووجایە، بیرت بێ $f(x)=mx+b$ شێوەی گشتی نەخشەی هێڵییە بە بڕەهێڵ ناسراوە، بەڵام نەخشەی دووجا وەك بڕێکی دووجا دەناسرێت.

نەخشەی دووجا Quadratic Function

نەخشەی دووجا نەخشەیەکە ڕێساکەی بەهۆی بڕێکی دووجای یەك گۆڕاو دەنووسرێت و بەشێوەی $f(x)=ax^2+bx+c$ کاتێك a و b و c ژمارەی ڕاستین و $a \neq 0$ و بە a و b و c دەوترێت هاوکۆلکەکانی نەخشە دووجاکە.

سادەترین شێوەی نەخشە دووجاکان $f(x)=x^2$ یە، دەتوانرێت هەموو نەخشەیەکی دووجا لەم نەخشەیەوە پێك بهێنرێت بە بەکارهێنانی جێگۆڕکێی سادە یان ئاوێتە بۆیەش $f(x)=x^2$ بە نەخشەی بنەڕەت دادەنرێت بۆ هەموو نەخشە دووجاکان. نەخشەی $d(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{160}x^2$ نموونەیەکی نەخشە دووجاکانە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە هاوکۆلکەی ڕادەکانی نەخشە دووجاکە کامانەن کە دووری ڕاوەستانی ئۆتومبیلەکە دەنوێنێت؟

نموونە 1 ڕوونیبکەوە نەخشەی $f(x)=(2x-1)(3x+5)$ نەخشەیەکی دووجایە هاوکۆلکەکانی

شیکار

ڕێگای یەکەم

$$f(x)=(2x-1)(3x+5)$$
$$=2x(3x+5)-(3x+5)$$
$$=6x^2+10x-3x-5$$
$$=6x^2+7x-5$$

ڕێگای دووەم

$$f(x)=(2x-1)(3x+5)$$
$$=(2x-1)3x+(2x-1)5$$
$$=6x^2-3x+10x-5$$
$$=6x^2+7x-5$$

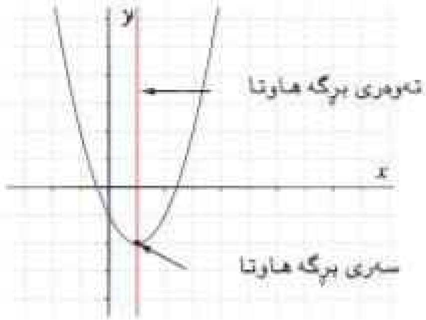
لەبەر ئەوەی $f(x)=6x^2+7x-5$ نەخشەیەکی دووجایە وهاوکۆلکەکانی بریتین لە
$a=6$ ، $b=7$ ، $c=-5$

هەوڵ بدە ڕوونیبکەوە کە $f(x)=(2x-5)(x-2)$ نەخشەیەکی دووجایەو هاوکۆلکەکانی ڕادەکانی دیاریبکە.

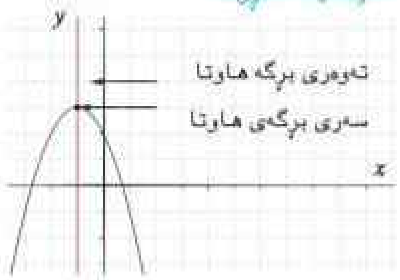
وێنەی ڕونکردنەوەیی نەخشەی دووجا ناوێکی تایبەتی هەیە کە بڕگە هاوتایە ***Parabola***
ئەم وێنانە دوو جۆری جیاواز لە بڕگەی هاوتا پیشان بەدات.

تێبینی بکە کە تەوەری بڕگە هاوتاکە هەمیشە بە سەرەکەیدا دائەڕوات.

یەکەم



دووەم



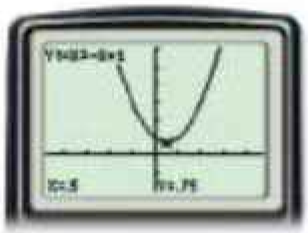
تێبینی ئەوە بکە بڕگەی هاوتا خاڵێکی ناسراوی هەیە کە پێی دەوترێت سەر و تەوەرەیەکی هاوجێبوونی هەیە. کە بڕگەکە دەکات بە دوو بەشی جووتبوو. هەروەها سەری بڕگەکە لە وێنەکەدا، گەورەترین یان بچووکترین بەهای نەخشەکە دیاریدەکات.
ئەگەر لە نەخشەی دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ وردبیتەوە. بۆت دەردەکەوێت بەهای $f(x)$ بە پێی x هەژمێر دەکرێت. واتا بواری نەخشە دووجاکە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە و بەڵام مەوداکەی وەك لە دوو وێنە ڕوونکردنەوەیەکەی سەرەوە دەردەکەوێت بریتییە لەکۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستییانەی کەمترنین لە بچوکترین بەهای نەخشەکە(جۆری یەکەم) یان ژمارە ڕاستییەکانی بچووکتر لە گەورەترین بەهای نەخشەکە (جۆری دووەم).

نموونە 2 ئایا سەری ئەم نەخشە دووجایە $f(x)=x^2-x+1$ گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟
دەتوانیت بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی یان خشتەی بەهاکان بەکاربهێنێت.

شیکار

ڕێگای یەکەم

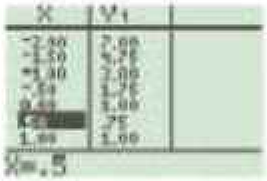
دەتوانیت بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی «ئەگەر هەبێت» بەکاربهێنیت بۆ ئەوەی بۆت دەربکەوێت نەخشەکە بەهای بچووکترینی هەیە.



ئەگەر لە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە وردبینەوە دەردەکەوێت کە پۆتانی سەرەکەی $(0.5, 0.75)$

ڕێگای دووەم

دەتوانیت بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنێت بۆ دروست کردنی خشتەی بەهاکانی نەخشەکە. لەخشتەکەوە دەردەکەوێت نەخشەکە دەگاتە بچووکترینی بەهاکەی کاتێک $x=0.5$ ، بێت و ئەم بچوکترین بەهایەش دەکاتە 0.75.



لەخشتەکەوە دەردەکەوێت سەری برگە هاوتاکە بریتییە لە خاڵی $(0.5, 0.75)$

بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی

هەوڵ بدە ئایا سەری نەخشە دووجای $f(x)=-2x^2-4x+1$ گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە
ئایا دەتوانیت هاوکێشەی تەوەری هاوجێبوونی نەخشەی دووجای $f(x)=x^2-x+1$ دیاری بکەیت ئەگەر زانیت کە $f(0)=f(1)$ ؟

دەتوانیت بە سەرنجدان لە نیشانەی هاوکۆلکەی a ،بزانیت کە نەخشە دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ بەهای گەورەترین یان بچووکترین هەیە.

بەهای گەورەترین یان بچووکترین: Maximum and Minimum values

- ڕوونکردنەوەیی نەخشە دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ کاتێک a و b و c ژمارەی ڕاستی بن و $a\neq 0$ بریتییە لە برگەی هاوتا.
- ئەگەر a هاوکۆلکەی x^2 موجەب بێت ئەوا برگە هاوتاکە کراوەیە بەرەوە سەرەوە. و سەرەکەی نزمترین خاڵی برگەکەیە ویەهای y تیایدا بچووکترین بەهای نەخشەکەیە.
- ئەگەر a هاوکۆلکەی x^2 سالب بێت ئەوا برگە هاوتاکە کراوەیە بەرەوە خوارەوە. و سەرەکەی بەرزترین خاڵی برگەکەیە ویەهای y تیایدا گەورەترین بەهای نەخشەکەیە.
- بەهای y ی سەری برگە هاوتاکە دەبێتە ئەوپەری بەهای نەخشەکە، بەهای ئەوپەرییەکە دەبێتە گەورەترین یان بچووکترین بەها.

نموونە 3 ئەم برگە هاوتایانە بەرەو سەرەوە یان خوارەوە کراوەن. ئایا سەرەکەشی گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟

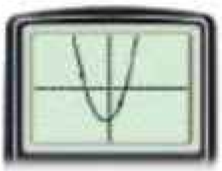
أ $f(x)=x^2+x-6$

ب $f(x)=5+4x-x^2$

● شیکار

أ هاوکۆلکەی x^2 لەنەخشەی $f(x)=x^2+x-6$ موجەبە بۆیە بڕگە هاوتاکە کراوەیە بۆ سەرەوەی نەخشەکە و بچووکترین بەهای هەیە لە سەرەکەیدا.

پاسەدان بکە



ب هاوکۆلکەی x^2 لە نەخشەی $f(x)=5+4x-x^2$ سالبە -1 بۆیە بڕگە هاوتاکە کراوەیە بۆ خوارەوەی نەخشەکە و گەورەترین بەهای هەیە لە سەرەکەیدا.

پاسەدان بکە

چالاکی 2

جێگۆڕکێی نەخشە دووجای بنەڕەتی x^2 Transforming Quadratic Base Function

پێویستیت بە پەڕەی ڕوونکردنەوەیی یان بژمێری ڕوونکردنەوەیی دەبێت.

1. خشتەی بەهاکان دروست بکە، پاشان هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە.

$y=x^2$ $\qquad$ $y=x^2+1$ $\qquad$ $y=x^2-1$

2. چ گۆڕانێك بەسەر هێڵکاری نەخشەی بنەڕەتی دێت، ئەگەر 1 مان زیاد یان کەمکرد لە نەخشەکە؟

3. خشتەی بەهاکان دروست بکە،پاشان هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە.

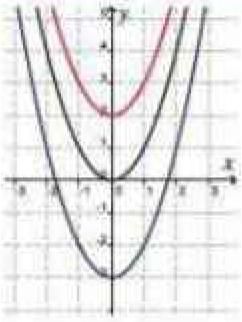
$y=x^2$ $\qquad$ $y=(x+2)^2$ $\qquad$ $y=(x-2)^2$

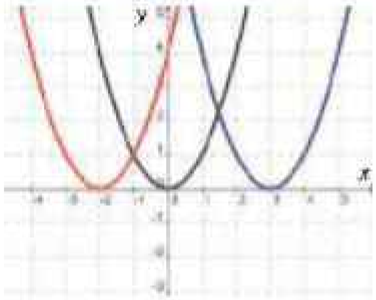
4. چ گۆڕانێك بەسەر هێڵکاری نەخشەی بنەڕەتی دادێت،ئەگەر 2 مان زیاد یان کەمکرد بۆ گۆڕاوە سەربەستەکە؟ ✓ خاڵی چاودێری

5. خشتەی بەهاکان دروست بکە، پاشان هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە

$y=x^2$ $\qquad$ $y=(x-2)^2+1$ $\qquad$ $y=(x-2)^2-1$ $\qquad$ $y=(x+2)^2+1$

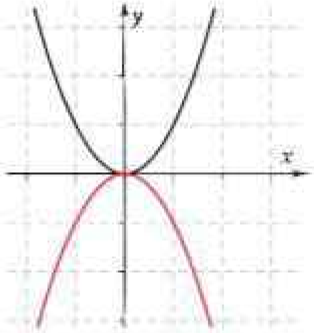
6. چ گۆڕانێك بەسەر هێڵکاری نەخشەی بنەڕەتی دادێت کاتێك 2 لە x کەمبکرێت و 1 بۆ نەخشەکە زیادبکرێت؟ زیاد کردنی 2 بۆ x و کەمکردنی 1 لەنەخشەکە. ✓ خاڵی چاودێری



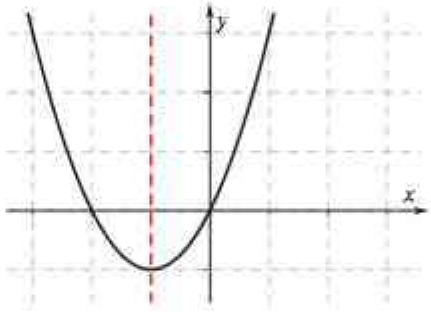


هەریەك لە دوونەخشەی $y=x^2+2$ و $y=x^2-3$ کشانەوەیەکی ستوونی **Vertical** هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی $y=x^2$ دەنوێنن کە لە زیادکردنی یان کەمکردنی ژمارەیەك بۆ نەخشەکە دروست بوون.
بەمەش هێڵە ڕوونکردنەوەییەکە بەرەو سەرەوە یان بەرەو خوارەوە دەکشێت.

هەر یەك لە دوونەخشەی $y=(x+2)^2$ و $y=(x-3)^2$ کشانەوەیەکی ئاسۆیی **Horizontal** هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی $y=x^2$ دەنوێنێت، کە لە زیادکردنی یان کەمکردنی ژمارەیەك بۆ گۆڕاوە سەربەستەکە دروستبوون. بەمەش هێڵە ڕوونکردنەوەییەکە ئاسۆیی بەرەو لای ڕاست یان چەپ دەکشێت.



هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=-x^2$ وێنەدانەوەی هێڵکاری نەخشەی بنەڕەتییە بە دەوری تەوەرەی سینی بەڵام سەری بڕگە هاوتای نەخشەی بنەڕەت بچووکترین بەهای دەنوێنێت و هەمان سەر گەورەترین بەهای نەخشەی $y=-x^2$ یە.



ئەو ڕاستەهێڵە ستوونییەکەی کەبەسەری بڕگە هاوتاکەدا دەڕوات تەوەرەی هاوجێبونی وێنە ڕوونکردنەوەیەکەیە، لەبەر ئەوەی ئەو ڕاستەهێڵە بڕگە هاوتاکە دەکات بە دوو بەشی جووتبوو بە ڕاستەهێڵەکەش دەوترێت تەوەرەی بڕگە هاوتاکە **Axis of Parabola**.

ڕاهێنـــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 جیاوازی نێوان هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی هێڵە نەخشە و هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووجا ڕوونبکەرەوە.

2 جیاوازی نێوان بڕی جەبری هێڵە نەخشە وبڕی جەبری نەخشەی دووجا ڕوونبکەرەوە.

3 چۆن دەزانیت سەری بڕگە هاوتا بەهاکەی گەورەترین یان بچووکترینی نەخشەی دووجایە؟

4 پەیوەندی چییە لە نێوان هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی وهێڵکاری ڕوونکردنەوەیی $y=x^2-8$.

5 پەیوەندی چییە لە نێوان هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی وهێڵکاری ڕوونکردنەوەیی $y=(x-8)^2$.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ڕوونبیکەوە ئەم نەخشانە، نەخشەی دووجان، هاوکۆلکەکانیان دیاریبکە

6 $f(x)=(x+1)(x-7)$

7 $f(x)=(x+2)(x+5)$

8 $f(x)=(2x+5)(3x+1)$

گەورەترین یان بچووکترین بەها: وەڵامی پرسیارەکانی 9 تا 14 بدەوە؟

أ ئایا ئەم بڕگە هاوتایە کراوەیە بۆ سەرەوە یان بۆ خوارەوە؟

ب ئایا بەهای ئەو پەڕی ئەم نەخشانە، گەورەترینە یان بچووکترینە؟

9 $f(x)=x^2-3x+5$

10 $f(x)=2-3x-x^2$

11 $f(x)=x^2+5x+3$

12 $f(x)=x^2-2x+7$

13 $f(x)=-x^2+8x+14$

14 $f(x)=-2x^2-5x+1$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ڕوونیبکەوە ئەم ئەخشانە دووجان، هاوکۆلکەی ڕادەکانیش دیاریبکە.

15 $f(x)=(x-3)(x+8)$

16 $f(x)=(4-x)(7+x)$

17 $f(x)=-(x-2)(x-6)$

18 $f(x)=(2x+3)(4-x)$

19 $f(x)=x(x-3)$

20 $f(x)=(x-6)(x+6)$

ئایا ئەم ئەخشانە دووجان یان نا؟ ڕوونیبکەوە؟

21 $y=3-x^2$

22 $y=3-x$

23 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$

24 $y=\frac{2x^2+5}{x+3}$

25 $y=x^2-x^2(x+7)$

26 $y=\left|x^2+5x-2\right|$

ئەم بڕگە هاوتایانە بەرەوە سەرەوە یان بەرەو خوارەوە کراوەن. بەهای ئەوپەڕی ئەخشەکە بچووکترینە یان گەورەترینە؟

27 $y=2x^2-2x$

28 $y=-8x^2-x$

29 $y=3-x^2$

30 $y=4-x^2-2x$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەخشەکە بکێشە و بەنزیکەیی بەهای پۆوتانی سەری بڕگە هاوتاکان دیاریبکە.

31 $y=x^2-x+9$

32 $y=-x^2-2x+9$

33 $y=4x^2-2x-2$

34 $y=-0.5(x+4)^2$

35 $y=(x-2)^2-1$

36 $y=-(x-2)(x+6)$

چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەخشەی بنەڕەتی دەگۆڕێت بۆ هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم ئەخشانە.

37 $y=(x-2)^2+3$

38 $y=(x-5)^2-2$

39 $y=-(x-2)^2+1$

40 $y=-(x+6)^2-2$

41 $y=-(x-3)^2-2$

42 $y=(x+4)^2-7$

43 بە چ ڕێگایەك پۆوتانی سەری بڕگە هاوتای $y=(x+a)(x-a)$ دیاریدەکەیت؟ڕوونیبکەوە.

44 جێکۆڕکێ: هێڵکاری ڕوونکردنەوەییە ئەم ئەخشانە بکێشە پاشان وەڵامی پرسیارەکان بدەوە.

أ $y=(x+2)(x-4)$

ب $y=2(x+2)(x-4)$

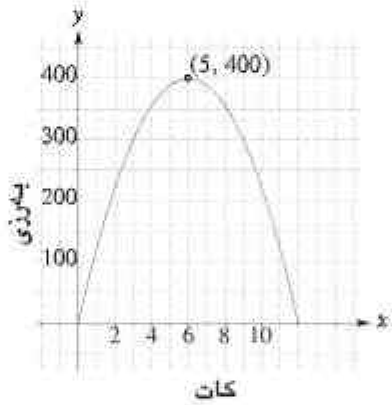
ج $y=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$

د $y=-(x+2)(x-4)$

هـ $y=-2(x+2)(x-4)$

و $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$

- ئەو شەش هێڵکاریە ڕوونکردنەوەیی لە چی هاوبەشن؟
- کامیان کراوەیە بەرەو خوارەوە؟
- کامیان کراوەیە بەرەو سەرەوە؟



45 فیزیا ئەو هێڵە ڕوونکردنەوەییەی بەرامبەر پەیوەندی نێوان کات بە چرکە وبەرزی گوللە تۆپێک بە مەتر کە بۆ سەرەوە هەڵدراوە دیاریدەکات. گەورەترین بەرزی کە گوللە تۆپەکە دەیگاتێ چەندە؟

46 بە چەند چرکە دەگاتە گەورەترین بەرزی؟ تەوەری هێڵکاریە ڕوونکردنەوەیەکە دیاریبکە؟

47 فیزیا جوامێر تیرێکی بۆ سەرەوە بە خێرایی 40 مەتر لە چرکەیەک هاوێشت، بەرزی تیرەکە دوای 5 چرکە چەندە بە بەکارهێنانی نەخشەی $y = 40x - 5x^2$ کاتێك کە x کات بێت بە چرکە و y بەرزی بێت بە مەتر، وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە دە نزیکبکەوە.

ڕوانینێك بۆ دواوە

بڕی $2(x-3)^2+1$ لێکدان وکرداری لێدەرکردن لە ناوکەوانەکە وبەرزکردنەوەی بۆ توانی 2 و کرداری کۆکردنەوەی تێدایە.

48 کام لەم کردارانە پێشتر ئەنجام دەدەین؟

49 دووەم کردار چی ئەنجام دەدەین؟

50 سێیەم کردار چی ئەنجام دەدەین؟

ئەمانە شیکاربکە

51 $\begin{cases} 3y+2x=2 \\ y=x \end{cases}$

52 $\begin{cases} y=4 \\ 3y=2x \end{cases}$

53 ئەو ژمارە دوو ڕەنووسە کامەیە کە دووی لە سێ ئەوەندەی سەرجەمی هەردوو ڕەنووسەکەی زیاترە، ڕەنووسی دەیانی 4 لە ڕەنووسی یەکانی کەمترە؟

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

جیبەجیکردنەکان

54 لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە $y = x^2 - 3x + 5$ و $y = x^2 + 7x + 6$ و $y = x^2 - 14x + 49$ خاڵە هاوبەشەکانی نێوان بڕگە هاوتاکان و تەوەری سینی دیاریبکە؟

وانەی 2

شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان

Factoring Quadratic Expressions

بۆچی

بڕە جەبرییە دووجاکان بەکاردێت بۆ زۆر نموونەی ژیانی ڕۆژانەمان وەك شێوەی حەوزی ئەو وێنەیە

ئامانجەکان

- بڕە جەبرییە دووجاکان شیتەڵدەکات.
- شیتەڵکردن بەکاردەهێنێت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا و دۆزینەوەی سفرەکانی ئەخشەی دووجا.

جێبەجێکردنەکان

ئەندازەی تەلارسازی

ئەندازیارێکی تەلارسازی حەوزێکی لە باخچەیەکی گشتیدا دروستکرد، وەك وێنەی سەرەوە لەناویدا چەند خشتەکێکی هاوشێوەی لەسەر شێوە هێمای X ڕیز کرد بە چەند ئاستێکی جیاواز، بە جۆرێك کە ژمارەی خشتەکەکانی هەر باڵێکی شێوە هێماکەیەکی کەمتربێت لەوەی ژێر خۆی. ڕێسای $m = 2n^2 - n$ هەژمێری ژماری خشتەکەکانی n مان بۆدەکات بۆ دروستکردنی حەوزێك لە n ئاستدا. ژمارەی ئاستەکانی ناو حەوزێك چەندە کە 66 خشتەکی تیا بێت.

شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان Factoring Quadratic Expressions

کاتێك فێری لێکدانی دوو بڕی جەبری وەك $2x$ و $x+3$ بویت ، ئەنجامی لێکدانەکەت گۆڕی بۆ سەرجەمی کۆمەڵێك ڕادە. شیتەڵکردن کرداری پێچەوانەی لێکدانە، واتە دەتوانیت سەرجەمی کۆمەڵێك ڕادە بگۆڕێت بۆ ئەنجامی لێکدان.

بۆ شیتەڵکردنی بڕێکی دوو ڕادەیی یان زیاتر، گەورەترین کۆلکەی هاوبەش (گ.ك.هـ)دەربێنە (ئەگەر هەبوو) بۆ دوو ڕادەکە وەك لەم نموونانەدا دەیبینیت.

لێکدان

$3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

شیتەڵ

نموونە 1

ئەم بڕە دووجایانە شیتەڵبکە

أ $3m^2 - 12m$

ب $3x(4x+5) - 5(4x+5)$

شیکار

گەورەترین کۆلکەی هاوبەش دەربێنە

أ $3m^2 - 12m = 3m \times (m) - 3m \times (4)$

گ. ك. هـ. بریتییە لە $3m$

$= 3m(m-4)$

ب گەورەترین کۆلکەی هاوبەش بریتییە لە $(4x+5)$

$3x(4x+5) - 5(4x+5) = (3x-5)(4x+5)$

هەوڵبدە ئەم دوو بڕە شیتەڵبکە $5x^2 + 15x$ و $x(2x-1) + 4(2x-1)$

شێوەی گشتی بڕێکی دووجا بریتییە لە ax^2+bx+c کاتێك $a\neq 0$

دەتوانیت زۆر لە بڕە جەبرییە دووجاکان شیتەڵبکەیت. سەرنجی شیتەڵکردنی ئەم بڕانەی خوارەوە بدە کاتێك $a=1$

شیکاری پرسیار بگەڕێ بەدوای **شێوازێك** سەیری شێوەی شیتەڵکردنی ئەم بڕە دووجایانە بکە، سەرنج بدە کە کۆی دوو ڕادە نەگۆڕەکە لە کۆلکەکاندا یەکسانە بە هاوکۆلکەی x لەو بڕە دووجایەدا پێش شیتەڵکردن و ئەنجامی لێکدانیان یەکسانە بە ڕادە نەگۆڕەکە.

$$x^2+7x+10=(x+5)(x+2)$$

$5+2=7$	$5\times(2)=10$

$$x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$$

$(-5)+(-2)=-7$	$(-5)\times(-2)=10$

$$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$$

$5+(-2)=3$	$5\times(-2)=-10$

$$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$$

$(-5)+2=-3$	$(-5)\times(2)=-10$

سەرنجدان لەو شێوازانەی پێشوو وا دەکات ڕێسایەکمان بۆ شیتەڵکردنی بڕی x^2+bx+c دەستدەکەوێت.

بۆ شیتەڵکردنی بڕی x^2+bx+c کاتێك b و c دوو ژمارەی تەواوین، بگەڕێ بۆ دوو ژمارە r و s کەسەرجەمیان b بێت و لێکدانیان c بێت پاشان بڕەکە بەم شێوەیە شیتەڵبکە.

$$x^2+bx+c=(x+r)(x+s)$$

کاتێك c ژمارەیەکی موجەب بێت، بۆ ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارە شیتەڵبکە کە هەمان نیشانەیان هەبێت.

نموونە 2

بڕی x^2+5x+6 شیتەڵبکە

شیکار

بخەملێنە وساغبکەوە دەست بە نووسینی $(x\quad)(x\quad)$ بکە، بگەڕێ بە دوای دوو هاوکۆلکەی ژمارە 6 هەمان نیشانەیان هەبێت وسەرجەمیان 5 بێت.

$(x+1)(x+6)$	$(x+2)(x+3)$	$(x-1)(x-6)$	$(x-2)(x-3)$
$1\times x+6x$	$2x+3x$	$(-1)x+(-6)x$	$(-2)x+(-3)x$
?	?	?	?
$7x$	$5x$	$-7x$	$-5x$
هەڵەیە	ڕاستە	هەڵەیە	هەڵەیە

کەواتە، $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

هەوڵبدە بڕی $x^2-10x-11$ شیتەڵبکە.

کاتێك c ژمارەیەکی سالب بێت لە x^2+bx+c بەدوای دوو کۆلکەی جیاواز لە نیشانەدا بگەڕێ.

نموونە

3 بڕی $x^2-7x-30$ شیتەڵبکە.

شیکار

بخەملێنە وپاسەدان بکە. دەست بە نووسینی (x)(x) بکە. بگەڕێ بەدوای دوو هاوکۆلکە لەهاوکۆلکەکانی ژمارە (30−) بگەڕێ کە سەرجەمیان بکاتە7− ئاگاداربە دوو هاوکۆلکەکە لەنیشانە جیاواز بن.

$(x-2)(x+15)$	$(x+1)(x-30)$	$(x-1)(x+30)$
$(-2)x+15\times x$	$1\times x+(-30)x$	$(-1)x+30x$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$13x$	$-29x$	$29x$
هەڵەیە	هەڵەیە	هەڵەیە
$(x+3)(x-10)$	$(x-3)+(x+10)$	$(x+2)(x-15)$
$3\times x+(-10)\times x$	$(-3)x+10\times x$	$2x+(-15)\times x$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$-7x$	$7x$	$-13x$
ڕاستە	هەڵەیە	هەڵەیە

کەواتە. $x^2-7x-30=(x+3)(x-10)$

هەوڵبدە بڕی $3x^2+11x-20$ شیتەڵبکە.

لە لێکدانی دوو بڕی $x+3$ و $x-3$ ووردببەوە.

جیاوازی دوو دووجا

$$(x+3)(x-3)=x^2+3x-3x-9=x^2-9=x^2-3^2$$

شیتەڵکردن بە جیاوازی نێوان دوو دووجا
Factoring The Difference Of Two Squares

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

لە ئەنجامی دووجای $x+3$ و $x-3$ بپشکنە

$$(x+3)^2=(x+3)(x+3)$$
$$=x^2+3x+3x+9$$
$$=x^2+2\times 3\times x+3^2$$
$$=x^2+6x+9$$

$$(x-3)^2=(x-3)(x-3)$$
$$=x^2-3x-3x+9$$
$$=x^2-2\times 3\times x+3^2$$
$$=x^2-6x+9$$

دووجای تەواو

شیتەڵکردن بە دووجای تەواو Factoring Perfect Squares

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

نموونە 4 ئەم برانە شیتەڵبکە

أ x^4-16

ب $4x^2-24x+36$

شیکار

أ $x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)$
$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$

ب $4x^2-24x+36=4(x^2-6x+9)$
$=4\left[x^2-2(3)x+3^2\right]$
$=4(x-3)^2$

هەوڵبدە ئەم برانە شیتەڵبکە $9x^2-49$ و $3x^2-6x+3$

شیکارکردنی هاوکێشە دووجاکان بە بەکارهێنانی شیتەڵکردن Using Factoring to Solve Quadratic Equations

هەندێك جار دەتوانیت شیتەڵکردن بەکاربهێنین بۆ شیکارکردنی هاوکێشە یان بۆ دۆزینەوەی سفرەکانی نەخشەکە. سفری نەخشەی $f(x)$ بریتییە لە هەر ژمارەیەکی وەك r ـە کە پاسەدانی $f(r)=0$ بکات.

سیفەتی لێکدانی سفری Zero Product Property

ئەگەر $p\times q=0$ ئەوا $p=0$ یان $q=0$

شێوەی گشتی هاوکێشەی دووجا بەم شێوەیە دەنووسریت $ax^2+bx+c=0$ ئەگەر توانیت بڕی ax^2+bx+c شیتەڵ بکەیت، ئەوا بە جێبەجێکردنی سیفەتی سفری دەتوانیت هاوکێشەکە شیکار بکەیت چۆن لێکدانی سفر جێبەجێ دەکەیت؛ بڕەکە شیتەڵبکە وئەنجامی لێکدانیان یەکسان بکە بە سفر.

نموونە 5 هاوکێشەی $x^2+6x=-5$ شیکاربکە

شیکار

هاوکێشەکە بە شێوەی گشتی بنووسە $x^2+6x+5=0$ لەسەرەتادا بڕی x^2+6x+5 شیتەڵبکە، $x^2+6x+5=(x+5)(x+1)$ دەستدەکەوێت، پاشان $(x+5)(x+1)=0$ یەکسان بکە بە سفر. چۆن ڕەگەکانی هاوکێشەکە $(x+5)(x+1)=0$ دیاری دەکەیت. لە هاوکێشەکەی پێشووەوە دوو هاوکێشەی $(x+5)=0$ یا ن $(x+1)=0$ مان دەست دەکەوێت و ڕەگەکانیان $x=-5$ یان $x=-1$ دەبێت واتە ڕەگەکانی هاوکێشەکە بریتییە لە -1 و -5 .

نموونە 6 سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی سفرەکانی نەخشەکە

أ $f(x)=2x^2-11x$

ب $g(x)=x^2-14x+45$

شیکار

أ
$2x^2-11x=0$
$x(2x-11)=0$
$x=0$ یان $2x-11=0$
$x=0$ یان $x=\frac{11}{2}$

ب
$x^2-14x+45=0$
$(x-5)(x-9)=0$
$x-5=0$ یان $x-9=0$
$x=5$ یان $x=9$

هەوڵبدە سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی سفرەکانی نەخشەکە.

أ $f(x)=3x^2+12x$ ب $g(x)=x^2+4x-21$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بیسەلمێنە نەخشەی $f(x)=ax^2+bx$ کاتێك $a\neq 0$ دوو ڕەگی هەیە کە 0 و $\frac{b}{a}$-یە.

نموونە 7 بەگەڕانەوە بۆ نموونەی حەوزەکەی سەرەتای وانەکە، ژمارەی ئاستەکانی حەوزەکە چەندە؟ کاتێك ژمارەی خشتەکەکان 66 بێت.

شیکار

هاوکێشەی $2n^2-n=66$ شیکاربکە بە شیتەڵکردن.

$$2n^2-n-66=0$$ هاوکێشەکە بە شێوەی گشتی بنووسە

$$(2n+11)(n-6)=0$$ $2n^2-n-66$ شیتەڵبکە

$2n+11=0$ یان $n-6=0$ سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە

$n=-5.5$ یان $n=6$

ژمارەی ئاستەکان = 6 چونکە ژمارەی ئاستەکان تەنها دەبێت ژمارەی تەواوی موجەب بن.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن b و c دەدۆزیتەوە ئەگەر $x^2+34x+285=(x+b)(x+c)$.

2 چی دەزانی دەربارەی شیتەڵکردنی بڕە دووجای x^2+bx+c کاتێك c موجەب بێت؟ کاتێك c سالب بێت؟ نیشانەی b چ زانیاریەکت پێ دەبەخشێت لەهەر یەکە لەوبارانەدا.

3 ئەگەر لێکدانی b و c سفر بێت $(bc=0)$ چی دەڵێیت سەبارەت بە b و c

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

یارمەتی
دەستپێبکە بە دەرهێنانی کۆڵکەی هاوبەش ئەگەر هەبوو.

ئەم بڕە دووجایانە شیتەڵبکە.

4 $2x^2-8x$

5 $2x^2-6x$

6 $5x^2-15x$

7 $4x(x+3)-7(x+3)$

8 $3(4b+7)-2b(4b+7)$

9 $8d(9d-5)+3(9d-5)$

10 x^2+5x+6

11 x^2+8x+7

12 x^2-5x+4

13 $x^2-4x-12$

14 $x^2-9x-36$

15 $x^2+10x-24$

16 $2x^2+9x+10$

17 $3x^2+5x+2$

18 $5x^2+13x-6$

19 $8x^2+24x-14x-42$

20 $12x^2+21x-8x-14$

21 $72x^2-56x-36x+28$

22 x^2-81

23 $2x^2-8$

24 $16x^2-25$

25 $x^2+8x+16$

سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی دوو سفری هەر نەخشەیەک.

26 $f(x)=x^2+7x$

27 $f(x)=x^2+6x+9$

28 $f(x)=x^2+3x-10$

29 نەندازە کەژاڵ بۆ بەیەک گەیاندنی چەند خاڵێک 36 پارچە ڕاستەهێڵی کێشا ژمارەی خاڵەکان چەندن؟ ئەگەر بزانیت گەیاندنی n خاڵ پێویستی بە $\frac{n(n-1)}{2}$ پارچە ڕاستەهێڵ هەیە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم بڕانە شیتەڵبکە.

30 $3x+6$

31 $3x^2+18$

32 $10n-n^2$

33 $x-4x^2$

34 $6x-2x^2$

35 $3x^2-15x$

36 $5x(x-2)-3(x-2)$

37 $(x+3)(2x)+(x+3)\times 7$

ئەم بڕانە شیتەڵبکە.

38 $x^2-16x+15$

39 $x^2+8x+16$

40 $x^2-26x+48$

41 $x^2+4x-32$

42 $x^2+7x-30$

43 $x^2-10x-24$

44 $-22x-48+x^2$

45 $2x+x^2-24$

46 $x^2-56-10x$

47 $56+10x-x^2$

48 $30+x-x^2$

49 $24+10x-x^2$

50 $3x^2+10x+3$

51 $2x^2+5x+2$

52 $2x^2+3x+1$

53 $3x^2+7x+2$

54 $12x^2-3x-9$

55 $3x^2-5x-2$

سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە

56 $15x^2=7x+2$

57 $3x^2-5x=2$

58 $4x-4=-15x^2$

59 $3x^2+3=10x$

60 $2x^2-15=-7x$

61 $6x^2-17x=-12$

62 $x^2-36=0$

63 $t^2-9=0$

64 $x^4-81=0$

65 $x^4-1=0$

66 $4x^2-9=0$

67 $25x^2-16=0$

68 $x^2-2x+1=0$

69 $x^2+4x+4=0$

70 $9x^2=-6x-1$

71 $4x^2+1=4x$

72 $-4+20x-25x^2=0$

73 $40x+25=-16x^2$

74 $64+16x+x^2=0$

75 $9-6x+x^2=0$

شیتەڵکردن وسیفەتی لێکدانی سفری، بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی دوو سفری نەخشە دووجاکان.

76 $f(x)=x^2-7x+10$

77 $g(x)=t^2-2t-15$

78 $f(x)=4x^2+4x-24$

79 $g(x)=6x^2+3x-9$

80 $f(x)=t^2+7t-60$

81 $k(x)=x^2-15x+56$

82 $f(x)=x^2+8x+12$

83 $g(x)=x^2-3x-40$

84 $g(x)=6x^2+20x-16$

85 $k(x)=4x^2-8x+3$

ئەمانە شیتەڵبکە.

بەرنگاری

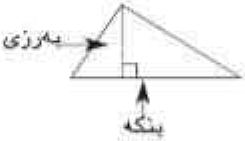
86 $(a+b)^4-(a-b)^4$

87 $x^{2n}-1$

88 $x^{2n}-2x^n+1$

بەستنەوە

89 **ئەندازە** ڕێسای هەژمارکردنی ڕووبەری سێگۆشە بریتییە لە $A=\frac{1}{2}bh$ کە A ڕووبەر و b درێژی بنکە و h بەرزی بێت. ئەم ڕێسایە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 89 و 90 . بەرزی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە کە ڕووبەرەکەی $42cm^2$ یە بنکەکەی 5cm زیاتر بێت لەبەرزییەکەی.



90 درێژی بنکەی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە کە ڕووبەرەکەی $12cm^2$ و بەرزییەکەی 5cm کەمترە لە لە درێژی بنکەکەی.

جێبەجێکردن

91 **وەرزش** شەق لێدانی گوڵچیەك لە تۆپێکی پێ کە لەسەر زەوییە بە نەخشەی $h(t)=-4.9t^2+19.6t$ دەنوێنرێت بۆ پێوانی بەرزی تۆپەکە لە ڕووی زەوییەوە بە مەتر. پاش t چرکە، بە چەند چرکە تۆپەکە بەر زەوی دەکەوێت جارێکی تر؟

تێڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم لاسەنگانە شیکاربکە وکۆمەڵە شیکار لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

92 $2x-4>12+5x$

93 $2x-\frac{3}{4}\geq 7$

94 $3(3x+7)-12\leq 8-(\frac{1}{2}x+9)$

95 $-2(\frac{2}{3}x+5)-13<0$

لێکبدە.

96 $(3x+4)(-x-5)$

97 $(-2x+9)(-4x+7)$

98 $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4})(-5x-2)$

تێڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەگەر توانرا ئەم برە دووجایانە شیتەڵبکە

99 $(x+2)^2-4$

100 $(x+9)^2+36$

101 $(x-1)^2-16$

وانەی 3

شیکارکردنی نەخشەی دووجا بەڕێگای تەواوکردنی دووجا

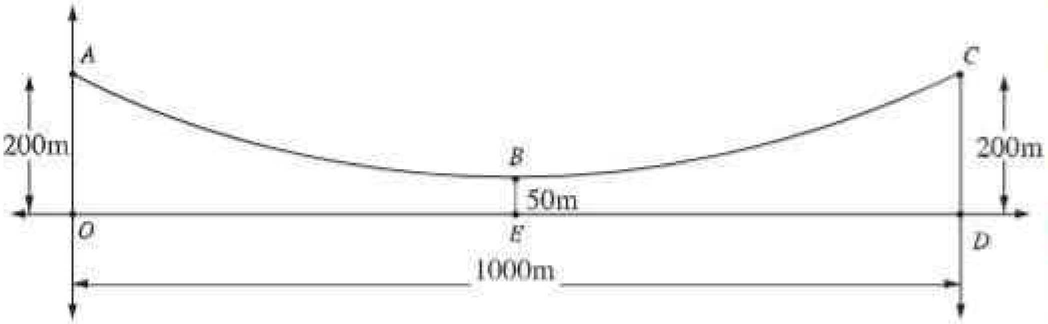
Solving Quadratic Function by Completing The Square

ئامانجەکان

- هاوکێشەی دووجا بە تەواو کردنی دووجا شیکار دەکات.
- سەری برگەی هاوتا دەناسێتەوە و پۆتانەکانی دیاریدەکات.
- بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی دووجا شیکار دەکات.

جێبەجێکردنەکان

ئەندازەی پردەکان



ئەندازیاران نەخشەی پردێکی هەڵواسراو دەکێشن وەك لە وێنەی سەرەوە دەردەکەوێت. لەوێنەکە شێوەی تەلێکی کانزایی دەردەکەوێت کە پردەکەی هەڵگرتووە. ئەو شێوەیە نزیکە لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەیەکی دووجا،دەتوانرێت شێوەی ئەو سیمەی پردەکەی هەڵگرتووە بەنزیکەیی وەك نەخشەی $f(x)=\frac{3}{5000}x^2-\frac{3}{5}x+200$ کاتێك $0\le x\le 1000$ بنوێنرێت ئەم نەخشە دووجایە بە شێوەیەك بنووسە کە بتوانرێت پۆتانی خاڵی بچووکترینی بە ئاسانی دیاربیکەیت، بەرزی خاڵەکەش دیاریبکە.

لەبیرمەکە هاوکێشەی $x^2=k$ بە دیاری کردنی ڕەگە دووجاکانی شیکاردەکرد.

لەبیرت بێ کە لە پۆلی نۆیەم فێربویت کە چۆن هاوکێشەیەك لە جۆری $x^2=k$ شیکار دەکەیت بە دیاریکردنی ڕەگی دووجا.

نموونە

1 هاوکێشەی $x^2=9$ شیکاربکە.

شیکار

$$x^2=9$$

$$x=\pm\sqrt{9}$$

$$x=\pm 3$$

دەتوانیت هەمان ڕێگا بەکاربهێنێت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی لە جۆری $(a+x)^2=k$

نموونە 2 هاوکێشەی $(x+3)^2=16$ شیکاربکە

شیکار

$$(x+3)^2=16$$
$$x+3=\pm\sqrt{16}$$
$$x+3=\pm 4$$
$x=-7$ یان $x=1$

کاتێك بڕە جەبرییەکە لە هاوکێشەدووجاکەدا دووجای تەواو نەبێت، دەتوانیت بیکەیت بە دووجای تەواو، ئەم ڕێگایە یارمەتیت دەدات بۆ شیکارکردنی هاوکێشەکان بە شیتەڵکردن.

لە پەیوەندی نێوان ڕادەکانی دووجا تەواوەکە وردببەوە.

باری تایبەت

$$x^2+8x+16=(x+4)^2$$
$$\frac{1}{2}(8)=4\rightarrow 4^2=16$$

باری گشتی

$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{2}b=\frac{b}{2}\rightarrow\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

ڕادە نەگۆڕی c لە دووجا تەواوەکەدا بریتییە لە دووجای نیوەی هاوکۆلکەی x کە یەکسانە بە $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ئەگەر $a=1$.

نموونە 3 ژمارەیەك بۆ هەر بڕێك زیادبکە تا ببێتە دووجای تەواو

أ x^2-6x

ب x^2+15x

شیکار

أ لەبەر ئەوەی هاوکۆلکەی $x^2=1$ وهاوکۆلکەی $x=-6$ کەواتە $\frac{1}{2}(-6)=-3\rightarrow(-3)^2=9$

کەواتە دووجا تەواوەکە:

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

ب لەبەر ئەوەی هاوکۆلکەی $x^2=1$ وهاوکۆلکەی $x=15$ کەواتە $\frac{1}{2}(15)=\frac{15}{2}\rightarrow\left(\frac{15}{2}\right)^2$

کەواتە دووجا تەواوەکە

$$x^2+15x+\left(\frac{15}{2}\right)^2=\left(x+\frac{15}{2}\right)^2$$

هەوڵبدە ئەو ژمارەیە زیادبکە کەوا دەکات ئەمانە ببنە دووجای تەواو

أ x^2-7x

ب x^2+16x

شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بە تەواوکردنی دووجا تەواو
Solving Quadratic Equation by Completing The Square

نموونە 4 هاوکێشەی $x^2+6x-16=0$ شیکاربکە

شیکار

$$x^2+6x-16=0$$
$$x^2+6x=16$$
$$x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2=16+\left(\frac{6}{2}\right)^2$$
بە زیاد کردنی $\left(\frac{6}{2}\right)^2$ بۆ هەر دوو لای هاوکێشەکە
$$x^2+6x+9=16+9$$
$$(x+3)^2=25$$

$$x+3=\pm 5$$
$x+3=5$ یان $x+3=-5$

$x=2$ یان $x=-8$

هەوڵبدە هاوکێشەی $x^2+10x-24=0$ شیکاربکە.

نموونە 5 هاوکێشەی $2x^2+6x=7$ شیکاربکە

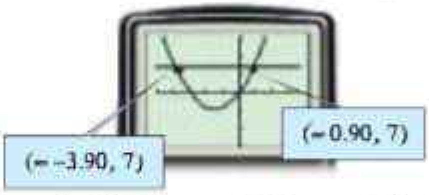
شیکار

ڕێگای یەکەم: بەجەبری هاوکێشەکە بە تەواوکردنی دووجا شیکاربکە.

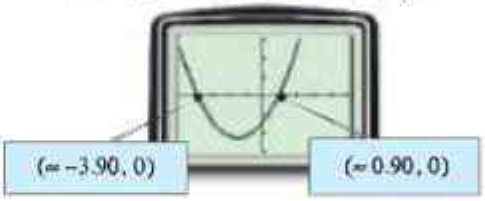
$$2x^2+6x=7$$
$$2(x^2+3x)=7$$
$$x^2+3x=\frac{7}{2}$$
$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$(x+\frac{3}{2})^2=\frac{7}{2}+\frac{9}{4}$$
$$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{23}{4}}$$
$x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{23}{4}}$ یان $x=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{23}{4}}$

$x\approx 0.90$ یان $x\approx -3.90$

ڕێگای دووەم: بە ڕوونکردنەوەیی، ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y=7$ و $y=x^2+6x$ بکێشە وپاشان خاڵی یەکتربرینەکان دیاریبکە



یان وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووجای $y=2x^2+6x-7$ بکێشە وخاڵەکانی یەکتربرینی لەگەڵ تەوەرەی سینی دیاریبکە.



هەوڵبدە هاوکێشەی $2x^2+10x=6$ شیکاربکە.

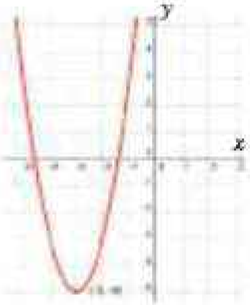
شێوەی پێوانەیی هاوکێشەی بڕگە هاوتا Standard Form Equation of Parabola

دەزانیت هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=ax^2+bx+c$ بڕگەی هاوتا دەنوێنێت. ڕێگای تەواوکردنی دووجا بەکاردەهێنیت بۆ بەدەست هێنانی شێوەیەك کە پۆتانی سەری بڕگەکەت بەڕوونی دەست بکەوێت.

شێوەی پێوانەیی هاوکێشەی بڕگەی هاوتا

دەتوانیت هاوکێشەی $y=ax^2+bx+c$ لە باری پێوانەیی $y=a(x-h)^2+k$ بنووسین لەم بارەشدا خاڵی h ، k پۆتانی سەری بڕگە هاوتاکەیەو $x=h$ هاوکێشەی تەوەرەکەیەتی.

نموونە 6 هاوکێشەی بڕگە هاوتای $y = 2x^2 + 12x + 13$ بەشێوەی پێوانەیی بنووسە وهاوکێشەی تەوەرەکەی بنووسە



شیکار

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 12x + 13 \\ &= 2(x^2 + 6x) + 13 \\ &= 2(x^2 + 6x + 9 - 9) + 13 \\ &= 2(x^2 + 6x + 9) - 18 + 13 \\ &= 2(x+3)^2 - 5 \\ &= 2\left(x - (-3)\right)^2 + (-5) \end{aligned}$$

سەری بڕگە هاوتاکە بریتییە لە $(-3, -5)$ هاوکێشەی تەوەرەکەی $x = -3$.

هەوڵبدە هاوکێشەی بڕگە هاوتای $y = 3x^2 - 9x - 2$ بە شێوەی پێوانەیی بنووسە و هەروەها هاوکێشەی تەوەرەکەی بنووسە.

نموونە 7 بە گەڕانەوە بۆ سەرەتای وانەکە هاوکێشەی $f(x) = \frac{3}{5000} - \frac{3}{5}x + 200$ بە شێوەی پێوانەیی بنووسە و پۆتانی نزمترین خاڵ لەسەر تەلە کانزاییەکە بدۆزەوە.

شیکار

ڕێگای یەکەم : بە جەبری

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{5000}x^2 - \frac{3}{5}x + 200 \\ &= \frac{3}{5000}(x^2 - 1000x) + 200 \\ &= \frac{3}{5000}\left[x^2 - 1000x + \left(\frac{1000}{2}\right)^2\right] + 200 - \frac{3}{5000} \times \left(\frac{1000}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{5000}(x - 500)^2 + 50 \end{aligned}$$

نزمترین خاڵی سەر تەلەکە سەری بڕگە هاوتاکەیە وبریتییە لە $(500, 50)$

ڕێگای دووەم : بە ڕوونکردنەوەیی

وێنەی چەماوەی بڕگە هاوتای $y = \frac{3}{5000}x^2 - \frac{3}{5}x + 200$ بکێشە.
و پۆتانی نزمترین خاڵ دیاریکە.

تەکنەلۆژیا

بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. ڕوونیبکەرەوە چۆن هاوکێشەی $x^2 + 4x - 13 = 0$ بە ڕێگای تەواوکردنی دووجا شیکار دەکەیت.
2. ڕوونیبکەوە چۆن هاوکێشەی $2x^2 + 4x = 15$ بە ڕێگای تەواوکردنی دووجا شیکار دەکەیت.
3. بەسوود وەرگرتن لە ڕێگای شیکاری نموونە 5 چۆن هاوکێشەی $2x^2 + 4x = 15$ بە ڕوونکردنەوەیی شیکار دەکەیت.
4. ڕوونیبکەرەوە k ، h چی دەنوێنن لە باری پێوانەیی هاوکێشە دووجاکاندا.

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

ژمارەیەك زیادبکە بۆ ئەم هاوکێشە دووجایانە بۆ ئەوەی ببنە دووجای تەواو.

5 x^2-12x **6** x^2+5x

7 هاوکێشەی $x^2-4x-21=0$ بە ڕێگای تەواوکردنی دووجا شیکار بکە.

8 هاوکێشەی $2x^2+5x=3$ شیکاربکە.

9 جیۆگرکی نەخشە دووجای $y=x^2+12x+20$ بە شێوەی پێوانەیی بنووسە. هاوکێشەی تەوەری برگە هاوتاکە بنووسە.

بەستنەوە

10 ئەمڕۆ هاوکێشەی برگەیەکی هاوتا بە شێوەی $y=-16x^2+32x+5$ نووسی. هاوکێشەکە بە شێوەی دووجای تەواو بنووسە پاشان هاوکێشەی برگە هاوتاکە بە شێوەی پێوانەی بنووسە.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ژمارەیەك بۆ برە دووجاکە زیادبکە بۆ ئەوەی دووجای تەواوت دەستبکەوێت.

11 x^2+10x **12** x^2-14x **13** x^2-8x

14 x^2+2x **15** x^2+13x **16** x^2+7x

ئەم هاوکێشانە بە ڕێگای تەواوکردنی دووجا شیکاربکە.

17 $x^2-8x=4$ **18** $x^2+2x=13$

19 $x^2-5x-1=4-3x$ **20** $0=x^2-6x+3$

21 $0=x^2+7x-26$ **22** $0=x^2-3x-6$

23 $x^2+7x+10=0$ **24** $x^2+10x+16=0$

25 $x^2-x=30$ **26** $3x^2-2x-12=0$

27 $-2x^2+14x+60=0$ **28** $0=3x^2-11x+6$

29 $-10=x^2-8x+2$ **30** $x^2+16x=2$

31 $4-x^2=10x$ **32** $x^2=23-15x$

33 $8x-2=x^2+15x$ **34** $-32x=16-x^2$

35 $2x^2=22x-11$ **36** $4x^2-8=-13x$

هەریەك لەم نەخشە دووجایانە بە پێوانەیی بنووسە. یۆتانی سەری برگە هاوتاکەو هاوکێشەی تەوەرەکەی بدۆزەوە.

37 $y=3x^2$ **38** $y=-x^2+2$

39 $y=x^2-5$ **40** $y=x^2+8x+11$

41 $y=x^2-6x-2$ **42** $y=-x^2+4x+2$

43 $y=x^2+7x+3$ **44** $y=-3x^2+6x-9$

45 سێ نەخشەی دووجا بنووسە، سەرەکانی بکەونە سەر خاڵی $(2,5)$

جێبەجێکردنەکان

46 هاوکێشەی ئەو نەخشە دووجایە بنوسە بە خاڵی $(1,8)$دا دەڕوات و سەرەکەی خاڵی $(2,5)$ بێت.

لە پرسیارەکانی 47 و 48 وەڵامە تەواوەکان بنووسە پاشان بۆ نزیکترین دە نزیکیبکەوە.

47 نەندازە درێژی لاکێشەیەک $6m$ مەتری لە پانیەکەی زیاترە. درێژی وپانیەکەی بدۆزەوە کاتێک ڕووبەرەکەی $50m$ دووجا بێت.

48 نەخشەی $w = x^2 - 12x + 210$ ئەو ووزەیە (بە میگاوات) دەنوێنێت کە ویستگەیەکی بەرهەمهێنانی کارەبا بە دەستی دێنێت، کاتێک x کاتە بە کاتژمێر (لە سفر تا 24)

أ لە کام کاتژمێردا بەرهەمی ویستگەکە کەمترین دەبێت؟

ب هێزی بەرهەم هاتوو چەندە لەوکاتەدا؟

ج لە کام کاتژمێردا ووزەی بەرهەمی ویستگەکە دەکاتە 187 میگاوات؟

49 کۆکردنەوەی پارمەتی کۆمەڵەی خاوەن پێداویستییە تایبەتیەکان ساڵانە هەڵدەستێت بە سازدانی ئاهەنگێك بۆ کۆکردنەوەی پارمەتی نەخشەی $P(t) = -16t^2 + 800t - 4000$ پوختەی بەهای پارمەتییەکان (پاش خەرجییەکان) دەنوێنێت. p هێمای بەهای پارمەتیەکانە بە هەزار دینار و t هێمای نرخی بلیتی هاتنە ژوررەوەیە.

أ نرخی بلیتێك چەندە بۆ ئەوەی گەورەترین قازانج بە دەست بێنێت.

ب بەهای گەورەترین قازانجەکە چەندە؟

ج کۆمەڵەکە بە چ نرخیك بلێت بفرۆشێت، بۆ ئەوەی پوختەی پارمەتیەکە 5424 هەزار دینار بێت.

تێڕوانینێك بۆ دواوە

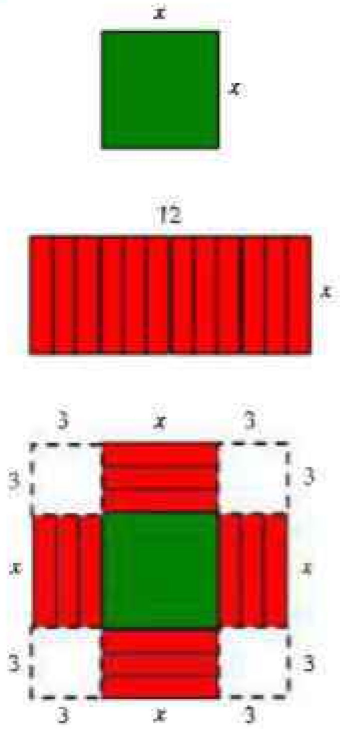
ئەم هاوکێشانە شیکاربکە

50 $5x + 3 = 2x + 18$ **51** $\frac{2(x+3)}{5} = x - 3$ **52** $20 = 6x - 10$

53 بەهای نەخشەی $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ هەژمێر بکە کاتێك $x = 2$ وکاتێك $x = -2$

54 بەهای نەخشەی $f(x) = 7 - 4x$ هەژمێر بکە کاتێك $x = 2$ وکاتێك $x = -3$

تێڕوانینێک بۆ پێشەوە



دەروازەیەک لەسەر ڕۆشنبیری ئیسلامی

کتێبی (الجبر والمقابلە)ی زانای ئیسلامی خوارزمی بە پێشەنگی کتێبەکانی بەرایی جەبر دادەنرێت لە جیهاندا. لە کتێبەکەیدا ڕێگایەکی بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بەکارهێناوە، هاوشێوەی ڕێگای تەواوکردنی دووجایە.

بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2+12x=45$ بە تەواوکردنی دووجا، هەڵدەستیت بە وەرگرتنی چوار گۆشەیەک درێژی لایەکی x بێت و 12 لاکێشە درێژی یەکێکیان x وپانییەکەی 1 بێت.

هەنگاوی یەکەم : لاکێشەکانی دابەش کردووە بۆ 4 کۆمەڵەی 3 دانەیی، پاشان هەر کۆمەڵەیەک لە لایەک لە لایەکانی چوار گۆشەکە دادەنرێت وەک لە وێنەکەدا دیارە. ڕووبەری ئەو شێوەی دەردەچێت. بریتیە لە x^2+12x واتا 45 .

هەنگاوی دووەم: بۆ تەواوکردنی دووجا، تەنیا پێویستیت بە زیادکردنی چوار گۆشەیەکە ڕووبەرەکەی 3×3 واتا 9 لە هەر گۆشەیەک لە گۆشەکانی شێوەکەوە.

$$9\times4=36$$

ڕووبەری چوار گۆشە گەورەکە یەکسانە بە $45+36=81$ لەوەوە بۆمان دەردەچێت کە درێژی لایەکی چوار گۆشە گەورەکە 9 یە ولە هەمان کاتدا درێژی لا گەورەکە یەکسانە $3+x+3=6+x$ کەواتە $6+x=9$ لەوەشەوە $x=3$

ڕێگای خوارزمی بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە.

55 $x^2+20x=125$

56 $x^2+32x=33$

57 $x^2+56x=116$

وانەی
4

شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بە یاسا (دەستوور)

Solving Quadratic Function By Formula

بۆچی

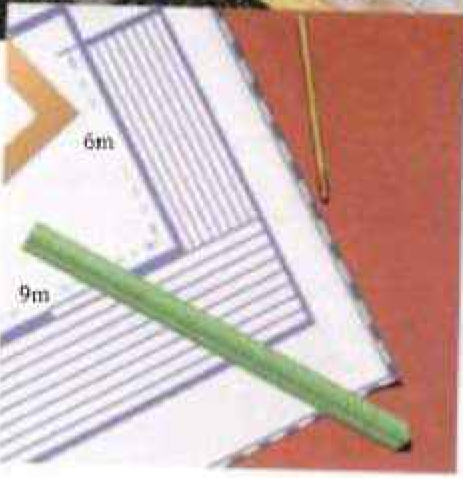
دەتوانین یاسای شیکاری هاوکێشەی دووجا بەکاربهێنین بۆ شیکاری زۆر لە پێداویستیەکانی ژیانی ڕۆژانەمان وەک دۆزینەوەی دوو دووری ڕێڕەوی خانوو

ئامانجەکان

- یاسا بۆ دۆزینەوەی ڕەگە ڕاستییەکانی هاوکێشەی دووجا بەکاردێنێت.
- ڕەگەکانی هاوکێشەکە بۆ دۆزینەوەی تەوەری برگەی هاوتا بەکاردێنێت.

چنینەچێکردنەکان

بیناسازی



خێزانی مام جوامێر بڕیاریدا ڕێڕەوێك دروست بکات بەهەر دوو لاتەنیشتی ماڵەکەیدا بڕوات بە پانیەکی نەگۆڕ. ئەم خێزانە ئەوەندە کەرەستەی هەیە کە $45\ m^2$ لە ڕێڕەوەکە تەواو بکات. پانی ڕێڕەوەکە پێویستە چەند بێت؟ دەتوانیت یاسای هاوکێشەی دووجا بەکاربهێنیت بۆ شیکاری ئەم پرسیارە ئەگەر بزانیت 9m ، 6m دوو دووری خانوەکەیە. دەتوانیت ڕێگای تەواو کردنی دووجا بەکاربهێنیت بۆ داتاشینی یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا لە شێوە گشتییەکەیەوە.

$ax^2+bx+c=0$ $\quad a\neq 0$

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ هاوکێشەکە دابەشبکە بەسەر a

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ $\frac{c}{a}$ لەهەردوو لا دەربکە.

$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ بەزیاد کردنی دووجای نیوەی هاوکۆلکەی x بۆ هەر دوولا

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ کورتبکەوە.

ئەگەر b^2-4ac ژمارەیەکی سالب بێت، واتا هیچ ژمارەیەکی ڕاستی نییە پاسادانی $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ بکات لەم بارەدا هاوکێشەکە ڕەگی نییە لە ژمارە ڕاستییەکاندا.

ئەگەر $b^2-4ac=0$ ، ئەوا $x+\frac{b}{2a}=0$ لەمەوە $x=-\frac{b}{2a}$. هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی یەکسانی هەیە، بەهای هەریەکەیان دەکاتە $-\frac{b}{2a}$.

ئەگەر b^2-4ac ژمارەیەکی موجەب، بێت ئەوا: دوو ڕەگی ڕاستی جیاوازی هەیە بەم شێوەیە:

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ ڕەگی دووجای هەر دوو لا وەربگرە

$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ کورتبکەوە

$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ لەهەر دوولا کەمبکەوە $\frac{b}{2a}$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ کورت بکەوە

بەم یاسایەش دەوترێت «**یاسای دەستوور**»

بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەی دووجا Discriminator Of Quadratic Equation

بە بڕی $\Delta=b^2-4ac$ دەوترێت بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەی دووجای $ax^2+bx+c=0$ کاتێك $a\neq0$.

شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا Solving Quadratic Equation

بڕی جیاکەرەوە	ژمارەی ڕەگەکان لە کۆمەڵەی ژمارەی ڕاستییەکان
$\Delta<0$	هاوکێشەکە ڕەگی نییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان
$\Delta=0$	هاوکێشەکە دوو ڕەگی یەکسانی هەیە $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
$\Delta>0$	هاوکێشەکە دوو ڕەگی جیاوازی هەیە $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

نموونە 1 یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2+5x-14=0$

شیکار

ئەگەر $x^2+5x-14=0$ بەراورد بکەیت لەگەڵ شێوەی گشتی هاوکێشەی $ax^2+bx+c=0$

دەبینین $a=1$ و $b=5$ و $c=-14$.

هاوکێشەکە بەم شێوەیە شیکاربکە:

1. هەژمێری بڕی جیاکەرەوە بکە بە لەجیاتیدانانی هاوکۆلکەکان $\Delta=b^2-4ac$

$$\Delta=5^2-4\times1\times(-14)=25+56=81$$

2. لەبەر ئەوەی بڕی جیاکەرەوە موجەبە، کەواتە هاوکێشەکە دوو ڕەگی جیاوازی هەیە کە ئەمانەن:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-5+\sqrt{81}}{2}$ و $=\frac{-5-\sqrt{81}}{2}$

$=2$ و $=-7$

هەوڵبدە بە بەکارهێنانی یاسا $x^2-7x+6=0$ شیکاربکە.

خاڵی چاودێری ✓ هاوکێشەی $x^2+5x-14=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە، بۆ دڵنیابوون لە ڕاستی وەڵامەکەت سەیری نموونەی 1 بکە.

نموونە 2 — بە بەکارهێنانی یاسا هاوکێشەی $4x^2 = 8 - 3x$ شیکاربکە. دوو ڕەگەکە بە تەواوەتی بنووسە، پاشان بۆ نزیکترین دە نزیکیبکەوە.

شیکاری پرسیارەکان

شیکار

هاوکێشەی $4x^2 = 8 - 3x$ بە شێوەی گشتی بنووسە بەمەش هاوکێشەی $4x^2 + 3x - 8 = 0$ مان دەست دەکەوێت کە هاوکۆلکەکانی بریتین لە $a = 4$ و $b = 3$ و $c = -8$

هەژمێری بڕی جیاکەرەوە دەکەین بە لەجیاتیدانان

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 4(-8) = 9 + 128 = 137$$

بڕی جیاکەرەوە موجەبە کەواتە دوو ڕەگی جیاوازی هەیە

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2} \quad و \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

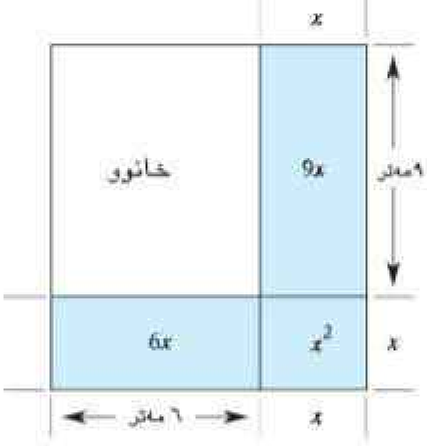
$$= \frac{-3+\sqrt{137}}{8} \quad و \quad = \frac{-3-\sqrt{137}}{8}$$

$$\approx 1.1 \quad و \quad \approx -1.8$$

هەوڵبدە — بە بەکارهێنانی یاسا هاوکێشەی $2x^2 - 6x = -3$ شیکار بکە. ڕەگەکان بە تەواوی بنووسە. پاشان بۆ نزیکترین دە نزیکیبکەوە.

نموونە 3 — بگەڕێنەوە بۆ سەرەتای وانەکە پانی ڕێڕەوەکە دیاریکە. ئەگەر زانیت خێزانی جوامێر بەشی دروست کردنی $54m^2$ کەرەستەی پێویستی هەیە

جێبەجێکردنەکان



شیکار

ئەو بڕەی کە ڕووبەری ڕێڕەوەکەی دەنوێنێت بریتییە لە:

$$A(x) = x^2 + 9x + 6x = x^2 + 15x$$

داواکراو: شیکاری هاوکێشەی $x^2 + 15x = 54$ بکە هاوکێشەکە بە شێوەی گشتی بنووسە و هاوکۆلکەکانی دیاریبکە.

$a = 1$ و $b = 15$ و $c = -54$

بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەکە هەژمێریکە.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 225 - 4 \times 1 \times (-54) = 441$$

هاوکێشەکە دوو ڕەگی جیاوازی هەیە چونکە بڕی جیاکەرەوە موجەبە

$$x_1 = \frac{-15+\sqrt{441}}{2} \quad و \quad x_2 = \frac{-15-\sqrt{441}}{2}$$

$$= 3 \quad و \quad = -18$$

وەڵامی ڕاست 3 یەچونکە -18 ناگونجێت، درێژی بەسالب ناپێورێت.

هەوڵبدە — بە گەڕانەوە بۆ سەرەتای وانەکە پانی ڕێڕەوەکە بدۆزەوە ئەگەر بەشی $34m^2$ کەرستەی پێویست هەبێت. لەوانەکانی پێشووەوە ئەوەت بۆ ڕوونبووەوە کە ڕەگەکانی هاوکێشەی $ax^2 + bx + c = 0$ بریتین لە پۆتانی ئاسۆیی خاڵی یەکتر بڕینی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشە دووجاکەی $f(x) = ax^2 + bx + c$ و تەوەری سینەکان.

چالاکی

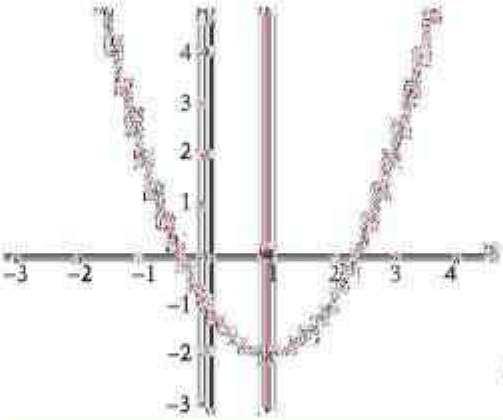
دۆزینەوەی ڕەگی هاوکێشەکان — Exploring Roots of Equations

1. خشتەکە بنووسەوە وستونی دووەم وسێیەم تەواو بکە. هەردوو ڕەگی هاوکێشەکە دیاریبکە.
2. هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە، کە ڕێساکەی لای چەپی هاوکێشەکەیە بکێشە، پۆتانی ئاسۆیی سەرەکەی دیاریبکە پاشان دوا دوو ستوونی خشتەکە تەواوبکە.

هاوکێشە	دوو ڕەگەکە	ناوەندی دوو ڕەگەکە	نەخشەی پێناسەکراو بە هاوکێشەکە	جێکەوتەی سینی سەرەکەی
$x^2+2x=0$	$0,-2$	-1	$d(x)=x^2+2x$	-1
$-x^2+4=0$				
$x^2+4x+4=0$				
$2x^2+5x-3=0$				
$-x^2-x+4=0$				

3. بە کورتی باسی دۆزینەوەی پۆی سینی سەری هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەکی دووجابکە.

خاڵی چاودێری ✓



لەوانەکانی پێشوو ئەوە فێربوین کە ئەگەر k پۆی سینی سەری بڕگە هاوتاکە بێت ئەوا$(x = k)$ هاوکێشەی تەوەرەکەیەتی، لە لایەکی تریشەوە بە هۆی هاوجێبونی بڕگە هاوتاکە بە دەوری تەوەرەکەیدا ،دەتوانیت هاوکێشەی تەورەکەی بدۆزیتەوە، لە ڕێگەی هەژمێرکردنی ناوەندی هەردوو ڕەگەکەی

$$k=\frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2}=\frac{-b}{2a}$$

هاوکێشەی تەوەرەی بڕگە هاوتا بریتییە لە $x=-\frac{b}{2a}$

نموونە 4

هاوکێشەی تەوەرەی هاوجێبوون و پۆتانی سەری نەخشەی $f(x)=19+8x+2x^2$ بدۆزەوە.

شیکار

ڕێسای نەخشەکە بە شێوەی گشتی بنووسە $f(x)=2x^2+8x+19$ دەبینین کە $a=2$ و $b=8$

هاوکێشەی تەوەرەی هاوجێبوون $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{4}=-2$

پۆتانی سەری بڕگە بریتین لە $x=-2$ و $y=f(-2)=2(-2)^2+8(-2)+19=11$

خاڵی $(-2,11)$ سەری بڕگە هاوتاکە دەنوێنێت.

هەوڵبدە هاوکێشەی تەوەری هاوجێبوون وپۆتانی سەری نەخشەی $f(x)=x^2-4x+1$ بدۆزەوە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە چی دەڵێیت دەربارەی بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەیەکی دووجا دوو ژمارەی تەواو بن.

ڕاهێنــــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 دوو ڕێگای جیاواز باسبکە بۆ دیاریکردنی پۆی سینی بۆ خاڵەکانی یەکتربڕینی بڕگە هاوتای $y=x^2+2x-3$ لەگەڵ تەوەری سینی.

2 ڕێگەیەك باسبکە بۆ دیاریکردنی سەری بڕگە هاوتا.

3 پەیوەندی چییە لە نێوان سەری بڕگەی هاوتا وتەوەرەکەی؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بە بەکارهێنانی یاسا، ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاریبکە

4 $x^2-5x+4=0$

5 $2x^2-5x=3$

6 بە بەکارهێنانی یاسا هاوکێشە دووجای $3x^2-3x=4$ شیکاربکە، ڕەگەکان بە تەواوی بدۆزەرەوە، پاشان بۆ نزیکترین دە نزیکیبکەوە.

سەری بڕگە هاوتاکە وهاوکێشەی تەوەری هاوجێبوونی بدۆزەرەوە

7 $f(x)=x^2-x-2$

8 $f(x)=2x^2-12x+11$

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە بە تەواوی بە بەکارهێنانی یاسا بدۆزەوە (نزیکی مەکەوە).

9 $x^2+7x+9=0$

10 $x^2+6x=0$

11 $(x+1)(x-2)=5$

12 $(x-4)(x+5)=7$

13 $t^2-9t+5=0$

14 $x^2-3x-1=0$

15 $x^2+9x-2=-16$

16 $x^2-5x-6=18$

17 $5x^2+16x-6=3$

18 $4x^2=-8x-3$

19 $3x^2-3=-5x-1$

20 $x^2+3x=2-2x$

21 $x^2+6x+5=0$

22 $x^2+10x=5$

23 $-2x^2+4x=-2$

24 $5x^2-2x-3=0$

25 $-6x^2+3x+19=0$

26 $-x^2-3x+1=0$

پۆتانی سەری بڕگە هاوتاکان وهاوکێشەی تەوەرەی هاوجێبون بنووسە

27 $y=7x^2+6x-5$

28 $y=x^2+9x+14$

29 $y=3+7x+2x^2$

30 $y=10-5x^2-15x$

31 $y=3x^2+6x-18$

32 $y=14+8x-2x^2$

33 $y=4-10x+5x^2$

34 $y=-x^2-6x+2$

35 $y=3x^2+21x-4$

36 $y=-2x^2+3x-1$

37 $y=3x^2-18x+22$

38 $y=-2x^2+8x+13$

39 $y=3x-2x^2+2$

40 $y=-1-8x+12x^2$

41 $y=7x^2-12x+2$

42 $y=2x-2+x^2$

43 $y=4x^2-3x-8$

44 $y=9-3x^2$

45 $y=5x-x^2$

46 $y=5x^2+2x-3$

47 ئەگەر یەكێك لە ڕەگەكانی هاوكێشەی $ax^2+bx+c=0$ هەڵگەڕاوی ڕەگەكەی تری بێت ئەوا بیسەلمێنە $a=c$.

48 **بۆ خۆشی** كاڵێ چەند یارییەكی ئاگرینی بە شێوەیەكی ستوونی بۆ ئاسمان هەڵدا بە خێرایی سەرەتایی $58.8\ m/t$ دەتوانیت نەخشەی $h(t)=-4.9t^2+58.8t$ ڕێسای بەرزی بێت پاش t چركە.

أ کاتی پێویست چەندە؟ بۆ ئەوەی یارییە ئاگرینەكە گەورەترین بەرزی هەبێت.

ب گەورەترین بەرزی چەندە؟ كە یارییە ئاگرینەكە دەیگاتێ.

49 **پیشە سازی** سەرۆكی دەستەی بەڕێوەبردنی كارگەیەك داوای لە یەكێك لە ڕاوێژكەرەكانی كرد بەهای فرۆشتنی گوڵدانێكی بۆ دیاریبكات. ڕاوێژكارەكە دوای شیكردنەوەی تێچوون وداواكاری بەكاربەرەكان لەسەر گوڵدان. ئەویش گەیشتە دانانی نەخشەیەك كە قازانجی كارگە بنوێنێت: نەخشەكە بریتی بوو لە $P(x)=-0.3x^2+75x-2000$ كاتێك x بەهای فرۆشتنی یەك گوڵدان بێت.

أ نرخی فرۆشتنی یەك گوڵدان چەندە؟ بۆ ئەوەی زۆرترین قازانج دەستبكەوێت.

ب نرخی گەورەترین قازانج چەندە؟

ج نرخەكانی فرۆشتن چەندن كاتێك قازانج دەبێت بە سفر.

د بەهاكانی x چەندن بۆ ئەوەی كارگەكە قازانج بكات؟

هـ بەهاكانی x چەندن كە كارگەكە توشی زەرەر دەكات؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

هاوكێشەی ئەو ڕاستەهێڵانە بە شێوی $y=mx+b$ بنووسە كە بەخاڵی دراودا دەڕوات و ستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵە دراوەكە

50 $(-2,3)$ و $y=x-5$

51 $(4,-6)$ و $2x-y=1$

هاوكێشەی ئەو ڕاستەهێڵانە بە شێوەی $y=mx+b$ بنووسە كە بەخاڵی دراودا دەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵە دراوەكە

52 $(8,-1)$ و $y=-3x+12$

53 $(-4,-2)$ و $5x=4-y$

ئەم لاسەنگانە شیكاربكە و كۆمەڵەی شیكار لەسەر تەوەرەی ژمارەكان بنوێنە

54 $|x+6|>2$

55 $|x-3|<5$

56 $|-4x|\le 8$

57 $|8-2x|\ge 6$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

58 ئایادەتوانیت كۆمەڵە شیكارێك بۆ هاوكێشەی $2x^2+5x+6=0$ بدۆزیتەوە لە كۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەكاندا؟ ئەمە باسبكە بە پشت بەستن بە یاسا(دەستووری) شیكاری هاوكێشە دووجاكان.

وانەی 5

لاسەنگە دووجاکان Quadratic Inequalities

بۆچی
زۆر لە پێداویستییەکانی ڕۆژانەمان وەك ئەوانەی پەیوەندیان بە قازانجی بازرگانییەوە هەیە بە پێی تێچوون وداهات دەتوانین لە ڕێگای لاسەنگەیەکی دووجاوە چارەسەریان بکەین.

ئامانجەکان
- لاسەنگە دووجاکان دەناسێت وشیکاریان دەکات و کۆمەڵە شیکاریان بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت.

جێبەجێکردنەکان
بازرگانی

سۆزان کراس دەدورێت ودەیانفرۆشێت. براکەی لێکۆڵینەوەیەکی ئەنجامدا لەسەر تێچوون ونرخ وداهات بە دینار، بینی تێچوونی مانگانە p ونرخی کراس c ئەم پەیوەندیە دەبەسترێتەوە:
$C(p)=75p+2500$

هەروەها داهات R ونرخ P ئەم پەیوەندیە دەیانبەستێتەوە $R(p)=-25p^2+700p$ بەم شێوەیە قازانجی سۆزان بە پێی پەیوەندی نێوان قازانج G و نرخی فرشتن P دیاری دەکرێت:

$$\begin{aligned}G(p)&=R(p)-C(p)\\&=-25p^2+700p-(75p+2500)\\&=-25p^2+625p-2500\end{aligned}$$

پێویستە سۆزان چۆن نرخی کراسێك دیاریبکات بۆئەوەی قازانجی دەستکەوێت. یان بیرکاریانە، سۆزان چۆن بەهای گۆڕاوی p هەڵدەبژێریت بۆ پاسەدانی ئەم لاسەنگە $-25p^2+625p-2500>0$

چالاکی

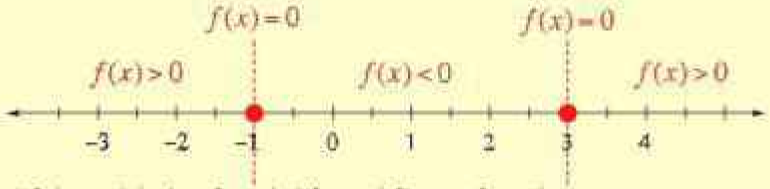
Exploring Quadratic Inequalities دۆزینەوەی لاسەنگە دووجاکان

پێویستیت بە بژمێری ڕوونکردنەوەیی دەبێت .
خشتەی بەرامبەر بەهاکانی ئەخشەی $f(x)=x^2-2x-3$
دیاریدەکات کە گۆڕاوی x وەردەگرێت لە نێوان -2 و 4
ئەگەر لەخشتەکە ووردبیبنەوە سێ باری جیاواز دەبینرێت:

$f(x)=0$ ئەگەر $x=-1$ یان $x=3$
$f(x)>0$ ئەگەر $x<-1$ یان $x>3$
$f(x)<0$ ئەگەر $-1<x<3$

تەکنەلۆجیا

بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی



1. ئەم خشتەیە بنووسەوە وتەواوی بکە بەهاکانی x کامانەن کە پاسادانی هاوکێشەکە دەکەن. بەهاکانی x کامانەن کە پاسەداتی لاسەنگەکە دەکەن.

نەخشە	ژمارەی خاڵەکانی یەکتر بڕینی هێڵی ڕوونکردنەوەیەکە لەگەڵ تەوەرەی سینییەکان	بەهاکانی x کاتێک $f(x)=0$	بەهاکانی x کاتێک $f(x)>0$	بەهاکانی x کاتێک $f(x)<0$
$f(x)=x^2-4$	2			
$f(x)=-x^2+2x+3$				

2. هەمان کاری پێشوو دووبارەبکەوە.

نەخشە	ژمارەی خاڵەکانی یەکتر بڕینی هێڵی ڕوونکردنەوەیەکە لەگەڵ تەوەرەی سینییەکان	بەهاکانی x کاتێک $f(x)=0$	بەهاکانی x کاتێک $f(x)>0$	بەهاکانی x کاتێک $f(x)<0$
$f(x)=x^2$	1			
$f(x)=-x^2$				

3. هامان کاری پێشوو دووبارەبکەوە.

نەخشە	ژمارەی خاڵەکانی یەکتر بڕینی هێڵی ڕوونکردنەوەیەکە لەگەڵ تەوەرەی سینییەکان	بەهاکانی x کاتێک $f(x)=0$	بەهاکانی x کاتێک $f(x)>0$	بەهاکانی x کاتێک $f(x)<0$
$f(x)=-x^2+x-1$	0			
$f(x)=x^2+x+3$				

خاڵی چاودێری ✓

أ) ئەگەر هێڵکاری نەخشەیەک تەوەری سینی لە دوو خاڵدا ببڕێت، ئەوا تەوەرەی سینی دابەش دەکات بۆ ______ ماوەی جیاوان.

ب) ئەگەر هێڵکاری نەخشەیەک تەوەری سینەکان لە یەک خاڵدا ببڕێت، ئەوا تەوەرەکە دابەش دەکات بۆ ______ ماوەی جیاواز.

ج) ئەگەر هێڵکاری نەخشەیەک تەوەری سینی نەبڕێت، ئەوا تەوەرەی سینی دابەش دەکات ______ بۆ ماوەی جیاواز.

دەتوانیت کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگە دووجاکە بە هۆی دیاریکردنی ڕەگەکانی هاوکێشە دووجاکە یان لە ڕێگای هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشە دووجاکەوە بدۆزیتەوە.

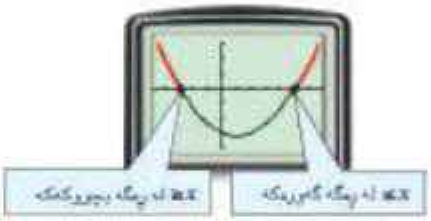
نموونە

① لاسەنگەی $x^2-2x-15\geq0$ شیکاربکە کۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە

شیکار

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەخشە دووجای پەیوەست بە لاسەنگەکەوە دیاردەخات کە کۆمەڵەی شیکار لەدوو بەش پێکدێت.

$\geq x$ ڕەنگە بچووکەکە یان $\leq x$ ڕەنگە گەورەکە



$$x^2-2x-15=0$$
$$(x+3)(x-5)=0$$
$$x=5 \quad \text{یان} \quad x=-3$$

کەواتە کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەکە بریتییە لە کۆمەڵەی بەهایەکانی x کەپاسادانی $-3\geq x$ یان $x\geq5$

هەوڵبدە لاسەنگەی $x^2-8x+12\geq0$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

نموونە

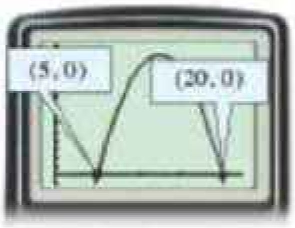
② بگەڕێنەوە بۆ سەرەتایی وانەکە. پێویستە چۆن سۆزان نرخی کراسی p دیاربیکات بۆ دەستکەوتنی قازانج؟

شیکار

هاوکێشە دووجاکە شیکاربکە $-25p^2+625p-2500=0$

بەبەکار هێنانی یاسا. $\Delta=625^2-4\times(-25)\times(-2500)=140625$

بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەکە هەردوو ڕەگەکە بریتین لە $p=\frac{-625\pm375}{-50}=\begin{cases}5\\20\end{cases}$



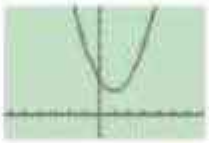
لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەخشەکەوە $y=-25x^2+625x-2500$ دەردەکەوێت سۆزان قازانج دەکات ئەگەر نرخی کراسێك لە نێوان 5 و 20 هەزار دیناردا دابنێت

خاڵی چاودێری ✓ ئایا سۆزان قازانج دەکات ئەگەر نرخی کراسێك بە 20 هەزار دینار دابنێ؟

نموونە

③ لاسەنگەی $x^2-2x+3\leq0$ شیکاربکە وکۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە

شیکار



هێڵکاری ڕونکردنەوەیی ئەخشە دووجای پەیوەست بە لاسەنگەکەوە دەریدەخات کە بەهای ئەخشەکە موجەبە، بەهای گۆڕاوی x هەرچەندێك بێت.

واتە هیچ بەهایەك بۆ گۆڕانی x نییە پاسادانی لاسەنگەکە بکات. دەتوانین بڵێن کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەکە، کۆمەڵەی بەتاڵە.

ڕاهێـــــــنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ڕوونیبکەوە چۆن لاسەنگەی $x^2-2x-8\ge 0$ شیکاردەکەیت.

2 ڕوونیبکەوە چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی بۆ شیکاری لاسەنگەی $x^2-2x-8>0$ یارمەتیت دەدات.

3 ڕوونیبکەوە چۆن شیکاری لاسەنگەی $(x-2)^2<0$ بە بێ بەکارهێنانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی دەدۆزیتەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 لاسەنگەی $x^2-7x+12\ge 0$ شیکاربکە وکۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

5 بەها تەواوەکانی x کامانەن؟ کە پاسادانی $-2x^2+25x-72>0$ دەکەن.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم لاسەنگانە شیکاربکە وکۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

6 $x^2-1\ge 0$

7 $-x^2+5x-6>0$

8 $x^2-8x+12\le 0$

9 $x^2-4x-5<0$

10 $x^2-7x+10\le 0$

11 $50-15x>-x^2$

12 $x^2\le \frac{3}{4}+x$

13 $x^2-x-12\le 0$

14 $-x^2+\frac{3}{4}x-\frac{5}{9}>0$

15 $x^2-4x-12>0$

16 $x^2-2x-99>0$

17 $x^2+x-6\le 0$

18 $x^2-x+20<0$

19 $x^2\le 7x-6$

20 $x^2+35>-12x$

21 $10-x^2\ge 9x$

22 $x^2+10x+25>0$

23 $x^2+3x-18>0$

24 $x^2-2>x$

25 $x^2+6x\ge 7$

26 $15-8x\le -x^2$

27 $-x^2+3x+6<0$

28 $4x-1>8-x^2$

29 $x^2+5x-7<4x$

بەرەنگاربوونەوە

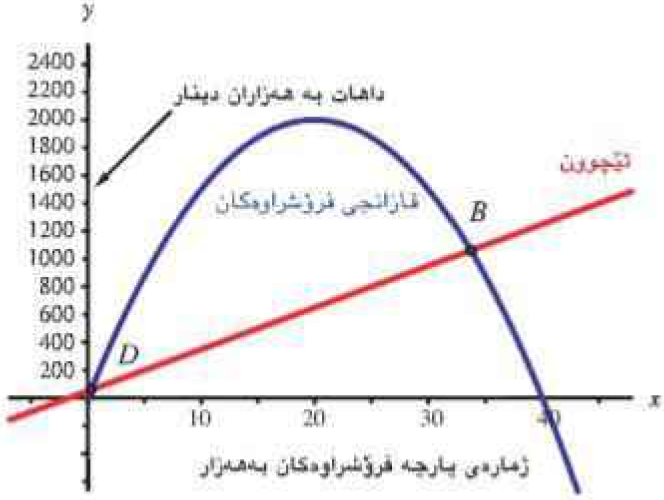
30 نەخشەیەکی دووجا $f(x)$ بنووسە کە پاسادانی $f(x)\ge 0$ بکات بۆ بەهاکانی x کە دەکەوێتە نێوان 2 و 6 بە بەهای هەردوو ژمارەکەشەوە.

31 لاسەنگەیەکی دووجا بنووسە کاتێك کۆمەڵەی شیکارەکەی ئەو بەهایانەی x بن کە پاسادانی $x<3$ یان $x>7$ دەکەن.

32 **وەرزش** لەسەرەتای دەست پێکردن لە یاری سەبەتەدا، ئاویزیوان تۆپەکە بە شێوەیەکی ستوونی هەڵدەدا. نەخشەی دووجای $h(t) = -16t^2 + 24t + 5$ نموونەیەکی بیرکارییە بۆ بەرزی تۆپەکە بە پێی کات، کاتێك h بەرزی تۆپەکە و t کات بنوێنێت، دیاریبکە لەکام دوو چرکەدا بەرزی تۆپەکە لە 9m بەرزتر دەبێت؟

33 **بازرگانی** نەخشەی $y = -0.1x^2 + 8x - 50$ نموونەیەکی بیرکاریانەیە کە قازانج لە فرۆشتنی x یەکە لەبەرهەمێکی پیشەسازی دەنوێنێت. کەمترین یەکەی فرۆشراو چەند بێت بۆ ئەوەی فرۆشیارەکە قازانج بکات؟

34 **بازرگانی** یەکێك لە کۆمپانیاکان لێکۆڵینەوەیەکی ئەنجامدا بۆ تێچوونی بەرهەم و فرۆشتنی یەکێك لە بەرهەمەکانی، گەیشتە ئەوەی کە نەخشەی $C(x) = 50 + 30x$ نموونەیەکی بۆ تیچوونی بەرهەم هێنان ونەخشەی $R(x) = 5x(40 - x)$ نموونەیەکی بۆ داهاتی فرۆشتن، کاتێك x ژمارەی پارچە فرۆشراوەکان بێت بە هەزاران. بەڵام قازانجی بە دەستهاتوو ئەم نەخشەیە دەینوێنێت $P(x) = R(x) - C(x)$ ئەم هێڵکاریە بەکاربهێنە بۆ وەڵام دانەوەی پرسیارەکان.



أ ژمارەی پارچە فرۆشراوەکان لە نێوان کام دوو بەهایەدا دەبن بۆ دەست کەوتنی قازانج.

ب ژمارەی پارچە فرۆشراوەکان چەند دەبن بۆ ئەوەی زۆرترین قازانج بکرێت.

ج ئایا گەورەترین تێچوون هەیە کە ناکرێت لێی تێپەربێت؟ ڕوونبیکەوە.

د هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی قازانج بکێشە.

هـ لەسەرەتای کام هێندەی فرۆشراو کۆمپانیاکە دەست بە زەرەرکردن دەکات.

ڕوانینێك بۆ دواوە

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم پەیوەندیانە بکێشە. ئایا پەیوەندییەکە نەخشە دەنوێنێن یان نا

35 $y = |x|$

36 $x = |y|$

37 $x = y^2$

ئەم هاوکێشانە شیکاریکە بە هۆی نووسینی ڕەگە کە بە تەواوی.

38 $-2x^2 = -16$

39 $-3x^2 + 15 = -6$

40 $32 = 2x^2 - 4$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

41 بەهای b دیاریبکە بە جۆرێك هێڵکاری نەخشەی $y = x^3 - 2x^2 + 3x + b$ بەخاڵی $(1,9)$ دابڕوات.
پاساداتی وەڵامەکەت بکە بە لە جیاتیدانانی بەهای b بە بەها دیاریکراوەکە. هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە.

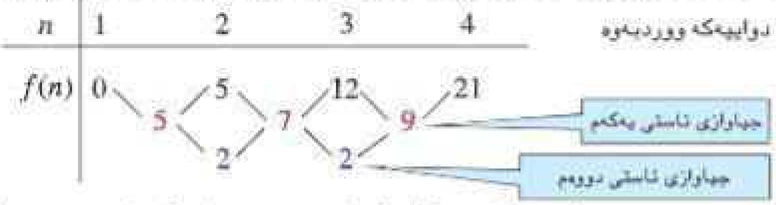
جیاوازی چییە؟

زۆر لەیەك بەدوایەكە ژمارەییەكان لە نەخشەیەك پێك دێت كە پیناسەكراون. لەیەك بە دوایەكی دووجای ژمارەكان ووردبیەرەوە.

n	1	2	3	4	5	6	7	...	n
$S(n)$	1	4	9	16	25	36	49	...	n^2

ڕادە یەكەمەكان لەم یەك لە دوای یەكەدا بریتین لە 1^2 ، 2^2 ، 3^2 ، 4^2 ، 5^2 ، 6^2 ، 7^2 لە ڕادە یەكەمەكانی ئەم یەك بە دوای یەكە دەبینین ئەو ڕادەیەی ژمارەكەی n بێت بریتییە لە n^2 ، لەوەشەوە دەتوانین بڵێین نەخشەی $f(x)=x^2$ ئەو یەك بەدوای یەكە دروست دەكات كە ڕادە نونییەكەی $f(n)=n^2$ ئەویش بە لەجیاتیدانانی ژمارەی سروشتی n بە گۆڕاوی x.

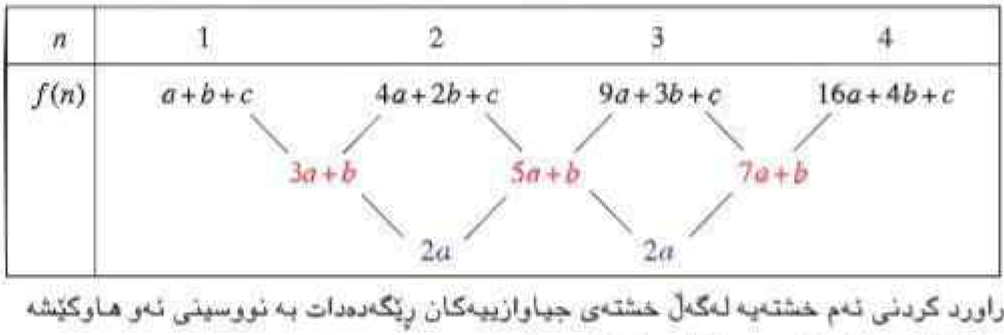
چۆن نەخشەك پێكدەهێنی لەیەك بەدواییەكێكەوە كە ڕادە یەكەمەكانی زانراوبێت؟ یەكی لەو ڕێگایانە، ڕێگای كۆتاییە جیاوازییەكانە. دەتوانیت ئەم ڕێگایە بەكاربێنیت كاتێ تێبینی دەكەیت كە یەك لە دوای یەكەكە بەرەو جیاوازییەكی نەگۆڕ دەچێت لە ئاستێكی دیاریكراودا. لەم یەك لە دواییەكە ووردبەوە



سەرنجی ئەوە بدە كە جیاوازییەكان لە ئاستی دووەمدا یەكسانن.ئەمەش وامان لێدەكات لەم بارەدا بە داوی نەخشەیەكی دووجادا بگەڕێین بۆ پێكهێنانی یەك لەدوای یەكەكە.

بنووسە وهەوڵبدە بەهای هاوكۆلكەكان بە بەكارهێنانی بەهاكانی n وڕادەكانی بەرامبەری بدۆزیتەوە.

$$f(n)=an^2+bn+c$$
$$f(1)=a(1)^2+b(1)+c=a+b+c$$
$$f(2)=a(2)^2+b(2)+c=4a+2b+c$$
$$f(3)=a(3)^2+b(3)+c=9a+3b+c$$
$$f(4)=a(4)^2+b(4)+c=16a+4b+c$$



بەراورد كردنی ئەم خشتەیە لەگەڵ خشتەی جیاوازییەكان ڕێگەدەدات بە نووسینی ئەو هاوكێشە كە هاوكۆلكەی نەخشە دووجاكان پاسادانی دەكەن.

$$2a=2 \qquad 3a+b=5 \qquad a+b+c=0$$

سیستەمی ئەو هاوکێشانە بەدەست هێناوە بە لەجیاتیدانان شیکاربکە.

- $2a=2$ کەواتە $a=1$
- $3a+b=5$ کەواتە $b=2$
  $3+b=5$
- $a+b+c=0$ کەواتە $c=-3$
  $1+2+c=0$

پوختەی ئەمانەی پێشوو ئەخشەی $f(n)=n^2+2n-3$ پێکدێنیت کەیەك لەدوای یەکە دراوەکەی لێوە دروست دەبێت.

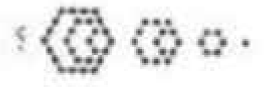
لەئەنجامەکە دڵنیا بە بە لەجیاتی دانانی بەهای n بە بەهاکانی 5 وە 6 وە 7 ئەگەر بزانیت یەك لە دوای یەکەکە بریتیە لە 0, 12, 21, 32, 45, 60,...

چالاکی 1 دیاریکردنی ئەخشە دووجاکان

چەند کۆمەڵەیەك لە دوو خوێندکار یان زیاتر پێکبهێنە وسەرۆکێك بۆ هەر یەکێکیان دابنێ.سەرۆکەکە دوور لە هاوڕێکانی، ئەخشەیەکی دووجا هەڵدەبژێرێت کە هاوکۆلکەکانی ژمارەی تەواو بن و بەکاری دەهێنێت بۆ دروستکردنی یەك بەدوای یەکێکی 5 ژمارەیی. سەرۆکەکە یەك بەدوای یەکەکە پیشاندانی ئەندامانی کۆمەڵەکە دەدات، داوای دۆزینەوەی ئەخشەکەیان لێدەکات.

چالاکی 2 دیاریکردنی هاوکێشەی دووجا بۆ ژمارە شەشیەکان

ئەندازیاریەکی تەلار سازی دیزاینی تەلارێکی واکێشاوە وەك لە وێنەکەدا دیارە ئەگەر سەیری تەلارەکە بکەیت شەش لاریکەکانی تیا دەبینێت کە هەر یەکێکیان لەناو ئەوی تریاندایە ئەم دیمەنەش وەك یەك بە دوایەکێك لە ژمارەکاندا دەنوێنێت. ئەگەر n ژمارەی خاڵەکان بێت لە هەر لایەکی شەش لاکاندا، ئەوا ژمارەکانی یەکبەدوای یەکەکە ژمارەی خاڵەکان دەنوێنێت لە هەر شێوەیەك لە شێوە ئەندزەییەکان.



چوار ژمارەی یەکەم لەم یەك بەدوایەکە بنووسە ورێگای کۆتایی جیاوازەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی ئەخشەیەك کە لە یەك بەدوایەکەکە پەیدا دەبێت.

3 پێداچوونەوەی بەش

ئەم نەخشانە لەسەر شێوەی گشتی بنووسە و دیاریکە کە نەخشەی دووجان

1 $f(x)=-(x+1)(x-4)$

2 $f(x)=4(2x-1)(3x+2)$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە و بۆتانی سەری نەخشەکە بەنزیکراوەیی دابنێ:

3 $f(x)=-x^2+3x-1$

4 $f(x)=5x^2-x-12$

ئایا ئەم برگە هاوتایانە بۆ سەرەوە یان خوارەوە کراوەن؟ ئایا نەخشەکە بەهای گەورەترین یان بچووکترینی هەیە؟

5 $f(x)=-x^2-x-1$

6 $f(x)=(x-3)(x+2)$

ئەم هاوکێشانە شیکاریکە وشیکاری تەواو بنووسە کە نزیکرابێتەوە بۆ نزیکترین بەش لە سەد

7 $x^2=8$ **8** $3x^2=60$

9 $x^2-3=46$ **10** $x^2+4=9$

11 $(x-3)^2=64$ **12** $(x-5)^2=48$

13 $7(x+1)^2=54$ **14** $6(x+2)^2=30$

ئەم هاوکێشانە بە شیتەڵکردن شیکاریکە

15 $x^2-10x+24=0$

16 $2x^2-3x-2=0$

17 $6t^2+11t-10=0$

ئەم هاوکێشانە بە تەواوکردنی دووجا شیکاریکە

18 $x^2-10x+21=0$

19 $x^2-7x-8=0$

20 $4x^2+4=17x$

ئەم نەخشانە بە شێوەی پێوانەیی بنووسە وبۆتانی سەرەکانی بنووسە

21 $f(x)=2x^2-16x+33$

22 $f(x)=-3x^2-6x-7$

ئەم هاوکێشانە بە ڕێگای یاسا شیکاریکە

23 $x^2-7x=-10$

24 $6x=2-5x^2$

25 $x^2=1-x$

26 $2x+1=2x^2$

27 $x^2+6x=-8$

28 $11x=5x^2-3$

29 $x=6x^2-3$

30 $3=x^2+5x$

بۆتانی سەری ئەم برگانە دیاریکە

31 $f(x)=x^2+7x+6$

32 $f(x)=x^2-x-12$

33 $f(x)=x^2+2x-3$

34 $f(x)=x^2+12x+5$

ژمارەی ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیارییکە بە بەکارهێنانی جیاکەرەوە

35 $4x^2-20x=-25$

36 $9x^2+12x=-2$

37 $x^2=21x-110$

38 $-x^2+6x=10$

درێژی لا نەزانراوەکە لەم سێگۆشە وەستاوە بدۆزەوە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە.

39 $b=5;\ a=4$

40 $a=1;\ c=4$

41 $c=12;\ b=7$

42 $c=15;\ a=12$

43 $b=5;\ c=25$

44 $a=6;\ b=6$

45 $c=5.8;\ b=3.2$

تاقیکردنەوەی بەش

3

ڕێسای ئەم ئەخشانە بەشێوە گشتی $f(x)=ax^2+bx+c$ بنووسە وهاکۆلکەکانی دیاریبکە. ڕووی کرانەوەی برگە هاوتاکە دیاریبکە وئایا سەرەکانی گەورەترین یان بچووکترین بەهای هەیە.

1 $f(x)=(x+3)(x-4)$

2 $f(x)=-5(x+1)(x-7)$

3 $f(x)=-2(x+3)(3x)$

هەر یەک لەم هاوکێشانە شیکاربکە بە نووسینی ڕەگە تەواوەکەی، پاشان نزیکیبکەوە بۆ نزیکترین بەش لە سەد.

4 $3x^2=81$

5 $(x-7)^2=12$

درێژی لای سێیەمی ئەم سێگۆشە گۆشە وەستاوە بدۆزەوە بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە.

6 $a=7$ ؛ $b=9$

7 $a=2$ ؛ $c=4$

8 $b=8$ ؛ $c=9.2$

شیتەڵکردن ولێکدانی سفری بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی سفری ئەم ئەخشە دووجایانە.

9 $f(x)=-x^2-9x$

10 $f(x)=4x^2-64$

11 $f(x)=4x^2-4x+1$

12 $f(x)=x^2-3x-10$

13 **بیردۆزی ژمارەکان:** ئەگەر ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارە 90 بێت ژمارەیەکیان 3 ی زیاتر بێت لە دوو ئەوەندی ئەوی تریان . هاوکێشەیەکی دووجا بنووسە کە ڕەگەکانی ئەم دوو ژمارەیە بن، پاشان بە شیتەڵکردن و بە بەکارهێنانی لێکدانی سفری هاوکێشەکە شیکار بکە.

ئەم هاوکێشە دووجایانە بە تەواوکردنی دووجا شیکاربکە

14 $x^2-8x+4=0$

15 $2x^2-11x+5=0$

16 **ئەندازە:** ئەگەر ڕووبەری سێگۆشەیەک 30 مەتر دووجا بێت، وبەرزیەکەی 4 مەتر لە درێژی بنکەکەی کەمتر بێت.درێژی بنکەو بەرزییەکەی بدۆزەوە.

ئەم هاوکێشە دووجایانە بە یاسا شیکاربکە

17 $x^2-2x-5=0$

18 $-3x^2+15=12x$

هاوکێشەی تەوەرەی هاوجێبوون و بۆتانی سەری برگە هاوتایەکان بنووسە

19 $y=x^2-7x+10$

20 $y=3x^2+18x+6$

بڕی جیاکەرەوە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ژمارەی ڕەگەکانی ئەم هاوکێشە دووجایانە

21 $x^2-8x+4=0$

22 $-3x^2=5+3x$

23 $4x^2=27$

ئەم لاسەنگە دووجایانە شیکاربکە وشیکارەکە لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە

24 $x^2-x-12>0$

25 $-2x^2+4x+6\ge 0$

26 $2\le x^2+4x-3$

27 $1>-x^2-2x-6$

3 تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی $5x^2+2x+1=0$ لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستیەکاندا چەندن؟

أ 2 ب 0

ج 1 د جگە لەمانە

2 کام لەم جووتە ڕێکخراوانە شیکاری سیستمی ئەم هاوکێشەهێڵییە دەکات

$$\begin{cases}5x+y=11\\3x+2y=8\end{cases}$$

أ $(2,1)$ ب $(3,2)$

ج $(-1,2)$ د $(5,6)$

3 بڕی $\frac{x^2y^{-1}}{x^{-1}y^2}$ کورت بکەرەوە.

4 شیتەڵکردنی ڕادەداری x^2+5x+6 بریتییە لە

أ $(x+1)(x+6)$

ب $(x-2)(x-3)$

ج $(x-1)(x-6)$

د $(x+2)(x+3)$

5 کام لەو وشانە باسی شیکاری سیستمی دوو هاوکێشەی $\begin{cases}2x+5y=3\\4x+10y=6\end{cases}$ دەکات.

أ ئەستەمە ب سنووردراو نییە

ج سنووردراوە د هیچ لەمانە

6 بەڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی $-\frac{1}{3}x\leq 6$ شیکاربکە.

7 سیستمی هاوکێشەی هێڵی $\begin{cases}3x-2y=2\\x+y=4\end{cases}$ شیکاربکە.

8 هاوکێشەی $x^2+3x+1=0$ شیکار بکە.

9 ڕێسایەکی نەخشە بنووسە هێلکاری ڕوونکردنەوەکەت دەست دەکەوێت لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی $f(x)=x^2$ کە بە شێوەیەکی ئاسۆیی 3 یەکە بەرەو لای چەپ بکێشەوە.

10 بەهای نەخشەی $f(x)=11-\frac{1}{2}x$ چەندە کاتێك $x=-6$؟

11 کیمیا زانایەك دەیەوێت 60 مل لە گیراوەیەك ئامادە بکات، کە ڕێژەی سوێرییەکەی تیایدا 5% بێت بە بەکارهێنانی دوو گیراوە کە ڕێژەی سوێری لەیەکەمیاندا 2% و لە دووەمیاندا 12% یە پێویستە چەند لەهەریەکێك لەو دوو گیراوەیە بەکاربێت؟

12 بەهای $8^{\frac{2}{3}}$ چەندە؟

13 بڕی $\frac{(3^2-7)^2}{3^{(2^3-1)}}$ کورتبکەوە.

14 بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەی $x^2+4x+1=0$ هەژماربکە.

15 جۆری ئەوپەڕی بەهای نەخشەی $f(x)=-x^2+2x+1$ دیاری بکە (گەورەترین یان بچووکترینە) پاشان بەهاکەی بدۆزەوە.

16 فیزیا دیلان تۆپێکی لەبەرزی 3 م بەردایەوە بە نزیکەیی بۆ نزیکترین دەیەك لە چرکەیەکدا کاتی پێویستە چەندە؟ بۆ ئەوەی تۆپەکە بگاتە سەر زەوی. نەخشەی $h(t)=-5t^2+3$ بەکاربێنە کاتێك h بەرزی بێت بە مەتر و t کات بێت بە چرکە.

17 بازرگانی کۆمپانیایەکی کوردستان جۆرێکی تایبەت لە بژمێر دەفرۆشێت نەخشەی :

$$P(x)=-x^2+90x+497975$$

کاتێك کە x نرخی بژمێرە و P قازانجی کۆمپانیاکە بێت. ئەو نرخە چەندە کە زۆرترین قازانج بۆ کۆمپانیاکە دەستەبەردەکات وەڵامەکەت بە نزیککراوەی بە دینار بنووسە.

بەشی چوارەم

بڕەکان و نەخشە ڕادەدارەکان

Polynomial Functions and Expressions

1. ڕادەدارەکان.

2. نەخشە ڕادەدارەکان.

3. لێکدان و دابەشکردنی ڕادەدارەکان.

4. هاوکێشە و لاسەنگە ڕادەدارەکان.

پڕۆژەی بەشەکە

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بڕەکان و نەخشە ڕادەدارەکان

Polynomial Functions and Expressions

بەشی 4

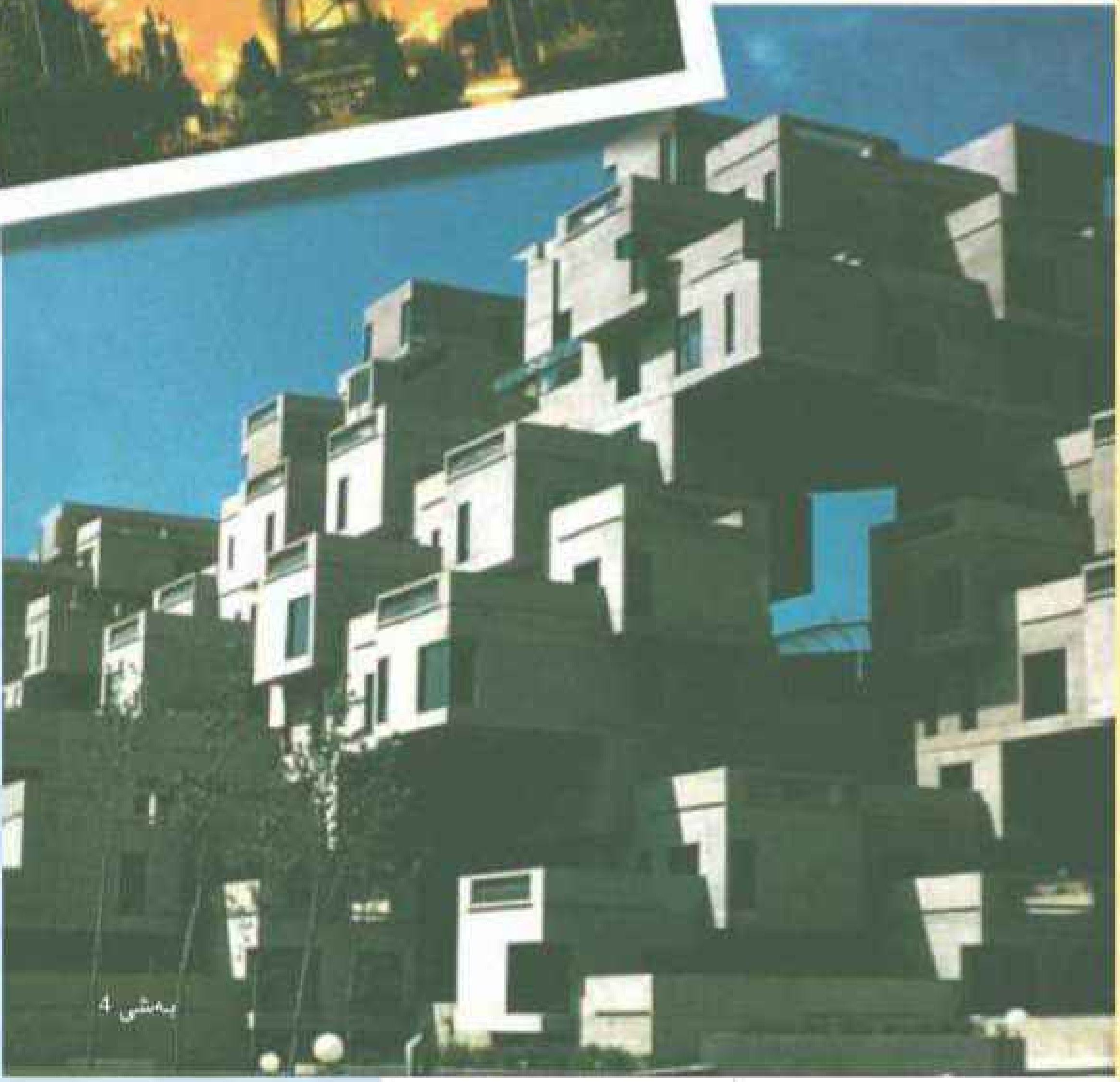
زۆرجار ڕادەدارەکان بەکاردەهێنین بۆ هەژمێرکردنی یاسای ڕووبەر و قەبارەکان. بەکاریش دێت بۆ ئەو پێداویستییانەی کە پەیوەندیان بە هێزی کێشکردن و بەکاربەرەوە هەیە. هەروەها بەکاریش دێت لە زۆر پێداویستی تری ژیانی ڕۆژانەمان. نموونەش بۆ ئەوە بەکارهێنانی لە هەژمێرکردنی قەبارەی ئەو تەلارە نارێکانەی کە لەوێنەکەوە دەیبینیت.

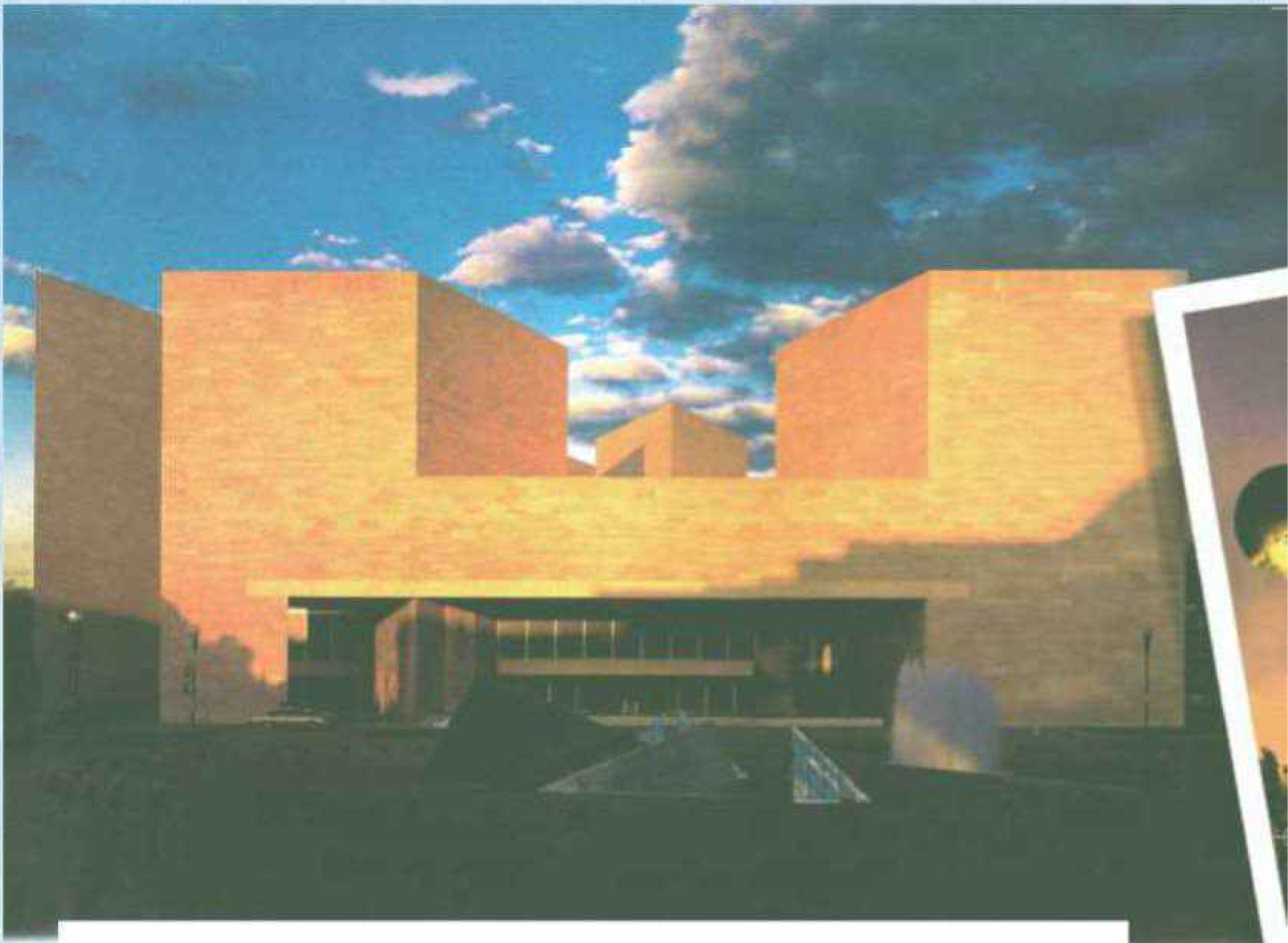
لەم بەشەدا ئەوە فێردەبیت کەچۆن کردارەکان لەسەر نەخشە ئەنجام دەدرێت و چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەییەکەی دەکێشین و ڕەگەکانی دیاریدەکەین.

وانەکان

1. ڕادەدارەکان.
2. نەخشە ڕادەدارەکان.
3. لێکدان و دابەشکردنی ڕادەدارەکان.
4. هاوکێشە و لاسەنگە ڕادەدارەکان.

پرۆژەی بەشەکە





دەربارەی پرۆژەی بەش

لەم بەشەدا نەخشەی ڕادەدار بەکاردێنین بۆ پێکهێنانی چەند نموونەیەك بۆ بارەکانی ژیانی ڕۆژانە. پەیوەندییەکەش کاتێك نموونەیی دەبێت کە وەڵامی تەواوی پێداویستییەکانمان بداتەوە. لەکاتی ئیشکردنت لەم بەشە، ئەو شێوە دەفرانە دەخەملێنیت بە بەکارهێنانی نەخشەی ڕادەدار کە پێکیدێنیت لەپەیوەندی نێوان قەبارەی ئەو ئاوەی لە دەفرەکەدایە لەگەڵ بەرزییەکەی.

دوای تەواوبوونت لە بەشەکە توانای ئەمانەی خوارەوەت دەبێت:

- کۆکردنەوە وڕێکخستنی پێدراوەکان.
- نەخشەیەکی ڕادەدار پێکبێنیت کە نزیك بێت لە پەیوەندی نێوان پێدراوەکان.
- دڵنیا دەبیت لە ڕاستی نموونەکە

وانەی 1

ڕادەدارەکان Polynomials

بۆچی
ڕادەدارەکان بەکاردێت بۆ دروست کردنی زۆر لە نموونەی پێداویستییەکانی ژیانی ڕۆژانەمان

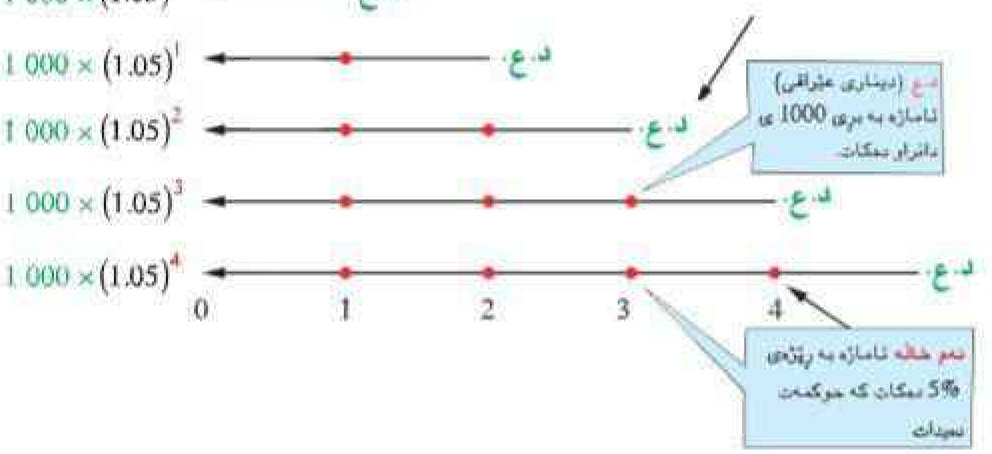
ئامانجەکان

- ڕادەدارەکان دەناسێت ویلە و هاکۆلکەکانیان جیادەکاتەوە.
- بەهای ڕادەدارەکان بە لەجیاتیدانان دەدۆزێتەوە
- ڕادەدارەکان کۆدەکاتەوە ولێکیان دەردەکات.

جێبە جێکردنەکان
پاشەکەوت

لە یەکێك لە وڵاتەکان حکومەت سندوقێکی تایبەتی داناوە کە هانی کرێکاران دەدات پارە دابنێن و بۆیان کۆبێتەوە، تاوەکو لە پیریدا کەڵکی لێوەربگرن. هەرکرێکارێك لە سەرەتای هەموو ساڵێکدا 1000 دینار دادەنێت وحکومەتیش5% ئەو پارەیە لە سندوقەکەدا بۆ هەر کرێکارێك دادەنێت کە لە ساڵی سفرەوە دەست پێدەکات.

هێڵکاری خوارەوە زیادبوونی پارەی دانراوی ڕزگار دەنوێنێت لەماوەی 4 ساڵدا.
خشتەی خوارەوە پارەی دانراوی ڕزگار لە کۆتایی هەر ساڵێکدا دیاریدەکات.



10 000

کۆتایی ساڵ	پارەی دانراو
سفر	1000
1	$1000+1000(1.05)$
2	$1000+1000(1.05)+1000(1.05)^2$
3	$1000+1000(1.05)+1000(1.05)^2+1000(1.05)^3$
4	$1000+1000(1.05)+1000(1.05)^2+1000(1.05)^3+1000(1.05)^4$

ئەگەر حکومەت ڕێژەی 6% یان 7% یان 8% لە جیاتی 5% دابنێت تەنها ئەوەت لەسەرە کە ژمارەی 1.05 بگۆڕێت بۆ ژمارەی 1.06 یان 1.07 یان 1.08 .

ئەگەر هێمای x دابنێی بۆ ئەو ژمارە گۆڕاوە، دەتوانیت پارەی دانراوی ڕزگار بەم شێوەیە بنوسیت:

$$1000+1000x+1000x^2+1000x^3+1000x^4$$

بەم جۆرە بڕانەش پێیان دەوترێت بڕی زۆر ڕادەدار **Polynomial Expression** کە بریتییە لە کۆی کۆمەڵێك بڕی سادەتر کە پێی دەوترێت ڕادە

ڕادە **Term** بریتییە لە هێندێکی جەبری پێکدێت لە ئەنجامی لێکدانی ژمارەیەك لە گۆڕاوێك یان زیاتر وەك: بڕی $3x^2b$،لەوانەیە تەنها یەك گۆڕاوی تێدابێت. وەك $5x^2$ یان تەنها ژمارە بێت وەك ژمارە 10 لەم کاتەدا پێی دەوترێت ڕادەی نەگۆڕ **Constant Term** ژمارە لە ڕادەی جەبری پێی دەوترێت هاوکۆلکە یان بەشە نەگۆڕەکە **Constant Part** بەڵام بەبەشەکەی تر دەوترێت گۆڕاو **Variable Part** . بۆ نموونە:

- هاوکۆلکەی x بریتییە لە 1 و بەشە گۆڕاوەکەی x .
- هاوکۆلکەی $-2xb$ بریتییە لە -2 و بەشە گۆڕاوەکەی xb .
- هاوکۆلکەی $\frac{-b^3x^2}{2}$ بریتییە لە $-\frac{1}{2}$ و بەشە گۆڕاوەکەی b^3x^2 .
- هاوکۆلکەی $-bc$ بریتییە لە -1 و بەشە گۆڕاوەکەی bc .

پلەی ڕادەکە **Degree of Term** بریتییە لە توانی گۆڕاوەکە ئەگەر تاکانە بێت. بەڵام ئەگەر لە گۆڕاوێك زیاتر بێت بریتییە لە کۆی توانی گۆڕاوەکان، بۆ نموونە پلەی ڕادەی $\frac{-b^3x^2}{2}$ بریتییە لە 5 .

ڕادەدار **Polynomial** بریتییە لە کۆی چەند ڕادەیەك، لەم وانەیەدا فێری ڕادەداری یەك گۆڕاو دەبێت. هەندێك ڕادەدار بەناوی تایبەتی دەناسرێنەوە. ئەو ڕادەدارەی لە دوو ڕادە پێکدێت پێی دەوترێت ڕادەداری دوانی **Bionomial** و ئەوەی لە سێ ڕادە پێکدێت پێی دەوترێت ڕادەداری سیانی **Trinomial** . پلەی ڕادەدار **Degree of Polynomial** بریتییە لە گەورەترین توانی ڕادەکانی کە ئەو ڕادەدارە پێك دەهێنن دەتوانین ڕادەدارەکان بە پێی پلەکانیان پۆلین بکەین وەك لەم خشتەیەدا ڕووندەبێتەوە.

پۆلێنکردنی ڕادەدارەکان بە پێی پلەکانیان		
پلە	ناوەکەی	نموونە
سفر	نەگۆڕە	3
1	هێڵییە	$5x+4$
2	دووجاییە	$-x^2+5x-11$
3	سێجاییە	$4x^3+x^2+2x+3$

نموونە 1

پلەی ئەم ڕادەدارانە چەندە؟

أ $4x^2-3x+6x^5$

ب $-2x^3+3x^4+4x^3+5$

أ پلەی هەر ڕادەیەك لە ڕادەكانی ڕادەدارەكە یەك لەدوای یەك بریتییە لە 2 و 1 و 5 لەوەشەوە پلەی ڕادەدارەكە (5)ە.

ب پلەی هەر ڕادەیەك لە ڕادەكانی ڕادە دارەكە یەك لەدوای یەك بریتیە لە 3 و 4 و 3 و سفر لەوەشەوە پلەی ڕادەدارەكە (4)ە.

هەوڵبدە پلەی ئەم ڕادەدارانە دیاریبكە.

أ $4x^2+4-8x-4x^3$

ب $3x^3+2x^3-6x^5$

هەژماركردنی بەهای ڕادەدارەكان Evaluating Polynomials

لە نموونەی(2)ەوە بۆت دەردەكەوێت چۆن ڕادەدار لە ژیانی ڕۆژانەدا بەكاردێت.

نموونە 2

پارەی دانراوی ڕزگار لە كۆتایی ساڵی چوارەمدا چەندە؟ ئەگەر حكومەت ڕێژەی **6%** ی دانا لە جیاتی **5%** ؟

شیكاری

لە جیاتیدانان بەكاربێنە

$y=1000+1000x+1000x^2+1000x^3+1000x^4$

$1000+1000(1.06)+1000(1.06)^2+1000(1.06)^3+1000(1.06)^4=5637.09$

ڕێگای دووەم : بە بەكارهێنانی بژمێرەی ڕونكردنەوەیی (ئەگەر هەبێت).

نەخشەی $y=1000+1000x+1000x^2+1000x^3+1000x^4$ لە ناو بژمێرەكەدا بنووسە بۆ بەدەستهێنانی خشتەی بەهاكان یان وێنەی ڕونكردنەوەیی نەخشەكە.

بەهای **y** بریتییە لە 5637.07 بەنزیكەیی

هەوڵبدە بەهای ڕادەداری $3x^4+2x^2+2x-5$ هەژماربكە كاتێك $x=1.5$

كۆكردنەوە و لێكدەركردنی ڕادەدارەكان Adding and Subtracting Polynomials

بۆ كۆكردنەوە و لێكدەركردنی ڕادەدارەكان تەنها هاوكۆڵكەی ڕادە لە یەكچووەكان كۆ دەكەرێتەوە یان لەیەكیان دەردەكەین. ڕادە لە یەكچووەكان ئەوانەن كە توانی گۆڕاوەكانیان یەكسانن. پاش كرداری كورت كردنەوە ڕادەدارەكە بە شێوەی گشتی بنووسە.

شێوەی گشتی Standard Form بریتییە لە ڕیزكردنی ڕادەكان لە توانی گەورە بۆ بچووك.

نموونە 3 $(-2x^2-3x^3+5x+4)+(-2x^3+7x-6)$ کۆبکەوە.

شیکار

$$(-2x^2-3x^3+5x+4)+(-2x^3+7x-6)=(-3x^3-2x^3)+(-2x^2)+(5x+7x)+(4-6)$$
$$=-5x^3-2x^2+12x-2$$

هەوڵبدە $(2x^4+4x^3+5x-2)+(-2x^4-7x^2+8x-10)$ کۆبکەرەوە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ڕادەداری p بدۆزەوە کە پاسەدانی $(2x^2-3x+5)+p=0$ دەکات.

نموونە 4 $(-6x^3-6x^2+7x-1)-(3x^3-5x^2-2x+8)$ لێدەربکە

شیکار

$$(-6x^3-6x^2+7x-1)-(3x^3-5x^2-2x+8)=(-6x^3-3x^3)+(-6x^2+5x^2)+(7x+2x)+(-1-8)$$
$$=-9x^3-x^2+9x-9$$

هەوڵبدە $(3x^3-12x^2+5x+1)-(-x^2+5x+8)$ لێدەربکە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 بە دەربڕینی خۆت ڕادەدار پێناسەبکە.

2 چۆن پلەی ڕادەدارێك دیاریدەکەیت، ئەوە ڕوونبکەرەوە.

3 ڕوونیبکەوە چۆن دوو ڕادەدار کۆدەکەیتەوە و لەیەکتریان دەردەکەیت.

4 ڕوونیبکەوە چۆن هەژمێری بەهای ڕادەدار دەکەیت ئەگەر بەهای گۆڕاوەکەیت زانی.

5 ڕوونیبکەوە چۆن ڕادەدار بە شێوەی گشتی دەنووسیت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

پلەی هەر ڕادەدارێك چەندە؟

6 $3x^3-12x^2-5x-12x^5+1$

7 $3x^{10}+3x^2+2$

8 بەهای ڕادەداری x^3+2x^2-x+1 هەژماربکە کاتێك $x=2$.

9 $(2x^3+3x^2-x+2)+(-3x^2+4x+5)$ کۆبکەوە.

10 $(6x^3-5x^2+14x+3)-(3x^3-2x^2+7x-2)$ لێدەربکە.

راهێنان وجێبەجێکردن

ئەم ڕادەدارانە بە شێوەی گشتی بنووسە.

11 $5x^3+4x+2x^2+1$

12 $4x^4+x^2+x^3+x+1$

13 $2.7x^3+3.3x^8+4.1x^2$

14 $\frac{13}{25}x^4+\frac{5}{7}x^3+\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{2}$

ئایا ئەم بڕانە ڕادەدار دەنوێنن؟ ئەگەر وەڵامەکە بەڵێیە پلەی ڕادەدارەکە دیاربیکە

15 $7x^5+3x^3-2x+4$

16 $-4x^2+3x^3-5x^6+4$

17 x^3+2^x-x-7

18 $4x^2+5x^2-x+1$

19 $0.35x^4+2x^2+3.8x$

20 $7.81x^4+8.9x^3+2.5x^2$

21 $\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}+6$

22 $\frac{8}{x^3}-\frac{7}{x^2}+x$

23 $\frac{5}{7}x^6+\frac{2}{3}x^4+5$

24 $\frac{x^5}{7}-\frac{x^3}{3}$

25 $\sqrt{x}-1$

26 $7x\sqrt{x}+4$

هەژمێری بەهای ڕادەدارەکە بکە کاتێک x بەها پێدراوەکە وەربگرێت.

27 x^3+x^2+1 ؛ $x=-3$

28 x^4+2x^3+2 ؛ $x=-2$

29 $-2x^3-3x+2$ ؛ $x=4$

30 $-4x^3+1+x$ ؛ $x=3$

31 $3x^3+x^2+2x+4$ ؛ $x=5$

32 $5x^3+2x^2-5x+2$ ؛ $x=6$

33 $1+x^2-3x^3$ ؛ $x=2.5$

34 $5x^3+4x+2x^2+1$ ؛ $x=3.8$

35 $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{7}{8}$ ؛ $x=2$

36 $\frac{3}{10}x^3+\frac{7}{10}x^2+\frac{1}{10}x+\frac{9}{10}$ ؛ $x=10$

ئەمانە کۆبکەوە یان لەیەکتریان دەربکە، پاشان ئەنجامەکەت لەسەر شێوەی گشتی بنووسە وپلەکەی دیاربیکە

37 $(x^3+x^2+x+1)+(2x^3+3x^2+x+3)$

38 $(x^5+x^3+x)+(x^4+x^2+1)$

39 $(1-5x+x^3)-(2x^4+5x^3-10x^2)$

40 $(5x^3+3x^2+8x+2)-(2x^2+4x+7)$

41 $(2x^2-5x+3)+(4x^3+6x^2-2x+5)$

42 $(x^2-5x^3+7)-(6x+x^3+3x^2)$

43 $(x^4+5x^2+x)-(x^4+2x^3+x-4)$

44 $(8x^2+x^3+1-3x)+(2x^3+11x^4)$

45 $(\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x^3+1)+(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x)$

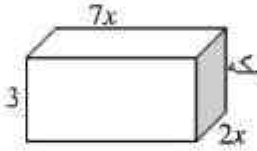
46 $(-3.2x^2+2.7x^3+7.8x)+(4.9x^3+2.5x^4)$

بەهای a, b, c, d دیاریبکە تا یەکسانییەکە ڕاست بێت.

47 $(11x^3+ax^2-x+b)-(4x^3-3ax+5)=cx^3-2x^2+dx-1$

48 $(3x^3+bx^2+d-7x)$ زیاترە لە $(5x^3-3)$ بە (ax^3+2x^2+cx+1) .

بەستنەوە



49 ئەندازە بەپێی x بڕی جەبری بۆ ڕووبەری گشتی پاکەتێك هەژماربکە کە درێژی بنکەکەی $7x$ وپانییەکەی $2x$ و بەرزییەکەی 3 بێت.

جێبەجێکردنەکان

50 پیشە سازی بەزۆری ڕادەدارەکان بەکاردەهێنرێت بۆ دەربڕینی تێچوونی بەرهەمێك لە بەرهەمەکانی پیشەسازی. 10[a]

ئەگەر تێچووی بەرهەمی x پارچە لە $C(x)=x^3-15x+15$ بێت، تێچوونی 10 000 پارچە چەندە؟

51 پیشە سازی ئەگەر تێچوونی بەرهەمی x پارچە $c(x)=3x^3-18x+45$ بێت تێچوونی 20 000 پارچە چەندە؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەمانە شیتەڵبکە.

52 $6(x^2-4x)$ **53** $8(x^2+6x)$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

54 $\frac{6x-12x+18}{3}=1$ **55** $-2(b+3)=5-6(2b-7)$

56 سستەمی هێڵی $\begin{cases}6x=4-2y\\12x-4y=16\end{cases}$ شیکاربکە.

ئەم ژمارانە بە شێوەی زانستی بنووسە

57 7 100 000 **58** 8 900 000 000

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

59 چوارگۆشەیەك ڕووبەرەکەی دەکاتە x^2+6x+9 درێژییەکەی بەپێی x هەژمێربکە.

وانەی 2

نەخشە ڕادەدارەکان Polynomial Functions

بۆچی

هەردوو ڕێسای هەژمارکردنی قەبارە و ڕووبەری گشتی دوو نموونەن بۆ نەخشەی ڕادەدار بەکاردێت بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانەدا وەك لە پیشەسازیدا.

ئامانجەکان

- نەخشەی ڕادەدار دەناسێتەوە.
- هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی ڕادەدار دەکێشێت و باسی شێوەکەی دەکات.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە نەخشەی ڕادەداری تێدایە .
- بەهای تەوەری نەخشە دەناسێت.
- لە گۆڕانی نەخشەی ڕادەدار دەکۆڵێتەوە.

لافە کە بەڕێوەبەری کۆمپانیایەکی بەرهەمهێنانی پاکژکەرەوەیە، دەیەوێ دوربینەکانی فوتوی هەڵگرتنی پاکژکەرەوەکان دەستکاری بکات.

لەبەشەکانی پێشوو هەندێك نەخشەی وەك نەخشەی هێڵی و نەخشەی دووجات ناسی، ئەوانە دوو باری تایبەتی نەخشەبوون لە نەخشە ڕادەدارەکان.

نەخشە ڕادەدارەکان Polynomial Functions

نەخشەی ڕادەدار: ئەو نەخشەیە کە بە شێوەی ڕێسایەکی ڕادەداری یەك گۆڕاو دەنوسرێت.

چالاكی

دۆزینەوەی نەخشەی رادەدار Exploring Polynomial Functions

جێبە جێكردنەكان

پیشە سازی

كۆمپانیایەكی بەرهەمهێنانی پاكژكەرەوە بەرهەمەكانی دەخاتە قوتویەكی لاكێشەتەریبی كە درێژییەكەی 20 cm وپانییەكەی 10 cm وبەرزییەكەی 30 cm بێت. بەڕێوەبەری كۆمپانیایەكە دەیەوێت دەستكاری دووریيەكانی قوتوەكە بكات.

1. قەبارە و رووبەری گشتی قوتوەكە پێش دەستكاری كردن چەندە؟

2. ئەگەر بەڕێوەبەرەكە بیەوێت قەبارە و رووبەری گشتیی قوتوەكە بەڕێژەی 10% كەمبكاتەوە، ئەوا قەبارە و رووبەری گشتی قوتوە پەیدابوەكە چەندن؟

3. بەڕێوەبەر بڕیاریدا كە بەرزییەكەی نەگۆڕێت بەلام درێژییەكەی دوو ئەوەندەی پانییەكەی بێت. قەبارە ورووبەری گشتییەكەی بە پێی پانییەكەی بەگۆڕاوی x بدۆزەرەوە.

4. ئەو خشتەیەی بەرامبەر تەواو بكە.

خالی چاودێری ✓

X	رووبەر	قەبارە
9.0	1944	4860
9.1		
9.2		
9.3		
9.4		
9.5		

5. بەهای x چەند دەبێ كەوا لە قەبارەكەی بكات نزیك بێتەوە لە قەبارەی داواكراو؟ئەم بەهایە وا لە رووبەری گشتی دەكات نزیكبێتەوە لە رووبەری گشتی داواكراو؟ روونیبكەرەوە.

نموونە

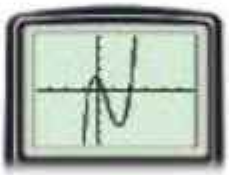
1 هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە و باسی شێوەکەی بکە.

أ $y = 3x^3 - 5x^2 - 2x + 2$

ب $y = x^4 - 2x^2 + 2$

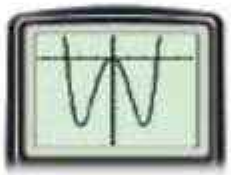
شیکار

أ



هێڵکاری ئەو نەخشەیە سێجایە لە پیتی لاتینی n دەچێت ودوو جێگۆڕکێی تێدایە یەکێکیان بە شێوەی ∪ و دووەمیان بە شێوەی ∩

ب



هێڵکاری ئەو نەخشە پلە چوارە لە پیتی لاتینی W دەچێت و سێ جێگۆڕکێی تێدایە و دووانیان بە شێوەی ∪ و سێیەمیان بە شێوەی ∩ .

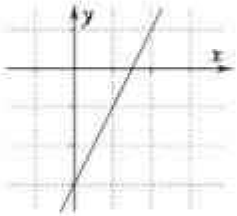
هەوڵبدە هێڵکاری ڕوونکردنەوەی هەریەک لەم نەخشانە بکێشە و باسی شێوەکەی بکە.

أ $y = -3x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

ب $y = 2x^4 - 3x^2 + x + 2$

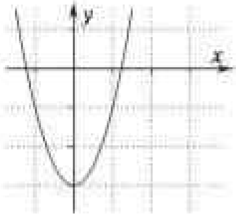
سەرنجی هێڵکاری ڕوونکردنەوەی هەریەک لە نەخشەی هێڵی ودووجا وسێجا وچوارجا لەم وێنانەدا بدە.

نەخشەی هێڵی



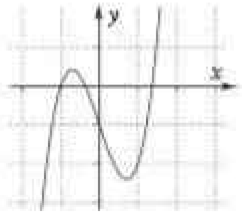
$y = 2x - 3$

نەخشەی دووجا



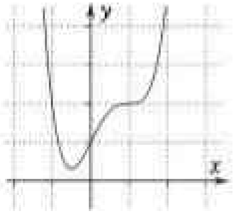
$y = 2x^2 - 3$

نەخشەی سێجا



$y = 2x^3 - 3x - 1$

نەخشەی پلە چوار

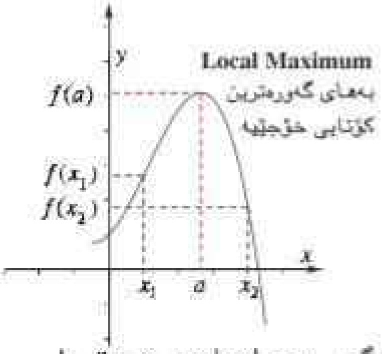


$y = x^4 - 2x^3 + 2x + 1$

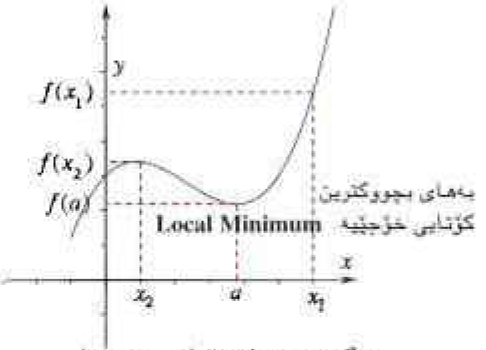
خاڵی جاودێری مەودای نەخشە پلە تاکەکان دیاریبکە لە نەخشەکانی پێشوودا؟ چی دەڵێیت سەبارەت بە مەودای نەخشە پلە جووتەکان.

بەهایەکانی ئەویەڕی نەخشە ڕادەدارەکان Extremum of Polynomial Function

کاتێك هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەیەك بەرەو سەرەوە دەچێت وپاشان بەرەخوارەوە دادەبەزێت لە ماوەیەکی بوارەکەیدا.نەخشەکە بەهای گەورەترین کۆتایی خۆجیێ وەردەگەرێت لەو ماوەیەدا.
بەلام ئەگەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بەرەو خوارەوە بڕوات پاشان بەرەو سەرەوە بچێت لە ماوەیەکی بوارەکەیدا بەهای بچووکترین کۆتایی خۆجێیی وەردەگرێت لەوماوەیدا.



ئەگەر $x \neq a$ لەماوەی x_1 ، x_2 دا
ئەوا $f(x)<f(a)$



ئەگەر $x \neq a$ لە نێوان x_1 ، x_2 دا
ئەوا $f(x)>f(a)$

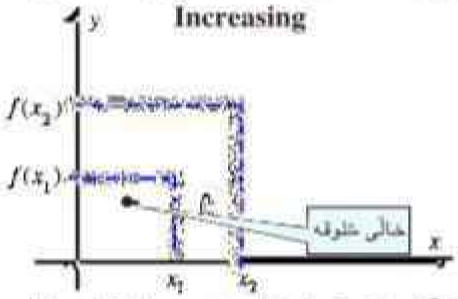
ئەویەڕی بەها Extremum Value

بەژمارەی $f(a)$ دەوترێت گەورەترین کۆتایی خۆجێیی **Local Minimum** ئەگەر $f(x) < f(a)$ بەهای x هەرچەندێك بێت لەهاوسێی a کاتێك $x \neq a$.

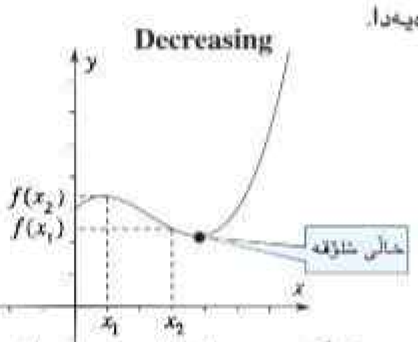
بەژمارەی $f(a)$ دەوترێت بچووکترین کۆتایی خۆجێیی **Local Maximum** ئەگەر $f(x) > f(a)$ بەهای x هەرچەندێك بێت لە هاوسێی a کاتێك $x \neq a$.

بەژمارەی $f(a)$ دەوترێت بەهای ئەو پەڕی خۆجێیی نەخشەکە، **Local Extremum** ئەگەر بەهاکە گەورەترین یان بچووکترین بەهای خۆجێیی نەخشەکەبێت.

بەخاڵەکانی سەر هێڵکاری چەماوەکە، کە ئەویەڕی بەها دەنوێنن دەوترێت خاڵی شلۆق لە ڕێڕەوی نەخشەکە **Turning Points** . نەخشەکە لە کاتی تێپەڕینی بەو خاڵانەدا دەگۆڕێت کە لە ڕوو لە زیاد بوونەوە بۆ ڕوو لە کەمبوون یان لەکەمبوونەوە بۆ زیادبوون. نەخشە سێجاکان بە لایەنی زۆرەوە دوو خاڵی شلۆقیان هەیە. بەلام نەخشە پلە چوارەکان بە لایەنی زۆرەوە سێ خاڵی شلۆقیان هەیە.بە شێوەیەکی گشتی ژمارەی خاڵە شلۆقەکانی نەخشەیەکی پلە n بریتییە لە (n-1) بە لایەنی زۆرەوە. ئەگەر سەرنجی هێڵکاری ڕوونکردنەوەی ئەم دوو نەخشەیە بدەیت، تێبینی ئەوە دەکەیت کە هێڵکاری نەخشەکە لەوانەیە بەرەو سەرەوە یان بەرەو خوارەوە بێت. بەنەخشەیەك دەوترێت ڕوو لە زیادبوونە لە ماوەیەکی بوارەکەی ئەگەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی بەرەو سەرەوەبێت لەو ماوەیەدا بەلام ئەگەر هێڵکاری نەخشەکە بەرەو خوارەوە بێت لەماوەیەکی بوارەکەیدا ئەوە نەخشەکە ڕوو لە کەمبوونە لەو ماوەیەدا.



ئەگەر $x_1<x_2$ لە ناوچەی ڕوولەزیادبوندا
ئەوا $f(x_1)<f(x_2)$



ئەگەر $x_1<x_2$ لە ناوچەی ڕوو لە کەمبوندا ئەوا $f(x_1)>f(x_2)$

ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەکان Increasing and Decreasing Functions

با x_1 ، x_2 دوو ژمارەی ماوەیەکی بواری نەخشەی $f(x)$ بن .

نەخشەکە ڕوو لە زیادبوون دەبێت کاتێك ئەم مەرجە بێتەدی

ئەگەر $x_1 < x_2$ ئەوا $f(x_1) < f(x_2)$

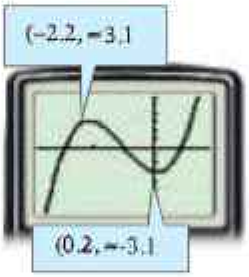
نەخشەکە ڕوو لەکەمبوون دەبێت کاتێك ئەم مەرجە بێتەدی

ئەگەر $x_1 < x_2$ ئەوا $f(x_1) > f(x_2)$

نموونە 2 هێڵکاری ڕونکردنەوەیی $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ بکێشە.

أ بەهای ئەوپەڕی نەخشەکە بۆنزیکترین بەش لە دە نزیکبکەوە.

ب ناوچەی ڕوو لە زیادبوون و ڕوولەکەمبوونی نەخشەکە دیاریبکە.



شیکار

أ هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشەکە دوو خاڵی شلۆقی هەیە یەکێکیان بەهای گەورەترینە 3.1 بەنزیکەیی ئەویتریان بەها بچووکترینەوە بە نزیکی 3.1- .

ب نەخشەکە ڕوو لە کەمبوونە لە ماوەی $-2.2 < x < 0.2$ بەدەر لەو ماوەیە ڕوو لە زیادبوونە.

ساغبکەوە خشتەکاری بژمێرەیی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە «ئەگەر دەستتکەوت»بۆساغکردنی بەها نزیکەییەکانی پۆتانەکانی خاڵە شلۆقەکان.

لەم خشتەیەوە دەردەکەوێت کاتێك بەهای x لەهاوسێی 2–دا بێت، بەهای نەخشەکە لە بەهای هاوسێکانی گەورەتر دەبێت ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە پۆی سینی بەهای گەورەترین لە نێوان 3– ، 1– دا دەبێت.

لەم خشتەیە ئەوە ڕووندەبێتەوە کە ژمارەی 3.1 بەهای نزیکەیی بەهای گەورەترین کۆتایی خۆجێیە.

ئەگەر توانیت هەمان ڕێگا بەکاربێنە بۆ دەرخستنی بەهای بچووکترین کۆتایی خۆجێیی.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 باسی خاڵە شلۆقەکانی نەخشەی ڕاهداری $f(x)=2x^2+x^3+3x+1$ بکەو جۆرەکەی دیاریبکە.

2 بەهای گەورەترین وبچووکترین کۆتایی خۆجێیەکەی پێناسەبکە.

3 نەوپەڕی بەهای نەخشەکە پێناسەبکە.

4 ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەکە پێناسەبکە.

5 ناوچەی ڕوو لە زیادبوون و ڕوولەکەمبوونی نەخشەی پرسیاری 1 دیاریبکە.

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

6 هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=x^3+x^2-2x$ بکێشە.

7 ژمارەی خاڵە شلۆقەکانی نەخشەکە چەندە؟

8 نەوپەڕی بەهاکان دیاریبکە کەبۆ نزیکترین دە نزیکرابنەوە.

9 ناوچەی ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لە کەمبوونی بۆ دیاریبکە.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە ولە هێڵکاریەکەوە بەهای نەوپەڕی نەخشەکە وجۆرەکەی دیاریبکە. بەهاکان بۆ نزیکترین بەش لە دە بنووسە

10 $y=2x^3-5x$

11 $y=x^3+x^2-3x+1$

12 $y=2x^3-4x+1$

13 $y=3x-3-3x^3$

14 $y=-2x+3+x^2$

15 $y=-x^2+6x-11$

16 $y=x^4-5x^2+2$

17 $y=-x^4+x^3+4x^2-3$

18 $y=-3x^3+3x+x^4+3$

19 $y=3x^3-x^4-3x-3$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە وناوچەکانی ڕوو لە زیادبوون و ڕوولەکەمبوونیان بۆ دیاریبکە

20 $y=x^3-4x$

21 $y=-2x^3+3x$

22 $y=x^4-2x^2+2$

23 $y=-x^4+3x^2+3$

24 $y=-x^2+4x-1$

25 $y=x^2-6x+7$

26 $y=x^4-3x^3+3x+3$

27 $y=-x^4+3x^3-3x-3$

28 $y=x^3-3x+3$

29 $y=-x^3+4x-2$

30 شێوەی بەرامبەر بەشێکی هێڵکاری نەخشەی $y = 10x^3 - 25x^2 + x^4 - 10x + 24$ دەنوێنێت، سەرنجبدە کە هەموو سیفەتەکانی نەخشەکە ڕوون نییە وەك لە وێنەکەدا دیارە. چۆن وا دەکەیت تا ڕوونببێتەوە؟

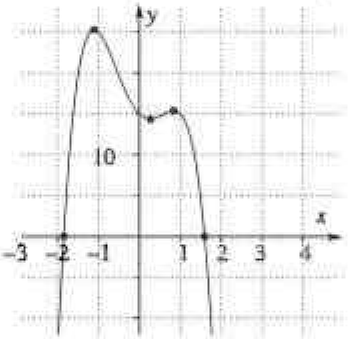
ئەندازە نەخشەیەکی زۆر ڕادەدار بنووسە هەژمێری ڕووبەرو قەبارەی داواکراو بکات.

31 قەبارەی شەش پالۆیەك لایەکی $2x$ سم بێت.

32 ڕووبەری گشتی شەش پالۆیەك لایەکی x سم بێت.

33 ڕووبەری گشتی لاکێشە تەریبێك بەرزیەکەی x سم ودرێژی بنکەکەی $7x$ وپانییەکەی $3x$ سم بێت.

34 قەبارەی لولەکێك بەرزییەکەی 5 م ونیوتیرەی بنکەکەی x م بێت.



35 شێوەی بەرامبەر بەشێك لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x) = -x^4 + 2x^2 - x + 3$ دەنوێنێت.

أ بەهای نزیکەیی سفرەکانی نەخشەکە بنووسە.

ب بەهایەکانی ئەوپەڕی نەخشەکە بە نزیکەیی بنووسە.

ڕوانینێك بۆ دواوە

36 ئەم خشتەیە تەواو بکە کە بەهای ڕادەداری $g(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ هەژمێر بکات. پاشان بەهای گەورەترین وبچووکترین بەهای x ی هەر یەکێکیان دیاربیکە.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$g(x)$									

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەم برانە بەسادەترین شێوە بنووسە.

37 $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$

38 $(x-y)(x^2 + xy + y^2)$

وانەی 3

لێکدان ودابەشکردنی ڕادەدارەکان

Multiplying and Dividing Polynomials

بۆچی

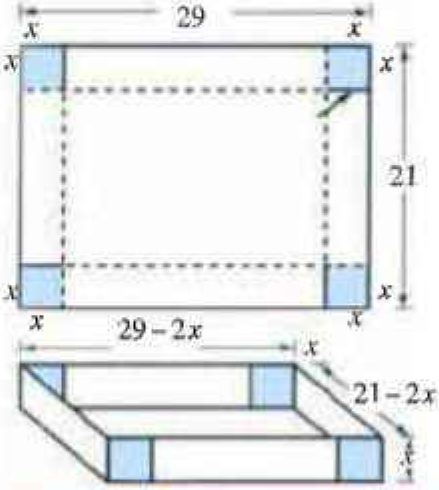
دەتوانیت شیتەڵکردن بەکاربێنیت بۆ پێکهێنانی ڕادەدارێک کە قەبارەی خشتەکێک یان لاکێشەتەریبێک کە لە سەرەوە کراوەیە بنوێنێت.

ئامانجەکان

- ڕادەدارێک لە یەکێکی تر دەدات.
- ڕادەدارەکان بە بەکارهێنانی هاوتەنجامە ناسراوەکان شیتەڵدەکات.
- بیردۆزی هاوکۆلکە بۆ دۆزینەوەی کۆلکە ڕادەدارەکان بەکاردەهێنێت.
- ڕادەدارێک بەسەر یەکێکی تردا دابەشدەکات.
- پرسیارەکان بە بەکارهێنانی بیردۆزی هاوکۆلکەو بیردۆزی ماوە شیکاردەکات.

جێبەجێکردنەکان

پیشەسازی



بۆ دروستکردنی لاکێشە تەریبێکی کراوە لەسەرەوە بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێك، پێویستە چوار چوارگۆشەی یەکسان لە گۆشەکانیدا ببڕیت ولاکان بنوشتێنیتەوە. قەبارەی قوتوە پەیدابوەکە بە هۆی پێوانەی پارچە کارتۆنەکەو لاکانی چوار گۆشە بڕاوەکە دیاری دەکرێت. ئەگەر هاتوو درێژی لاکانی کارتۆنەکە 29 cm و 21 cm بێت ئەوا قەبارەی قوتوەکە $V(x)=x(29-2x)(21-2x)$

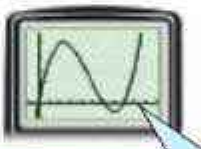
کاتێك x درێژی لایەکی چوارگۆشە بڕاوەکە بێت.

لێکدانی ڕادەدارەکان — Multiplying Polynomials

نموونە 1 قەبارەی قوتوەکە $V(x)=x(29-2x)(21-2x)$ وەك ڕادەدارێك بە شێوەی گشتی بنووسە.

شیکار

$$\begin{aligned}
v(x) &= x(29-2x)(21-2x) \\
&= x\left[29(21-2x)-2x(21-2x)\right] \\
&= x\left[609-58x-42x+4x^2\right] \\
&= x\left[609-100x+4x^2\right] \\
&= 609x-100x^2+4x^3 \\
&= 4x^3-100x^2+609x
\end{aligned}$$



دەرزەکەویت کەهەردوو هێڵە ڕونکردنەوەییەکە جووتن.

ساغبکەوە

دەتوانیت ڕاستی لێکدانەکەت پاسادان بکەیت بە بەکارهێنانی هێڵی ڕونکردنەوەیی نەخشەی $V(x)$ بە شێوەی یەکەمیداو بەشێوەی گشتیەکەیدا. ئەگەر هەردوو چەماوەکە جووتبوون لێکدانەکەت ڕاستە.

هەوڵبدە نەخشەی $f(x)=2x^2(x^2+2)(x-3)$ وەك ڕادەدارێك بەشێوەی گشتی بنووسە.

شیتەڵ کردنی ڕادەدارەکان Factoring Polynomials

بۆ ئەوەی ڕادەدارێك شیتەڵبکەیت، هەوڵبدە بە شێوەی لێکدانی دوو هاوکۆڵکە یان زیاتر بنوسیت.

نموونە 2 ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە

أ x^3-5x^2-6x ب x^3+4x^2+2x+8

شیکار

أ $x^3-5x^2-6x=x(x^2-5x-6)$ گەورەترین کۆلکەی هاوبەش دەربێنە

$=x(x-6)(x+1)$ برە دووجاکە شیتەڵبکە

ب دەتوانین ڕادەدارەکە x^3+4x^2+2x+8 کە بە دەرهێنانی گەورەترین کۆلکەی هاوبەش لە نێوان ڕادەی یەکەم ودووەم و ڕادەی سێیەم و چوارەم شیتەڵبکەین.

$x^3+4x^2+2x+8=(x^3+4x^2)+(2x+8)$ بەیەکەوەبەستنی ڕادەکان

$=x^2(x+4)+2(x+4)$ هەریەك لەودوو ڕادەیەی ناو کەوانەکە شیتەڵبکە

$=(x^2+2)(x+4)$ $(x+4)$ بەهاوبەش وەربگرین

هەوڵبدە ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە

أ x^3-9x ب x^3-x^2+2x-2

هاوئەنجامە ناسراوەکان ڕۆڵێکی گرنگ دەبینن لە شیتەڵکردنی ڕادەدارەکاندا.

هاوئەنجامە ناسراوەکان Special Identities

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \qquad (x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

نموونە 3 ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە.

أ $x^2-10x+25$ ب $49y^2+14y+1$

ج $4y^2-25$ د x^3+27 هـ x^3-8

شیکار

أ $x^2-10x+25=(x)^2+2\times5x+(5)^2=(x+5)^2$

ب $49y^2+14y+1=(7y)^2+2\times1\times7y+(1)^2=(7y+1)^2$

ج $4y^2-25=(2y)^2-(5)^2=(2y+5)(2y-5)$

د $x^3+27=(x)^3+(3)^3=(x+3)(x^2-3x+9)$

هـ $x^3-8=(x)^3-(2)^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

هەوڵبدە هەردوو ڕادەداری x^3+1000 و x^3-125 شیتەڵ بکەیت.

لەیادت بێت ئەگەر ژمارەی x یەکێ لە سفرەکانی نەخشەی $f(x)$ بێت کاتێك $f(x)=0$ مانای 2- یەکێکە لە سفرەکانی نەخشەی $f(x)=x^3+8$ لەبەر ئەوەی $f(-2)=(-2)^3+8=-8+8=0$

ئەگەر سەرنجی نەخشەی $f(x)=(x-2)(3x^2+5x-4)$ بدەیت. بەزوویی بۆت دەردەکەوێت کە ژمارە 2 سفرێکە لە سفرەکانی نەخشەکە $(f(2)=0)$.

ئێستا پێچەوانەی ئەم ڕاستییە بخەرە پێش چاوی خۆت. بۆ نموونە ئەگەر ژمارە $\frac{1}{4}$ سفرێك بێت لە سفرەکانی نەخشە ڕادەدارەکە، ئایا بڕی $\left(x-\frac{1}{4}\right)$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی؟ وەڵامی ئەمەش لەم بیردۆزەدا دەردەکەوێت.

بیردۆزی کۆلکە Factor Theory

ئەگەر ژمارە a سفرێك بێت لە سفرەکانی نەخشەی ڕادەداری $f(x)$، ئەوا $(x-a)$ کۆلکەیەکە لە کۆلەکانی، پێچەوانەکەشی ڕاستە.

دەتوانیت ئەم بیردۆزە بۆ شیتەڵکردنی ڕادەدارەکان بەکاربێنیت.

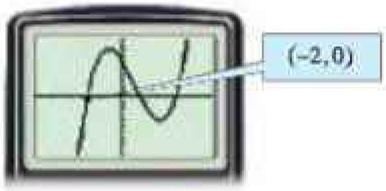
نموونە 4 ئایا بڕەی $x+2$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی نەخشەی ڕادەداری $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

شیکار

$x+2$ بە شێوەی $x-a$ بنووسە

$x+2=x-(-2)$ کەواتە $a=-2$

$f(-2)$ هەژمار بکە



لە هێڵکاری ڕونکردنەوەیەکەوە دەردەکەوێت 2- سفرێکە لە سفرەکانی نەخشەکە

$$f(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-5(-2)+6$$
$$=-8-2\times4+10+6$$
$$=-8-8+10+6=0$$

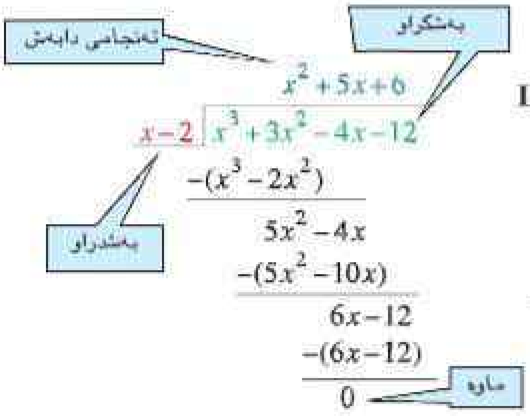
کەواتە $(x+2)$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$

هەوڵبدە ئایا بڕی $(x+3)$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی ڕادەداری x^3-3x^2-6x+8

دەتوانیت ڕستەی لێکدانی برەکان بە شێوەی دابەشکردن بەدوو ڕێگای جیاواز بنووسین.

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x^2 + 5x + 6)(x - 2)$$

$$\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x-2} = x^2 + 5x + 6 \qquad \frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+5x+6} = x - 2$$



دەتوانیت ڕادەدارەکان بەسەر $x - a$ دابەشبکەین بەبەکارهێنانی دابەشی تەقلیدی **Long Division** یان دابەشی بڕمێرەیی **Synthetic Division** « التركيبية» واتە دابەشکردنی تەقلیدی ڕادەدارەکان لە دابەشکردنی ژمارەکان دەچێت. سەرنجی دابەشکردنی $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ بەسەر $x - 2$ بدە :

هەنگاوی 1 ڕادەدارەکان بە شێوەی گشتی بنووسە.

هەنگاوی 2 ڕادەی یەکەمی بەشکراو بەسەر ڕادەی یەکەمی بەشدراو دابەش بکە. $x^3 \div x = x^2$

هەنگاوی 3 x^2 لە ئەنجامی دابەش بوونەکەدا پەیدا دەبێ بنووسە ولە بەشکراوەکە بدە $x^2(x-2)=x^3-2x^2$

هەنگاوی 4 ئەنجامی لێکدانی $x^3 - 2x^2$ لە بەشکراوەکە دەربکە.

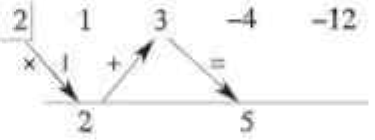
هەنگاوی 5 هەنگاوەکانی 1 و 2 و 3 لە ئەنجامی لێکدەرکردنەکە دووبارەبکەوە.

دابەشکردنی بڕمێری:

دابەشکردنی بڕمێرەیی کارئاسنیت بۆ دەکات لەبەر ئەوەی گۆڕاوەکان ناتووسینەوە.

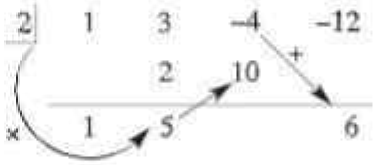
هەنگاوی 1 : بەشدراو لە لای چەپ وڕادەداری بەشکراو لای ڕاست بە شێوەی گشتی بنووسە

هەنگاوی 2 : ژمارەی a (لێرەدا 2) لە لای چەپ وهاوکۆلکەکانی ڕادەدارەکە لە لای ڕاستدا بنووسە.هاوکۆلکەی یەکەم (لێرەدا 1) لە ژێر هێڵەکە ولە هاوکۆلکەی دووەمدا بنووسە.



هەنگاوی 3 : 2 لە 1 بدە وئەنجامەکەی لەگەڵ 3 دا کۆبکەوە.بەمەش (5) ت دەست دەکەوێت. لە ژێر هاوکۆلکەی سێیەم ڕادەدار بنووسە.

هەنگاوی 4 : 2 لە 5 بدە وئەنجامەکەی لەگەڵ - 4 دا کۆبکەوە وبەمەش(6)ت دەست دەکەوێت. 6 لە ژێر هاوکۆلکەی چوارەم ڕادەدار بنووسە.



هەنگاوی 5 : 2 لە 6 بدە وئەنجامەکەی لەگەڵ ، 12- داکۆبکەوە. بەمەش سفرت دەست دەکەوێت.

2	1	3	-4	-12
		2	10	12
x	1	5	6	0

ئەنجامی دابەشکردن: $x^2 + 5x + 6$

ماوە: 0

ماوەی کرداری دابەشکردنەکە بریتییە لە سفر، ئەو ژمارانەی لە کۆتایدا دەستمان کەوتوون 1 ، 5 ، 6 کە هاوکۆلکەی ئەنجامە دابەشکردنەکەیە کەواتە ئەنجامی دابەش کردنەکە بریتییەلە x^2+5x+6 کەواتە دابەشکردنی بژمێری کاتێك بەکاردێت کە بەشدراوەکە بڕێکی هێڵی لەسەر شێوەی $x-a$ بێت، بەڵام ئەگەر بەشدراوەکە پلەکەی لە 1 زیاتربێت، پێویستە دابەشکردنی ئەقلیدی (درێژی) بەکاربهێنیت.

نموونە 5

ڕادەداری x^3+3x^2+3x+2 بەسەر x^2+x+1 دابەشبکە

شیکار

دابەشکردنی ئەقلیدی

هەنگاوی 1: $x^3 \div x = x$ دابەشبکە.

x لە ئەنجامی دابەش کردنەکەدا بنووسە.

هەنگاوی 2 : x لەبەشدراو بدە و ئەنجامەکەی لە بەشکراو دەربکە.

هەنگاوەکانی پێشوو دووبارە بکەوە، تا بڕێکت دەست دەکەوێت کە پلەکەی لە پلەی بەشدراو کەمتر بێت.

ئەنجامی دابەش: $x+2$

بەشکراو: x^3+3x^2+3x+2

بەشدراو: x^2+x+1

$$x^2+x+1 \;\big)\; x^3+3x^2+3x+2$$
$$-(x^3+x^2+x)$$
$$2x^2+2x+2$$
$$-(2x^2+2x+2)$$
$$0$$

ماوە: 0

هەوڵبدە بڕەی $x^3+3x^2-13x-15$ بەسەر x^2-2x-3 دابەشبکە.

نموونە 6

ڕادەداری x^3+x-10 بە بەکارهێنانی دابەشکردن شیتەڵبکە ئەگەر زانیت 2 سفرێکە لە سفرەکانی ڕادەدارەکە.

شیکار

ڕێگای یەکەم: دابەشکردنی ئەقلیدی بەکاربێنە.

$$x-2 \;\big)\; x^3+0x^2+x-10 \quad = x^2+2x+5$$
$$-(x^3-2x^2)$$
$$2x^2+x$$
$$-(2x^2-4x)$$
$$5x-10$$
$$-(5x-10)$$
$$0$$

ڕێگای دووەم: دابەشکردنی بژمێری بەکاربێنە.

2	1	0	1	-10
		2	4	10
	1	2	5	0

x^2+2x+5

بڕوانە 5 بەکارهێنراوە وەك کۆلکەیەك بۆ ڕادەی x کە دیار نییە لە بەشکراو

هەوڵبدە ڕادەداری $x^3-13x-12$ شیتەڵبکە بە بەکارهێنانی دابەشکردن ئەگەر زانیت 3- سفرێکە لە سفرەکانی ڕادەدارەکە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

ڕوونیبکەوە بۆچی ئەنجامی لێکدانەکان لە دابەشکردنی بڕمێرەییدا کۆدەکرێتەوە، بەڵام لە دابەشکردنی ئەقلیدیدا لە یەك دەردەکرێن.

بە پێی بیردۆزی ماوە، بەهای ڕادەداری $P(x)$ لە کاتی لە جیاتیدانانی a لە x بریتییە لە بەهای ماوەی دابەشی ڕادەدارەکە بەسەر $(x-a)$دا.

ئەگەر $P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$ ئەوا $p(-3)$ یەکسانە بە ماوەی دابەش کردنی $P(x)$ بەسەر $x-(-3)=x+3$.

-3	2	7	2	1
		-6	-3	3
	2	1	-1	4

ماوە بریتییە لە 4

$$P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$$

بە لەجیاتیدانان $P(-3)=2(-3)^3+7(-3)^2+2(-3)+1=4$

بیردۆزی ماوە **Remainder Theorem**

ماوەی دابەشکردنی ڕادەداری $P(x)$ بەسەر $(x-a)$ دا بریتییە لە ژمارەی $P(a)$ (بەهای p کاتێك لە جیاتی x ژمارەی a دادەنرێت).

نموونە 7

$P(5)$ هەژمار بکە کاتێك $P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$

شیکار

ڕێگای یەکەم: دابەشکردنی بڕمێری بەکاربهێنە

5	2	7	2	1
		10	85	435
	2	17	87	436

کەواتە $P(5)=436$

ڕێگای دووەم: لە جیاتیدانان بەکاربهێنە

$$P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$$
$$P(5)=2(5)^3+7(5)^2+2(5)+1$$
$$=250+175+10+1$$
$$=436$$

هەوڵبدە $P(3)$ هەژمێربکە کاتێك $P(x)=3x^3+2x^2-3x+4$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ڕوونبکەوە چۆن هاوتەنجامە ناسراوەکان بۆ شیتەڵکردنی ڕادەداری $x^3 - 4x$ بەکاردێنیت

2 ڕوونبکەوە چۆن بیردۆزی کۆلکە بەکاردێنیت تا بزانی ئایا $(x+1)$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی $x^3 - 2x^2 - 8x - 5$ یان نا.

3 ڕوونبیکەوە چۆن بیردۆزی ماوە بەکاردەهێنیت بۆ هەژمێر کردنی $P(5)$ کاتێک $P(x)$ ڕادەدار بێت.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 ڕادەداری $P(x) = x(10-x)(2+x)$ بە شێوەی گشتی بنووسە

هەر یەک لەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە

5 $x^3 - 5x^2 + 6x$

6 $x^3 + 5x^2 + 3x + 15$

7 $x^3 - 216$

8 لە جیاتیدانان بەکاربهێنە تابزانیت ئایا $(x+2)$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی ڕادەدارەی $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ یان نا.

9 $(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) \div (x^2 + x + 1)$ هەژمێر بکە.

ئەگەر **3–** سفرێك بێت لە سفرەکانی نەخشەی $f(x) = x^3 - 14x - 15$ ،ئەوا نەخشەکە شیتەڵبکە بە بەکارهێنانی:

10 دابەشکردنی بڕمێری

11 دابەشکردنی ئەقلیدی (درێژی)

ئەگەر $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ ، $f(2)$ دیاریبکە بە بەکارهێنانی :

12 دابەشکردنی بڕمێری

13 دابەشکردنی ئەقلیدی (درێژی)

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

هەر یەك لەم ڕادەدارانە بە شێوەی گشتی بنووسە

14 $3x^2(4x^3 - 2x^2 + 5x + 2)$

15 $(2x-3)(x+4)$

16 $(2x+3)(x^3 - 5x^2 + 4)$

17 $(x-5)(-3x^3 - 4x - 1)$

18 $(x-3)(2-x)(x-1)$

19 $(2x-4)(x+1)^2$

20 $(2x+1)^3$

21 $(-3x^2 - x + 2)(x+1)^2$

22 $\left(x - \frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{7}\right)$

23 $\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$

ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە

24 $x^3 + 8x^2 + 15x$

25 $x^3 + 2x^2 - 3x$

26 $3x^3 - 300x$

27 $18x^3 - 60x^2 + 50x$

28. x^3+3x^2-x-3

29. $x^3-2x^2-5x+10$

30. x^3+x^2+x+1

31. $1-x+x^2-x^3$

32. x^3+9x^2+14x

33. x^3+x^2+2+2x

34. x^3-64

35. $27x^3-125$

36. x^6-1

37. $27+8x^6$

ئایا بڕی هێڵی بەرامبەر ئەو ڕادەدارانە کۆلکەیەکن لە کۆلکەکانی ڕادەدارەکە یان نا.(لە جیاتیدانان بەکاربهێنە).

38. x^2+x+1 ؛ $x-1$

39. $x^3+5x^2-18x-48$ ؛ $x+6$

40. $x^3+3x^2-18x-40$ ؛ $x-4$

41. $x^3-8x^2+9x+18$ ؛ $x-6$

42. x^3+6x^2-x-30 ؛ $x-2$

43. $x^3-x^2-17x-15$ ؛ $x+3$

بە دابەشکردنی ئەقلیدی ئەنجامی ئەمانە بدۆزەرەوە:

44. $(x^2+4x+4)\div(x+2)$

45. $(x^2-3x+2)\div(x-1)$

46. $(x^3-7x-6)\div(x+1)$

47. $(x^3+11x^2+39x+45)\div(x+5)$

48. $(3x^2-x+x^3-3)\div(x^2+4x+3)$

49. $(x^3+6x^2-x-30)\div(x^2+8x+15)$

50. $(x^3-5x^2-13x+42)\div(x^2+x-7)$

51. $(10x-5x^2+x^3-24)\div(x^2-x+6)$

52. $\left(x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\right)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$

53. $\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}\right)\div\left(x+\frac{3}{4}\right)$

بە دابەشکردنی بژمێری ئەنجامی ئەمانە بدۆزەرەوە

54. $(x^2-4x-12)\div(x-4)$

55. $(x^2-3x+2)\div(x-1)$

56. $(x^3+x^2-9x-9)\div(x+1)$

57. $(x^3-2x^2-22x+40)\div(x-4)$

58. $(x^2+5x^3-18)\div(x+3)$

59. $(x^3-27)\div(x-3)$

60. $(x^3+3)\div(x-1)$

61. $(x^2-6)\div(x+4)$

بە دابەشکردنی بژمێری و لەجیاتیدانان بەهای داواکراو هەژماربکە.

62. $f(x)=x^2+1$ ؛ $f(1)$

63. $f(x)=x^2+1$ ؛ $f(2)$

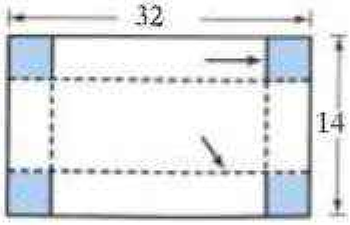
64. $f(x)=4x^2-2x+3$ ؛ $f(3)$

65. $f(x)=3x^3+2x^2+3x+1$ ؛ $f(-2)$

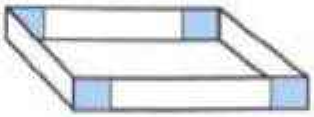
بەهای k چەندە بۆ ئەوەی بڕە هێڵەکە کۆلکەیەک بێت لە کۆلکەکانی ڕادەدارەکە.

66. x^3+3x^2-x+k ؛ $x-2$

67. kx^3-2x^2+x-6 ؛ $x+3$

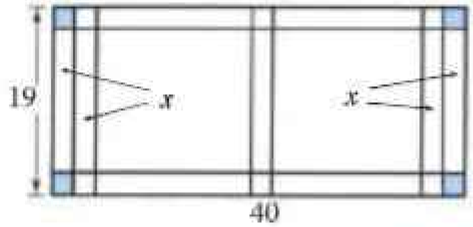


پیشە سازی بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێکی لاکێشەیی درێژی 32 سم وپانییەکەی 14سم بێت قوتوبەك سەرەکەی کراوە دروستکراوە لەم شێوە دەردەکەوێت ئەگەر بەرزی قوتوەکە x سم بێت ئەوا قەبارەکەی بریتییە لە
$V(x)=x(14-2x)(32-2x)$



68 قەبارەی قوتوەکە بە شێوەی گشتی نەخشەی ڕادەدار بنووسە.

69 قەبارەی قوتوەکە چەندە کاتێك بەرزییەکەی 2 سم بێت؟



پیشە سازی بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێکی لاکیشەیی درێژیەکەی 40 سم و پانیەکەی 19 سم قوتویەکی پیتزا دروست کرا. ئەگەر بەرزی قوتوەکە x سم بێت ئەوا قەبارەکەی بریتییە لە
$V(x)=\frac{1}{2}x(19-2x)(40-5x)$

70 قەبارەی قوتوەکە بە شێوەی گشتی نەخشەی ڕادەدار بنووسە.

71 قەبارەی قوتوەکە چەندە کاتێك بەرزیەکەی 2 cm سم بێت؟

72 قەبارەی قوتوەکە چەندە کاتێك بەرزیەکەی 2.5 cm بێت؟

تێڕوانینێك بۆ دواوە

73 لاسەنگەی $x+3\le 3(x-1)$ شیکار بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

ئەم برانە شیتەڵبکە.

74 $5b^2-5c^2$ **75** $2x^2-32y^2$ **76** x^2+x-12

77 $5-6x+x^2$ **78** $4x^2+4x+1$ **79** $2x^2+11x+15$

کۆبکەوە یان لێدەربکە.

80 $(2x^2-7x+5)+(x^3+6x^2-4x+1)$

81 $(x^4-5x^2-x)-(x^4+4x^3-x+6)$

82 $\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x^3+1\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right)$

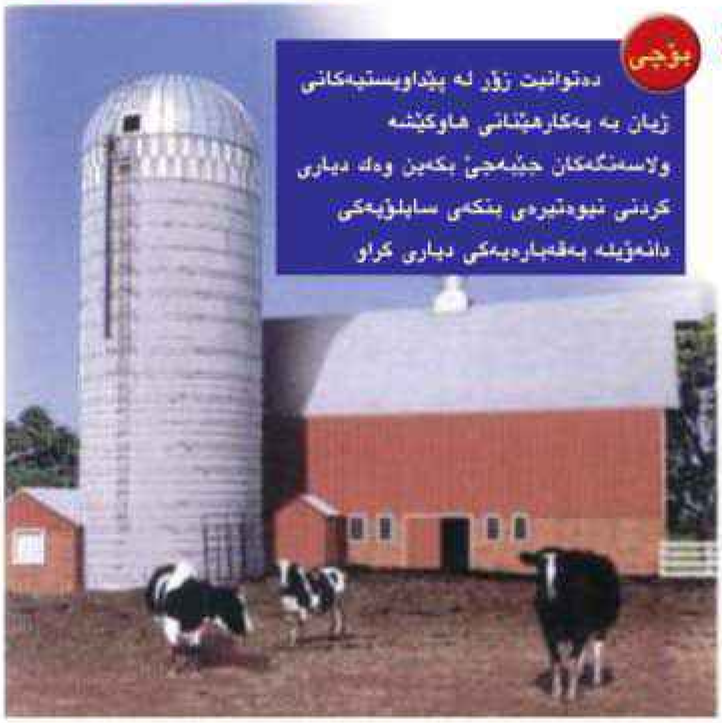
83 $(-3.2x^2+2.7x^3+7.8x)-(4.9x^3+2.5x^4)$

تێڕوانینێك بۆ پێشەوە

84 ژمارەی سفرەکانی نەخشەی $f(x)=x^3+4x^2-3x-18$ دوای هەژمێر کردنی $f(2)$ دیاریبکە

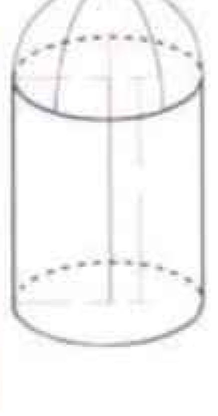
وانەی 4

هاوکێشە ولاسەنگە ڕادەدارەکان
Polynomial Equations and Inequalities



بۆچی

دەتوانیت زۆر لە پێداویستییەکانی ژیان بە بەکارهێنانی هاوکێشە ولاسەنگەکان جێبەجێ بکەین وەک دیاری کردنی نیوەتیرەی بنکەی سایلۆیەکی دانەوێڵە بەقەبارەیەکی دیاری کراو



ئامانجەکان

- بە شیتەڵکردنی هاوکێشەی ڕادەدار شیکار دەکات.
- بە ڕوونکردنەوەیی ڕێگەکانی هاوکێشە دەخەسڵێنێت.
- بە ڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی ڕادەدار شیکار دەکات.

جێبەجێکردنەکان

کشت وکاڵ

پاش ئەوەی جوتیارەکان دانەوێڵەکانیان دەدورنەوە لە سایلوی تایبەتیدا دانەوێڵەکە هەڵدەگرن. ئەو سایلۆیانەش پێکدێت لە لولەکێکی بازنەیی وەستاو، نیوەگۆیەکی بەسەرەوەیە. وەک لە وێنەکەی سەرەوەدا دیارە. دەشزانیت بۆ قەبارەی لولەک ئەم ڕێسایە بەکاردەهێنیت $C(r)=\pi r^2 h$ کاتێک C قەبارە، و r نیوەتیرەی بنکە، و h بەرزی لولەکەکەبێت، هەروەها قەبارەی گۆ بە پێی ئەم یاسایە هەژمار دەکەین $H(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ لەوەی پێشوو دەردەکەوێت کە قەبارەی سایلوکە بەم چەشنە دەبێت. $T(r)=H(r)+C(r)=\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2 h$

شاسوار دەیەوێت سایلۆیەکی دانەوێڵەکە بەرزی 8m قەبارەکەی 650 مەترسێجا دروست بکات، پێویستە نیوەتیرەی سایلۆکە بەچەند دابنێت.

نموونە

1 هاوکێشەی $2x^3-7x^2+3x=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.

شیکار

$$2x^3-7x^2+3x=0$$

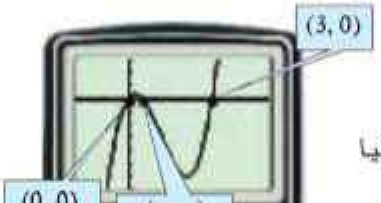
$$x(2x^2-7x+3)=0$$ بە دەرهێنانی گ.ق.هـ.

$$x(2x-1)(x-3)=0$$ شیتەڵکردنی بڕی دووجا

$x=0$ یان $2x-1=0$ یان $x-3=0$ بەبەکارهێنانی لێکدانی سفری

$x=0$ یان $x=\frac{1}{2}$ یان $x=3$

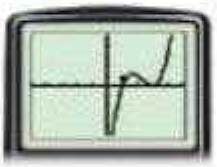
ساغبکەوە



هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشەی $y=2x^3-7x^2+3x$ بکێشە وسەرنجی سفرەکانی بدە.

ئەگەر سەرنجی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بدەیت دڵنیا دەبیت لەوەی سفرەکانی نەخشەکە هەمان ئەو بەهایانەیە کە بە شێوەی جەبری دۆزیبوتەوە.

هەوڵ بدە هاوکێشەی $2x^3+x^2-6x=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.



شیتەڵکردنی ڕادەدارەکە بووە هۆی شیکارکردنی هاوکێشەکەی پێشوو، برەکە شیتەڵ بوو بۆ ئەنجامی لێکدانی 3 کۆڵکە، لەمەوە هاوکێشەکە 3 شیکار یان 3 ڕەگی جیاوازی هەیە. بەڵام لەهەندێ هاوکێشەی ڕادەدار ڕەگەکان دووبارە دەبنەوە وەك لەم نموونەیەدا دەردەکەوێت:

نموونە 2

هاوکێشەی $\mathbf{x^3-7x^2+15x-9=0}$ بەبەکارهێنانی ڕوونکردنەوەیی و دابەشکردنی بژمێری و شیتەڵکردن شیکاربکە.

شیکار هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y=x^3-7x^2+15x-9$ بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی ڕەگەکانی هاوکێشەکە. لە هێڵکاریەکەوە ڕوون دەبێتەوە کە 1 یەکێك لە سفرەکانی نەخشەکەیە، دەشتوانین دڵنیا بین لەوە بەدانانەوەی بەهاکە لە جیاتی x. بیردۆزی هاوکۆڵکە ودابەش کردنی بژمێری بەکاربهێنە بۆ دابەش کردنی $x^3-7x^2+15x-9$ بەسەر $x-1$.

1	1	−7	15	−9
		1	−6	9
	1	−6	9	0

ماوە= 0

ئەنجامی دابەش بریتییە لە x^2-6x+9

کەواتە،

$$x^3-7x^2+15x-9=(x-1)(x^2-6x+9)$$
$$=(x-1)(x-3)^2$$

$x-1=0$ یان $x-3=0$ یان $x-3=0$

$x=1$ یان $x=3$ یان $x=3$

ڕەگەکانی هاوکێشەی $x^3-7x^2+15x-9=0$ بریتییە لە 1 و 3 وڕەگی 3 دووجار دووبارە بۆتەوە.

هەوڵبدە هاوکێشەی $x^3+2x^2-4x-8=0$ بە ڕوونکردنەوەیی ودابەشکردنی بژمێری وشیتەڵکردن شیکاربکە.

لەوانەیە کۆڵکەی $(x-a)$ لە شیتەڵکردنی ڕادەدارێکی وەك y دووبارە ببێتەوە وەك لە نموونەی پێشوودا بینرا. لەم بارەدا دەوترێت a **ڕەگێکی دووبارەیە Multiple Root**. بە ژمارەی ئەو جارانەی کە $(x-a)$ تیا دووبارە دەبێتەوە لەو هاوکێشەی $P(x)=0$ دەوترێت پلەی دووبارەبوونەوەی ڕەگی a. ڕەگی 3 لە هاوکێشەکە ڕەگێکی دووبارەبوونەوەی پلە دووە. کاتێك ڕەگی a لە ڕادەدارێکدا دووبارە دەبێتەوە واتا هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە لە تەوەری x دەکەوێت لە خاڵی $(a,0)$ بێ ئەوەی ببڕێت. ناشتوانین بڵێین خاڵی لێکەوتن هەمیشە ڕەگێکی دووبارە بوونەوەیە. لەبەر ئەوەی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیەکە ئەوەندە وورد نییە کە ئەمەی لێ دەرئەنجام بدەین. دەتوانین هەندێك ڕادەدار شیتەڵبکەین بە دانانی گۆڕاوێکی تر لە جیاتی گۆڕاوە بنەڕەتییەکە وەك لەم نموونەدا دەردەکەوێت.

نموونە 3

هاوکێشەی $\mathbf{x^4-4x^2+3=0}$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.

شیکار

شیکارکردنی پرسیارەکان

1. **شیکارکردنی پرسیارێکی سادەتر**: دەتوانین ڕادەداری x^4-4x^2+3 بگۆڕین بۆ ڕادەدارێکی دووجا بە دانانی $y=x^2$ لە جیاتی گۆڕاوە بنەڕەتییەکە، ئەو کاتە ڕادەدارەکە دەبێتە y^2-4y+3

$$x^4-4x^2+3=0$$
$$(x^2)^2-4(x^2)+3=0$$
$$y^2-4y+3=0$$
$$(y-1)(y-3)=0$$

$y=1$ یان $y=3$

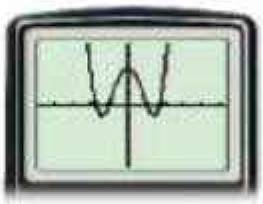
2. x^2 لە جیاتی y دادەنێین پاشان بەهای x بدۆزەرەوە کە ڕەگەکان هاوکێشە بنەڕەتییەکە دیاریدەکەین

$x^2=1$ یان $x^2=3$

$x=\pm1$ یان $x=\pm\sqrt{3}$

ڕەگەکانی هاوکێشە بنەڕەتییەکە بریتییە لە $x=-1$ $x=1$ $x=-\sqrt{3}$ $x=\sqrt{3}$

ساغبکەوە



هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=x^4-4x^2+3$ بکێشە و سەرنجی سفرەکانی نەخشەکە بدە دەبینیت هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە تەوەری سینی دەبڕێت لە -1 و 1 و لە دوو خاڵی هاوجێ بە پێی تەوەرەی صادەکان لە $-\sqrt{3}\approx-1.7$ وە $\sqrt{3}\approx1.7$ دەنوێنن

هەوڵبدە هاوکێشەی $x^4-9x^2+14=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.

ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی ڕادەدار Number of Roots for Polynomial Equation

لە نموونەکانی پێشوو دەرکەوت ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی پلە سێ بریتییە لە 3 ڕەگە و ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی پلە چوار دەبێتە 4 ڕەگ بەڵام ئەمە بە گشتی ڕاست نییە.

نموونە 4 هاوکێشەی $x^4-1=0$ شیکاربکە.

شیکار

$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$ جیاوازی نێوان دوو دووجا

$=(x^2+1)(x-1)(x+1)$

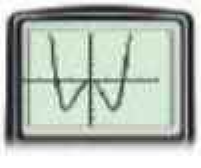
ناتوانین کۆلکەی x^2+1 شیتەڵبکەین لەبەر ئەوەی ئەم ڕادەدارە لە ژمارە ڕاستییەکاندا هیچ سفرێکی نییە چونکە x^2 ژمارەیەکی سالب نابێت.

کەواتە، ژمارەی ڕەگەکان هاوکێشەی $x^4-1=0$ تەنها دوو ڕەگە.

لاسەنگە ڕادەدارەکان Polynomial Inequalities

نموونە 5 لاسەنگەی $x^4-4x^2<0$ شیکاربکە.

شیکار



هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=x^4-4x^2$ بکێشە لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکەوە دەردەکەوێت کە -2 و 0 و 2 سفرەکانی نەخشەکەن و بەهای نەخشەکە سالب دەبێت کاتێك x بەهای -2 و 2 وەردەگرێت جگە لە سفر واتا $-2<x<2$ جگە $x\neq0$.

هەوڵ بدە لاسەنگەی $x^4-4x^2\leq0$ شیکاربکە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەو پەیوەندیانە ڕوونبکەوە کە سفری نەخشەکە ورەگی هاوکێشەکە و هاوکۆلکەی ڕادەدارو خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری سینی بەیەکەوە دەبەستێتەوە.

2 چی دەڵێیت دەربارەی سفرەکانی نەخشەیەکی ڕادەدار لە جۆری $y=(x-3)^n$ ؟

ڕاهێنانی ئاڕاستە کراو

به شیتەڵکردن ئەم هاوکێشانە شیکاربکە

3 $x^3-x^2-12x=0$

4 $x^3+15x^2+54x=0$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ودابەشکردنی بژمێری وشیتەڵکردن بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی هەموو ڕەگەکانی هاوکێشەکانی

5 $x^3-5x^2+3x=0$

6 $x^3-3x-2=0$

بە هۆی گۆڕاوێکی نوێ وشیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە بدۆزەوە.

7 $x^4-8x^2+16=0$

8 $x^4-2x^2+1=0$

9 ئەگەر نەخشەی $V(r)=\frac{1}{3}\pi r^3+25\pi r^2$ قەبارەی سایلۆیەکی دانەوێلە بنوێنێت وەك لە شێوەی بەرامبەردا هاتووە کاتێك r نیوە تیرەی بنکەی لوولەکەکە بێت بە مەترە، نیوە تیرەی بنکەی لوولەکەکە هەژمێر بکە بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە، ئەگەر قەبارەی سایلۆکە $2\,042m^3$ بێت.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

بە شیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاریبکە.

10 $x^3+2x^2-35x=0$

11 $x^3+2x^2-48x=0$

12 $x^3-13x^2+40x=0$

13 $x^3-7x^2+10x=0$

14 $x^3=25x$

15 $y^3=49y$

16 $2x^3-10x^2-100x=0$

17 $16x-6x^2-x^3=0$

18 $3y^3+9y^2-162y=0$

19 $20d^2+5d^3-60d=0$

20 $110x-2x^3=12x^2$

21 $3y^3+36y^2=3y^4$

بە شیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاریبکە.

22 $d^3 - d^2 - 5d - 3 = 0$

23 $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$

24 $2b^3 + 16b^2 + 32b = 0$

25 $5d^3 - 60d^2 + 180d = 0$

26 $x^3 - 3x - 2 = 0$

27 $x^3 - 3x + 2 = 0$

28 $x^3 - 2x^2 - 9x = -18$

29 $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

30 $n^3 + 8 = 2n^2 + 4n$

31 $x^3 + 3x^2 = 27 + 9x$

بە هۆی گۆڕاوێکی نوێ و شیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاریبکە.

32 $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

33 $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$

34 $y^4 - 18y^2 + 81 = 0$

35 $b^4 - 24b^2 + 144 = 0$

36 $x^5 - 9x^3 + 8x = 0$

37 $b^5 - 28b^3 + 27b = 0$

38 $x^4 - 12x^2 = -36$

39 $x^4 - 14x^2 = -49$

40 $d^4 + 12 = 7d^2$

41 $n^4 + 14 = 9n^2$

42 دەروازەیەك لەسەر ڕۆشەنبیری: خەڵکی عمر خیام وەك شاعیرێکی نووسەری دیوانی چوارینەکان دەناسن، بەڵام هەندێکی کەمیان دەزانن کە ئەم مرۆڤە یەکێك بووە لەو زانایانەی کە لە بیرکاریدا کاریان کردووە. ئەم زانایە ڕێگایەکی پێش خست بۆ دیارکردنی سفرەکانی ئەو نەخشە ڕادەدارانەی بەم شێوەیە دەنووسرێت $f(x) = x^3 - bx - a$ کاتێك کە $b > 0$ و $a > 0$ بەهۆی دۆزینەوەی پۆتانی خاڵەکانی یەکتربڕینی هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەندێ نەخشەی ناسراو لەگەڵ تەوەرەی سینیەکان.

أ بەهای a و b لەم نەخشەدا چەندە $f(x) = x^3 - 7x - 6$

ب هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە بە بەکارهێنانی بەهاکانی b و a کە لە پرسیاری پێشوودا دۆزیتەوە $y = -\frac{1}{\sqrt{b}}x^2$ و $y = \sqrt{x^2 + \frac{a}{b}x}$ و $y = -\sqrt{x^2 + \frac{a}{b}x}$

ج جگە لە سفر پۆتانە جیاوازەکانی خاڵی یەکتربڕینی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکانی کە سفری نەخشەی $f(x)$ دەنوێنین دیاریبکە.

د هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی $f(x) = x^3 - 7x - 6$ بکێشە و سفرەکانی دیاریبکە ولە ساغکردنەوەی پرسیاری پێشوو دڵنیا بە.

43 بیشە سازی سندوقێکی تەختە پانییەکەی x ودرێژییەکەی 3 ئەوەندەی پانییەکەیی وبەرزییەکەش 1ی لە پانییەکەی زیاترە، دڵنیابە لەوەی نەخشەی $V(x) = 3x^3 + 3x^2$ قەبارەی سندوقەکە دەگەیەنێت. دووریيەکانی سندوقەکە دیاری بکە کاتێك قەبارەکەی 36 بێت.

44 پزیشکی گولاجێکی ڤیتامین شێوەی لولەکێکی بازنەیی وەستاوی هەیە کە دوو نیوەگۆ لەهەردوو سەرەکانییەتی. ئەگەر نەخشەی $V(r) = 10\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3$ قەبارەی دەنکە گولاجەکە بنوێنێت کاتێك r نیوەتیرەی بنکەی لولەکەکەبێت بە مللیمتر. نیوەتیرەی گولاجێك چەندە کاتێك قەبارەکەی 160mm^3 بێت.

ڕوانینێك بۆ دواوە

پۆتانی خاڵە شلۆقەکانی ئەم نەخشانە دیاریبکە، ئەویەری بەهاکانیان بە نزیکراوەی بنووسە، پاشان ناوچەکانی ڕوو لە زیادبوون وڕوو لەکەمبوون دیاریبکە

45 $y=6x^2-x-12$

46 $y=2x^2+5x+2$

47 $y=x^2+3x-2$

48 $y=x^3-3x^2+4x-5$

ئەمانەی خوارەوە بە دابەشکردنی بژمێری بدۆزەرەوە،

49 $(3x^4-4x^2+2x-1)\div(x-1)$

50 $(x^4+4x^3+5x^2-5x-14)\div(x+2)$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

51 ئەم بڕە بە بەکارهێنانی شیتەڵکردن کورتبکەوە $\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x}\times\frac{x^2-2x}{x^2-4}$.

نموونە* (سامپڵ) چییە؟

What is the Sample?

لەکاتی کارکردنت لەم پرۆژەیەدا ئەو نەخشەڕادە دارانە دەدۆزیتەوە کە دەبنە سامپڵی جۆراوجۆری شێوە دەفرییەکان. هەڵدەستیت بە تێکردنی ئاو بۆ ناو دەفرێك بەقەبارەیەکی دیاریکراو و پێوانی بەرزی وقەبارەکەی، لە هەموو زیادکردنێکدا ئەم تاقیکردنەوەیە دووبارە بکەرەوە تا دەفرەکە پڕ دەبێت، بەمەش کۆمەڵێك جووتی ڕێکخراوی جیاوازت دەست دەکەوێت لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان بیاننووێنە.

*سامپڵ = نموونە (نموذج)

چالاکی 1

1. قەبارەی دەفرەکە دیاریبکە. قەبارەکە دابەش بکە بۆ 10 بەش ئەنجامی دابەشەکە لە نزیکترین ژمارەی تەواو نزیك بکەوە (بۆ نموونە: ئەگەر قەبارەی دەفرەکە $347mm^3$ بێت بە دابەش کردنی بەسەر 10 دا ژمارە 34.7 دەست دەکەوێت نزیکیبکەوە لە 35).
2. 10 جار ئاو بۆ دەفرەکە زیاد بکە، لەهەر جاریکدا قەبارەی زیادکراو($35mm^3$) لە نموونەی پێشوودا گۆڕانەکان کە بەسەر قەبارەی ئاوەکە وبەرزیەکەی دادێت دوای هەموو زیاد کردنێك تۆمار بکە. لەخشتەیەکی وەك خشتەکەی بەرامبەرت گۆڕانی قەبارەی ئاوەکە و بەرزیەکەی لە ناو دەفرەکەدا تۆمار بکە. ئەم کردارە تا دەفرەکە پڕ دەبێ دووبارە بکەرەوە.

	بەرزی (Cm)	قەبارە (mm^3)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

چالاکی 2

1. پێدراوە تۆمار کراوەکانی خشتەی پێشوو بەکاربهێنە. جووتە ڕێکخراوەکان لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان بنوێنە ، وای دابنێ قەبارە x وبەرزی y بێت.
2. پێدراوەکانی خشتەی پێشوو لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی (ئەگەر هەبێت) تۆماربکە داوا لە بژمێرەکە بکە دوو سامپلی جیاوازت بداتێ کە جووتە ڕێکخراوەکانی پێشوو بنوێنن. سامپلی یەکەم نەخشەیەکی ڕادەداری پلە 3 بێت ودووەم نەخشەیەکی دووجابێت.
3. بۆ بەراوردکردنی دوو سامپلەکە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی هەردووکیان لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان بکێشە.ئەوەیان هەڵبژێرە کە پێت ڕاستترە لەوی تریان(ئەوەی کە نزیکترە لە نواندنی جووتە ڕێکخراوەکە).
4. ئایا دەتوانیت ئەم سامپلە بەکاربێنیت بۆ خەملاندنی بەرزی ئاوی دەفرەکە بە تێکردنی قەبارەی جیاواز لە ئاوی خشتەی پێشوو؟ ڕوونبیکەوە.

4 پێداچوونەوەی بەش

بەهای ئەم ڕادەدارانە هەژماربکە کاتێک $x=2$ ، $x=-1$

1 $-x^3+4x^2-2$

2 x^3+2x^2-1

3 x^4-22

4 $19-x^3-x^2$

کۆکردنەوە یان لێدەرکردن بکە پاشان ئەنجام بە سادەترین شێوە بنووسە

5 $(3x^3-5x^2+8x+1)+(11x^3-x^2+2x-3)$

6 $(7x^3-8x^2+2x-3)-(x^3+x^2-6)$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە.ئایا نەخشەکە بەهای گەورەترین یان بچووکترینی هەیە. بەهای نزیکەییان بنووسە. ناوچەی ڕوو لە زیادبوون وڕوو لەکەمبوونیان بنووسە.

7 $f(x)=x^2-2x+9$

8 $f(x)=-x^2+5x-4$

9 $f(x)=2x^3+5x^2-1$

10 $f(x)=-2x^3+x^2-9$

لێکبدە پاشان بەسادەترین شێوە بنووسە.

11 $2x^3(5x^4-3x+x^2-6-x^3)$

12 $(x+4)(x^3-7)(x+1)$

ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە

13 x^3+4x^2-5x

14 x^3-3x^2-10x

15 x^3-125

16 $27x^3+1$

لە جیاتیدانان بەکاردەهێنە تاکو بڕیاربدەیت ئایا ڕادەداری یەکەم دابەش دەبێت بەسەر دووەم یان نا؟

17 $(x^3-7x^2+4x+12)$ ؛ $(x-2)$

18 $(x^3-5x^2-11x+12)$ ؛ $(x+2)$

دابەشبکە

19 (x^3+6x^2-x-30) ؛ $(x-2)$

20 $(x^3-2x^2-11x+12)\div(x^2-x-12)$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە وهەموو ڕەگەکانی دیاریبکە.

21 $x^4-8x^2+16=0$

22 $x^4-10x^2+24=0$

23 $x^4-10x^2+9=0$

24 $x^4-13x^2+12=0$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە. ئەگەر زانیت ژمارە پێدراوەکە یەکێک لە ڕەگەکانییەتی.

25 $x^3+7x^2+16x+12=0$ ؛ -3

26 $x^3+3x^2-16x-48=0$ ؛ -3

27 $x^3-11x^2+38x-40=0$ ؛ 4

28 $x^3-6x^2-x+6=0$ ؛ 6

29 هاوکێشەی $x^3-x^2-6x+6=0$ شیکاربکە.

پلەی ئەم ڕادەدارانە دیاریبکە

30 $3x^3+11x^2-2x+1$

31 $8x^5-6x^2+10x^3$

32 $-x^2+8x-5x^4-3$

33 $-2x^2-x^3+7x^4$

4 تاقیکردنەوەی بەش

بەهای ئەم ڕادەدارانە هەژماربکە کاتێک x بەهای -2 و 3 وەربگرێت.

1 x^3-2x^2+5

2 x^4-x^2+3x-4

3 $5x^2-3x+1$

4 $7x^3+x^2-2$

ئەم ڕادەدارانە کۆبکەرەوە یان لە یەکیاندەربکە.پلە وژمارەی ڕادەکانی دیاریبکە پاش ئەوەی بە شێوەی گشتی بنووسە.

5 $(5x^3-3x^2+x-7)+(3x^2-x-6)$

6 $(2x^5+9x^3-7x+4)-(9x^3+3x^2+4)$

7 **پارە پێدان**: لە یەکێ لە وڵاتەکان حکومەت سندوقێکی تایبەتی دانا بۆ هاندانی کرێکارەکانی. بە کۆکردنەوەی بڕی پارەتی 5000 دینار لەسەرەتای هەر ساڵێك تاوەکو لە پیریدا سوودی لێوەربگرن، حکومەتیش %7ی کۆی پارەی دانراوی هەرکرێکارێك بدات، سەرجەمی پارەی دانراوی کرێکارێك چەندە؟ دوای دانانی قیستی پێنجەم.

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە گەورەترین وبچووکترین بەها بۆ نزیکترین دەیی بدۆزەرەوە. وناوچەی ڕوو لە زیادبوون وڕوو لەکەمبوونیشیان بۆ دیاریبکە

8 $f(x)=2-2x-x^2$

9 $f(x)=x^3+3x^2+4$

10 $f(x)=x^4-3x^2-4$

11 $f(x)=5-3x^2-x^3$

ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە.

12 $5x^4-180x^2$

13 $4x^3-5x^2-8x+10$

14 $2x^3+128$

15 $x^4-7x^3+12x^2$

بەبەکارهێنانی دابەشکردنی ئەقلیدی ئەمانە دابەشبکە.

16 $(2x^4-7x^3-15x^2+8x+12)$بەسەر $(2x+3)$.

17 (x^3+3x^2-2x-6) بەسەر (x^2-2).

بەبەکارهێنانی دابەشکردنی بژمێری ئەمانە دابەشبکە

18 $(-x^3+6x^2-11x+6)$بەسەر$(x-3)$.

19 (x^3+6x^2-27)بەسەر$(x+3)$.

20 **پیشە سازی** نەخشەی $V(x)=x(14-2x)(32-2x)$ قەبارەی تەختەی لاکێشەتەریب دەنوێنێت. ڕاددەری قەبارەکە بە شێوەی گشتی بنووسە پاشان قەبارەکەی هەژمێر بکە کاتێك $x=3$

ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە بدۆزەوە.

21 $-2x^3+7x^2+3x=0$

22 $x^4+2x^3-7x^2-14x=0$

23 $x^4-6x^2+8=0$

24 $x^4+2x^3-7x^2-14x=0$

25 **وزە**: سایلۆی غازی شل بە شێوەی لولەکێکی بازنەیی وەستاوە کە هەریەکێ لە سەرەکانی بە نیوە گۆیەك داپۆشراوە.ئەگەر نەخشەی $V(r)=15\pi r^2+\frac{4}{3}\pi r^3$ قەبارەی سایلۆیەك بێت بەمەتر سێجا کە r نیوەتیرەی بنکەکەی بێت، بەهای نزیکەیی قەبارەی سایلۆکە هەژمار بکە کاتێك نیوەتیرەی بنکەکەی $0.5m$ بێت.

ئەم نەخشە ڕادەدارانە بنووسە کە پاسادانی ئەم مەرجانە دەکەن.

26 پلەکەی = 2 ، $f(0)=3$ سفرەکانی 1 و $\frac{3}{7}$

27 پلەکەی = 3 ، $f(0)=-18$ سفرەکانی 3 و -3 و -1

28 پلەکەی = 3 ، $f(0)=30$ سفرەکانی -3 و -1 و 2 .

4

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 کام جووتی ڕێکخراو دەبێتە کۆمەڵە شیکاری هەردوو لاسەنگەی $y \ge -x$ ∧ $y \ge 3x+2$ ؟

أ $(1,-5)$	ب $(0,5)$
ج أ و ب پێکەوە	د نە أ و نە ب

2 لاری ڕاستەهێڵی $3x+4y=2$ بریتییە لە

أ 3	ب $\frac{3}{2}$
ج $-\frac{3}{4}$	د 4

3 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵی $(1,-3)$ دا دەڕوات ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=2x-2$ کامەیە؟

أ $2y=-x+5$	ب $2y=-x-5$
ج $y=-\frac{1}{2}x+6$	د $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

4 کام لەمانە شیتەڵکردنی ڕادەداری x^2-5x+6 دەنوێنێت؟

أ $(x-2)(x-3)$	ب $(x+2)(x-3)$
ج $(x+1)(x+6)$	د $(x-1)(x-6)$

5 سەری کام لەم نەخشانە بەهای گەورەترین دەنوێنێت.

أ $y=3x^2+5x$

ب $y=7x+5x-3x^2$

ج $y=3+5x+\frac{1}{3}x^2$

د $y=\frac{1}{3}x^2$

6 ژمارەی کۆمەڵە شیکاری سستەمی هاوکێشە سنووردارەکان دەکاتە.

أ سفر	ب 1
ج I بە لایەنی کەمەوە	د ژمارەیەکی نا کۆتایی

7 بەهای $|-2.5|-|3.2|$ ؟ هەژمێر بکە.

8 یەکتربڕینی ڕاستەهێڵی $x-5y=15$ لەگەڵ تەوەری صادی بریتییە لە

أ 15	ب -1
ج 3	د -3

9 کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $4x+2<2x+1$ بریتییە لە

أ $x\ge 1$	ب $x>2$
ج $x<\frac{1}{3}$	د $x<-\frac{1}{2}$

10 کام لەمانە کۆمەڵەی شیکارە بۆ لاسەنگەی $|x|\le 5$ ؟

أ $-5\le x\le 5$	ب $2\le x\le -2$
ج $5\le x\le -5$	د $-3\le x\le 3$

11 کۆمەڵەی شیکاری سیستمی هێڵی $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ بریتییە لە

أ $(2,3)$	ب $(2,1)$
ج $(-3,2)$	د $(0,1)$

12 ڕادەداری $(x+1)(x+2)(x-4)$ بە شێوەی گشتی بنووسە.

13 ئەم نەخشە دووجایە لەسەر شێوەی بنەڕەتی بنووسە $f(x)=2x^2-8x+9$.

14 کۆبکەوە $(2x^3+3x^2+1)+(5x^2-2x+2)$.

15 لێدەربکە. $(5x^3+4x^2-x)-(x^2+2x-1)$

ئەم برە دووجایانە شیتەڵبکە(ئەگەر توانرا)

16 $-3y^2-5y$

17 $x^2-5x-36$

18 $24x^2+5x-36$

19 $36x^2-46x-12$

20 ئەم هاوکێشە $\frac{x+2}{2}=\frac{2x}{3}$ شیکاربکە.

بەشی پێنجەم

بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان

Expressions and Rational Function

1. گۆڕانی پێچەوانە ونەخشەی هەڵگەڕاوە.

2. نەخشە ڕێژەییەکان

3. لێکدان ودابەشکردنی بڕە ڕێژەییەکان.

4. کۆکردنەوە و لێدەرکردنی بڕە ڕێژەییەکان.

5. هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان.

6. نەخشەی ڕەگی دووجا

پرۆژەی بەشەکە

پێداچوونەوە

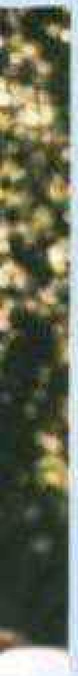
تاقیکردنەوەی بەش

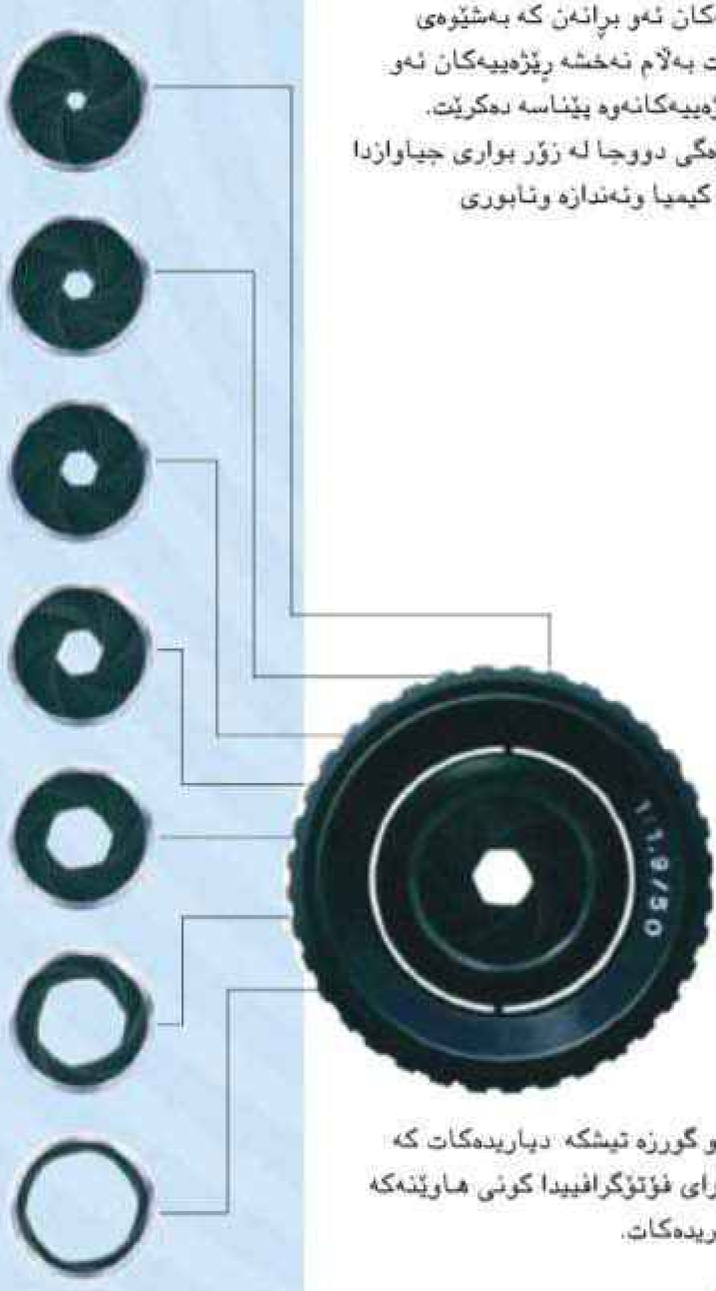
تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان

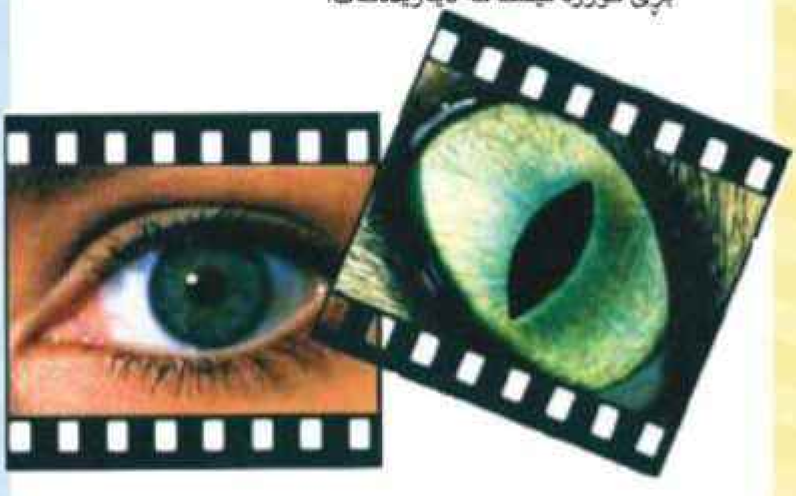
Expressions and Rational Function

لەم بەشەدا بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان ونەخشەی ڕەگی دووجا دەخوێنین. بڕە ڕێژەییەکان ئەو بڕانەن کە بەشێوەی ڕێژەی دوو ڕادەدار دەنووسرێت بەڵام نەخشە ڕێژەییەکان ئەو نەخشانەن کە بە هۆی بڕە ڕێژەییەکانەوە پێناسە دەکرێت.
نەخشەی ڕێژەیی ونەخشەی ڕەگی دووجا لە زۆر بواری جیاوازدا بەکار دەهێنرێن. وەك فیزیا و کیمیا وئەندازە وئابوری وبازرگانی.





قەبارەی هاوێنە بڕی ئەو گوڕزە تیشکە دیاریدەکات کە دەچێتە چاوەوە. لە کامێرای فۆتۆگرافییدا کونی هاوێنەکە بڕی گوڕزە تیشکەکە دیاریدەکات.



وانەکان

1. گۆڕانی پێچەوانە ونەخشەی هەڵگەڕاوە.
2. نەخشە ڕێژەییەکان
3. لێکدان ودابەشکردنی بڕە ڕێژەییەکان.
4. کۆکردنەوە ولێدەرکردنی بڕە ڕێژەییەکان.
5. هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان.
6. نەخشەی ڕەگی دووجا

پرۆژی بەش

دەربارەی پرۆژەی بەش

زۆربەمان دەتوانین ناوەندەی کۆمەڵێك بەها بە ئاسانی هەژمێر بکەین.ناوەندەکان لە زۆر بوارەکانی ژیاندا بەکاردەهێنرێن وەك گۆڕینی دراوی بیانی لە بانکەکاندا، زیادکردنی کرێی کرێکار، بەکاربردنی سوتەمەنی بۆ ئۆتۆمبیل، ناوەندەکانی خێرایی. دەتوانین چەند جۆرێك ناوەندە هەژماربکەین. لەم بەشەدا دوو جۆریان وەردەگرین. ناوەندە ژمێرەیی و ناوەندە گونجاو. پێدراوەکان بەکاردەهێنین بۆ دیاریکردنی ئەو ناوەندەی کە شیاوترە لە هەر بارێکدا.

پاش تەواوبوونی ئەم بەشە توانای ئەمانەت دەبێ کە:

- ناوەندە ژمێرەیی وناوەندە گونجاو هەژمار بکەیت بۆ کۆمەڵە پێدراوێك.
- پەیوەندی نێوان ناوەندە ژمێرەیی وناوەندە گونجاو دیاریبکەیت.
- شیاوترین ناوەند دیاریبکەیت بۆ هەژمارکردنی کۆمەڵێك پێدراو.

وانەی 1

گۆڕانی پێچەوانە ونەخشەی هەڵگەڕاوە

Inverse Variation and Inverse Function

ئامانجەکان

- گۆڕانی پێچەوانە دەناسێت و نەگۆڕەکەی دیاریدەکات.
- هاوکێشەی گۆڕانی پێچەوانە دەنووسرێت.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە پەیوەندیان بە ژیانی ڕۆژانەوە هەیە وگۆڕانێکی پێچەوانەیان تێدایە.

بۆچی

ئەو پەیوەندیانەی کە دوو گۆڕاو پێکەوە دەبەستێتەوە، پەیوەندییەکی وەك ڕێژەی نێوان گۆڕاوی بەستراو وگۆڕاوی سەربەست نەگۆڕە، لەهەندێ پەیوەندیشدا لێکدانی دوو گۆڕاوەکە نەگۆڕە، یەکەم جۆری پەیوەندی نەخشەیەکی هێڵییە و پەیوەندییەکەی تر جۆرێکە لە نەخشەی ڕێژەیی نموونەش بۆ ئەوە پەیوەندی نێوان ژمارەی کرێکار وکاتی خایەنراو بۆ تەواوکردنی پرۆژەیەك.

زۆربەی جار لاوەکان خۆبەخشانە هەڵدەستن بە چاندنی دارو دەرخت بۆ سەوز کردنی ناوچە ڕووتەکان. ژمارەی بەشداربووەکان لە چاندنی دەرختەکاندا ڕۆڵێکی گرنگی دەبێت لە دیاریکردنی کاتی پێویست بۆ ئەنجامدانی ئەم پرۆژەیە. هەرچەند ژمارەکە زیادبکات، کاتی پێویست کەم دەبێتەوەو بە پێچەوانەوشەوە لەم چالاکیەدا ئەو جۆرە پەیوەندییەت بۆ ڕووندەبێتەوە.

چالاکی 1

Exploring Inverse Variation — دۆزینەوەی گۆڕانی پێچەوانە

تیمێکی دێدەوانی بەڵێنیدا درەخت بچێنێت بۆ سەوز کردنی ناوچەیەکی ڕووت وا دانرا هەر تیمێك لە سەعاتێکدا دە درەخت بڕوێنێت.

1. یەك تیم چەند کاتی پێویستە بۆ ڕواندنی هەموو درەختەکان.
2. کاتی پێویست چەند دەبێت ئەگەر 50 تیم بەکارەکە هەستن.
3. کاتی پێویست چەند دەبێت ئەگەر 100 تیم بەکارەکە هەستن.
4. نەخشەیەك بنووسە کاتی خایەنراو بە کاتژمێر T وژمارەی تیمەکان x بێت بۆ ڕواندنی هەموو درەختەکان.

خاڵی چاودێری ✓

گۆڕانی پێچەوانە Inverse Variation

دوو گۆڕاوی x ، y بە گۆڕانێکی پێچەوانە بەیەك دەبەسترێنەوە، ئەگەر ئەنجامی لێکدانیان بکاتە نەگۆڕێك، بەهاکانیان هەر چەندێك بێت. واتە $xy = h$ کاتێك h ژمارەیەکی ڕاستی بێت جگە لە سفر پێشی دەوترێت نەگۆڕی گۆڕانی پێچەوانە **Constant of The Inverse Variation Relation**.
بەپێی پەیوەندی $xy = h$ ، $h \neq 0$ نابێت هیچ یەکێك لە گۆڕاوەکان بەهای سفر وەربگرێت.
دەتوانین پەیوەندی پێچەوانەکەی پێشوو بەم شێوەیە بنوسین $y = \frac{h}{x}$.

چالاکی 2

دۆزینەوەی نەخشەی هەڵگەڕاوە Exploring The Inverse Function

1. ئەم خشتەیە بنووسەوە وتەواویبکە کاتێك $y = \frac{1}{x}$

x	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
y									
xy									

شیکاری پرسیار

2. بە دوای شێوازێك بگەڕێ. بەهای y چی لێدێت کاتێك بەهای x زیاد بکات؟ ئەی y چی لێدێت کە x کەمبکات؟
3. هەنگاوی یەکەمی چالاکیەکە دووبارەبکەوە کە $y = \frac{2}{x}$ یان $y = \frac{4}{x}$. ئایا بڕوات وایە کە شێوازە دۆزراوەکەی پرسیارەکە بە شیاوی دەمێنێتەوە ئەگەر $y = \frac{3}{x}$ ؟ هەنگاوی یەکەم دووبارە بکەوە کاتێك $y = \frac{3}{x}$.

خاڵی چاودێری ✓

4. پەیوەندی $y = \frac{h}{x}$ چۆن دەگۆڕێت کاتێك $h > 0$ ، کاتێك بەهای x زیاد بکات وهەروەها کاتێك کەمبکات؟
5. ئەگەر $y = \frac{h}{x}$ ، $h > 0$ ئایا دەگونجێت بەهای x سفر بێت؟ ئەوە لێکبدەوە.

ئەگەر بەهای گۆڕاوی x وگۆڕاوی y بزانیت لەو پەیوەندیەی گۆڕانی پێچەوانە دەگەیەنێت ئەوا دەتوانیت بەهای نەگۆڕی h بدۆزیتەوە وهەروەها دەشتوانیت y وەك نەخشەیەك بە پێی x بەم شێوەیە بنووسیت $y = \frac{h}{x}$ ،لەو نموونانەی لە ژیانی ڕۆژانەوە وەردەگیرێن زۆربەی کات بەهای x و y موجەب دەبن.

نموونە 1

ئەگەر گۆڕاوی x و y پێچەوانە بگۆڕێن، $y = 13.5$ کاتێك $x = 4.5$

أ نەگۆڕی گۆڕانەکە بدۆزەوەو هاوکێشەی پەیوەندییەکەی نێوان x و y بنووسە.

ب بەهای y لەم بارانەدا بدۆزەوە کە $x = 0.5$ ، $x = 1$ ، $x = 1.5$ ، $x = 2$ ، $x = 2.5$

شیکار

أ $h = xy = 4.5 \times 13.5 = 60.75$ دەتوانیت پەیوەندیەکە بەم شێوەیە بنووسیت $y = \frac{60.75}{x}$

ب بە بەکارهێنانی بژمێر بەهای y بە پێی بەهاکانی x ی دیاریکراو بدۆزەوە.

y	x
121.5	0.5
60.75	1
40 5	1 5
30.375	2
24.3	2.5

هەوڵبدە x و y دوو گۆڕاوی پێچەوانەن کاتێک $y=120$ ئەوا $x=6.5$ نەگۆڕی گۆڕانەکە و هاوکێشەی پەیوەندی نێوان x و y بنووسە پاشان بەهای y هەژمێربکە کاتێک x ئەم بەهایانە وەردەگرێت

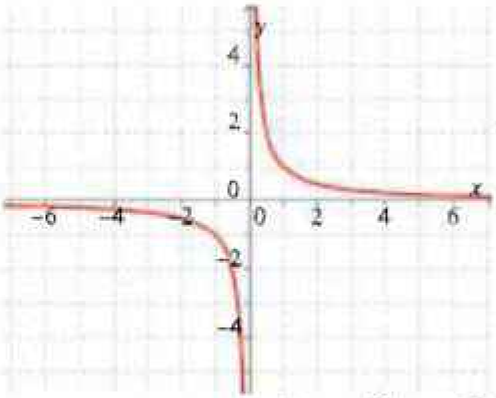
$$x=14 \quad x=12.5 \quad x=8 \quad x=4.5 \quad x=1.5$$

نەخشەی هەڵگەڕاوە Inverse Function

کەمێک لەمەوپیش دیت کە هاوکێشەی $y=\frac{h}{x}$ کاتێک $h\neq 0$ پەیوەندییەکی پێچەوانە دەنوێنێت لە نێوان دوو گۆڕاوی x و y ئەم پەیوەندییەش بە نەخشەی y بە پێی x دەناسرێت. سادەترین جۆری ئەم نەخشەیەش ئەوەیە کاتێک نەگۆڕەکە 1 بێت واتە هاوکێشەکە بەم چەشنە بێت $f(x)=\frac{1}{x}$

نەخشەی هەڵگەڕاوە Inverse Function

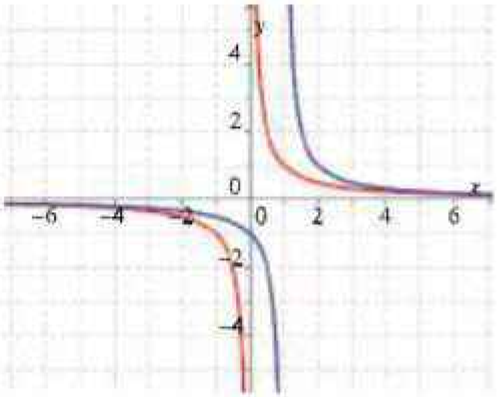
نەخشەی هەڵگەڕاوە ئەو نەخشەیە کە بەم هاوکێشەیە دەردەبڕێت $f(x)=\frac{1}{x}$



شێوەی بەرامبەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشەیە دەنوێنێت ئەگەر بەوردی سەرنجی هێڵکارییەکە بدەیت، تێبینی ئەم خاڵانە دەکەیت :

1. دەتوانیت بەهای y هەژمار بکەین بە پێی x بۆ هەموو بەهاکانی x جگە لە سفر. مانای ئەوەیە بواری نەخشەکە هەموو ژمارە ڕاستیەکانە جگە لە سفر.
2. تا بەهای x زیاد بکات بەهای y کەم دەکات ئەمەش بەوە دەردەبڕین و دەڵێین نەخشەکە ڕوولەکەم بوونە.
3. کاتێک x موجەب بێت وبەهاکەی زیادبکات، بەهای y بە موجەبی دەمێنێتەوە ونزیک دەبێتەوە لە سفر. بەم شێوەیەش دەریدەبڕین نزیکدەبێتەوە لە سفر لەلای موجەب کاتێک x نزیک دەبێتەوە لە $+\infty$
4. کاتێک x سالب بێت وبەهاکەی کەمبکات، بەهای y بە سالبی دەمێنێتەوە ونزیک دەبێتەوە لە سفر .بەم شێوەیەش دەریدەبڕین. y نزیک دەبێتەوە لە سفر لەلای سالب کاتێک x نزیکدەبێتەوە لە $-\infty$
5. y نزیکدەبێتەوە لە سفر کاتێک بەهای ڕووتی x وردە وردە زیاد دەکات. لێرەشدا دەوترێت ڕاستە هێڵی $y=0$ واتە تەوەری x دەرکەناری ئاسۆیی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشە هەڵگەڕاوەکەیە.
6. هەر چەندە بەها سالبەکانی گۆڕاوی x زیاد بکات، بەهاکانی y بە سالبی دەمێنێتەوە و کەمدەکات لێرەدا دەوترێت y نزیک دەبێتەوە لە $-\infty$ کاتێک x نزیک دەبێتەوە لە سفر لە لای چەپەوە.
7. هەر چەندە بەها موجەبەکانی گۆڕاوی x کەمبکات، بەهاکانی y بە موجەبی دەمێنێتەوە وزیاد دەکات. لێرەدا دەوترێت y نزیک دەبێتەوە لە $+\infty$ کاتێک x نزیک دەبێتەوە لە سفر لەلای ڕاستەوە.
8. بەهای ڕووتی y وردە وردە زیاد دەکات کاتێک بەهای ڕووتی x وردە وردە کەم بکات. لێرەشدا دەوترێت ڕاستە هێڵی $x=0$ واتە تەوەرەی y دەرکەناری شاوڵی هێڵی ڕوونکردنەوەیی دەرکەناری نەخشە هەڵگەڕاوەکەیە.

نموونە 2 لە هەمان ڕووتەختی پۆتانەکاندا هەر دوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشە هەڵگەڕاوەی و نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x-1}$ بکێشە. ئەو جێگۆرکێ ئەندازەییە چییە کە هێڵی ڕوونکردنەوەیی یەکەم دەگۆڕێت بۆ هێڵی ڕوونکردنەوەیی دووەم.



شیکار لە شێوەی بەرامبەردا دەردەکەوێت کە گواستنەوە لە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی هەڵگەڕاوە بۆ هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووەم بەکشانێکی ئاسۆیی بەرەو لای ڕاست بە دووری یەك یەکە دەبێت. تێبینی ئەوە بکە $x=1$ دەرکەناری ستوونی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووەمە، کەوێنەی ڕاکێشراوی دەرکەناری ستوونی نەخشە هەڵگەڕاوەکەیە بەڕاکێشانی ئاسۆیی.

هەوڵبدە لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا هەردوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی هەڵگەڕاوە و نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x+1}$ بکێشە. ئەو جێگۆرکێ ئەندازەییانە کە هێڵی ڕوونکردنەوەیی یەکەم دەگۆڕێت بۆ هێڵی ڕوونکردنەوەیی دووەم چییە؟

ڕاهێـــنـــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 هاوکێشەیەك بنووسە هەردوو گۆڕاوی x و y بە پەیوەندییەکی گۆڕانی پێچەوانە بەیەکەوە ببەستێ کە نەگۆڕەکەی h بێت. هاوکێشەیەکی تر بنووسە کە ئەوە دەربڕێت.

2 مەبەست چییە کە دەوترێت پەیوەندی نێوان خێرایی وکات گۆڕانێکی پێچەوانەیە. بە نموونە وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

3 x و y دوو گۆڕاوی پێچەوانەن $y=3$ کاتێك $x=8$ چۆن بەهای y دەدۆزێتەوە کاتێك $x=2$ ؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

x و y دوو گۆڕاوی پێچەوانەن. هاوکێشەیەك بنووسە ئەو پەیوەندییە بنوێنێت.

4 $y=12$ کاتێك $x=60$ 5 $y=3$ کاتێك $x=4$

ئەم خشتانەی خوارەوە بەهای گۆڕاوی x وگۆڕاوی y ی بەرامبەری دیاریدەکات ئایا دوو گۆڕاوەکە پێچەوانە دەگۆڕێن؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە. ئەو هاوکێشەیە بنووسە کە گۆڕانە پێچەوانەکە دەنوێنێت(ئەگەر هەبێت).

6

x	2	3	4
y	12	8	6

7

x	4	15	20	60
y	30	8	6	2

8

x	2	3	4	5
y	10	9	8	7

9

x	5	15	25	75
y	45	15	9	3

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

کام لە هاوکێشانە گۆڕانی پێچەوانەیە لە نێوان دوو گۆڕاوەکەدا.

10 $xy = 400$ **11** $y = \frac{-28}{x}$ **12** $y = 10 - x$ **13** $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

14 $x = 10y$ **15** $\frac{x}{5} = \frac{3}{y}$ **16** $x = y$ **17** $y = \frac{42}{x}$

لە پرسیارەکانی 18 تا 23، پەیوەندی نێوان x و y پەیوەندییەکی پێچەوانەیە

18 $y = 8$ کاتێك $x = 6$ بەهای y چەندە ئەگەر $x = 12$

19 $y = 9$ کاتێك $x = 12$ بەهای y چەندە ئەگەر $x = 36$

20 $y = 3$ کاتێك $x = 32$ بەهای x چەندە ئەگەر $y = 4$

21 $y = 3$ کاتێك $x = -8$ بەهای x چەندە ئەگەر $y = -4$

22 $y = \frac{3}{5}$ کاتێك $x = -60$ بەهای y چەندە ئەگەر $x = 2$

23 $y = \frac{3}{4}$ کاتێك $x = 12$ بەهای y چەندە ئەگەر $x = 27$

24 ئەندازە سێگۆشەیەك ڕووبەرەکەی نەگۆڕە. ئەو پەیوەندییە کامەیە کە بنکە وبەرزی بەیەکەوە دەبەستێت؟ئەگەر بەرزییەکەی $36cm^2$ بێت کاتێك بنکەکەی 22cm بێت. درێژی بنکەکەی چەندە کاتێك بەرزییەکەی ببێتە 24cm ؟

بەستنەوە

25 ئەندازە: لاکێشەیەك ڕووبەرەکەی 36cm بێت. درێژی لاکێشەیەك چەندە کە هەمان ڕووبەری هەبێت وپانییەکەی 3cm بێت؟ ئەگەر واتدانا ڕووبەری لاکێشەکە نەگۆڕبێت، جۆری پەیوەندی نێوان درێژی وپانی دیاریبکە.

26 میکانیك پەیوەندی نێوان خێرایی خولانەوەی پەهکێکی ددانداوی و ژمارەی ددانەکانی گۆڕانێکی پێچەوانەیە. خێرایی پەهکێك 20 ددانی هەبێت چەندە؟ ئەگەر بزانیت خێرایی خولانەوەی پەهکێکی 16 ددانی 500 خول بێت لە یەك خولەکدا.

گەشت تێکڕای گۆڕانی خێرایی هۆیەکی گواستنەوە وکاتی خایەنراو بۆ بڕینی ماوەیەکی دیاری کراو پەیوەندیەکی پێچەوانەیە

27 ئامانج ماوەیەکی دیاریکراوی بە 6 کاتژمێر بە تێکڕای $80Km$ لە کاتژمێرێکدا بڕی کاتی پێویست چەندە بۆ بڕینی هەمان ماوە ئەگەر خێراییەکەی $90Km/h$ بوایە.

28 فڕۆکەیەك پێویستی بە 2.7 کاتژمێر هەیە بۆ بڕینی ماوەی نێوان دووشار بە تێکڕای 1 020 km/h . فڕۆکەکە چەند کاتی پێویستە بۆ بڕینی هەمان دووری، کاتێك تێکڕای خێرایەکەی 810 km/h بێت.

29 **فیزیا** ئەگەر درێژی شەپۆلێکی ڕادیۆ لەرەلەرەکەی پێچەوانە بگۆڕێت، درێژی شەپۆلێک چەندە ئەگەر لەرەلەرەکەی $2000Kh$ بێت.ئەگەر زانیت شەپۆلێک درێژییەکەی $200m$ بێت لەرەلەرەکەی $3000kh$.

30 **مۆسیقا** ئەگەر ژێی عودێك بلەرێتەوە ئەوا دەنگێك دروستدەکات. پەیوەندی نێوان ژمارەی لەرەلەرەکان ودرێژی ژێیەکەی پەیوەندییەکی پێچەوانەیە. درێژی ژێیەك چەندە؟ کاتێك ژێیەکە 370 جار بلەرێتەوە لە چرکەیەکدا. ئەگەر بزانیت درێژی ژێیەك $28cm$ بێت 518 لەرینەوەی هەیە لە چرکەیەکدا؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

هەر یەکە لەم بڕانە بە توانی موجەب بنووسە

31 x^{-1} **32** ab^{-3} **33** $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$

34 $y^{-2}b^{3}c^{-5}d$ **35** $\left[(x^{-3})^{-2}\right]^{-3}$

پۆتانی سەر و هاوکێشەی تەوەرەی ئەم برگە هاوتایانە بدۆزەوە.

36 $y=-3x^2+5$ **37** $y=x^2+2x-3$ **38** $y=-x^2-5x+6$

39 $y=x^2+2$ **40** $y=x^2+x+1$ **41** $y=2x^2-3x+2$

پلەی ئەم ڕادەدارانە دیاریبکە.

42 $3x^5-2x^4+x^2-1$ **43** $2-5x+7x^2-x^3$ **44** $-5x^3-x^4+1$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

45 خشتەیەك بۆ بەهایەکانی ئەخشەی $f(x)=\frac{1}{x+2}$ دروستبکە بە پێدانی بەهای3− تا 1− بە پلەدارکردنی کە هەر هەنگاوێکی 0.1 بێت.

خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهاکانی y کاتێك x نزیك دەبێتەوە لە 2− .

وانەی 2

نەخشە ڕێژەییەکان Rational Functions

بۆچی

نەخشە ڕێژەییەکان بەکاردێن بۆ نواندنی گەلێک پەیوەندی ژیانی ڕۆژانەمان زۆر جار ئەم نەخشانە بۆ شیکاری ئەو پرسیارانە بەکاردێنین کە پەیوەندییان بە بڕەمەی ناوێتە هەیە

ئامانجەکان

- نەخشە ڕێژەییەکان دەناسێت وبەهاکەی هەژمار دەکات.
- هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی ڕێژەیی دەکێشێت و بوارەکەی دیاریدەکات و هاوکێشەی دەرکەنارەکانی دیاریدەکات.

ئاسۆ لە تاقیگەیەکی کیمیاییدا کاردەکات. کارەکەی وا پێویست دەکات ڕێژەی سوێری گیراوەیەک ڕێک بخات. ئاسۆ دەتوانێت نەخشەیەکی ڕێژەیی بەکاربهێنێت بۆ نواندنی ڕێژەی سوێری گیراوەیەک.

نموونە

جێبەجێ کردنەکان

کیمیا

1 ئاسۆ گیراوەیەکی 65 ml لایە ڕێژەی سوێرییەکەی 10% یە و x ml ئاوی دڵۆپێنراوی بۆ زیاد کرد بەمەش گیراوەیەکی نوێی دەستدەکەوێت.

أ نەخشەی c بنووسە کە ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە بە پێی هێندی ئاوە دڵۆپێنراوەکە بێت.

ب ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە چەندە، ئەگەر ئاسۆ $100\ ml$ زیادبکات؟

شیکار

أ ئەندازەی خوێ لە گیراوە بنەڕەتیەکە

$$10\% \times 65 = 6.5$$

$\frac{6.5}{65}$ ← خوێ / ← گیراوە

ئەندازەی خوێ لە گیراوە نوێییەکە:

زیادکردنی $x\ ml$ لە ئاوی دڵۆپێنراو

$\frac{6.5}{65+x}$ ← خوێ / ← گیراوە

نەخشەی ڕێژەی سوێری لە گیراوە نوێیەکە:

$$c(x) = \frac{6.5}{65+x}$$

ب بۆ هەژمێر کردنی ڕێژەی سوێری پاش زیاد کردنی $100\ ml$ لە ئاوی دڵۆپێنراو، هەژمێری بەهای نەخشەکە بکە کاتێک $x = 100$

$$c(100) = \frac{6.5}{65+100} \approx 0.039 \text{ یان } 3.9\%$$

بڕی ڕێژەیی **Rational Expression** بریتییە لە ڕێژەی نێوان دوو ڕادەدار. نەخشەی ڕێژەیی **Rational Function** بە پێی بڕی ڕێژەیی پێناسە دەکرێت. نەخشەی $c(x)=\frac{6.5}{65+x}$ لە نموونەی 1 دا نەخشەیەکی ڕێژەییە بە پێی بڕی ڕێژەیی $\frac{6.5}{65+x}$ پێناسە کراوە.

خاڵی چاودێری ✓ ئایا نەخشەی $f(x)=\frac{x^2+2}{|x|}$ نەخشەیەکی ڕێژەییە؟ ڕوونیبکەوە.

نەخشەی هەڵگەڕاوەی $f(x)=\frac{1}{x}$ سادەترین نەخشەی ڕێژەییەکانە. لەوانەی پێشوودا بینیت بەهای نەخشەکە هەژمار ناکرێت کاتێک $x=0$. بە شێوەیەکی گشتی بواری نەخشەی ڕێژەیی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە جگە لەو ژمارانەی ژێرە دەکەن بە سفر، ئەو ژمارانەی ژێرە دەکەنە سفر پێیان دەوترێت ژمارە قەدەغەکراوەکان بۆ گۆڕاوی x

نموونە 2 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{x^2-12x+12}{x^2+9x+20}$ دیاریبکە.

شیکار

ژمارە قەدەغەکراوەکان دیاریبکە، ئەویش بە دۆزینەوەی هەردوو ڕەگی هاوکێشەی $x^2+9x+20=0$

$$x^2+9x+20=0$$
$$(x+4)(x+5)=0$$
$$x=-5 \text{ یان } x=-4$$

کەواتە بواری نەخشەکە هەموو ژمارە ڕاستییەکانە جگە لە 4− و 5− .

هەوڵبدە بواری ئەم نەخشە $f(x)=\frac{3x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ دیاریبکە.

دەرکەنارە ستوونییەکان Vertical Asymptotes

بیرت بێ نەخشەی هەڵگەڕاوە دەرکەنارێکی ستوونی هەیە هاوکێشەکەی $x=0$ و دەرکەنارێکی ئاسۆیی هەیە هاوکێشەکەی دەکاتە $y=0$ بە شێوەیەکی گشتی دەکرێت نەخشەی ڕێژەیی دەرکەناری ئاسۆیی وشاوڵی هەبێت. لەم چالاکیەدا ئەوەمان بۆ ڕووندەبێتەوە.

چالاکی

دۆزینەوەی دەرکەنارە ستوونییەکان Exploring Vertical Asymptotes

1. نەخشەی $y=\frac{1}{x-2}$ بەکاربهێنە

أ ئەم خشتەیە بنووسەوە، بە بەکارهێنانی بڕمێر تەواویبکە.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
y										

ب ئەم خشتەیە بنووسەوە، بە بەکارهێنانی بڕمێرە تەواویبکە.

x	3	2.9	2.8	2.7	2.6	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1
y										

خاڵی چاودێری

2. y چی بەسەردێت کاتێك x نزیکبێتەوە لە 2 لە لای چەپ وردە وردە؟ ئەی چی بەسەردێت کاتێك x نزیکبێتەوە لە 2 لای ڕاست وردە وردە. پێشبینی بەهای y بەچەند دەکەیت ئەگەر $x=2$.

خاڵی چاودێری

3. ئەگەر $y=\frac{1}{x+3}$ بە بەکارهێنانی بژمێر بەهای y هەژمێربکە کاتێك نزیکبێتەوە لە 3- لە لای ڕاست پاشان ولای چەپ. چۆن پێشبینی بەهای y دەکەیت ئەگەر $x=-3$

بەو ژمارە ڕاستییانەی کەوا لێناگەڕێت نەخشەی ڕێژەیی پێناسە کراوبێت دەوترێت ژمارە قەدەغەکراوەکان **Excluded Values** بۆ ئەو نەخشەیە.

بواری نەخشەی ڕێژەیی بریتییە لە هەموو ژمارە ڕاستییەکان جگە لە ژمارە قەدەغەکراوەکانی ئەو نەخشەیە.

خاڵی چاودێری

بەهای قەدەغەکراوی نەخشەی $y=\frac{x+3}{x^2-x-6}$ دیاریبکە.

دەکرێت نەخشەی ڕێژەیی دەرکەناری ستوونی لە ژمارەیەکی قەدەغەکراودا هەبێت. مەرجی هەبوونی ئەم دەرکەنارەش بریتییە لە:

دەرکەناری ستوونی Vertical Asymptotes

ئەگەر $x-a$ کۆڵکەیەك بێت لە کۆڵکەکانی ژێرەی نەخشەیەکی ڕێژەیی و کۆڵکەی سەرە نەبێت ئەوا ڕاستەهێڵی $x=a$ دەرکەناری ستوونی نەخشەکەیە.

نموونە 3

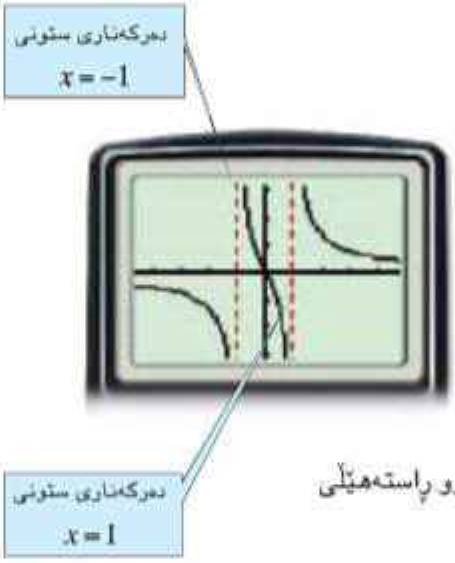
دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەی $y=\frac{2x}{x^2-1}$ بدۆزەوە.

شیکار

ژێرە شیتەڵبکە $y=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$

دوو ژمارەی قەدەغەکراوی نەخشەکە بریتین لە -1 و 1

لەبەر ئەوەی هیچ کۆڵکەیەکی ژێرە کۆڵکەی سەرەش نییە بۆیە $x=1$ و $x=-1$ دوو دەرکەناری ستوونی نەخشەکەن.



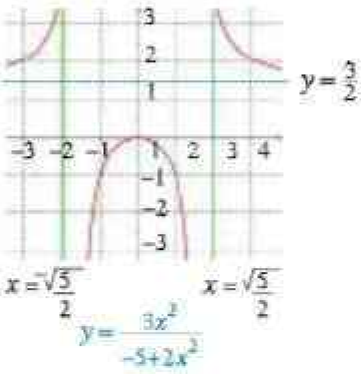
ساغبکەوە بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی وێنەی نەخشەی $y=\frac{2x}{x^2-1}$ بکێشە. دڵنیا بکە کە هەردوو ڕاستەهێڵی $x=1$ و $x=-1$ دەرکەناری ستوونین.

هەوڵبدە دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەی $y=\frac{x}{x^2+5x+6}$ بدۆزەوە

خاڵی چاودێری نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە کە سەرەی 1 بێت و ڕاستەهێڵەکانی $x=2$ و $x=-2$ دەرکەنارە ستوونییەکانی بن.

دەركەنارە ئاسۆييەكان Horizontal Asymptotes

بەسوود وەرگرتن لە هێڵكاری ڕوونكردنەوەيی نەخشەی $y=\frac{3x^2}{-5+2x^2}$ دەتوانين دەركەنارە ئاسۆييەكانی نەخشە ڕێژەييەكە دياری بكەين. لەوێنەكەوە دەردەكەوێت ڕاستە هێڵی $y=\frac{3}{2}$ دەركەناری ئاسۆيی نەخشەكەيە، ئەم دوو خشتەيەی خوارەوە دەری دەخەن هەتا x دووردەكەوێتەوە لە سفر بە ئاراستەی $+\infty$ يان $-\infty$ بەهای y لە $\frac{3}{2}$ نزيك دەبێتەوە.



x	y
-10	1.5385
-20	1.5094
-30	1.5042
-40	1.5023
-50	1.5015
-60	1.501
-70	1.5008

بەهای x لەسفر دوور دەكەوێتەوە بە ئاڕاستەی $-\infty$

بەهای y نزيك دەبێتەوە $\frac{3}{2}$

بەهای y لە $\frac{3}{2}$ نزيك دەبێتەوە

x	y
10	1.5385
20	1.5094
30	1.5042
40	1.5023
50	1.5015
60	1.501
70	1.5008

بەهای x لەسفر دوور دەكەوێتەوە بە ئاڕاستەی $+\infty$

ئەگەر پلەی سەرەی نەخشەكە وپلەی ژێرەی نەخشەكە يەكسان بن ئەوا دەتوانيت هاوكۆڵكەی ڕادە سەرەكييەكان هەردووكيان بەكاربهێنێت (بۆ سەرە 3 و بۆ ژێرە 2) بۆ نووسينی هاوكێشەی دەركەناری ئاسۆيی نەخشەكە $y=\frac{3}{2}$.

دەركەنارە ئاسۆييەكان Horizontal Asymptotes

- ئەگەر پلەی سەرە لە پلەی ژێرە بچووكتر بوو ئەوا ڕاستە هێڵی $y=0$ دەركەناری ئاسۆيی نەخشەكەيە.
- ئەگەر پلەی سەرە لە پلەی ژێرە گەورەتر بوو ئەوا نەخشەكە دەركەناری ئاسۆيی نييە.
- ئەگەر پلەی سەرە وژێرە يەكسانبوون و m هاوكۆڵكەی ڕادەی سەرەكی سەرە و n هاوكۆڵكەی سەرەكی ژێرە بێت، ئەوا ڕاستە هێڵی $y=\frac{m}{n}$ دەركەناری ئاسۆيی نەخشەكەيە.

نموونە 4

دەركەنارە ئاسۆيی وستوونييەكانی نەخشەی $y=\frac{x}{x^2-2x-3}$ بدۆزەوە.

شيكار

1. بۆ دۆزينەوەی دەركەناری ستوونی ژێرە شيتەڵبكە.

$$y=\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{2x}{(x-3)(x+1)}$$

لەبەر ئەوەی هەردوو كۆڵكەكانی ژێرە نابنە كۆڵكەی سەرە كەواتە نەخشەكە دوو دەركەناری ستوونی هەيە. كەبريتييە لە دوو ڕاستەهێڵی $x=3$ و $x=-1$.

2. لەبەر ئەوەی پلەی سەرە بچووكترە لە پلەی ژێرە ،ئەوا نەخشەكە تەنها يەك دەركەناری ئاسۆيی هەيە كە بريتيە لە ڕاستەهێڵی $y=0$.

ساغبكەرەوە

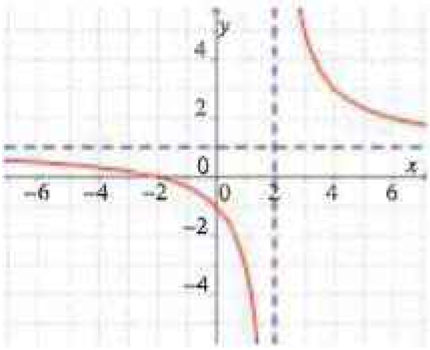
وێنەی هێڵی ڕوونكردنەوەيی $y=\frac{x}{x^2-2x-3}$ بكێشە و دەركەنارەكان دياربكە.

بەکارهێنانی دەرکەنارەکان بۆکێشانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی
Using Asymptotes to Graph

لە نموونەی 5 دا. ئەوە فێردەبن چۆن دەرکەنارەکان بەکاربێنن بۆ کێشانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی ڕێژەیی.

نموونە 5 هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x+2}{x-2}$ بکێشە ودەرکەنارە ئاسۆیی وستوونییەکانی لەسەر دیاریبکە

شیکار هاوکێشە دەرکەنارەکان بنووسە پاشان و وێنەی بکێشە، یەك دەرکەناری ستوونی هەیە هاوکێشەکەی $x=2$ ویەك دەرکەناری ئاسۆیی هەیە هاوکێشەکەی $y=1$ خشتەیەك دروستبکە بۆ دیارکردنی ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە.



x	-1	0	1	3	4	5
y	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$

پاشان خاڵەکان لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان دیاریبکەو وێنەکە بکێشە بە گەیاندنی خاڵەکان لەهەر لایەکیدا بە چەماوەیەکی گونجاو.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن ژمارە قەدەغەکراوەکانی نەخشەیەکی ڕێژەیی دیاریدەکەیت.

2 چۆن دەزانیت کۆڵکەی $x-a$ بۆ ژێرەی نەخشەیەکی ڕێژەیی دەرکەناری ستوونی دیاریدەکات یان نا.

3 چۆن دەرکەنارەکان بەکاردەهێنێت بۆ کێشانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x-5}{x-3}$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 **کیمیا** بەگەڕانەوە بۆ نموونەی یەکەمی سەرەتای وانەکە لەسەر ڕێژەی سوێری. هاوکێشەی ئەو نەخشەیە بنووسە کە ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە دیاریدەکات. کاتێك ئاسۆ $x\ ml$ ئاوی دڵۆپێنراو بۆ $90\ ml$ لە گیراوەکە زیاد بکات.بۆ ئەوەی ڕێژەی سوێریەکەی ببێتە 15% ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە دەبێتە چەند؟ ئەگەر ئاسۆ $150ml$ ئاوی دڵۆپێنراو بۆ گیراوە بنەڕەتییەکە زیادبکات.

5 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{2x^2-5}{x^2-7x+12}$ دیاریکە.

دەرکەنارەکانی ئەم نەخشانە دیاریکە

6 $f(x)=\frac{3x-1}{4x^2-9}$

7 $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-9}$

8 $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x^2-5x+6}$

9 هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ بکێشە و هەموو دەرکەنارەکانی دیاریکە.

ڕاهێنان وچێبەجێکردن

ئەم نەخشانە ڕێژەیین یان نا؟ئەگەر ڕێژەیین بوارەکەی دیاریکە.ئەگەر نا هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

10 $f(x)=\frac{x}{2x-7}$

11 $f(x)=\frac{x+2}{2x}$

12 $f(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}$

13 $f(x)=\frac{x}{(2x-7)(x+3)}$

14 $f(x)=\frac{5^x}{x^5}$

15 $f(x)=\frac{|x^2-4|}{|x+2|}$

دەرکەنارەکانی ئەم نەخشە ڕێژەییانە دیاریکە

16 $f(x)=\frac{3x+5}{x-2}$

17 $f(x)=\frac{x+2}{2x^2}$

18 $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

19 $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^2+5x+6}$

20 $f(x)=\frac{x^2-16}{4-5x+x^2}$

21 $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

بوار و دەرکەنارەکانی ئەم نەخشانە دیاریکە

22 $f(x)=\frac{2x-2}{2x+2}$

23 $f(x)=\frac{2x}{2x(x-5)}$

24 $f(x)=\frac{(3x-1)(x+2)}{x+2}$

25 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+4x-21}$

26 $f(x)=\frac{3x-1}{9x^2-36}$

27 $f(x)=\frac{7x+8}{x^2-10x+25}$

28 $f(x)=\frac{5x^2+1}{5x^2+3}$

29 $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$

30 $f(x)=\frac{x(x^2-4)}{x^2-7x+6}$

31 $f(x)=\frac{2x+1}{x^3-27}$

ئەو نەخشە ڕێژەییانە بنووسە کە ئەم دەرکەنارانەیان هەیە

32 $x=2$ و $y=3$

33 $x=-2$ و $y=0$

34 $x=1$ و $x=-1$ و $y=2$

35 $x=2$ و $x=-3$ و $y=-1$

بەرەنگاربونەوە

36 بەهای b لەنەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+b}$ بدۆزەوە کاتێك نەخشەکە تەنها یەك دەرکەنارەی هەبێت، کاتێك نەخشەکە هیچ دەرکەنارێکی نەبێت بەهای b دیاریکە؟

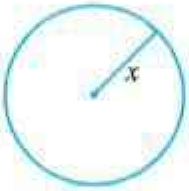
کرێدان

37 ئەندازە لە لاکێشەی بەرامبەردا.

أ نەخشەی ڕێژەیی کە ڕێژەی چێوە بۆ ڕووبەر دەنوێنێت بنووسە.

ب بەهاکانی x چەند دەبن کە بۆ ئەوەی هەژمێرکردنی چێوە و ڕووبەر لەتوانادا بێت. بواری ئەو نەخشەیەی نوسیوتە دیاریکە.

38 ئەندازە لە بازنەی بەرامبەردا.



أ نەخشەی ڕێژەیی کە ڕێژەی چێوە بۆ ڕووبەر دەنوێنێت بنووسە.

ب بەهاکانی x چەند دەبن بۆ ئەوەی هەژمێرکردنی چیوە و ڕووبەر لە توانادا بێت. بواری ئەو نەخشەی نوسیوتە دیاریکە.

39 **کیمیا** تارا $x\ ml$ ئاوی دڵۆپێنراوی بۆ $72ml$ لە گیراوەیەك کە ڕێژەی سوێرییەکەی 8% بێت زیادکرد.

أ نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە کە ڕێژەیی سوێری گیراوە نوێیەکە دەنوێنێت.

ب ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە چەندە، ئەگەر زانیت تارا $720ml$ ئاوی دڵۆپێنراوی بۆ گیراوەکە زیادکرد.

40 **ئابووری** ژوان دوکانێکی فرۆشتنی گوڵی هەیە خەرجی نەگۆڕی دوکانەکەی حەفتانە 950 هەزار دینارە، خەرجی چەپکە گوڵێك 42.45 هەزار دینارە.

أ نەخشەی g بنووسە کە خەرجی گشتی بنوێنێت لەماوەی حەفتەیەکدا، ئەگەر دوکانەکە x چەپکە گوڵی فرۆشتبێت.

ب نەخشەیەك بنووسە کە خەرجی گشتی هەر چەپکە گوڵێك لەماوەی حەفتەیەکدا بنوێنێت.

41 **فیزیا** هەرچەند مرۆڤ بەرەو بۆشایی ئاسمان بەرزبێتەوە کێشەکەی کەمدەکات. زاناکان پەیوەندییەکیان دۆزیوەتەوە لە نێوان کێشی مرۆڤ W لەسەر زەوی و کێشەکەی W_0 لە بۆشایدا کاتێك لە بەرزی $h\ Km$ بێت بریتییە لە $W(h)=W_0\left(\frac{6400}{6400+h}\right)^2$.

أ نەخشەی W نەخشەیەکی ڕێژەییە، ئەمە ڕوونبکەوە.

ب کێشی مرۆڤێك لەسەر ڕووی زەوی 75 Kg خشتەیەك دروستبکە کێشەکەی بنوێنێت لەبەرزی $10Km$ و $20Km$ و $100Km$ دا.

ج لەبەرزی چەند کیلۆمەتردا کێشی مرۆڤێك دەبێتە نیوەی کێشەکەی لەسەر زەوی بە نزیکەیی؟

ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەمانە شیکاربکە.

42 $|5x-6|>2$ **43** $|x+5|\geq 7$

44 $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|\leq\frac{7}{2}$ **45** $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|\geq-\frac{7}{2}$

ئەم بڕانە بە شێوەی گشتی بڕی دووجای ax^2+bx+c بنووسە

46 $-12x(3x-2)$ **47** $(3x-1)(6x-7)$ **48** $(4-5x)(x-9)$

49 $(x-5)(2x+3)$ **50** $(3x-4)(3x+4)$ **51** $-4(x-3)^2$

ئەم بڕانە شیتەڵبکە.

52 $3x^2-6x$ **53** $1-25y^2$ **54** $9x^2-49$

55 $x^2-5x-24$ **56** $x^2+12x+36$ **57** $x^2-16x+64$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەمانە بە شێوەیەکی سادە بنووسە.

58 $\frac{9}{3}$ **59** $\frac{x^2}{x}$ **60** $\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

وانەی 3

لێکدان و دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان

Multiplying and Dividing Rational Expressions

بۆچی

شیکاری هەندێ پرسیار پێویستی بە لێک دان و دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان هەیە. وەك تێچوون وداهاتی ئاهەنگێك بۆ کۆکردنەوەی پارەتی.

ئامانجەکان

- برە ڕێژەییەکان لێکدەدات و دابەشدەکات.
- برە ڕێژەییەکان سادەدەکاتەوە.

جێبەجێ کردن

کاری خێراخوازی

بەبۆنەی جەژنی نەورۆز، یەکێك لە ئامادەییەکان ئاهەنگێکی خێرخوازی ساز دەکات بۆ کۆکردنەوەی برێ پارە و خەرجکردنی بۆ کەم دەرامەتەکان. خوێندکارانی ڕێکخەری ئاهەنگەکە بڕیاریان دا کۆمەڵێك شاڵ ئامادە بکەن وبەئامادەبووانی بفرۆشن، دوای لێکۆڵینەوە لە داهاتی ئەو پارەیەی لە ئاهەنگەکەوە دەستیان دەکەوێت ئەم ڕێژەیان بەکارهێنا:

$$\frac{\text{نرخی فرۆشتنی یەك شاڵ}}{\text{تێچوونی ئامادەکردنی یەك شاڵ}}$$

خوێندکاران گەیشتنە ئەو ئەنجامەی کە تێچوونی بەرهەمی x شاڵ دەکاتە $0.8x+25$ بۆیە بڕیاریاندا نرخی هەر شاڵێك بە 3 هەزار دینار دابنێن. پێویستە چەند شاڵ بفرۆشن بۆ ئەوەی ڕێژەی نرخی یەك شاڵ بۆ تێچوونی ئامادەکردنی یەك شاڵ لە %1.5 کەمتر نەبێت.

کورتکردنەوەی برە ڕێژەییەکان — Symplifying Rational Expressions

بۆ کورتکردنەوەی برە جەبرییەکان سەرە وژێرە دابەشی گەورەترین کۆلکەی هاوبەشی هەردووکیان دەکرێت. لەم بارەشدا دەوترێت برەکە بە سادەترین شێوەدایە.

نموونە 1 ئەم برە کورت بکەوە $\frac{x^2+5x-6}{x^2-36}$.

شیکار

$$\frac{x^2+5x-6}{x^2-36}=\frac{(x+6)(x-1)}{(x-6)(x+6)}$$

سەرەوژێر شیتەڵبکە

$$=\frac{(x+6)(x+1)}{(x-6)(x+6)}$$

هەریەك لەسەرە و ژێرە دابەشی کۆلکەی هاوبەشبکە

$$=\frac{x-1}{x-6}$$

تێبینی ئەوە بکە هەر دوو ژمارەی 6 و 6− دوو ژمارەی قەدەغەکراوی برە بنەڕەتیەکەیە

هەوڵبدە برى $\frac{b^2-49}{b^2-8b+7}$ بەسادەترین شێوە بنووسیت.

Multiplying Rational Expressions — لێکدانی برە ڕێژەییەکان

لێکدانی برە ڕێژەییەکان لە لێکدانی ژمارە ڕێژەییەکان دەچێت.

لێکدانی ژمارە ڕێژەییەکان

$$\frac{15}{4}\times\frac{14}{9}=\frac{3\times5}{4}\times\frac{2\times7}{9}=\frac{35}{6}$$

لێکدانی برە ڕێژەییەکان

$$\frac{15}{x^2}\times\frac{4x^4}{21}=\frac{3\times5}{x^2}\times\frac{4x^4}{3\times7}=\frac{20x^2}{7}$$

نموونە 2 $\frac{3}{4x^2}\times\frac{4x^3}{21}\times\frac{14}{4x^5}$ بە سادەترین شێوە بنووسە

شیکار

$$\frac{3}{4x^2}\times\frac{4x^3}{21}\times\frac{14}{4x^5}=\frac{3\times4\times2\times7}{4\times3\times7\times2\times2}\times\frac{x^3}{x^7}=\frac{1}{2x^4}$$

هەوڵبدە بڕی $\frac{28}{4b^3}\times\frac{4b^5}{21}\times\frac{3}{49b^4}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

بۆ لێکدانی دوو بڕی ڕێژەیی، ڕێساکانی لێکدانی کەرتەکان بەکاربێنە

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}\quad b\neq0\quad d\neq0$$

دەتوانیت ئەنجامی لێکدانەکە بە کورتکردنەوەی کۆڵکە هاوبەشەکانی سەرەوژێرە سادەبکەیت.

نموونە 3 $\frac{x+1}{x^2+2x-3}\times\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$ بە سادەترین شێوە بنووسە

شیکار

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3}\times\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}=\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}\times\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+1)}$$

$$=\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}=\frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

هەوڵبدە بڕی $\frac{x^2-25}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2-4}{x^2+2x-15}$ سادە بکە.

سەرنجێکی ڕەخنەگرانە زریان بڕی $\frac{2x+3}{5y+3}$ کورتکردەوە بە شێوەی $\frac{2x+3}{5y+3}=\frac{2x}{5y}$ ئایا ڕاستیکردووە؟ ڕوونیبکەوە.

Dividing Rational Expressions — دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان

دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان لە دابەشکردنی ژمارەی ڕێژەییەکان دەچێت.

دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان	دابەشکردنی ژمارە ڕێژەییەکان
$\frac{6}{x^5}\div\frac{12}{x^3}=\frac{6}{x^3}\times\frac{x^5}{12}=\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}x^2$	$\frac{6}{8}\div\frac{12}{32}=\frac{6}{8}\times\frac{32}{12}=\frac{6}{8}\times\frac{32}{12}=\frac{4}{2}=2$

بۆ دابەشکردنی بڕێکی جەبری بەسەر یەکێکی تر، بڕی یەکەم لەهەڵگەڕاوەی دووەمیان بدە $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ $b\neq0$ $c\neq0$ $d\neq0$

دەتوانیت ئەنجامی لێکدان کورتبکەیتەوە بە کورتکردنەوەی کۆڵکە هاوبەشەکان لە نێوان سەرەوژێرە.

نموونە 4 بڕی $\frac{x-4}{(x-2)^2} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2-4}$ سادەبکە

شیکار

$$\frac{x-4}{(x-2)^2} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2-4} = \frac{x-4}{(x-2)^2} \times \frac{x^2-4}{x^2-3x-4}$$

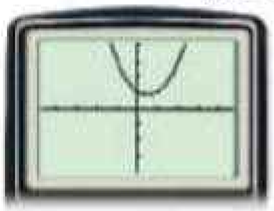
$$= \frac{x-4}{(x-2)(x-2)} \times \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-4)}$$

$$= \frac{x+2}{(x-2)(x+1)} \text{ یان } \frac{x+2}{x^2-x-2}$$

هەوڵبدە بڕی $\frac{(x+3)^2}{(x-5)} \div \frac{x^2-9}{x^2-8x+15}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

بیرکردنەوەی ڕەخنە گرانە ئارام بڕی $\frac{1}{x-5} \div \frac{x-5}{7}$ بەم شێوەیە کورت کردەوە $\frac{1}{x-5} \div \frac{x-5}{7} = 1 \div 7 = 1 \times \frac{7}{1} = 7$
ئایا ئەوە ڕاستە؟ ئەو ڕوونبکەوە.

شیکاری پرسیارەکان دەتوانین هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی بەکار بێنین بۆ زانینی ئەوەی ڕادەدارێك شیتەڵ دەبێت یان نا.
بۆ ئەوەی بزانیت بڕێکی وەك x^2-x+1 شیتەڵ دەبێت یان نا هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=x^2-x+1$ بکێشە و دڵنیا بە لەوەی تەوەرەی سینی دەبڕێت یان نا.



لەبەر ئەوەی ئەم چەماوەیە تەوەرەی x نابڕێت واتا نەخشەکە هیچ سفرێکی نییە لە ژمارە ڕاستییەکاندا بۆیە شیتەڵ نابێت.
لەوەشەوە دەردەکەوێت بڕی ڕێژەیی $\frac{x-4}{x-1} \times \frac{x^2-x+1}{x^2}$ سادەتر نابێتەوە.

بڕە ڕێژەییەئاڵۆزەکان Complex Rational Expressions

بڕە ڕێژەییە ئاڵۆزەکان.ئەو بڕانەن کە لەسەرە یان ژێرە یان لەهەردووکیاندا بڕی ڕێژەیی هەبێت.

نموونە 5 بڕی $\dfrac{\frac{4a^2-1}{a^2-4}}{\frac{2a-1}{a+2}}$ بەسادەترین شێوە بنووسە.

شیکار

$$\dfrac{\frac{4a^2-1}{a^2-4}}{\frac{2a-1}{a+2}} = \frac{4a^2-1}{a^2-4} \div \frac{2a-1}{a+2}$$ سەرە دابەش ژێرە بکە.

$$= \frac{4a^2-1}{a^2-4} \times \frac{a+2}{2a-1}$$ یەکەم لە هەڵگەڕاوی دووەم بدە

$$= \frac{(2a-1)(2a+1)}{(a-2)(a+2)} \times \frac{a+2}{2a-1}$$ شیتەڵبکە

$$= \frac{(2a-1)(2a+1)(a+2)}{(a-2)(a+2)(2a-1)}$$ کۆڵکە هاوبەشەکان کورتبکەوە

$$= \frac{2a+1}{a-2}$$

هەوڵبدە بڕی $\dfrac{\frac{(x+2)^2}{x-3}}{\frac{x^2-4}{(x-3)^2}}$ سادەبکە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بڕی $\dfrac{\frac{x+y}{x-y}}{\frac{y+x}{y-x}}$ سادە بکە بە بەکارهێنانی هەژمێری هزری.

نموونە 6 بەگەڕانەوە بۆ نموونەی سەرەتای وانەکە. خوێندکاران پێویستە چەند شاڵ بفرۆشن بۆ ئەوەی ڕێژەی نرخی یەك شاڵ بۆ نرخی تێچوونەکەی لە 1.5 کەمتر نەبێت؟

شیکار

$$\frac{\text{نرخی فرۆشتنی یەك شاڵ}}{\text{نرخی تێچوونی یەك شاڵ}} = \frac{3}{\frac{0.8x+25}{x}}$$

بڕە ئاڵۆزەکە سادە بکەوە $\frac{3}{\frac{0.8x+25}{x}} = 3\times\frac{x}{0.8x+25} = \frac{3x}{0.8x+25}$

ئەخشەی $y=\frac{3x}{0.8x+25}$ لە بژمێری ڕوونکردنەوەییدا تۆماربکە.

لەخشتەکەوە دەردەکەوێت خوێندکاران پێویستە بە لایەنی کەمەوە 21 شاڵ بفرۆشن.

ڕاهێنــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 لێکدانی بڕە ڕێژەییەکان ولێکدانی ژمارە ڕێژەییەکان لە چیدا لێکدەچن؟

2 دابەشکردنی بڕە ڕێژەییەکان ودابەشکردنی ژمارە ڕێژەییەکان لە چیدا لێکدەچن؟

3 چۆن ئەم بڕە ئاڵۆزە کورت دەکەیتەوە $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-1}}{\frac{x}{x^2+2x-3}}$ ؟

بەراوردی بەها قەدەغەکراوەکانی x لە بڕە ئاڵۆزەکە وبەها قەدەغەکراوەکانی بڕە سادەکراوەکە بکە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم بڕە ڕێژەییانە سادەبکە.

4 $\dfrac{x^2-25}{x^2-10x+25}$

5 $\dfrac{4x^2}{5}\times\dfrac{30}{x^4}\times\dfrac{30x^3}{60}$

6 $\dfrac{x^2+8x+12}{x^2+2x-15}\times\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+9x+18}$

7 $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+6x+8}\div\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

8 $\dfrac{\frac{2x-6}{x^2+9x+20}}{\frac{x^2-9}{x^2+5x+4}}$

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم بڕە ڕێژەییانە سادەبکە.

9 $\dfrac{4x^2+8x+4}{x+1}$

10 $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

11 $\dfrac{15}{x^2}\times\dfrac{x^5}{12}\times\dfrac{4}{x}$

12 $\dfrac{36x}{9x^2}\times\dfrac{12x^7}{2x}\times\dfrac{5}{x^2}$

13 $\dfrac{x^2-10x+9}{x^2+2x-3}$

14 $\dfrac{-x^2-x+6}{x^2-5x+6}$

15 $\dfrac{x}{9x^8}\times\dfrac{x^7}{2x}\times\dfrac{45}{x^4}$

16 $\dfrac{-5}{x^3}\times\dfrac{-x^5}{3}\times\dfrac{-4}{x}\times\dfrac{20}{x^3}$

17 $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-3x+2}\times\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-10}$

18 $\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+4}\times\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$

19 $\dfrac{2x^2-2x}{x^2-9}\div\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

20 $\dfrac{4x^2+20x}{9+6x+x^2}\div\dfrac{x+5}{x^2-9}$

21 $\dfrac{x^2}{4}\times\left(\dfrac{xy}{6}\right)^{-1}\times\dfrac{2y^2}{x}$

22 $2xy\div\dfrac{2x^2}{y}\div\dfrac{2y^2}{x}$

ئەم بڕانە سادە بکە

23 $\dfrac{\frac{(x+2)^2}{(x+3)^2}}{\frac{x+3}{x+2}}$

24 $\dfrac{\frac{x^2-4}{x^2-9}}{\frac{(x-2)^2}{(x-3)^2}}$

25 $\dfrac{\frac{x^2-9x+14}{x^2-6x+5}}{\frac{x^2-8x+7}{x^2-7x+10}}$

26 $\dfrac{\frac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8}}{\frac{x^2+9x+18}{x^2+7x+10}}$

27 $\dfrac{2x+3}{x-1}\div\dfrac{\frac{x}{x-1}}{\frac{3x}{2x+3}}$

28 $\dfrac{\frac{x+3}{x-1}}{x(x-1)^{-1}}$

29 $\dfrac{1-7x^{-1}-18x^{-2}}{1-4x^{-2}}$

30 $\dfrac{1+12x^{-1}+27x^{-2}}{x^{-1}+9x^{-2}}$

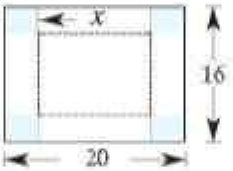
بەرەنگاری

31 بڕێکی ڕێژەیی R بنووسە بە جۆرێك کە پلەی سەرە وژێرەکەی 2 بێت وهاوکۆلکەی ڕادە سەرەکیەکەی 1 بێت و پاسادانی ئەم پەیوەندیە بکات:

$$\frac{-10+3x+x^2}{15-18x+x^2}\times R=\frac{x-2}{x-3}$$

گرێدان

32 ئەندازە. لاوەند دەیەوێ کارتۆنێکی سەرکراوە بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێکی لاکێشەیی درێژیەکەی 20cm وپانییەکەی 16cm دروستبکات. پێویستە چوار گۆشەی بچووك درێژی لایەکی x cm بێت لەهەر یەك لە سەرەکاندا ببڕێت. پاشان لاکانی بنوشتێنێتەوە.



أ) ڕوونبکەوە کە بڕی $x(20-2x)(16-2x)$ قەبارەی قوتووە (سەر کراوەکە) دەنوێنێت.

ب) ڕوونبکەوە کە بڕی $4x^2-320$ ڕووبەری گشتی ناوەوەی قوتووە(سەر کراوەکە) دەنوێنێت.

ج) ڕێژەی نێوان قەبارەی قوتووەکە بۆ ڕووبەرە گشتیەکەی بنووسە. ئەو بڕە سادەبکە.

د) ڕێژە دەستکەوتووەکەی پرسیاری پێشوو چۆن دەگۆڕێت ئەگەر x لە سفرەوە تا 4 زیاد بکات؟

جێبەجێکردنەکان

33 **ئابووری** ئالان دوکانێکی بچووکی بابۆڵەی هەیە تێچوونی مانگانەی ئیشپێکردنی 400 000 دیناره تێکڕای تێچوونی یەك بابۆڵەش 4.45 هەزار دینارە.

أ له لیستی نرخەکانەوه ناوەندە ژمێرەیی بابۆڵەیەك چەندە؟

ب ئەگەر ئالان لە مانگی پێشودا x بابۆڵەی فرۆشتبێت، بڕی (m) بنووسە کە پەیوەندی نێوان تێچوونی گشتی وتێچوونی بابۆڵەکان بنوێنێت.

ج بڕێك بنووسە ڕێژەیی قازانجی ئالان لە فرۆشتنی x بابۆڵە بۆ تێچوونی گشتی دەربخات.

ڕوانینێك بۆ دواوە

هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکان بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە، کە بەخاڵی پێدراوەکەدا دەڕوات وئەستوونە لەسەر ڕاستەهێڵە پێدراوەکە

34 $y=-6x-1$ ؛ $(8, -4)$ **35** $y=\frac{1}{5}x-11$ ؛ $(3, 5)$

ئەم بڕانە بە شێوەی گشتی ڕادەدار بنووسە

36 $x^2(x^3-x^2-6x+2)$ **37** $(x-2)(3x^3-6x-x^2)$

ئەم بڕانە شیتەڵبکە

38 $8x^2-4x$ **39** $12x^2-3x+6$ **40** $12-4x-22x^2$

41 x^3-1 **42** $125x^3+27$ **43** x^3-6x^2-8x

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

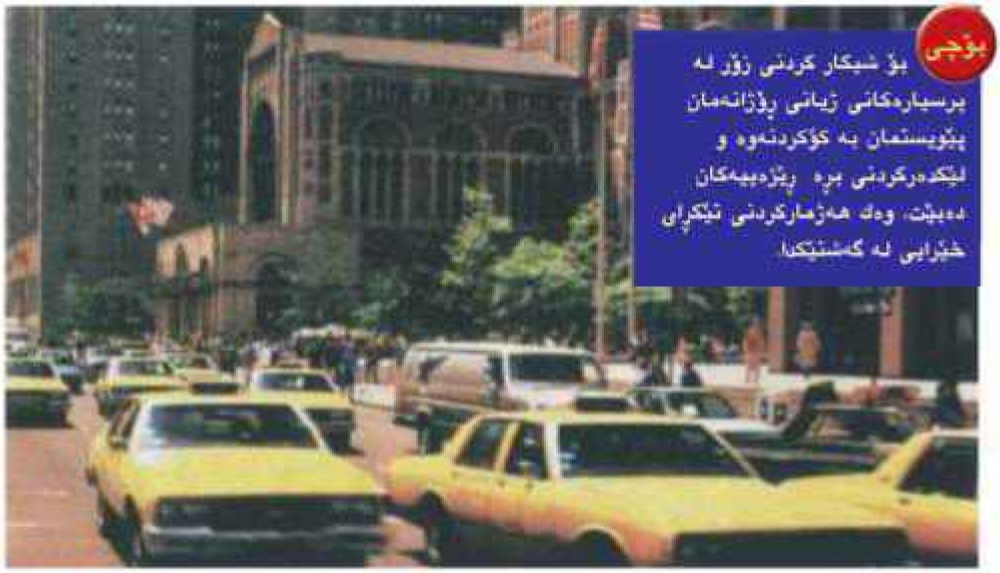
ئەمانە سادەبکە

44 $\frac{5}{8}+\frac{1}{8}$ **45** $\frac{3}{x}+\frac{1}{x}$ **46** $\frac{3}{2x}+\frac{1}{x}$ **47** $\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x}$

وانەی 4

کۆکردنەوە و لێدەرکردنی برە ڕێژەییەکان

Adding and Subtracting Rational Expressions



بۆچی

بۆ شیکار کردنی زۆر لە پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانەمان پێویستمان بە کۆکردنەوە و لێکدەرکردنی برە ڕێژەییەکان دەبێت، وەك هەژمارکردنی تێکڕای خێرایی لە گەشتێکدا.

ئامانجەکان

- برە ڕێژەییەکان کۆدەکات و لێدەردەکات و ئەنجامەکەی بەسادەترین شێوە دەنووسێت.

جێبەجێکردنەکان

گەشت

تاکسیەك گەشتیارێکی لە فرۆکەخانەوە گواستەوە بۆ ماڵەوەیان بە خێراییەك تیکڕاکەی 55km/h بێت ولە ڕێگای گەڕانەوەی بۆ فرۆکەخانە، بە هۆی قەڵەباڵغی هاتووچۆوەتێکڕای خێراییەکەی 45km/h بێت. تێکڕای خێرایی ئۆتۆمبیلەکە لە چوون وگەڕانەوەدا چەند بووە؟ پێویستیت بە کۆکردنەوەی دوو بڕی ڕێژەیی دەبێت. نەك ناوەڕاستی هەردوو خێراییەکە کە لەوانەیە وا بیری لێ بکەیتەوە. کۆکردنەوەی دوو بڕی ڕێژەیی کە هەمان ژێرەیان هەبێت وەك کۆکردنەوەی دوو ژمارەی ڕێژەیی وایە هەمان ژێرەیان هەبێت.

ژمارە ڕێژەییەکان	برە ڕێژەییەکان
$\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1+3}{7}=\frac{4}{7}$	$\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^2}=\frac{3+5}{x^2}=\frac{8}{x^2}$
ژێرە هاوبەش	ژێرە هاوبەش

نموونە 1 ئەمانە سادەبکە.

أ $\frac{2x}{x+3}+\frac{5}{x+3}$

ب $\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}$

شیکار

أ $\frac{2x}{x+3}+\frac{5}{x+3}=\frac{2x+5}{x+3}$

ب $\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$

تێبینی ئەوە بکە $x=3$ ژمارەیەکی قەدەغەکراوە بۆ گۆڕاوی x لە برە بنەڕەتییەکەدا.

هەوڵبدە ئەمانە سادەبکە.

أ $\frac{3x-1}{2x-1}+\frac{5+2x}{2x-1}$

ب $\frac{2x}{x-5}-\frac{10}{x-5}$

بۆ کۆکردنەوەی دوو بڕی ڕێژەیی ژێرە جیاواز، پێویستە ژێرەی هاوبەش دوو ژێرەکە بدۆزیتەوە. بچووکترین ژێرەی هاوبەش بۆ دوو بڕی ڕێژەیی بریتیە لە بچووکترین چەند جارەی هاوبەشی ژێرەکان، ڕادەدارێکە بە پلەیەکی کەمتر کە دابەش هەردوو ژێرەکە دەبێت.

دۆزینەوەی بچووکترین ژێرەی هاوبەش بۆ دوو بڕی ڕێژەیی لە دۆزینەوەی بچووکترین ژێرەی هاوبەشی دوو ژمارەی ڕێژەیی دەچێت. بەراوردی بەکارهێنانی ئەم کردارە بکە بۆ ژمارە ڕێژەییەکان وبڕە ڕێژەییەکان.

ژمارە ڕێژەییەکان

$$\frac{7}{300}+\frac{1}{90}=\frac{7}{300}\times\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{90}\times\left(\frac{10}{10}\right)=\frac{21+10}{900}=\frac{31}{900}$$

بچووکترین ژێرە هاوبەش

بڕە ڕێژەییەکان

$$\frac{7}{3x^2}+\frac{1}{9x}=\frac{7}{3x^2}\times\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{9x}\times\left(\frac{x}{x}\right)=\frac{21+x}{9x^2}$$

بچووکترین ژێرە هاوبەش

کۆکردنەوە و لێدەرکردنی بڕە ڕێژەییەکان
Adding and Substracting Rational Expressions

بۆ ئەوەی دوو بڕی ڕێژەیی کۆبکەیتەوە ولە یەکتریان دەربکەیت، بچووکترین ژێرەی هاوبەش بدۆزەوە ودوو بڕەکە دووبارە بنووسە وبە بەکارهێنانی بچووکترین ژێرەی هاوبەشیان، پاشان کۆبکەوە یان لێدەربکە وئەنجامە دەستکەوتووەکە بە سادەترین شێوە بنووسە.

نموونە 2

$\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{x^2-4}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

شیکار

$$\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{x^2-4}=\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{(x-2)(x+2)}$$

بچووکترین ژێرەی هاوبەشی بریتیە لە$(x-2)(x+2)$

$$=\frac{x}{x-2}\times\frac{x+2}{x+2}+\frac{-8}{(x-2)(x+2)}$$

دوو بڕەکە کۆبکەوە

$$=\frac{x(x+2)-8}{(x-2)(x+2)}$$

ژێرە لەسەر شێوەی گشتی بنووسە

$$=\frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x+2)}$$

سەرە شیتەڵبکە

$$=\frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

کورتبکەوە

$$=\frac{x+4}{x+2}$$

هەوڵبدە $\frac{x}{x+5}+\frac{-50}{x^2-25}$ کورتبکەوە

خاڵی چاودێری ✓ چۆن شیتەڵکردنی ڕادەدارەکان یارمەتیت دەدات بۆ کۆکردنەوە ولێکدەرکردنی دوو بڕی ڕێژەیی؟ ئەمە بەکردار دیاریکە لە سادەکردنی بڕی $\frac{x}{x-3}+\frac{5}{x^2-6x+9}$

نموونە 3 $\frac{6x}{3x-1}-\frac{4x}{2x+5}$ کورتبکەرەوە.

شیکار

بچووکترین ژێرەی هاوبەش بریتیە لە $(3x-1)(2x+5)$

$$\frac{6x}{3x-1}-\frac{4x}{2x+5}=\frac{6x}{3x-1}\times\left(\frac{2x+5}{2x+5}\right)-\frac{4x}{2x+5}\times\left(\frac{3x-1}{3x-1}\right)$$

$$=\frac{6x(2x+5)}{(3x-1)(2x+5)}-\frac{4x(3x-1)}{(3x-1)(2x+5)}$$

$$=\frac{12x^2+30x}{(3x-1)(2x+5)}-\frac{12x^2-4x}{(3x-1)(2x+5)}$$

$$=\frac{34x}{(3x-1)(2x+5)}=\frac{34x}{6x^2+13x-5}$$

خاڵی چاودێری ✓ ژمارە قەدەغەکراوەکان لە برە بنەڕەتیەکەدا و ژمارە قەدەغەکراوەکان لە برە سادەکراوەکەدا دیاریبکە. ئایا هەمان ژمارەن؟ هۆکەی ڕوونبکەرەوە.

هەوڵبدە $\frac{6}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2-4}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

هەندێ جار وا پێویست دەکات برە ئاڵۆزەکان بە شێوەی برە ڕێژەییەکان بنووسیتەوە بۆ ئەوەی بتوانیت کۆیان بکەیتەوە ولەیەکتریان دەربکەیت وەك لە نموونەی 4 دادەرکەوێت.

نموونە 4 بڕی $\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}$ کورتبکەوە.

شیکار

لەهەر ژێرەیەك کۆکردنەوەی ولێکدەرکردن بکە

$$\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}=\frac{1}{\frac{a+1}{a}}+\frac{1}{\frac{a-1}{a}}$$

برە ئاڵۆزەکە بگۆڕە بۆ بڕی ڕێژەیی

$$=1\times\frac{a}{a+1}+1\times\frac{a}{a-1}$$

$$=\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}$$

$$=\frac{a}{a+1}\times\left(\frac{a-1}{a-1}\right)+\frac{a}{a-1}\times\left(\frac{a+1}{a+1}\right)$$

بچووکترین ژێرەی هاوبەشی بریتیە لە $(a+1)(a-1)$

$$=\frac{a^2-a}{(a+1)(a-1)}+\frac{a^2+a}{(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{2a^2}{a^2-1}$$

هەوڵبدە بڕی $\frac{a}{a-\frac{1}{a}}-\frac{a}{a+\frac{1}{a}}$ کورتبکەوە.

نموونە

5 بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکەی سەرەتای وانەکە. تێکڕای خێرایی تەکسیەکە بدۆزەوە لە ماوەی گەشتەکە (چوون وگەڕانەوە)؟

شیکار باگۆڕاوی d هێمای دووری نێوان فرۆکەخانە ومالّی گەشتیارەکە بێت و t_1 هێمای کاتی خایەنراوی گەشتەکە بێت لە فرۆکەخانە بۆ مالّی گەشتیارەکەو t_2 هێمای کاتی خایەنراوی گەڕانەوە بێت بۆ فرۆکەخانە.

$d = 55 \times t_1$ وهەروەها $d = 45 \times t_2$

بەمەش $t_1 = \frac{d}{55}$ و $t_2 = \frac{d}{45}$

بۆ هەژمێر کردنی تێکڕای گشتی خێرایی، دووری گشتی $2d$ بەسەر کاتی خایەنراوی گشتی $(t_1 + t_2)$ دابەشبکە:

$$\text{تێکڕای گشتی خێرایی} = \frac{\text{دووری گشتی}}{\text{کاتی گشتی}}$$

$v = \frac{2d}{t_1+t_2}$ لە جیاتی t_1 و t_2 بەهاکانیان دابنێ

$= \frac{2d}{\frac{d}{55}+\frac{d}{45}}$ بچووکترین ژێرەی هاوبەش بریتییە لە 495

$= \frac{2d}{\frac{9d+11d}{495}}$

$= \frac{2d}{\frac{20d}{495}}$

$= 2d \times \frac{495}{20d}$

$= 49.5$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە وا دابنێ خێرایی ئۆتۆمبیلەکە لە چوون akm/h لە کاتژمێرێك بێت وخێراییەکەی لە هاتنەوە bkm/h لە کاتژمێرێك بێت ، ڕوونیبکەوە کە تێکڕای خێرایی $\frac{a+b}{2}$ نییە.

ڕاهێنــــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 چۆن بچووکترین ژێرەی هاوبەش دەدۆزێتەوە بۆ کۆکردنەوەی $\frac{x+5}{x^2-7x+6} + \frac{x-1}{x^2-36}$ ؟

2 لەم چوار برانە دوو بڕی یەکسان هەڵبژێرە.

أ $\frac{3+7}{x^2+4}$ ب $\frac{10}{x^2} + \frac{10}{4}$ ج $\frac{3}{x^2} + \frac{7}{4}$ د $\frac{3}{x^2+4} + \frac{7}{x^2+4}$

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم برانە کورتبکەوە.

3 $\frac{3x}{x-1}+\frac{2}{x-1}$

4 $\frac{3x+5}{x+2}-\frac{x+1}{x+2}$

5 $\frac{12}{x^2-1}+\frac{4}{x+1}$

6 $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{2x+1}{x-1}$

7 $\frac{1}{1-\frac{1}{a}}$

8 **گەشت** بەگەڕانەوە بۆ نموونەی سەرەتای وانەکە، تێکرای گشتی خێرایی تەکسیەکە هەژمار بکە، ئەگەر تێکرای خێرایی چوون $52Km$ لە کاتژمێرێك و تێکرای خێرایی گەڕانەوە $38Km$ لە کاتژمێرێك بێت.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم برانە کورتبکەوە.

9 $\frac{2x-3}{x+1}+\frac{6x+5}{x+1}$

10 $\frac{7x-13}{2x-1}+\frac{x+9}{2x-1}$

11 $\frac{n+9}{4}+\frac{n-3}{2}$

12 $\frac{x+7}{3}-\frac{4x+1}{9}$

13 $\frac{x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}$

14 $\frac{2x}{x+3}-\frac{x-3}{x^2+6x+9}$

15 $\frac{-4}{x-5}+\frac{5}{x+3}$

16 $\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x-2}$

17 $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}$

18 $\frac{8}{3x-5}+\frac{7}{2x+3}$

19 $\frac{2x+3}{x+3}+\frac{x}{x-2}$

20 $\frac{x+2}{2x-1}-\frac{2x}{x-1}$

21 $x^2+\frac{2x}{3x-5}$

22 $\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{x-2}{x-1}$

23 $2x^2-1-\frac{x-1}{x+2}$

24 $\frac{\frac{3}{2x-1}}{x}$

25 $\frac{1}{\frac{3x+1}{2}}$

26 $\frac{\frac{4}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}+\frac{3}{x-1}$

27 $\frac{\frac{4}{x+2}}{\frac{x+2}{3}}-\frac{3}{x+2}$

28 $\frac{\frac{x+2}{x+5}}{\frac{x-1}{x+5}}+\frac{1}{x+1}$

29 $\frac{\frac{2x+10}{x-1}}{\frac{x+5}{x^2-1}}-\frac{4}{x+1}$

30 $\frac{1-xy^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$

31 $\frac{x-y}{x^{-1}-y^{-1}}$

32 $\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}+2(xy)^{-1}+\frac{1}{y^2}}$

ئەم برانە بۆ بڕی ڕێژەیی بگۆڕە وبەسادەترین شێوە بینووسە.

33 $\frac{3x}{x-1}+\frac{5x+2}{x-1}-\frac{10}{x-1}$

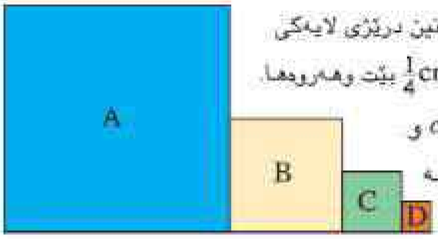
34 $\frac{7x}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}-\frac{6}{x^2-1}$

35 $\frac{7}{x+7}+\frac{-x}{x-7}-\frac{2x}{x^2-49}$

36 $(x-y)^{-1}-(x+y)^{-1}$

37 $(x-y)^2-(x+y)^{-2}$

38 $\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{y}{x+y}$



39 ئەندازە لەم شێوەی بەرامبەردا چەند چوارگۆشەیەك دەبینین درێژی لایەکی چوار گۆشەی یەکەم $1cm$ ودووەمیان $\frac{1}{2}$cm وسێیەمیان $\frac{1}{4}$cm بێت وەهەروەها.

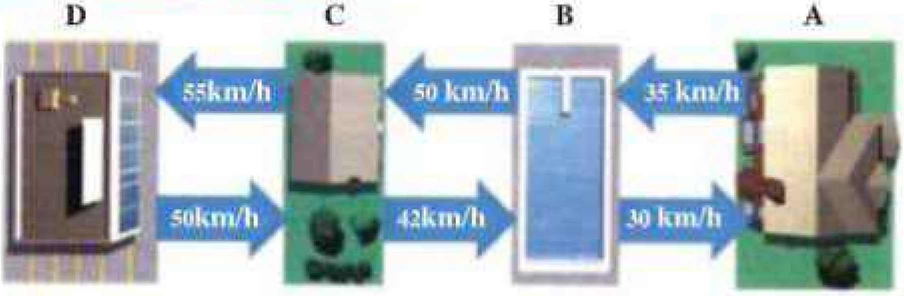
أ سەرجەمی ڕووبەری چوار گۆشەکان a و b و c و d ،بە بەکارهێنانی هێزەکانی ژمارە 2 بنووسە

ب سەرجەمەکە بە یەك ژمارەی ڕێژەیی بنووسە.

ج ئەگەر دوو چوارگۆشەی نوێی e و f بۆ شێوازەکە زیادکرا. سەرجەمی ڕووبەری شەش چوار گۆشەکە لە a هەتا f بدۆزەوە بە شێوەی یەك ژمارەی ڕێژەیی.

د وەلامەکانی ب و ج بگۆڕە بۆ ژمارەیەکی دەیی لە پێکهاتبێت لە 4 ڕەنووس لە پاش فارزە. ئایا دەتوانیت کەرتێك بخەملێنیت کە نزیکبێت لە سەرجەمی ڕووبەری چوار گۆشەکان هەرچەند چوار گۆشەکان زیادبکەین؟ ئەم کەرتە چییە؟

40 گەشت ئەم هێڵکارییەی خوارەوە قۆناغەکانی گەشتێك بە ئۆتۆمبیل دیاردەکات. دووری نێوان A و B ونێوان B و C ونێوان C و D یەکسانن. لەهێڵکارییەکە تێکڕای خێرایی ئۆتۆمبیلەکە لەهەر قۆناغێکدا دیاریکراوە.



أ تێکڕای گشتی خێرایی گەشتی A بۆ C هەژمێربکە وبەپێچەوانەوە.

ب تێکڕای گشتی خێرایی گەشتی B بۆ D هەژمێربکە وبەپێچەوانەوە.

ج تێکڕای گشتی خێرایی گەشتی A بۆ D هەژمێربکە وبەپێچەوانەوە.

ڕوانینێك بۆ دواوە

بڕی جیاکەرەوەی ئەم هاوکێشانە هەژمێربکە وژمارەی ڕەگەکانیان لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان دیاریبکە وهاوکێشەکانی شیکاربکە.

41 $0=x^2-3x+4$ **42** $x^2-2x+1=0$ **43** $-2x^2-5x+12=0$

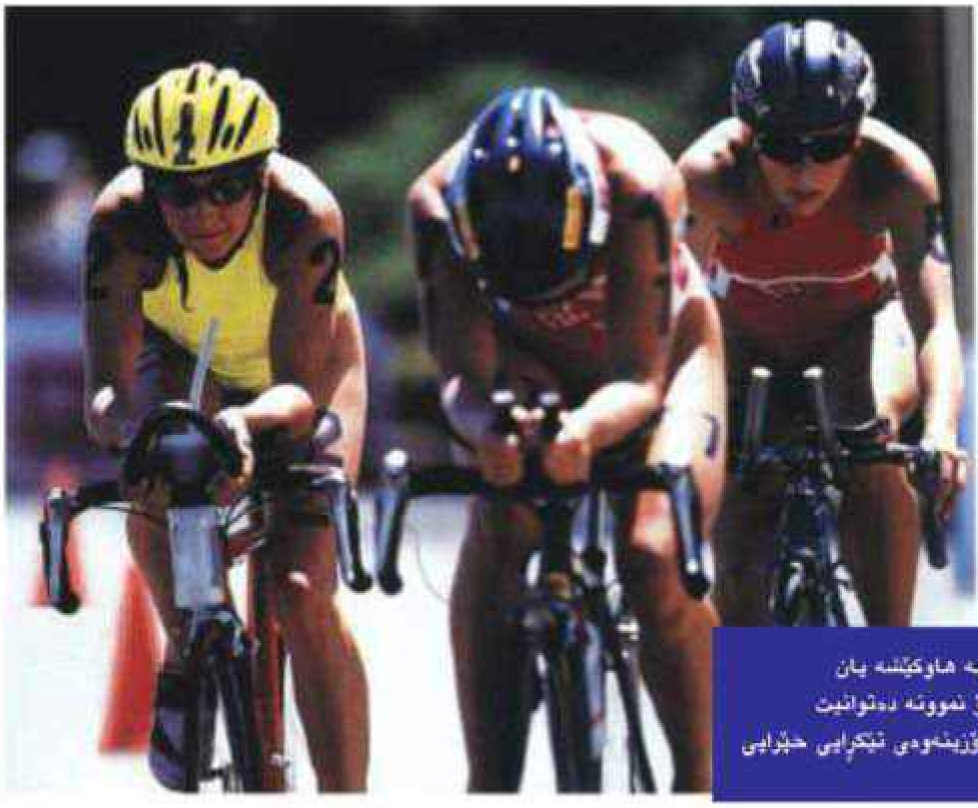
ڕوانینێك بۆ پێشەوە

44 هەموو شیکارەکانی هاوکێشەی $1.4=\frac{(x+3)(x-1)}{x^2-1}$ دیاریبکە.
لەبیرنەکەیت ژمارە قەدەغەکراوەکانی x لە بڕە ڕێژەییەکە لابدەیت.

هاوکێشەکان ولاسەنگە ڕێژەییەکان

Rational Equations and Inequalities

وانەی 5



ئامانجەکان

- هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان بە جەبری و بە ڕوونکردنەوەیی شیکاردەکات.
- پرسیارەکان بە بەکارهێنانی هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان شیکار دەکات.

بۆچی

زۆر شێوازی جۆراجۆر هەیە بە هاوکێشە یان لاسەنگەیەکی ڕێژەیی دەنوێنرێت. بۆ نموونە دەتوانیت هاوکێشەیەکی ڕێژەیی بنوسین بۆ دۆزینەوەی تێکڕایی خێرایی گشتی لە پێشبڕکێیەکی سیانی.

جێبەجێ کردن

پێشبڕکێی سیانی

زۆزك پێشبڕکێیەکی سیانی کە بریتیبوو لە مەلەوانی وپاسکیل سواری و ڕاکردن بە دوو کاتژمێر و نیو تەواوکرد. تێکڕای خێراییەکەی لە پاسکیل سواریەکەدا، ئەوەندەی تێکڕای خێراییەکەی بێت لەمەلەکردندا. تێکڕای خێرایی ڕاکردنەکەی $5Km/h$ زیاتر بێت لە تێکڕای خێرایی مەلەکردنەکەی. دەتوانیت هاوکێشەیەکی ڕێژەیی بنووسیت بۆ هەژمێر کردنی تێکڕایی خێرایی گشتی زۆزك لەپێشبرکێکەدا. هاوکێشە ڕێژەییەکان ئەو هاوکێشانەن کە بە لایەنی کەمەوە بڕێکی ڕێژەیی تێدایە.

	دووری Km	خێرایی Km/h	کات
مەلەکردن	$d_s = 0.5$	x	t_s
پاسکیل سواری	$d_b = 25$	$6x$	t_b
ڕاکردن	$d_r = 6$	$x+5$	t_r

نموونە 1 تێکڕای خێرایی گشتی زۆزك هەژمێربکە.

شیکار

1. کاتی خایەنراوی هەر قۆناغێك هەژماربکە.

قۆناغی مەلەکردن

دووری = خێرایی × کات

$$0.5 = xt_s$$

$$\frac{0.5}{x} = t_s$$

قۆناغی پاسکیل سواری

دووری = خێرایی × کات

$$25 = (6x)t_b$$

$$\frac{25}{6x} = t_b$$

قۆناغی ڕاکردن

دووری = خێرایی × کات

$$6 = (5+x)t_r$$

$$\frac{6}{x+5} = t_r$$

2. بڕێکی ڕێژەیی بنووسە کە کاتی خایەنراوی گشتی پێشبڕکێیەکە بنوێنێ بە پێی تێکڕای خێرایی زۆرک لە مەلەکردن x.

بچووکترین ژێرەی هاوبەش بریتیە لە $6x(x+5)$

$$T(x)=t_s+t_b+t_r=\frac{0.5}{x}+\frac{25}{6x}+\frac{6}{x+5}$$

$$=\frac{0.5}{x}\times\frac{6(x+5)}{6(x+5)}+\frac{25}{6x}\times\frac{(x+5)}{(x+5)}+\frac{6}{x+5}\times\frac{6x}{6x}$$

$$=\frac{64x+140}{6x(x+5)}$$

هاوکێشەی $\frac{64x+140}{6x(x+5)}=2.5$ شیکاربکە.

وێنە نەخشەی $y=\frac{64x+140}{6x(x+5)}$ بکێشە.

$y=2.5$ بۆی خاڵەکانی یەکتربڕین دیاریبکە.

تێکڕای خێرایی گشتی زۆرک $2.7Km/h$ بووە بە نزیککراوەیی.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە چۆن هاوکێشەی $\frac{64x+140}{6x(x+5)}=2.5$ شیکار دەکەیت بە بەکارهێنانی یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا؟

نموونە 2

هاوکێشەی $\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$ شیکاربکە.

شیکار

ڕێگای یەکەم: بەجەبری

$x\neq 4 \quad x\neq 6$

$$\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$$

$$x(x-4)=1\times(x-6)$$

$$x^2-4x=x-6$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

$$x=3 \qquad x=2$$

ساغبکەوە

ئەگەر $x=2$ ئەوا

$$\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$$

$$\frac{2}{2-6}=\frac{1}{2-4}$$

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$ ڕاستە

ئەگەر $x=3$ ئەوا

$$\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$$

$$\frac{3}{3-6}=\frac{1}{3-4}$$

$$-1=-1$$ ڕاستە

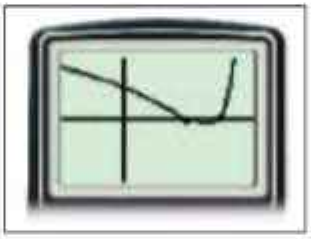
ڕێگای دووەم: بە ڕوونکردنەوەیی

لەبەر ئەوەی بینینی یەکتربڕینی چەماوەی نەخشەی $y=\frac{x}{x-6}$ وچەماوەی نەخشەی $y=\frac{1}{x-4}$ کارێکی گرانە پێویستە ڕێگایەکی تر بەکاربهێنیت.

هاوکێشەکە بە شێوەی $\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$

پاشان $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{x-4}=0$ بنووسە.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x}{x-6}-\frac{1}{x-4}$ بکێشە وبۆی سینی خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەرەی سینی دیاربکە.



کەواتە 2 و 3 دوو شیکاری هاوکێشەکەن.

هەوڵبدە هاوکێشەی $\frac{1}{x-2}=\frac{x}{3}$ شیکاربکە هەندێ جار شیکاری هاوکێشە ڕێژەییەکان، شیکاری نامۆی لێدەکەوێتەوە، پاسادانی هاوکێشە بنەڕەتیەکە ناکات. لێرەوە پێویستی پاسادانی بەها پەیدا بوەکانت بۆ دەردەکەوێت کە دەبنە شیکاری هاوکێشەکە.

نموونه 3 هاوكێشەی $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$ شیكاربكە

شیكار

ڕێگای یەكەم: بە جەبری

هەردوو لای هاوكێشەكە لە بچووكترین ژێرەی هاوبەشی $(x-3)(x+3)$ یان x^2-9 بدە.

$$\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$$ كاتێك $x\neq\pm3$.

$$\frac{x}{x-3}\times(x-3)(x+3)+\frac{2x}{x+3}(x-3)(x+3)=\frac{18}{x^2-9}(x-3)(x+3)$$

$$x(x+3)+2x(x-3)=18$$

$$x^2+3x+2x^2-6x=18$$

$$3x^2-3x-18=0$$

$$3(x^2-x-6)=0$$

$$3(x-3)(x+2)=0$$

$x=-2$ یان $x=3$

ساغبیكەوە

لەبەر ئەوەی دوو ژمارەی 3 و 3- قەدەغەكراون، ئەوا $x=3$ شیكارێكی نامۆیە وپێویستە فەرامۆش بكرێت. بەڵام ئەگەر $x=-2$ ئەوا :

$$\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}\overset{?}{=}\frac{18}{x^2-9}$$

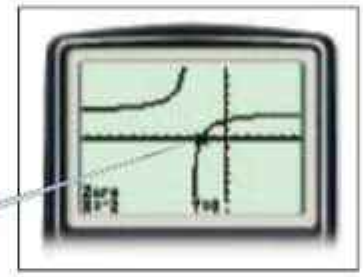
$$\frac{-2}{-2-3}+\frac{2(-2)}{-2+3}\overset{?}{=}\frac{18}{(-2)^2-9}$$

$-\frac{18}{5}=-\frac{18}{5}$ دروستە

ڕێگای دووەم: بەڕوونكردنەوەیی

لەبەر ئەوەی بینینی یەكتربڕینی هەردوو چەماوەی $y=\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}$ و $y=\frac{18}{x^2-9}$ كارێكی گرانە بۆیە پێویستە ڕێگایەكی تر بەكاربهێنیت $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}=0$ بنووسە.

پاشان وێنەی ڕوونكردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}$ بكێشە.



تەنها خاڵی یەكتربڕین لەگەڵ تەوەری سینی بریتییە لە (2,0-)

هاوكێشەكە تەنها یەك شیكاری هەیە بریتیە لە $x=-2$

هەوڵبدە هاوكێشەی $\frac{x}{x-2}+\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x^2-5x+6}$ شیكاربكە.

بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە بۆچی لە نموونەی 3 دا شیكارێكی نامۆمان بۆ دەرچوو؟ هۆكەی ڕوونبكەرەوە.

لاسەنگە ڕێژەییەکان **Rational Inequalities** ئەو لاسەنگانەن بە لایەنی کەمەوە برێکی ڕێژەییان تێدایە.

چالاکی

Solving Rational Inequalities — **شیکارکردنی لاسەنگە ڕێژەییەکان**

خاڵی چاودێری ✔

1. لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا، هەردوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y_1 = \frac{x+2}{x-4}$ و $y_2 = 2x - 11$ بکێشە.
2. بەهایەکانی x کامانەن کە پاسادانی $y_1 = y_2$ ؛ $y_1 < y_2$ ؛ $y_1 > y_2$ دەکەن
3. چۆن بە ڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی $\frac{x+2}{x-4} < 2x - 11$ ولاسەنگەی $\frac{x+2}{x-4} > 2x - 11$ شیکار دەکەیت؟

نموونـــــــــە 4 لاسەنگەی $\frac{x}{2x-1} \leq 1$ شیکاربکە

شیکار

ڕێگای یەکەم: بە جەبری

هەوڵبدە بە لێکدانی هەردوولای لاسەنگەکە لە $2x-1$ خۆت لە ژێرە ڕزگار بکەیت بەڵام لێکدانی لاسەنگە لە ژمارەیەك لەوانەیە ئاراستەی لاسەنگەکە هەڵبگەڕێتەوە. بۆیە پێویستە لە دوو باردا لێبکۆڵینەوە کاتێك $2x-1$ موجەب بێت، کاتێك $2x-1$ سالب بێت.

$\frac{x}{2x-1} \leq 1$ کاتێك $2x-1>0$ موجەب بێت

$x \leq 2x-1$

$-x \leq -1$

$x \geq 1$ ($\geq$ گۆڕا بۆ $\leq$)

لەم بارەدا کاتێك $2x-1>0$ ئەوا $x > \frac{1}{2}$ بۆیە بەهاکانی x کەپاسادانی لاسەنگەکە دەکەن، پێویستە پاسادانی $x > \frac{1}{2}$ و $x \geq 1$ پێکەوە بکەن.

{کۆمەڵەی شیکار لەم بارەدا بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان کە $x \geq 1$ ساغدەکاتەوە}

$\frac{x}{2x-1} \leq 1$ $2x-1<0$ سالب بێت

$x \geq 2x-1$ ($\leq$ گۆڕا بۆ $\geq$)

$-x \geq -1$

$x \leq 1$ ($\geq$ گۆڕا بۆ $\leq$)

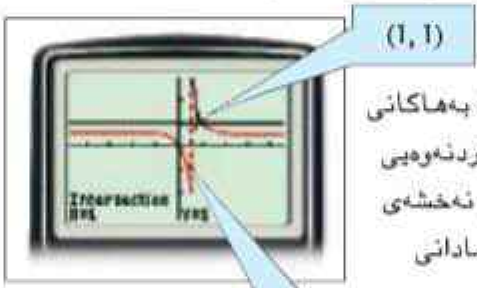
لەم بارەدا کاتێك $2x-1<0$ ئەوا $x < \frac{1}{2}$ بۆیە بەهاکانی x کە پاسادانی لاسەنگەکە دەکەن پێویستە پاسادانی $x < \frac{1}{2}$ و $x \leq 1$ پێکەوە بکەن.

{کۆمەڵەی شیکار لەم بارەدا بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان کە $x < \frac{1}{2}$ ساغدەکاتەوە}

کەواتە کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەکە هەموو ئەو ژمارە ڕاستییانەن کە پاسادانی $x < \frac{1}{2}$ یان $x \geq 1$ دەکەن

ڕێگای دووەم: بە ڕوونکردنەوەیی

لە ڕووتەختی پۆتاندا هەردوو هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y_1 = \frac{x}{2x-1}$ و $y_2 = 1$ بکێشە بەهاکانی x لەوناوچەیەدا دیاریبکە، کە تیایدا هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی یەکەم دەکەوێتە ژێر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووەم. کۆمەڵە شیکار بریتییە لە بەهاکانی x کە پاسادانی $x < \frac{1}{2}$ یان $x \geq 1$ دەکەن.



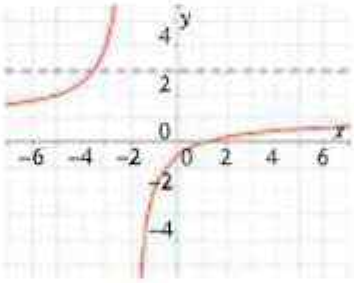
هەوڵبدە هاوکێشەی $\frac{x-1}{x+2} < 3$ شیکاربکە.

ڕاهێـــــــنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 مانای چییە یەکێك لە شیکارەکانی هاوکێشەیەکی ڕێژەیی نامۆیە؟چۆن دەیناسیتەوە؟

2 چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی بەکاردەهێنیت بۆ دڵنیابوون لە ڕاستی ئەو شیکارەی بە جەبری بەدەستهێناوە؟



3 چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y_1 = \frac{x-1}{x+2}$ ونەخشەی $y_2 = 3$ لە وێنەی بەرامبەردا بەکاردێنیت بۆ شیکاری لاسەنگەی $\frac{x-1}{x+2} < 3$ ؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 **وەرزش** بەگەڕانەوە بۆ نموونەی سەرەتای وانەکە. خێرایی زۆرك لە هەریەکە لە مەلەوانی و پاسکیل سواری و ڕاکردندا چەندە؟ ئەگەر ماوەی پێشبڕکێکە بە دووکاتژمێر تەواو بکات.

ئەمانە شیکاربکە

5 $\frac{2x-1}{x} = \frac{3}{x+2}$

6 $\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{-4}{x^2-1}$

ئەمانە شیکاربکە

7 $\frac{2x-3}{x} \geq 2$

8 $\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x+3}$

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەمانە شیکاربکە و ڕاستی شیکاردکەت ساغبکەوە.

9 $\frac{x+3}{2x} = \frac{5}{8}$

10 $\frac{2y-1}{4y} = \frac{4}{6}$

11 $\frac{4}{n+4} = 1$

12 $\frac{-6}{m-3} = 1$

13 $\frac{1}{3x} + \frac{1}{8} = \frac{4}{3x}$

14 $\frac{1}{a} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3a}$

15 $\frac{y+3}{y-1} = \frac{y+2}{y-3}$

16 $\frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2n-8}{3n+8}$

17 $\frac{x+3}{x} + 1 = \frac{x+5}{x}$

18 $\frac{2x}{x+3} - 1 = \frac{x}{x+3}$

19 $\frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x} = \frac{x}{x+1}$

20 $\frac{3}{x+2} - \frac{x}{1} = \frac{4}{3}$

21 $\frac{1}{6} - \frac{1}{x} = \frac{4}{3x^2}$

22 $\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{4}$

23 $\frac{2x+3}{x-1} - \frac{2x-3}{x+1} = \frac{10}{x^2-1}$

24 $\frac{x-4}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{17}{x^2-4}$

25 $\frac{a}{a+3} - \frac{a}{a-2} = \frac{10}{a^2+a-6}$

26 $\frac{3x}{x-1} + \frac{2x}{x-6} = \frac{5x^2-15x+20}{x^2-7x+6}$

27 $\frac{3}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} = \frac{-1}{x-2}$

28 $\frac{x+2}{2x-3} - \frac{x-2}{2x+3} = \frac{21}{4x^2-9}$

ئەمانە شیکار بکە وپاشان ساغیبکەوە.

29 $\frac{x+3}{3x} > 2$ **30** $\frac{y+5}{4y} > 3$ **31** $\frac{x-5}{3x} < -3$

32 $\frac{x-5}{3x} < 3$ **33** $\frac{2x+1}{x-2} > 4$ **34** $3 < \frac{3x+4}{1+2x}$

35 $\frac{x+1}{x} \le \frac{1}{2}$ **36** $-\frac{1}{2} \ge \frac{1}{x-4}$ **37** $\frac{7x}{3x+2} < 2$

ئەم لاسەنگانە شیکار بکە وەلامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

38 $x^2 < \frac{1}{2}$ **39** $\frac{1}{x} \le x - 1$ **40** $\frac{x-2}{x-1} \ge 2x$

بەرەنگاربونەوە

41 بەهزری لاسەنگەی $\frac{3}{(x-1)^2} < 0$ شیکار بکە.

42 دەروازەیەك لە رۆشنبیری هندی لە سەدەی ١٩ دا زانای بیرکاری هندی ماهافیرا ئەم پرسیارەی دانا. چوار بۆری ئاو رووندەکەنە ناو حەوزێکەوە. یەکەمیان بە تەنها حەوزەکە بە نیو سەعات پڕ دەکات، دووەم بە تەنها بە سێیەکی سەعاتێك و سێیەم بە چارەکە سەعاتێك وچوارەم بە پێنجیەکی سەعاتێك پڕی دەکات. کاتی پێویست چەندە ئەگەر هەموویان بەیەکەوە ئاو رووبکەنە ناو حەوزەکە؟ هەریەکێکیان بڕی چەند ئاو دەکەنە حەوزەکەوە؟

بەستنەوە

43 ئەندازە درێژی لاکێشەیەك 5 مەتری زیاترە لە پانیەکەی. درێژی وپانی لاکێشەکە هەژمێر بکە ئەگەر ڕێژەی درێژەیەکەی بۆ پانیەکەی کەمتر نەبێ لە 1.5 وزیاتر نەبێ لە 3.

جێبەجێکردنەکان

44 وەرزش ئاراس بەشداری پێشبڕکێیەکی سیانی کرد. $0.6Km$ بە مەلە و $15Km$ بەسواری پاسکیل و $8Km$ بەراکردن بڕی. تێکڕای خێراییەکەی لە پاسکیلەکەدا 9 ئەوەندەی تێکڕایی خێراییەکەی بوو لە مەلەکردندا. تێکڕایی خێراییەکەی لە ڕاکردندا $6Km/h$ لە تێکڕایی خێرایی مەلەکردنەکەی زیاترە.

أ نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە بە پێی خێراییەکەی لە مەلەکردندا. ئەوکاتە بنوێنێت کە ئاراس دەیخایەنێت بۆ بڕینی دووری پێشبڕکێکە.

ب تێکڕای خێرایی ئاراس لە مەلەکردن وسواری پاسکیل وڕاکردندا چەند بووە؟ ئەگەر زانیت بە یەك کاتژمێر ونیو پێشبڕکێکەی تەواو کردوە.

45 فیزیا نەخشەی $w(h) = w_0\left(\frac{6400}{6400+h}\right)^2$ کێشی تەنێکە لە بەرزی $h\ Km$ لە بۆشایی ئاسماندا. w_0 کێشی هەمان تەنە لەسەر زەوی. بەرزی ئەو مانگە دەستکردە چەندە؟ کێشەکەی $200\ Kg$ لە بۆشایی ئاسماندا و $3500\ Kg$ لەسەر زەوی بێت.

ڕوانینێك بۆ دواوە

بەهای ئەم برانە هەژماربکە

46 $81^{\frac{1}{2}}$ **47** 13^0 **48** $9^{\frac{3}{2}}$ **49** $27^{\frac{1}{3}}$

ڕوانینێك بۆ پێشەوە

50 بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی وێنەی نەخشەی $f(x) = \sqrt{x}$ بکێشە. وێنەی ئەو نەخشەیە بەوێنەدانەوە بە دەوری تەوەری x دا پێکبهێنە. تێبینی چی دەکەیت؟

وانەی 6

نەخشەی ڕەگی دووجا Radical Functions

ئامانجەکان

- نەخشەی ڕەگی دووجا دەناسێت و هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی دەکێشێت.
- بەهای بڕی ڕەگی دووجا هەژمێردەکات.

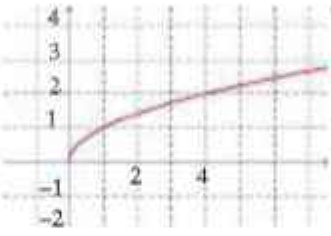
بۆچی
نەخشەی ڕەگی دووجا بەکاردێت بۆ نواندنی چەندها پەیوەندی لەژیانی ڕۆژانەماندا وەك ئەو پەیوەندییەی کە درێژی پەندۆل دەبەستێتەوە بەکاتی خایەنراوی لەرەیەکی تەواوی پەندۆلەکە.

جێبەجێ کردنەکان
فیزیا

نەسرین تێبینی ئەوەی کرد کە لەرەی تەواوی پەندۆلێکی درێژ کاتێکی زیاتری پێویستە لە لەرەی تەواوی پەندۆلێکی کورت. بەکاتی خایەنراوی لەرەیەکی تەواوی پەندۆلێك دەوترێت خولی پەندۆل. نەخشەی $t(x)=2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$ خولی پەندۆل بە چرکە بە پێی درێژییەکەی بەمەتر دەنوێنێت خولی پەندۆلێك چەندە درێژییەکەی $0.1m$ و $0.2m$ و $0.3m$ بێت؟

نەخشەی ڕەگی دووجا Square - Root Function

لەبیرت بێت ڕەگی دووجای ژمارەی x بریتییە لە ژمارەیەك ئەگەر لە خۆی بدرێت ژمارەکەت دەستدەکەوێت. هەروەها لەبیرت بێت ژمارەی سالب ڕەگی دووجای نییە لە ژمارە ڕاستییەکاندا وهەموو ژمارەیەکی موجەبی وەك x دوو ڕەگی دووجای هەیە یەکێکیان موجەبە بە $\sqrt{x}$ دەنووسرێت وئەوی تریان سالبە و بە $-\sqrt{x}$. نەخشەی ڕەگی دووجا نەخشەیەی بە ڕێسای $f(x)=\sqrt{x}$ دەناسرێت. بە پێی بابەتەکانی پێشوو بواری ئەم نەخشەیە هەموو ژمارە ڕاستییە ناسالبەکانە و مەوداکەشی هەمان کۆمەڵە ژمارەیە. بەڵام هێڵکاری ڕوونکردنەوەکەی لەو وێنەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.



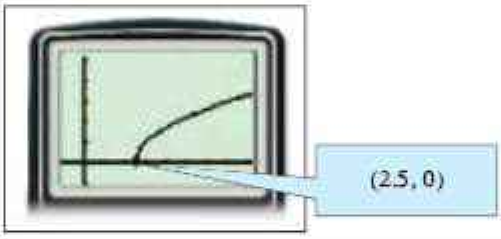
نموونــــــه ❶ بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{2x-5}$ دیاریبکە

شیکار

بواری ئەم نەخشە پێکدێت لە هەموو ژمارە ڕاستییەکانی وەك x کە بەهای بڕی $2x-5$ دەکاتە ژمارەیەکی نا سالب. بۆ دیاریکردنی ئەم بوارە، تەنها پێویستیت بە شیکاری لاسەنگەی $2x-5\geq 0$ دەبێت

$$2x-5\geq 0$$

$$x\geq \frac{5}{2}=2.5$$



دڵنیابە بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{2x-5}$ بریتیە لە $x\geq \frac{5}{2}$.

نموونــــــه ❷ بەگەڕانەوە بۆ نموونەی بەندۆلەکە لە سەرەتای وانەکە، **خولی بەندۆلەکە** هەژمێربکە کە درێژییەکەی $0.1m$ و $0.2m$ و $0.3m$ بێت.

شیکار

نەخشەی $y=2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$ لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی تۆماربکە و بە بەکارهێنانی کاری خشتەیی

Symplifiying Radical Expressions — کورتکردنەوەی بڕە ڕەگیەکان

بڕە ڕەگیەکان **Radical Expressions** ئەو بڕانەن کە بە لایەنی کەمەوە بڕێك لەخۆدەگرێت وەدەکەوێتە ژێر ڕەگە دووجاکەدا.

نموونــــــه ❸ بڕە ڕەگی $\sqrt{49a^2b^5x^6}$ کورتبکەوە.

لەبیرت بێت کە $\sqrt{b^2}=|b|$

شیکار

$$\sqrt{49a^2b^5x^6}=\sqrt{7^2a^2b^5x^6}=7|a|b^2|x^3|\sqrt{b}$$

هەوڵبدە بڕە ڕەگی $\sqrt{64a^4bx^3}$ کورتبکەرەوە.

Radical Equations — هاوکێشە ڕەگیەکان

نموونــــــه ❹ هاوکێشەی $2\sqrt{x+5}=8$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.

شیکار

$$2\sqrt{x+5}=8$$

$$\sqrt{x+5}=4$$

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2=4^2 \quad \text{بەدوو جاکردنی هەردوو لا}$$

$$x+5=16$$

$$x=11$$

ساغکردنەوە

$$2\sqrt{x+5}=8$$
$$2\sqrt{11+5}=8$$
$$2\times 4=8 \quad \text{دروستە}$$

هەوڵبدە هاوکێشەی $3\sqrt{2x-1}=6$ شیکاربکە.

لە کاتی شیکاری هەندێك لە هاوکێشە ڕەگییەکان شیکاری نامۆمان بۆ دەردەچێت لەبەر ئەوە پێویستە ساغکردنەوەی شیکارەکەت بکەیت بۆ دوورخستنەوەی ئەم جۆرە شیکارانە.

نموونە 5

هاوکێشەی $\sqrt{x+1}+3=2x$ شیکاربکە و شیکارەکە ساغبکەرەوە.

شیکار

$$\sqrt{x+1}+3=2x$$

ڕەگەکە لە لایەکی هاوکێشەکە دابنێ $\quad \sqrt{x+1}=2x-3$

هەردوو لای هاوکێشەکە دووجابکە $\quad \left(\sqrt{x+1}\right)^2=(2x-3)^2$

$$x+1=4x^2-12x+9$$

هاوکێشە دووجایەکە بەشێوەی گشتی بنووسە $\quad 4x^2-13x+8=0$

یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکاریکردنی هاوکێشە دووجاکە $\quad x=\frac{-(-13)\pm\sqrt{13^2-4\times4\times8}}{2\times4}$

$x=\frac{13-\sqrt{41}}{8}\approx 0.82$ یان $x=\frac{13+\sqrt{41}}{8}\approx 2.43$

ساغبکەرەوە

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y=\sqrt{x+1}+3$ و $y=2x$ بکێشە وبەدوای پۆی خاڵەکانی یەکتربڕین بگەڕێ. یەك خاڵی یەکتربڕین هەیە کە پۆیەکەی بریتییە لە $x\approx2.43$ کەواتە هاوکێشەکە تەنها یەك شیکاری هەیە کە بریتییە $x=\frac{13+\sqrt{41}}{8}\approx 2.43$ وشیکارەکەی تر شیکارێکی نامۆیە.

هەوڵبدە هاوکێشەی $\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+1}$ شیکاربکە وپاسادانی شیکارەکەت بکە.

هەندێ لە هاوکێشە ڕەگییەکان شیکاری نییە، وەك لەم نموونەیەدا دەردەکەوێت.

نموونە 6

هاوکێشەی $\sqrt{x}-1=\sqrt{2x+1}$ شیکاربکە وپاسادانی شیکارەکەت بکە.

شیکار

$$\sqrt{x}-1=\sqrt{2x+1}$$

هەردوو لای هاوکێشەکە دووجا بکە. $\quad \left(\sqrt{x}-1\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2$

$$x-2\sqrt{x}+1=2x+1$$

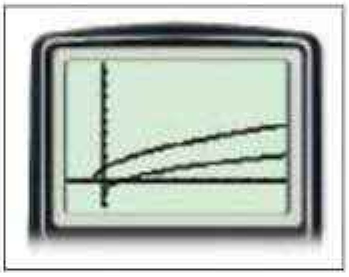
کورتبکەوە $\quad -2\sqrt{x}=x$

هەردوو لای هاوکێشەکە دووجا بکە. $\quad \left(-2\sqrt{x}\right)^2=(x)^2$

$$4x=x^2$$

$$x^2-4x=0$$
$$x(x-4)=0$$
$x=4$ یان $x=0$

ساغبکەوە



$\sqrt{0}-1\stackrel{?}{=}\sqrt{2\times 0+1}$ $\sqrt{4}-1\stackrel{?}{=}\sqrt{2\times 4+1}$

$-1=1$ هەڵەیە $3=1$ هەڵەیە

دەشتوانی بە ڕوونکردنەوەیی وەڵامەکەت ساغبکەیتەوە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\sqrt{x}-1$ و $y=\sqrt{2x+1}$ بکێشە و ساغبکەوە کە یەکتر نابڕن.

هەوڵبدە $3\sqrt{x}+2=\sqrt{3x}$ شیکاربکەو ڕاستی وەڵامەکەت ساغبکەرەوە.

ڕاهێـــــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1. چۆن بڕی $\sqrt{4x^3}$ سادە دەکەیت؟
2. دوو ڕێگای جیاواز بەکاربێنە بۆ شیکاری $\sqrt{x}=3\sqrt{x-4}$
3. بۆچی دەبێت لە شیکارکردنی هاوکێشە ڕەگییەکان پاسادانی ئەو شیکارانە بکەیت کە بە جەبری دەستمان دەکەوێت.
4. چۆن بە جەبری وڕوونکردنەوەیی ڕوونیدەکەیتەوە هاوکێشەی $\sqrt{x}=\sqrt{x+1}$ شیکاری نییە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستە کراو

5. بڕی $\sqrt{128ab^2x^5}$ سادەبکە.
6. بڕی $\frac{12\sqrt{15x^3}}{(3x)^{\frac{1}{2}}}$ سادەبکە، وای دابنێ x تەنها بەهای موجەب وەردەگرێت.
7. هاوکێشەی $3\sqrt{2x-5}=20$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.
8. هاوکێشەی $\sqrt{5x+7}-2=x$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.
9. هاوکێشەی $2\sqrt{x+1}=\sqrt{x}-3$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.

ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم بڕانە سادەبکە

10. $\sqrt{32x^3}$
11. $\sqrt{18x^3}$
12. $\sqrt{27x^3y^4}$
13. $\sqrt{50a^3b^4}$
14. $\left(16x^6\right)^{\frac{1}{4}}$
15. $\left(40a^7\right)^{\frac{1}{3}}$
16. $\frac{x}{3-5\sqrt{2}}-\left(2+3\sqrt{2}\right)$
17. $\frac{x}{4+\sqrt{3}}-\left(-1+3\sqrt{2}\right)$

بواری ئەم ئەخشانە دیار بکە.

18 $f(x)=\sqrt{12x+24}$

19 $f(x)=\sqrt{3x-2}$

20 $f(x)=\sqrt{3(x-2)}$

21 $f(x)=\sqrt{3(x+2)-1}$

22 $f(x)=\sqrt{2-3(x+1)}$

23 $f(x)=\sqrt{3-2(x-4)}$

24 $f(x)=\sqrt{x^2-25}$

25 $f(x)=\sqrt{9x^2-16}$

26 $f(x)=\sqrt{x^2+5x+6}$

27 $f(x)=\sqrt{x^2+10x-25}$

28 $f(x)=\sqrt{2x^2+5x-12}$

29 $f(x)=\sqrt{3x^2+7x+2}$

30 $f(x)=\sqrt{6x^2-13x+5}$

31 $f(x)=\sqrt{8x^2-10x-3}$

32 بواری ئەخشەی $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$ دیاریکە لە وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەخشەکەوە وەڵامەکەت ساغبکەوە.

جێبەجێکردن

33 **ڕووداوەکانی هاتووچۆ:** لێکۆڵەرەوەکانی ڕووداوی هاتووچۆ سوود لە ئەخشەیەك وەردەگرن بۆ دۆزینەوەی خێرایی ئەو ئوتۆمبیلە لە کاتی ڕوداوێکدا بە پێوانی شوێنەواری تایەی ئوتۆمبیلەکە لەسەر ڕێگاکەدا، کە لە ئەنجامی شێلانی ڕاگرەکەوە دروست دەبێت. ئەم ئەخشە لە ڕۆژانی سامالّدا بریتیە لە $y=\sqrt{80x}$ کاتێك x خێرایی ئوتومبیلەکەیە بە کیلۆمەتر لەکاتژمێرێکدا و m درێژی شوێنەوارەکە بێت بە مەتر.

أ | ئەخشەی پێشوو بە سادەترین شێوە بنووسە بە بەکارهێنانی ڕەگی دووجا پاشان بینووسەوە بە بەکارهێنانی ژمارە دەیییەکان.

ب | لێکۆڵەرەوەکە درێژی شوێنەواری تایەکەی پێوا و بینی 200m دەبێت خێرایی ئوتۆمبیلەکە بە نزیکترین کیلۆمەتر لە کاتژمێرێك هەژماربکە.

ج | ئایا خێراییەکەی دوو ئەوەندی لێدێت ئەگەر شوێنەوارەکەش دوو ئەوەندە زیادبکات؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە.

تێڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم بڕانە سادەبکەرەوە وای دابنێ سفر بەهای قەدەغەکراوی گۆڕاوەکانە.

34 $\left(-2y^3y^5\right)^2$

35 $2x^4\left(-3xy^2\right)^3$

36 $\left(5x^{-2}y^4\right)^{-1}$

37 $\left(\frac{-3xy^3}{x^{-4}y^5}\right)^3$

38 $\left(\frac{-4m^4n^{-2}}{m^2n^{-2}}\right)^{-1}$

39 $\left(\frac{3m^4n^2}{2m^0n^{-3}}\right)^{-2}$

سفرەکانی ئەم ئەخشانە دیاریبکە

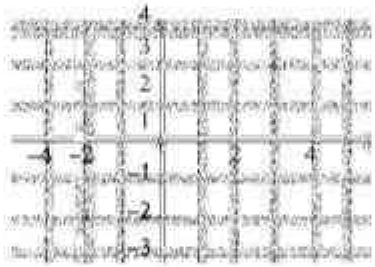
40 $f(x)=x^2+9x+18$

41 $f(x)=x^2-2x-8$

42 $f(x)=x^2-3x-18$

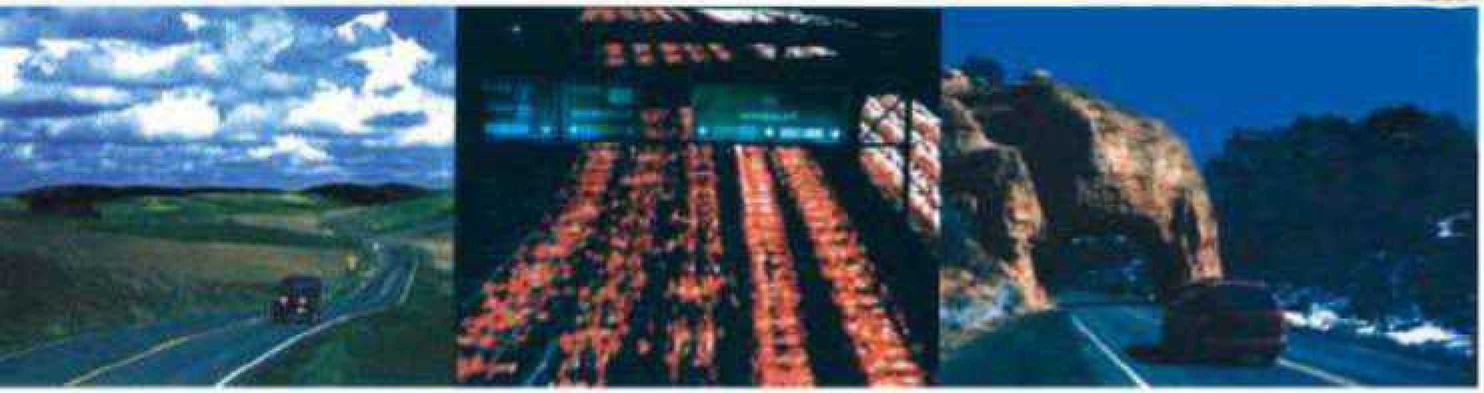
تێڕوانینێك بۆ پێشەوە

43 بیردۆزی فیثاغورس بەکاربێنە بۆ هەژمارکردنی دووری نێوان ئەو دوو خاڵەی لە شێوەکەی بەرامبەرتدا دیاریکراوە.



پرۆژەی بەش

کام ناوەند هەڵدەبژێریت؟



بۆ هەر کۆمەڵە بەهایەك دوو ناوەند هەیە کە ناوەندە ژمارەیی وناوەندە گونجاون. ناوەندە ژمێرەیی دوو ژمارەی b و c بریتیە لە $\frac{a+b}{2}$ بەڵام ناوەندە گونجاو بۆ دوو ژمارەی c ، b بریتیە لە $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

لە هەندێك شیکاری پرسیارەکان پشت بە ناوەندە ژمارەیی دەبەسترێت، بەڵام لە شیکاری هەندێکی تردا پشت بە ناوەند گونجاو دەبەسترێت. پشتبەستن بە یەکێك لەم دوو ناوەندە کارێکی جیاکەرەوەیە، چۆن ئەنجامەکان لەهەردوو بارەکەدا ڕەنگە بە تەواوەتی جیاوازبن.

بە ئامانجی پێدانی پێوەرێك کە ڕێگە بدات بە خەڵکانێك بەراوردی بەکاربردنی بەنزینی ئوتومبیلە نوێیەکان بکەن کە چەند گلدانەوەی بەنزین دەکات.

دەزگای پاراستنی ژینگە بڵاوکراوەکانی بەسەر جامی ئوتۆمبیلەکاندا هەڵواسی کە تیایدا بڕی بەنزینی بەکاربراو تێدابەشاندراوە. بۆنموونە دەزگاکە خەمڵاندنی ئوتۆمبیلێك کە 4 گێرو قراوانی مەکینەکەی 1.9 لیتر بێت یەك گالۆن بەنزین بۆ 39 کیلومەتر لەناوشار ویەك گالۆن بۆ 54 کیلومەتر لەسەر ڕێگای خێرا. وەزارەتی وزە لە هەندێك وولاتان ڕابەرێکی ساڵانە بڵاودەکاتەوە کە یاریدەدەری ئەو کەسانە دەدات کە دەیانەوێ ئوتۆمبیلی تازە بکڕن، ئەم ڕابەرە مەزندەی بەکاربوونی ووزە بۆ هەر جۆرێك لە ئوتۆمبیلە تازەکان دیاریدەکات و ئەم ڕابەرە وریاکردنەوەی بەکارهێنەرەکان وریا دەکاتەوە.

وریاکردنەوەی خاوەن ئوتۆمبیلەکان

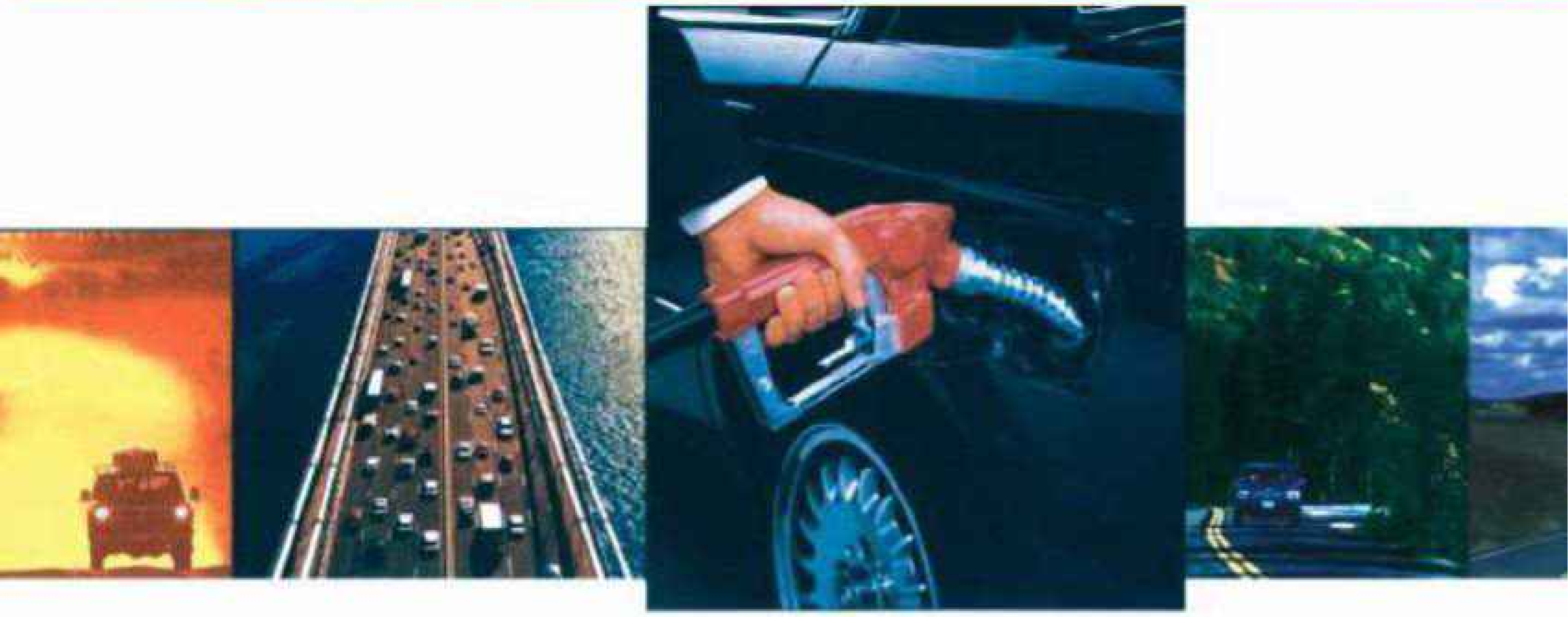
تکایە ئاگاداری ئەوە بن ناوەندەکان کە بەکاربردنی ئوتۆمبیلەکان لەناو شارەکاندا یان لەسەر ڕێگا خێراکان دەست نیشان دەکات تەنها خەملاندنە ڕەنگە خەملانەکە هەڵە تێبکرێت بۆ تێچوونی ساڵانەی ئوتۆمبیلەکە.

چالاکی 1

1 ناوەندە ژمێرەیی بۆ بەکاربردنی ئەو ئوتۆمبیلەی لەوێنەکەی سەرەوەدایە هەژمار بکە لەهەموو ڕۆیشتنەکەیدا.

2 ناوەندە گونجاو بۆ بەکاربردنی ئەو ئوتۆمبێلەی، لەوێنەکەی سەرەوەدا دیارە هەژمێر بکە لە هەموو ڕۆیشتنەکەیدا.

3 لەهەردوو ناوەندەکە بکۆڵەوە هۆکاری ئاگادارکردنەوەی ڕابەرەکە شیبکەرەوە.



چالاکی 2

لەوانەیە ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی ئوتۆمبیلێك دەیبڕێت لە شاردا یەکسان نەبێت بە ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی کە دەیبڕێت لەسەر ڕێگا خێراکان. ئەمەش وا دەکات کە هەژمێری ناوەندە سالانە کە بیرۆکەی بەکارچوونی سالانە دەدا بکرێت، هێمای گۆڕاوی d_1 بۆ ژمارەی کیلۆمەترەکانی ناوشار وگۆڕاوی d_2 بۆژمارەی کیلۆمەترەکانی سەر ڕێگای خێرا لەساڵێکدابن.

بۆ هەژمێری ژمارەی گالۆنە بەکاربراوەکان لە ساڵێکدا هەڵدەستین بەم هەژمارانە:

ناو شار: $$\left(d_1\,\text{km}\right)\left(\frac{\text{Galon}}{39\ \text{km}}\right)=\frac{d_1}{39}\,\text{gal}$$

لەسەر ڕێگای خێرا: $$\left(d_2\,\text{km}\right)\left(\frac{\text{Galon}}{54\ \text{km}}\right)=\frac{d_2}{54}\,\text{gal}$$

دەکرێ بەکارچوونی سالانەی ئوتۆمبیل بە هۆی بڕێکی ڕێژەیی وەك لای خوارەوە دەربڕێت:

ناوەندە بەکاربردنی سالانە

$$a(d)=\frac{\text{ژمارەی کیلۆمەتری سالانە}}{\text{ژمارەی گالۆنی سالانە}}=\frac{d_1+d_2}{\frac{d_1}{39}+\frac{d_2}{54}}$$

1 وای دابنێ ئەو ئوتۆمبیلەی کە لەسەرەوە باسکراوە بکرێت. ئەوا ناوەندە بەکارچوونی سالانەی بەنزین چەندە ئەگەر $800Km$ لەناو شار و $400Km$ لەسەر ڕێگا خێراکان بڕوات؟

2 هەژماری تێچوونی بەنزینی ئوتۆمبیلەکە لە ساڵێکدا بکە ئەگەر نرخی یەك گالۆن لە بەنزین 700 دینار بێت.

چالاکی 3

ئامانج مەشق لەسەر پایسکل سواری دەکات، هەموو ڕۆژێك $2Km$ دەبڕێت. لە کیلۆمەتری یەکەمدا خێراییەکەی $20Km/h$ و لە کیلۆمەتری دووەمدا خێراییەکەی $10Km/h$ ئەویش بە هۆی هیلاکیەوە.

1 ئایا ناوەندە ژمێرەیی هەردوو خێراییەکە دەربڕین لە تێکڕای خێرایی ئامانج دەکات لەوماوەیدا؟ وەلامەکەت ڕوونبکەوە.

2 هەژماری ئەو خێراییە بکە کە پێویستە ئامانج پیێ بڕوات لە کیلۆمەتری دووەمدا بۆ ئەوەی تێکڕای خێراییەکەی لەم دوو کیلۆمەترەدا $15Km/h$ بێت.

5 پێداچوونەوەی بەش

1 گۆڕاوی m ڕاستەوانە لەگەڵ گۆڕاوی b و پێچەوانە لەگەڵ گۆڕاوی c دەگۆڕێت بەهای m چەندە کاتێک $a=9$ و $b=12$ ئەگەر $m=6$ لەکاتێکدا $a=7$ و $b=4$ ؟

2 گۆڕاوی y ڕاستەوانە لەگەڵ گۆڕاوی x وپێچەوانە لەگەڵ گۆڕاوی z دەگۆڕێت. بەهای y چەندە کاتێک $x=20$ و $z=2$ ئەگەر $y=3$ لەکاتێکدا $x=18$ و $z=2$ ؟

بوارو دەرکەنارەکانی هەریەکە لەم نەخشانە دیاریبکە

3 $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-8x+12}$

4 $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-25}$

5 $f(x)=\frac{x^2+4x-12}{3x^2-12}$

6 $f(x)=\frac{x^2-9}{3x+5}$

7 $f(x)=\frac{2x}{6x^4-18x^3}$

ئەم برانە سادەبکە

8 $\frac{x^2+6x}{10}\times\frac{4}{x^2-36}$

9 $\frac{x^2+10x-8}{3x^2-17x+10}\times\frac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-4}$

10 $\frac{4x+8}{5x-20}+\frac{x^2+3x-10}{x^2-4x}$

11 $\frac{2x^2-9}{6}+\frac{4x-12}{x}$

12 $\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+2}{x}}$

13 $\frac{\frac{a+1}{a^2}}{\frac{(a-1)^2}{a}}$

14 $\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{(x+1)^2}{x+2}}$

15 $\frac{\frac{4x^2}{6x-3}}{\frac{15x}{2x-1}}$

ئەم برانە سادەبکە

16 $\frac{3x-5}{3x-6}+\frac{4x-2}{5x-15}$

17 $\frac{9y+3}{y^2-11y+18}+\frac{y+3}{y-9}$

18 $\frac{2x-3}{x^2-3x}-\frac{9x+1}{x-3}$

19 $\frac{3y-39}{y^2-7y+10}-\frac{3}{y-2}$

20 $\frac{\frac{2}{x}}{4}+\frac{\frac{5}{x}}{3}$

21 $\frac{x}{3+\frac{5}{x}}-\frac{4}{1+\frac{2}{x}}$

هەریەکە لەم هاوکێشانە شیکاربکە

22 $\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}$

23 $\frac{4}{x^2+1}=1$

24 $\frac{3x-1}{x^2+2x}=-1$

25 $\frac{1}{x^2-1}=1$

26 $\frac{2}{1-x^2}=\frac{x^2}{x^2+1}$

27 $\frac{1}{x}=\frac{x+2}{x+1}$

28 $\sqrt{x+2}=-2$

29 $\sqrt{x}=2x$

30 $\sqrt{x-2}=\sqrt{x}-2$

ئەم لاسەنگانە بەجەبری شیکاربکە

31 $\frac{1}{x}<1$

32 $\frac{1}{x}\geq 2$

33 $\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{2}$

34 $\frac{1}{x^2+1}\geq\frac{1}{3}$

35 $\frac{x+1}{2x+3}<1$

36 $\frac{2x+1}{2x-1}<2$

بەڕوونکردنەوەی هەریەک لەم لاسەنگانە شیکاربکە

37 $\frac{1}{x}\geq x$

38 $\frac{1}{x^2+2x+1}>2$

39 $\frac{1}{x}<2x$

40 $\frac{1}{x^2-x+2}<x$

بواری هەریەک لەم نەخشانە دیاریبکە

41 $f(x)=\sqrt{2x-3}$

42 $f(x)=\sqrt{x}-5$

43 $f(x)=5\sqrt{3(x-1)}+1$

5 تاقیکردنەوەی بەش

هەموو بەها قەدەغەکراوەکان وهەموو دەرکەنارەکان بۆ هەریەکە لەم نەخشانە دیاریبکە.

1 $f(x)=\frac{x-4}{x^2-16}$

2 $h(x)=\frac{x^2+2x-15}{2x^2-18}$

3 $g(x)=\frac{2x^3-16}{x^3-2x^2-9x+18}$

4 میکانیک: باری سلنگێك ڕاستەوانە لەگەڵ گۆڕانی پانیەکەیدا وپێچەوانە لەگەڵ سێجای درێژییەکەی دادەگۆڕێت.سلنگێك پانیەکەی $10m$ و درێژییەکەی $20m$ بێت بارێکی هەڵگرتووە کە $1200Kg$ئەوا سلنگێك پانیەکەی $8m$ و درێژیەکەی $25m$ چەند دەتوانی هەڵبگرێت.

هەریەك لەم بڕانە سادەبکە.

5 $\frac{x^2-9}{2x^2-8x+6}\times\frac{4x^2-12x+36}{x^3+27}$

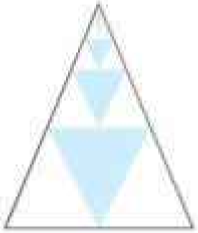
6 $\dfrac{\frac{x^3}{3x^2-12}}{\frac{x^3+5x^2}{3x^2+9x-30}}$

7 $\frac{3x}{x-2}\div\frac{6x^2}{2x^2-8}\times\frac{5x+1}{2x+4}$

8 $\frac{4}{x^2-4}+\frac{x+3}{x+2}$

9 $\frac{x-37}{x^2-2x-15}-\frac{5}{x+3}$

10 ئەندازە: هەژمێری ڕووبەری ناوچە ڕەنگکراوەکە بە پێی ڕووبەری سێگۆشەکەبکە.کە بە گۆڕاوی x هێماکراوە.



هەریەکە لەم هاوکێشە ولاسەنگانە شیکاربکە.

11 $\frac{x+3}{x-1}=2$

12 $\frac{a-4}{a+2}+\frac{a-5}{a-4}=1$

13 $\frac{3}{x+4}\le 5$

14 $\frac{3}{x+4}<\frac{5}{x+7}$

جێگۆڕی ئەندازەیی دیاربکە کە ڕێگا دەدات بە گواستنەوەی وێنە ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەرەتی $y=\sqrt{x}$ بۆ وێنە ڕوونکردنەوەی نەخشەکانی خوارەوە.

15 $y=\sqrt{x-4}$

16 $y=-\sqrt{x}+3$

هەژمارەی x بە پێی y بکە.

17 $y=x^2+x$

18 $y=5x^2-3x-4$

هەژمێری هەریەك لەم بڕانەبکە.

19 $\left(3\sqrt[4]{81}\right)^2-31$

20 $\frac{1}{5}\left[\left(\sqrt{9}\right)^3-\left(\sqrt[3]{64}\right)^2+2\right]$

هەریەك لەم بڕانە سادە بکەوە وای دابنێ هەریەکە لە گۆڕاوەکان جگە لە بەهای موجەب هیچ بەهایەك وەرناگرن.

21 $5\sqrt{8x^3y^6}\times\left(2x^5y\right)^{\frac{1}{2}}$

22 $\frac{8\sqrt{5x^7y^9}}{\sqrt{25x^3y^5a}}$

23 $\left(5-\sqrt{12}\right)-\left(2\sqrt{27}+8\right)$

24 $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-2\sqrt{5}\right)$

هەریەکە لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە کە ژێرەیان ڕێژەییەن.

25 $\frac{4}{\sqrt{11}}$

26 $\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

27 $\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{35}}{35}$

هەریەك لەم هاوکێشە ولاسەنگانە شیکاربکە.

28 $\sqrt{2x+7}=-3$

29 $\sqrt[4]{3x}=\sqrt[4]{4x-7}$

30 $\sqrt{x-7}<0$

31 $\sqrt[3]{2x+1}\ge 3$

5

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 ئەگەر $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ ئەوا کام لەمانەی دێن ڕاستن بە تەواوەتی.

أ $ad=bc$ ج $ad=cb$

ب $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$ د $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

2 $\left(6\sqrt{8}-6\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)$ سادەبکە.

أ $6\sqrt{2}-24$ ج $6\sqrt{2}+24$

ب $12\sqrt{2}-23$ د $6\sqrt{2}-23$

3 ژمارەی شیکاری سیستمی $\begin{cases} y=3x+2 \\ y=3x-2 \end{cases}$ چەندە؟

أ 0   ج 1

ب 2   د ناکۆتا

4 ماوەی دابەشکردنی $2x^2-5x+8$ بەسەر $x+4$ دا چەندە؟

أ 60   ج -44

ب سفر   د 20

5 $(x^3y^{-2})^{-2}$ سادەبکە.

أ $\frac{y^4}{x^6}$ ج $\frac{1}{x^2y}$

ب $\frac{x^6}{y^4}$ ب x^2y

6 کام لەمانەی خوارەوە نابێتە ڕەگی هاوکێشەی
$x^3+x^2-9x-9=0$

أ -3 ج -1

ب 3   د 1

7 چ ژمارەیەك لەمانەی خوارەوە بخرێتە سەر x^2-10x بۆ ئەوەی ببێتە دووجایەکی تەواو.

أ 5   ج -25

ب -5 ب 25

8 هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە بەدوو خاڵی $(-3, 8)$ و $(-4, 9)$ دا دەڕوات.

9 بڕی $25x^2-60x+30$ شیتەڵبکە.

10 بڕی $\frac{x+1}{x^2+4x-4}+\frac{x^3}{x^2+4}$ سادەبکە.

11 پاش ڕێژەکردنی ژێرەی $\frac{8}{5-3\sqrt{2}}$ بڕەکە سادەبکە.

12 **بەهای ئەویەڕ** بە بۆنەی جەژنی ئەوڕۆژ، شارەوانی شارێك تیری ئاگراوی بە خێراییەکی سەرەتایی $75m$ لە چرکەدا تەقاند. هەژماری ئەویەڕی بەرزی بکە کە یەکێك لە تیرەکان دەیگاتێ وەهەروەها هەژماری کاتە خایەنراوەکەی بکە ئەگەر بزانیت $h(t)=75t-4.8t^2$ بەرزیە بە پێی کات، h بەرزیە بە مەترو t کاتە بە چرکە.

13 گەورەترین ژمارەی تەواو کامەیە لە پاسادانی $-6x-1>10$ دەکات

ئەمانە شیکاربکە.

14 $2\sqrt{x-4}=\sqrt{x-2}$

15 $1-2x=5$

16 $-5x+3=\frac{1}{2}x-1$

17 **بۆ خۆشی.** درێژی تەختەی نواندی شانۆیەك $38m$ و پانیەکەی $20m$. بەشێك لە تەختەکە بڕا هەروەك چۆن لە وێنەکەدا دیارە. بەهای x چەندە ئەگەر بزانیت ئەو بڕینە لە ڕووبەری تەختەکە $265m$ دووجا کەمدەکاتەوە.

بەشی شەشەم

ئەگەر و ئامار

Probability and Statistics

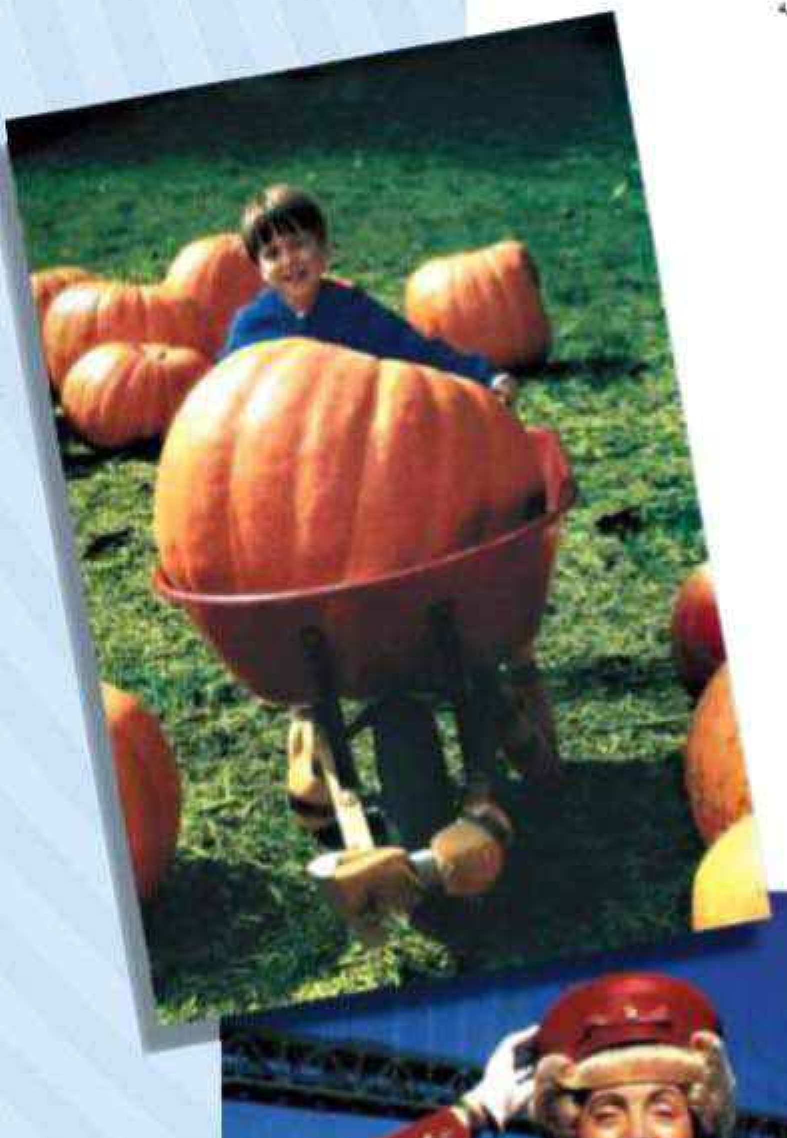
1. دەستپێکێك بۆ ئەگەر.
2. گۆڕینەکان و ڕیزکردنەکان.
3. گونجێنەکان.
4. کۆکردنەوەی ئەگەرەکان.
5. ڕووداوە سەربەخۆیەکان.
6. پێوەرەکانی پەرتبوون.
پرۆژەی بەشەکە
پێداچوونەوە
تاقیکردنەوەی بەش
تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بەشی 6

ئەگەر و ئامار

Probability and Statistics

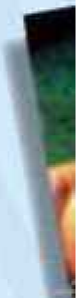
ئەگەر بریتییە لە هاتنەدی ڕووداوێك كە دەتوانیت نیێشبینی ڕوودانی بكەیت و ناتوانیت ئەنجامەكانی دیاریبەكەیت لەگەڵ ئەوەی كە بەچەند مەرجێكی دیاریكراو پێناسەكراوە. ئەگەرەكان بەكارهێنانی زۆری هەیە بەرچاومان دەكەوێت لە كۆمپانیاكانی دڵنیابوون و دامەزراوەكانی لێكۆڵینەوەی وەك لێكۆڵینەوەی پزیشكی و ئەوانی تر، و لە جێبەجێكردنی یاساكان و لە زانستە ڕامیارییەكاندا.



وانەكان

1. دەروازەیەك بۆ ئەگەر.
2. گۆڕینەكان و ڕیزكردنەكان
3. گونجێنەكان.
4. كۆكردنەوەی ئەگەرەكان.
5. ڕووداوە سەربەخۆیەكان.
6. پێوەرەكانی پەرتبوون

پڕۆژەی بەش



دەربارەی پرۆژەی بەش

پێشبینییەکی دروست بۆ ئەنجامەکانی ڕووداوە هەڕەمەکییەکان، ڕۆڵێکی گرنگ دەبینێت بۆ بڕیاردان، ئاسان یان ئاڵۆز. لە زۆر بواردا دەتوانرێت پێشبینی ئەگەری ڕووداوێکی هەڕەمەکی دیاریبکرێت بەڕێگای تاقیکردنەوە، ئەویش بە چاودێریکردنی ژمارەی ئەو جارانەی کە ڕووداوەکەی تێیدا دێتەدی. بەڵام لەوانەیە ئەمە نیمچە ستەم بێت کاتێك ڕووداوەکە ئاڵۆز بێت. لەو کاتەدا، مرۆڤ پەنا دەباتە بەر نواندن. لەمەودوا ئەم ڕێگایە بەکاردێت لەکاتی کارکردنتدا. لە دوای کۆتایی ئەم بەشەدا دەتوانیت هەستیت بە ئەمانەی خوارەوە.

- دروستکردنی نموونەکان (سامپڵ) (نموذج) بۆ نواندنی ڕووداوە هەڕەمەکییەکان.
- بەکارهێنانی پێدراوەکان کە لە نواندنەکە دەستدەکەوێت بۆ خەملاندنی ئەگەری ڕووداوەکە.

وانەی 1

دەروازەیەك بۆ ئەگەر
Indroduction To Probability

بۆچی؟ زۆرجار توێژینەوەی ئەگەر بەبەکارهێنانی شتەکان لە ژیاندا وەك بەردەزار یان تیر یان پارچە دراوی کانزایی دەکرێت.

ئامانجەکان

- زاراوەکانی تایبەت بە ئەگەر بەکاردەهێنێت.
- یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاردەهێنێت.
- یەکسانبوون لە ئەگەرەکاندا دەناسێت.
- ئەگەری تیۆری ڕووداوێك دیاریدەکات.

گەلێك کۆمپانیای بازرگانی هەن. لەوانەش کۆمپانیاکانی دڵنیابوون، کارەکانیان بەندە بەو شتانەی کە پێشبینیکردنی ئەنجامەکانیان کارێکی ئاسان نیە، بۆمان هەیە بپرسین: چۆن دەتوانێت قازانج بکات، لەڕاستیدا دەتوانین پێشبینی ئەگەری ڕووداوی کارێك دیاریبکەین لە ڕێگای چاودێریکردنی ئەنجامەکانی بارە زۆرەکان کە لەوانەیە ببنە هۆی ڕوودانی ڕووداوەکە. بۆ نموونە دیاریکردنی ئەگەری مردنی جگەرەکێشێك بە چاودێریکردنی ڕێژەی ئەو کەسانەی کە بەهۆی جگەرەکێشانەوە دەمرن. کە ئەمەش ڕێژەیەکی زۆربەرزە هەروەکو توێژینەوە پزیشکییەکان سەلماندویانە. لە خوێندنی ئەگەرەکان کۆمەڵێك زاراوە بەکاردەهێنرێت خوێندکار پێویستە فێریان ببێت وبە شێوەیەکی دروست بەکاریان بهێنێت. ئەم خشتەی خوارەوە پێناسەکانی هەندێ لە زاراوەکانمان بۆ ڕووندەکاتەوە هەروەکو ڕوونکراوەتەوە بە نموونەی هەڵدانی بەردەزارێك.

نموونە	پێناسە
هەڵدانی بەردەزارێك	**کاری هەڕەمەکی Trial**: کارێکە ناتوانین پێشەکی ئەنجامەکەی دیاریبکەین
هەڵدانی بەردەزارێك 10جار	**تاقیکردنەوە(هەڕەمەکی) Experiment**: کارێکی هەڕەمەکییە یان دووبارەبوونەوەی کارە هەڕەمەکیەکەیە چەند جارێك
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	**کۆمەڵەی ئەنجامەکان(بۆشایی نموونە) Sample Space** : کۆمەڵەی هەموو ئەنجامەکانی لە توانادابێت لە کارێکی هەڕەمەکیدا.
دەستکەوتنی 3 یان دەستکەوتنی ژمارەیەکی تاك	**ڕووداو Event** : ئەنجامێکی لە توانادایە یان کۆمەڵێك ئەنجامی لە توانادایە.

بە ئەنجامەکانی کارێکی هەڕەمەکی دەڵێین ئەگەری یەکسان ئەگەر لە توانادابێت هەموو ئەو ئەنجامانەی دەردەکەون یەکسان بن. لەڕاستیدا سەلماندنی ئەوەی هەموو ئەنجامەکانی کاری هەڕەمەکی لە ژیاندا ئەگەر تیایاندا یەکسان بن کارێکی گرانە. بەڵام دەتوانین خۆمان وای دابنێین کە وایە. بۆ نموونە دەتوانیت ئەنجامەکانی هەموو کارە هەڕەمەکیەکانی خوارەوە بە ئەگەری یەکسان دابنێیت: هەڵدانی بەردەزارێك، هەڵدانی پارچە دراوێکی کانزایی، ئەنجامی چەرخێکی میلدار، ڕەگەزی لە دایکبوو.

نموونە 1

ئەگەری چاکبوونەوەی یەکێکی توشبوو بە شێرپەنجەی سی چەندە، ئەگەر بزانیت توێژینەوەیەك لەسەر **5000** توشبوو کراوە لەوانە **250** یان چاکبوونەتەوە؟

شیکار

دەتوانیت کۆمەڵەی ئەنجامەکانی 5000 توشبوو، لە نێوانیاندا 250 کەس چاکبووەتەوە ئەگەری چاکبوونەوەی نەخۆشەکە بریتیە لە:

$$P(c)=\frac{250}{5000}=\frac{1}{20}=0.05=5\%$$

هێمای c بەکاردێت بۆ ڕووداوی (چاکبوونەوەی نەخۆش)

نموونە 2

دۆستی بەردەزارێکی هەڵدا ئەگەری دەستکەوتنی یەکێك لە چەند جارەکانی 3 چەندە؟

شیکار

بۆشایی نموونە = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ڕووداوەکە دێتەدی ئەگەر دۆستی 3 یان 6ی دەستبکەوێت.
ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە ئەگەری ڕووداوەکە بریتییەلە2 لە بنچینەی 6 واتە:

$$P(M\,3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0.3333\approx 33.33\%$$

گریمانM3 هێمایەکە بۆ یەکێك لە چەند جارەکانی 3

ئەگەری تیۆری Theoritical Probability

ئەگەر تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی دیاریکراو و ڕێکبوو ئەوا ئەگەری ڕووداوێك A لە ڕووداوەکانی بریتییە لە ژمارەی ڕاستی:

$$P(A)=\frac{\text{ژمارەی ئەنجامەکانی کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکات}}{\text{ژمارەی هەموو ئەنجامەکان}}$$

بەرەنکاری

چێنەر گۆیەکی لە تورەگەیەکدا ڕاکێشا کە 4 گۆی سوور و 7 گۆی ڕەشی تیدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە شین بێت چەندە؟

ئەگەر Probability

پێوانەی ئەگەری ڕووداوێك ژمارەیەکی ڕاستییە ودەکەوێتە نێوان سفر ویەك.
ئەگەر ڕووداوەکە ئەستەم بێت **Impossible** ئەوا ئەگەری ڕوودانی = 0
ئەگەر ڕووداوەکە دڵنیایی بێت **Certain** ئەوا ئەگەری ڕوودانی = 1
سەرجەمی ئەگەرەکانی هەموو ئەنجامەکانی لە تواناداپێت = 1

ئەگەری تیۆری Theoretical Probability

ئەگەری ڕوداوویێك لە ڕووداوەكانی تاقیكردنەوەیەك كە ئەنجامەكەی ئەگەری یەكسانیان هەبێت، بریتیە لە ژمارەیەكی ڕاستی و یەكسانە بەم كەرتە.

$$p(A) = \frac{\text{ژمارەی ئەو بارانەی كە ڕووداوەكە دێتەدی}}{\text{ژمارەی هەموو بارە لە تواناكان}}$$

نموونە 3

مەریوان پەپكێكی لە قوتوویەك ڕاكێشا كە 2 پەپكی سوور4 پەپكی شین و 3 پەپكی زەردی تێدایە.
ئەگەری ئەوەی پەپكە ڕاكێشراوەكە زەرد بێت چەندە؟

شیكار

ئەنجامەكانی ئەم تاقیكردنەوە هەڕەمەكیە ئەگەری یەكسانە.دەتوانیت بۆشایی نموونەكە بەم شێوەیە بنوێنین.
ئەگەری ئەوەی پەپكە ڕاكێشراوەكە زەرد بێت 3 لە 9 یە.

$$\left\{R_1, R_2, B_1, B_2, B_3, B_4, Y_1, Y_2, Y_3\right\}$$

Y هێمای ڕوودانی «ڕاكێشانی پەپكی زەردە» $P(Y)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

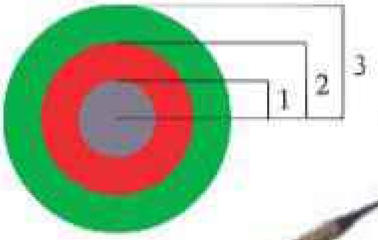
هەوڵبدە

كامەران پەپكێكی لە قوتوویەك ڕاكێشا كە 3 پەپكی سوور و 5 پەپكی شین و 7 پەپكی زەردی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی پەپكی ڕاكێشراو شین بێت چەندە؟

بۆشایی نموونە لە نموونەكانی ڕابردوو لە كۆمەڵەیەكی دواهاتوو پێكدێت. لە كاتێكدا تاقیكردنەوەی هەڕەمەكی وا هەیە بۆشایی نموونەكە تیایاندا كۆمەڵەیەكی دوانە هاتووە.

نموونە 4

بەستنەوە
ئەندازە



بڕیار تیرێكی هەڵدا بۆ ئەوەی بچەقێت لە پارچە تەختەیەكی بازنەیی كە بەدیوارێكدا هەڵواسرابوو. ئەگەری ئەوەی تیرەكە بچەقێت لە ناوچەی سەوز چەندە؟

شیكار

هەر خاڵێك لە خاڵەكانی بازنەكە ئەنجامێك دەردەبڕێت كە لە توانادایە. لەم بارەدا، دەڵێین، كە بۆشایی نموونەكە، كۆمەڵەیەكی دوانەهاتووە. خاڵەكانی ڕووداوەكە دێتنەدی بریتین لە خاڵەكانی ناوچە سەوزەكە. بۆ هەژمێركردنی ئەگەری ڕووداوی داواكراو، ڕووبەری ناوچە سەوزەكە بەسەر ڕووبەری گشتی تەختەكە دابەشبكە.

$$P(G)=\frac{\text{ڕووبەری ناوچەی سەوز}}{\text{ڕووبەری گشتی تەختە بازنەییەكە}}=\frac{\pi(3)^2-\pi(2)^2}{\pi(3)^2}=\frac{5\pi}{9\pi}=\frac{5}{9}=0.556=55.6\%$$

كە G هێمایەك بێت بۆ ڕووداوەكە «چەقینی تیرەكە لە ناوچە سەوزەكە».

هەوڵبدە

ئەگەری ئەوەی تیرە كە لە ناوچە سوورەكە بچەقێت چەندە؟

نموونە 5

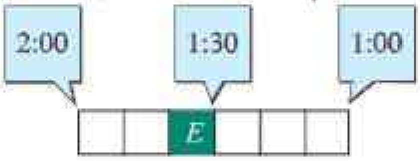
شەماڵ ڕۆژانە سەیری پۆستە ئەلکترۆنییەکەی دەکات لە نێوان کاتژمێر یەک **1:00** و کاتژمێر دوو **2:00** ی پاش نیوەڕۆ ئەگەری ئەوەی لە نێوان **1:30** و **1:40** بەو کارە هەستێت چەندە؟

جێبەجێکردنەکانی
بژمێر

شیکار

بۆشایی نموونە لەهەرساتێکی نێوان کاتژمێر 1:00و 2:00 پێکدێت و ڕووداوەکە لە 1:30 تا 1:40 بۆ هەژمێرکردنی ڕێژەی ئەگەری ئەو ڕووداوە، ماوەی نێوان کاتژمێر 1:00و 2:00 دابەش دەکەیت بۆچەند ماوەیەك کە هەریەکەیان 10 خولەك بێت

(درێژی ماوەی نێوان 1:30 و 1:40 کەڕووداوەکە دەنوێنێت).



ماوە سەوزەکە ڕووداوەکە دەنوێنێت. ئەگەری ڕوودانی ڕووداوەکە، واتا، ماوەیەك لە 6 ماوە واتە:

$$P(E)=\frac{1}{6}=0.167=16.7\%$$

کاتێك E هێمایەك بێت بۆ ڕووداوەکە

(سەیرکردنی شەماڵ بۆ پۆستە ئەلکترۆنییەکەی لە 1:30 بۆ 1:40)

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی لە نێوان 1:30 و 1:35 بەو کارە هەستێت چەندە؟

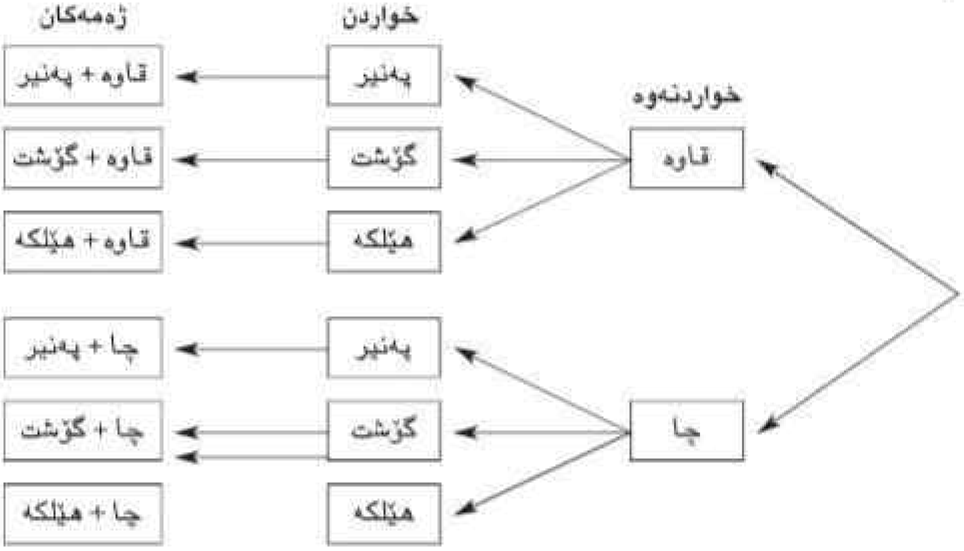
یاسای بنەڕەتی ژماردن Fundamental Counting Principle

کە لە ڕووداوێك دەکۆڵیتەوە بۆ ئەوەی ڕێژەی ئەگەرەکەی هەژمێربکەی پێویستت بەمانە دەبێت:

1. هەموو ئەم ئەنجامانەی کە لە توانادایە بژمێرە (دانەکانی بۆشایی نموونە بنووسە).

2. ئەو ئەنجامانە بژمێرە کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکات. دەتوانیت هێڵکاری درەختی بەکاربهێنیت بۆ ئەنجامدانی ئەم کارە.

بۆ نموونە ژەمی خواردنی بەیانی لە یەکێك لە ئوتێلەکاندا، میوانەکە دەتوانێت لە نێوان قاوە وچای یەکێکیان هەڵبژێرێت و لە نێوان سێ جۆری خواردن پەنیر و گۆشت و هێلکەدا یەکێك هەڵبژێریت. ئەم هێڵکارییەی خوارەوە هەموو ڕێگاکانی کە لە توانادا یە بۆ ژەمی خواردنی بەیانی ڕووندەکاتەوە .



چالاکی

دۆزینەوەی هێڵکاری درەختی Exploring Tree Diagram

خواردنگەیەک دوو جۆر خواردنی بۆ میوانەکانی ئامادەکرد بۆ ژەمی ئێوارە هەر ژەمێك پێکهاتبوو لە قاپێك زەڵاتە و قاپێك گۆشت. میوانەکە بۆی هەیە یەك جۆر لەدوو جۆر زەڵاتە هەڵبژێرێت: زەڵاتەی کاهو، زەڵاتەی تەماتە. قاپە گۆشتەکە سێ جۆرە: گۆشتی برژاو، گۆشتی سورەوەکراو، گۆشتی مریشك

1. دەستبکە بەکێشانی هێڵکاری درەختی تێیدا هەڵبژاردنی زەڵاتە روونبکەوە بەم شێوەیە
2. لە دەستپێکردنی هەڵبژاردنی زەڵاتەکەوە هێڵکاری درەختی روونبکەوە بۆ هەڵبژاردنەکانی سێ جۆرە گۆشتەکە.
3. ئەو ژەمانەی کەپێکدەهێنرێت کامانەن؟ ژمارەیان چەندە؟
4. خواردنگەکە ئێستا پیازی برژاو یان سیری برژاو دەخاتە سەر قاپی گۆشتەکە تۆش ئەمە بخەرەسەر هێڵکاری درەختەکە کە رێگا بە ژماردنی ئەم ژەمە خۆراکییانەی کە ئێستا دروستبوون، ئەو ژمارەیە چەندە؟

خاڵی چاودێری ✓

هێڵکاریەکی درەختی دروستبکە بۆ نموونەی پێشوو. بەبێ گۆڕدانە خستنەرووی خاڵی چوارەم. بە قاپی گۆشت دەستپێبکە وەك هەڵبژاردنی یەکەم. ئایا ئەم گۆڕانکارییە لەرێزکردنی دوو هەڵبژاردنەکە کاری کردە سەر گۆڕانی ئەنجامەکان؟

خاڵی چاودێری ✓

وردبوونەوە لە هێڵکاری درەختی وزانینی رێگای دروستکردنی دەبێتە هۆی روونکردنەوەی یاسای ژماردنی بنەڕەتی.

یاسای بنەڕەتی ژماردن Fundamental Counting Principle

ئەگەر m رێگا بۆ هەڵبژاردنی یەکەم و n رێگا بۆ هەڵبژاردنی دووەم هەبێت ئەوا $m\times n$ رێگا بۆ هەردوو هەڵبژادنەکە بەیەکەوە هەیە.

نموونە 6

دانا ویستی وشەی نهێنی تایبەتی چوونە ناو ئینتەرنێت هەڵبژێرێت. ئەم وشەیە پێکدێت لە دوو پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی بەدوایدا چوار ڕەنووس. دانا دەتوانێ چەند وشەی نهێنی دروستبکات ئەگەر زانیت کەوا ناتوانێت پیتی O و ڕەنووسی سفر بەکاربهێنێت؟(ژمارەی پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی 26 پیتە)

جێبەجێکردنەکانی
بژمێر

شیکار

دانا دەتوانێت هەرپیتێك لە نێوان 25 پیت هەڵبژێرێت و هەر ڕەنووسێك لە نێوان 9 ڕەنووس هەڵبژێرێت. بەجێبەجێکردنی یاسای بنەڕەتی ژماردن ئەمەی خوارەوەمان دەست دەکەوێت:

ڕەنووسی چوارەم	ڕەنووسی سێیەم	ڕەنووسی دووەم	ڕەنووسی یەکەم	پیتی دووەم	پیتی یەکەم	
9 ×	9 ×	9 ×	9 ×	25 ×	25	← ژمارەی وشە ئەهێنیەکان

$$25^2\times 9^4 = 41\ 00\ 625$$

نموونە

7 تابلۆی ئۆتۆمبێلەکان پێکدێن لە سێ پیت بەدوایدا لە سێ ژمارە دێت. ئەگەری ئەوەی پیتەکانی تابلۆی ئۆتۆمبێلەکە پێکبێت لە پیتەکانی یەکەمی ناوی سیانی خۆت بەڕێز (ژمارەی پیتەکانی ئەبجەدی عەرەبی 28 پیتە) چەندە؟

جێبەجێکردنەکانی

بازرگانی

شیکار

دانەکانی بۆشایی نموونەکە:

پیتی یەکەم	پیتی دووەم	پیتی سێیەم	ژمارەی یەکەم	ژمارەی دووەم	ژمارەی سێیەم
28 ×	28 ×	28 ×	10 ×	10 ×	10

ژمارەی تابلۆکانی لەتوانادایە دەبێتە $28^3 \times 10^3 = 21\ 252\ 000$ تابلۆ.

پاشان ژمارەی ئەو تابلۆیانە بدۆزەرەوەکە مەرجەکە دێنێتەدی.

پیتی یەکەم	پیتی دووەم	پیتی سێیەم	ژمارەی یەکەم	ژمارەی دووەم	ژمارەی سێیەم
1 ×	1 ×	1 ×	10 ×	10 ×	10

بەمەش ژمارەی تابلۆکانی مەرجەکە دێننەدی بریتین لە $10^3 = 1\ 000$ تابلۆ.

ئەگەری ئەوەی پیتەکانی تابلۆی ئۆتۆمبێلەکە پێکبێت لە پیتەکانی یەکەمی ناوی سیانیت بەڕێز

بریتییە لە: $\frac{1000}{21\ 952\ 000} = 0.000045$ واتە 45 لە ملیۆنێك.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 سێ نموونە لەسەر ڕووداوێك بهێنەوە کە ئەنجامەکانیان وەك یەك نەبن.

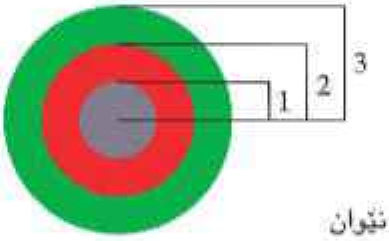
2 ئەگەری تیۆری وئەگەری تاقیکردنەوە لە چیدا لێکدەچن؟ لە چیدا جیاوازن؟

3 چۆن ڕوویەرەکان بەکار دەهێنرێت بۆ هەژمارکردنی ئەگەرەکان؟

4 چۆن هێڵکاری درەختی یارمەتیت دەدات بۆ تێگەیشتنی یاسای ژماردنی بنەڕەتی؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

5 دارا گۆیەکی شوشەیی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 5 گۆی شین و 3 گۆی سوور و یەك گۆی سپی تێدایە. ئەگەری ئەوەی کە گۆی ڕاکێشراو سوور بێت چەندە؟



6 ڕێژین تیریکی گرتە تابلۆیەکی تەختەی ڕەنگراوی هەڵواسراو لە سەر دیوارێك. ئەگەری ئەوە بدۆزەوە کەتیرەکە لەناوچەی بازنە بچووکەکە بچەقێت؟

7 ئاکام ڕۆژانە سەیری پۆستی ئەلیکترۆنیەکەی دەکات لە نێوان کاتژمێر حەوت و کاتژمێر هەشتی بەیانی. ئەگەری ئەوەی ئەم کارە لە نێوان 7:30 و 7:45 ئەنجام بدات چەندە؟

8 ڕەوەز ویستی وشە نهێنیە تایبەتییەکەی هەڵبژێریت بوچوونە ناو ئینتەرنێتەوە، ئەم وشە پێکدێت لە 3 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی و سێ ڕەنووسی بەدواییدا بێت. چەند وشەی نهێنی دەتوانیت پێکبهێنێت، ئەگەر بزانی ناتوانێت پیتی O و ڕەنووسی 0 بەکاربهێنێت.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

تورەگەیەک 3 پلێتی سپی و دوو پلیتی ڕەش و 5 پلیتی سووری تێدایە هەموویان هاوشێوەن و زانا پلیتێکی ڕاکێشا. ئەگەری ئەو پلیتە ڕاکێشراوە بدۆزەوە بۆ ئەوەی

9 سپی بێت   **10** ڕەش بێت   **11** سوور بێت

ئەگەر بەردەزارێک یەک جار هەڵبدرێت ئەگەری ئەم ڕووداوانەی خوارەوە بدۆزەوە.

12 دەستکەوتنی ژمارە 1   **13** دەستکەوتنی ژمارە 4 .

14 دەستکەوتنی ژمارەی جووت   **15** دەستکەوتنی ژمارەی تاک.

16 دەستکەوتنی ژمارەی بچووکتر لە3 .   **17** دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 3 .

18 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 6 .   **19** دەستکەوتنی ژمارەی بچووکتر لە 7 .

پاسی گواستنەوە دەگاتە شوێنی ڕاوەستانی ئەنیشت ماڵی دانا لە نێوان کاتژمێر هەشت و 5 خولەکی بەیانی. ئەگەری ئەوەی کە دانا سواری پاسەکە بێت کاتی گەیشتە شوێنی وەستان لەم کاتانەی خوارەوەدا بدۆزەوە.

20 8:04   **21** 8:02   **22** 8:01   **23** 8:03

لە دوو پرسیاری 4224 و 25 هێڵکاری درەختی دروستبکە بۆ ئەوەی بۆشایی نموونەی ڕووداوەکە ڕوونبکاتەوە.

24 تۆمارکرن لە چالاکییەکانی دەرەکییەکان (یەک چالاکی لە هەریەک لە چەشنەکانی 1,2,3)

وەرزش : تۆپی پێ، تۆپی سەبەتە، تۆپی سەرمێز.

هونەر : مۆسیقا، وێنە.

یانە : زانست، بیرکاری

25 ئارەزووەکان (خولیاکان) (ئارەزوویەک لە هەر یەکە لە دوو چەشنی A ، B)

لەناوماڵ : خوێندنەوە، سەیرکردنی تەلەفزیۆن، گوێگرتن لە مۆسیقا.

لە دەرەوەی ماڵ: ڕاکردن، گەشتکردن، چوونە یانە

ژمارەی وشە نهێنیەکان کە دەتوانرێت پێکبهێترێن بەبەکارهێنانی هەموو پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی و هەموو ڕەنووسەکان لە هەریەک لەم بارانەی خوارەوە دیاریبکە.

26 دوو ڕەنووس بەدواییدا سێ پیت و بەدوای ئەوانە یەک ڕەنووس بێت.

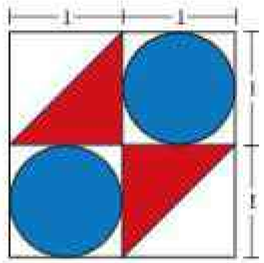
27 سێ ڕەنوس بەدواییدا دوو پیت و بەدوای ئەوان یەک ڕەنووس بێت.

28 سێ پیتی جیاواز بەدواییدا سێ ڕەنووسی جیاواز بێت.

29 دوو پیت بەدواییدا چوار ڕەنووس بێت.

بەستنەوە

ئەندازە کامەران تیرێکی هەڵدا بۆ سەر تابلۆیەکی تەختەیی ڕەنگکراو کەلەم وێنەیەدا ڕوونکراوەتەوە. ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە هەژمێربکە.



30 تیرەکە ناوچەیەکی بازنەیی بپێکێت.

31 تیرەکە یەکێك لە دوو سێگۆشە سوورەکە بپێکێت.

32 تیرەکە یەکێك لە دوو سێگۆشە سپیەکە بپێکێت.

بەرەنگاری

33 تیرەکە ناوچەیەکی سپی بپێکێت.

جێبەجێکردنەکان

دیمۆگرافیا ئەم خشتەیەی خوارەوە چەند خوێندکارێکی تۆمارکراو لە یەکێك لە کۆلیژەکانی زانکۆیەك بە پێی تەمەن و ڕەگەزیان پێشاندەدات.

تەمەن	هاتووەکان	هاوڵاتی
14 - 17	83	93
18 - 19	1 224	1 416
20 - 21	1 294	1 414
22 - 24	1 260	1 263
25 - 29	950	1 058
30 - 34	661	811
35 و سەروتر	955	1 824

ڕاگری کۆلێژ هەستا بە هەڵبژاردنی یەکێك لە تۆمارکراوەکان. ئەگەری ئەوەی تەمەنی ئەو کەسە لە یەکێك لەم چەشنانە بێت چەندە؟

34 18 - 24 **35** 25 - 29 **36** 30 - 34 **37** 30 بەرەوژوور

38 **ئاسایش** یەکێك لە پسپۆرەکانی ئاسایش ویستی کلیلێك دروستبکات بۆیەکێك لە سیستەمەکانی ئاسایش ئەم کلیلە لە سێ پیت پێکدێت A ، B ، C لە تواناداییە هەریەکێك لەم پیتانە زیاتر لە جارێك دوبارەببێتەوە، ئەو پسپۆرە ویستی ئەگەری سەرکەوتنی هەوڵەکانی کردنەوەی کلیلەکە لە 0.001 کەمتر بێت، کەمترین ژمارەی پیتەکانی ئەو کلیلە دەگاتە چەند؟

ڕوانین بۆ دواوە

پلەی هەریەک لەم ڕادەدارانە چەندە؟

39 $x^3+4x^5-6x^2+x-10$ **40** $x+3x^5$

هەریەک لەم هاوکێشە و لاسەنگەیە شیکاربکە

41 $x^3-2x^2-x+2=0$ **42** $x^2-3x+2>0$

43 پیشەسازکارێك وایدانا نەخشەی $C(x)=0.1x^2+5x+40$ نموونەیەك بۆ تێچوونی کاڵاکانی پێکدەهێنێت. هێمای x لەم نەخشەیەدا ئاماژەیە بۆ ژمارەی یەکەکانی بەرهەم هێنان و هێمای C بۆ تێچوونی بەرهەمەکەیە. تێچوونی بەرهەمهێنانی 10 کاڵا چەندە؟ لەبارێکی تردا پیشەسازکارەکە بڕیاریدا بەرهەمەکە بفرۆشێت بە 60 هەزار دینار بۆ هەر دانەیەك. دەبێت چەند ژمارە لەو کاڵایانە بفرۆشێت بۆ ئەوەی گەورەترین قازانجی دەستبکەوێت؟

جیبەجێکردنەکانی

ئابووری

ڕوانین بۆ پێشەوە

44 سامان ویستی دوو پیت لەم پیتانە هەڵبژێرێت E، D، C، B A ژمارەی شیکارەکانی لە تواناد‌ا چەندە؟ئەگەر سامان گرنگی بدات بە ڕیزکردن لەکاتی ڕاکێشان (شیکاری B، A وەك شیکاری A، B نیە).
ئەگەر سامان بایەخ نەدات بەڕێزکردن (هەردوو شیکار A، B و B، A هەمان شیکارە).

وانەی 2

گۆڕینەکان و ڕیزکردنەکان
Permutations and Arrangements

بۆچی؟ لێرەدا زۆر بار هەیە بایەخ دەدات بە ڕێکخستنی ژمارەیەک لەدانە دیاریکراوەکانی کۆمەڵەیەک بە شێوەیەکی ڕێزکراو.

ئامانجەکان

- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی کە پێویستی بە گۆڕینەکان هەیە و دیاریکردنی ژمارەی گۆڕینەکانی کۆمەڵەیەک کە لە n دانە پێکهاتووە دیاریدەکات.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی کە پێویستیان بە ڕیزکردن هەیە ودیاریکردنی هەموو ڕیزکراوەکانی m دانەیە لە n .

ئەرنۆڵد شوینبرگ مۆسیقایەکی داهێنا کە لە 12 ئاواز پێکهاتووە. پێویستە هەر نۆتەیەک لە نۆتەکانی پەیژەی مۆسیقی بە لایەنی کەمەوە یەک جار بەکاربێت، پێش لەرینەوەی هەر یەکێکیان. بەهەر کۆمەڵەیەک لە 12 ئاوازەکە دەوترێت ئاوازە دێڕ **Tone Row**. چەند ئاوازە دێڕی جیاواز دەتوانیت بنووسی؟

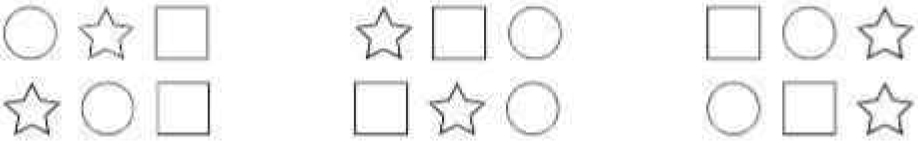
گۆڕینەکان — Permutations

گۆڕین ڕێکخستنی ژمارەیەک شتە لە ڕیزکردنێکی دیاریکراودا.

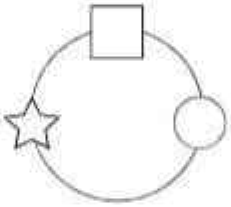
نموونە 1

هەموو گۆڕینەکانی ئەم شتانە بکێشە

شیکار



دەتوانیت شتەکان لە سەر هێڵێک ڕێکخەیت وەک نموونەکەی پێشوو.
و دەتوانیت ڕێکیان بخەیت لەسەر بازنەیەک وەک ئەم وێنەیە.
ڕێکخستنی شتەکان لە باری یەکەمدا گۆڕینێکی هێڵییە و لەباری دووەمدا گۆڕینێکی بازنەییە.



نموونە 2

شیکارکردنی پرسیارەکان

دروستکردنی لیستی ڕێکخراو: ئەم خشتەی خوارەوە هەموو ئەو گۆڕینانەی لە توانادایە بۆ پیتە لاتینیەکان D، C، B، A ڕووندەکاتەوە چۆن یاسای ژماردنی بنچینە بەکاردێنێت بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەم گۆڕینانە؟

DABC	*CABD*	*BACD*	*ABCD*
DACB	*CADB*	*BADC*	*ABDC*
DBAC	*CBAD*	*BCAD*	*ACBD*
DBCA	*CBDA*	*BCDA*	*ACDB*
DCAB	*CDAB*	*BDAC*	*ADBC*
DCBA	*CDBA*	*BDCA*	*ADCB*

شیکار

دەتوانیت ژمارەی ئەو گۆڕینانە دیاریبکەیت بە بەکارهێنانی یاسای بنەڕەتی ژماردن وەك لە خوارەوە ڕوونکراوەتەوە

دەتوانرێت پیتی یەکەم هەلبژێرێت لە	دەتوانرێت پیتی دووەم هەلبژێرێت لە	دەتوانرێت پیتی سێیەم هەلبژێرێت لە	دەتوانرێت پیتی چوارەم هەلبژێرێت لە
4	3	2	1

ژمارەی گۆڕینەکان بریتییە لە $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ گۆڕین.

بۆ دەربڕینێکی پوختە بۆ ئەم لێکدانە ئەمە: $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = !4$ بەکاربێنە

لێکدراوی n n factorial

ئەگەر n ژمارەیەکی تەواوی نا سالیب بێت. ئەوا لێکدراوی n بە $n!$ دەنووسرێت وەدەکاتە:

$$n! = \begin{cases} 1 & :\text{کە } n = 0 \\ 1 \times 2 \times \ldots \times n & :\text{کە } n > 0 \end{cases}$$

نموونە 3

ڕاستی و دۆستی وڕەوەز بەشداریانکرد لە یاری بازداندا، بۆشایی نموونە بۆ ئەم یارییە دیاریبکە؟ژمارەیان چەندە؟ئەگەری ئەوەی ڕەوەز یەکەم بێت چەندە؟

شیکار

ئەو ئەنجامامەی لە توانادایە لەم یارییەدا:

یەکەم	ڕاستی	ڕاستی	دۆستی	دۆستی	ڕەوەز	ڕەوەز
دووەم	دۆستی	ڕەوەز	ڕاستی	ڕەوەز	ڕاستی	دۆستی
سێیەم	ڕەوەز	دۆستی	ڕەوەز	ڕاستی	دۆستی	ڕاستی

ژمارەی ئەنجامەکانی لەتوانادایە دەکاتە 6 .

ژمارەی ئەو ئەنجامانەی کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکات (ڕەوەز یەکەم بێت) دووە. ئەگەری ئەوەی کە ڕەوەز یەکەم بێت $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$

هەوڵبدە دەتوانیت چەند ژمارەی 4 ڕەنووسی پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4 بەبێ دووبارەبونەوە؟ ئەو ژمارانە بنووسە.

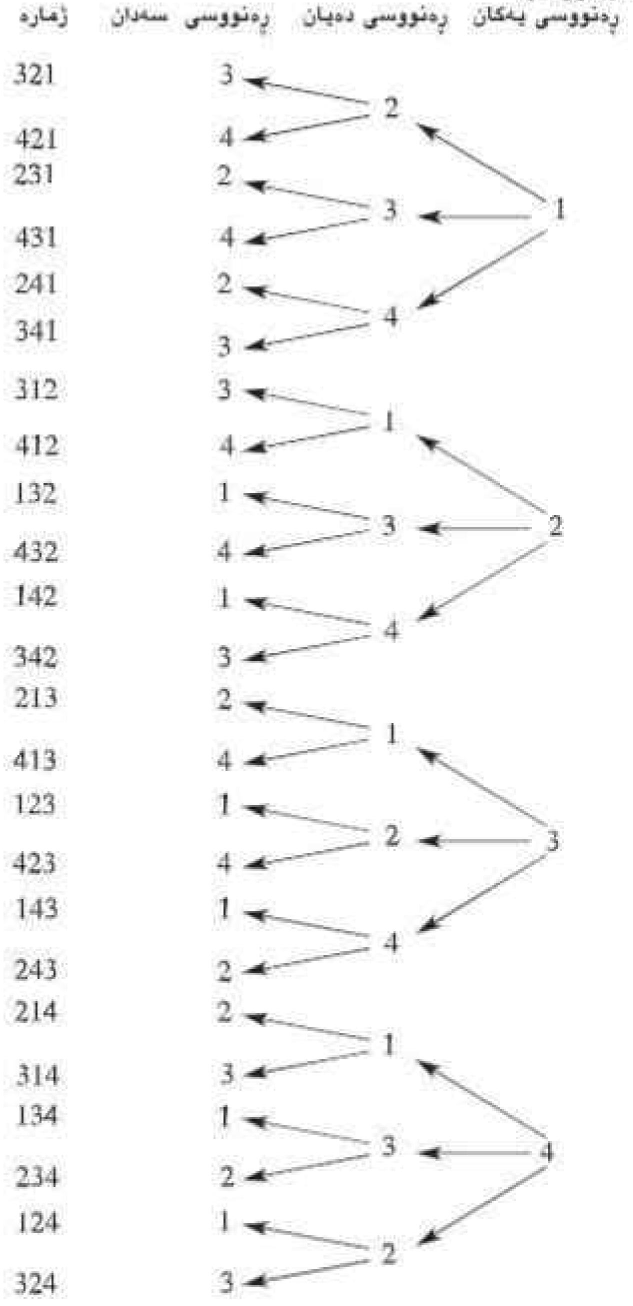
Arrangements ڕیزکردن

نموونە 4 **دەتوانیت چەند ژمارەی 3 ڕەنوسی پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4 بەبێ دوبارەبوونەوە؟ ئەو ژمارانە بنووسە؟**

شیکار

هێڵکاری درەختی بەکاربهێنە. ئەم هێڵکارییە درەختییەی خوارەوە هەموو ئەو هەڵبژاردنانەی کە لە تواناادا هەیە ڕووندەکاتەوە بۆ هەڵبژاردنی ڕەنووسی یەکان لە دواییدا ڕەنووسی دەیان، پاشان ڕەنووسی سەدان. و هەروەها ژمارەکەش دیاریدەکات لەهەر بارێکەدا.

دەتوانی 24 ژمارە پێکبهێنیت کە لە 3 ڕەنووس پێکهاتبێت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4، بەبێ دووبارەبوونەوە



هەوڵبدە دەتوانیت چەند ژمارەی 4 ڕەنووسی پێکبێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسی1، 2، 3، 4، 5، بەبێ دووبارەبوونەوە؟

ئەوەی پێی هەڵسایت لە نموونەی پێشوو دەتوانین بڵێین 3 ڕەنووست ڕێکخست لە 4 ڕەنووسەکانی 1, 2, 3, 4 ئەوەی تۆ دەستتکەوت بریتییە لە ریزکردنەکانی 3 شت لە 4 شتی بنەڕەتی، بۆ دەستکەوتنی ژمارەی ئەم ریزکردنانە یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربێنە.

دەتوانریّ ڕەنووسی سەدان هەڵبژێری لە		دەتوانریّ ڕەنووسی دەیان هەڵبژێری لە		دەتوانریّ ڕەنووسی یەکان هەڵبژێری لە
2	×	3	×	4

بەمەش ژمارەی ریزکردنەکان دەبێتە $4 \times 3 \times 2 = 24$.

نموونە 5

جێبەجێکردنەکانی

مۆسیقا

باوکی ئالان 10 C.D موسیقای بە دیاری دایە کوڕەکەی. ئالان ویستی گوێ لە سێیانیان بگرێت یەک لەدوای یەک. ئایا ئالان چەند هەڵبژاردنی هەیە؟

شیکار

ئالان دەتوانێ یەکی یەکەم هەڵبژێرێت لە 10 پەیک، دووەم لە 9 پەیک، و سێیەم لە 8 پەیک. ئەگەر ئالان یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربهێنێت دەبینێت کە: $10 \times 9 \times 8 = 720$ هەڵبژاردنی هەیە.

هەوڵبدە شێرزاد 5 ڕۆمانی کڕی بۆ ئەوەی سێیانیان بخوێنێتەوە یەک بەدوای یەک لە پشووی هاویندا. شێرزاد بەچەند ڕێگا دەتوانێت ئەم کارە ئەنجام بدات؟

Arrangements of n Objects Taken r at a Times ژمارەی ریزکردنەکانی r شت لە n شتی بنەڕەتی

ژمارەی ریزکردنەکانی r شت لە n شتی بنەڕەتی کاتی $r \le n$ بریتییە لە $P(n, r) = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

نموونە 6

شیلان ویستی 4 پەرتووک لە کتێبخانەکەیدا دابنێ کە لە 10 ڕەفە پێکهاتبوو بەمەرجێک لە یەک کتێب زیاتر لە ڕەفەیەکدا دانەنێت. شیلان بە چەند ڕێگا دەتوانێت ئەم کارە ئەنجام بدات.

شیکار

پرسیارەکە دەگەڕێتەوە بۆ ریزکردنی 4 ڕەفە لە بنەڕەتی 10 .شیلان رەفەی یەکەم لە 10 ،و دووەم لە 9 ، و سێیەم لە 8 ، و چوارەم لە 7 هەڵدەبژێرێت بەمەش ژمارەی ڕێگاکان دەبێتە $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

هەوڵبدە ئاکام 8 قوتووی ڕەنووسکراو و 5 گۆی ڕەنگاوڕەنگی جیاوازی هەیە. ویستی گۆیەکان بخاتە ناو چەند قوتوویەکەوە بەمەرجێک لە گۆیەک زیاتر لە قوتوویەکدا نەبێت. چەند ڕێگای هەیە؟

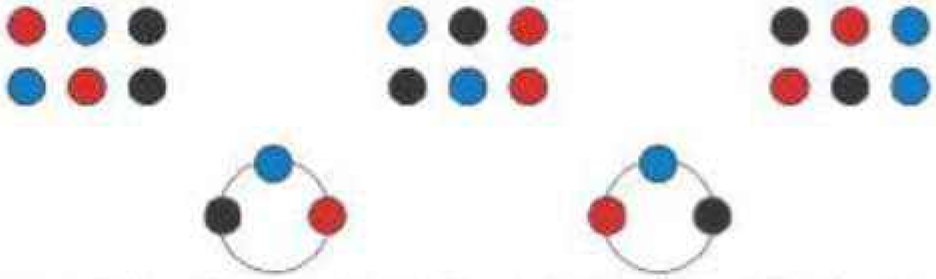
گۆڕینەکانی بازنەیی Circular Permutations

نموونە 7

لە باخچەکەی ڕووناکدا 3 کورسی هەیە: شین وسوور و ڕەش. ڕووناک ویستی ئەو کورسییانە بەریز لە دەوری مێزێکی بازنەیی دابنێ چەند ڕێگای هەیە؟ ژمارەیان چەندە؟

شیکار

ئەگەر سەرنجی گۆڕینە هێڵییەکانی سێ کورسییەکە بدەیت ئەمەی خوارەوەت دەستدەکەوێت



تێبینی بکە کە گۆڕینە هێڵییەکان لە ڕیزی یەکەمدا (شین، سوور، ڕەش) یەک گۆڕینی بازنەیی پێکدەهێنن، و گۆڕینەکان لە ریزی دووەم (شین، ڕەش، سوور) یەک گۆڕینی بازنەیی پێکدەهێنن. کەواتە ڕووناک دوو ڕێگای هەیە بۆ دانانی کورسییەکان بە دەوری مێزەکەدا.

هەوڵبدە چەند ڕێگات هەیە بۆ ڕیزکردنی 4 جۆر لە خواردنی سورەوەکراو لە قاپێکی بازنەییدا؟

ڕاهێــــــــــنان

بەردەوامبوون لەبیرکاریدا

1 چۆن یاسای بنەڕەتی ژماردن یارمەتیت دەدات بۆ دیاریکردنی ژمارەی گۆڕینەکان بۆ چوار شت؟

2 چۆن یاسای ژماردنی بنەڕەتی یارمەتی دەدات بۆ دیاریکردنی ژمارەی ڕێزکردنەکانی چوار شت لە بنەڕەتی پێنج شت؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 چەند ژمارە دەتوانی بنووسی بەبەکارهێنانی شەش ڕەنووس بەبێ دووبارەبوونەوە؟

4 چەند ڕێگات هەیە بۆ بینینی 3 شریتی ڤیدیۆ یەک بەدوای یەک لە بنەڕەتی حەوت شریت؟

5 چەند ڕێگا هەیە بۆ دانیشتنی 12 کەس دانیشێت بەدەوری مێزێکی بازنەیی بۆ خواردنی نانی ئێوارە.

هەژمێربکە

6 $7! - 5$

7 $6! - 4!$

8 $(7-5)!$

9 $(6-4)!$

10 $\frac{8!}{5! \times 3!}$

11 $\frac{10!}{4! \times 6!}$

12 $\frac{0! \times 5!}{(4-1)!}$

13 $\frac{3! \times (7-2)!}{6!}$

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئاز 8 ڕەنووسی هەیە دەتوانێت، چەند ژمارە پێکبهێنێت بە، بەکارهێنانی ڕەنووسەکان بەبێ دووبارەبوونەوە لەم بارانەی خوارەوەدا.

14 لە 5 ڕەنووس

15 لە 3 ڕەنووس

16 لە 4 ڕەنووس

17 لە 6 ڕەنووس

18 لە یەک ڕەنووس

19 لە 8 ڕەنووس

جێبەجێکردنەکان

کارگێڕی دەزگاکان یەکێک لە کۆمپانیاکان پێشوازی لە 8 کارمەندی تازەکرد. ژمارەی ڕێگاکانی دابەشکردنیان بەسەر پۆستەبەتاڵەکان دیاریبکە لە هەر بارێک لەم بارانەدا:

20 X<nÂ 8 21 X<nÂ 9 22 X<nÂ 10 23 X<nÂ 15

24 [illegible] 7 [illegible]

25 [illegible] 9 [illegible]

26 [illegible] 3 [illegible] 3 [illegible]

[illegible]

[illegible]

A, B, C, D, E, F

27 [illegible] 28 [illegible] 29 [illegible] 30 [illegible]

31 [illegible] 7 [illegible]

[illegible]

[illegible] 5 [illegible]

32 [illegible] 36cm [illegible] 48cm [illegible] 4 [illegible]

33 [illegible]

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ 3x - y = -11 \end{cases}$$

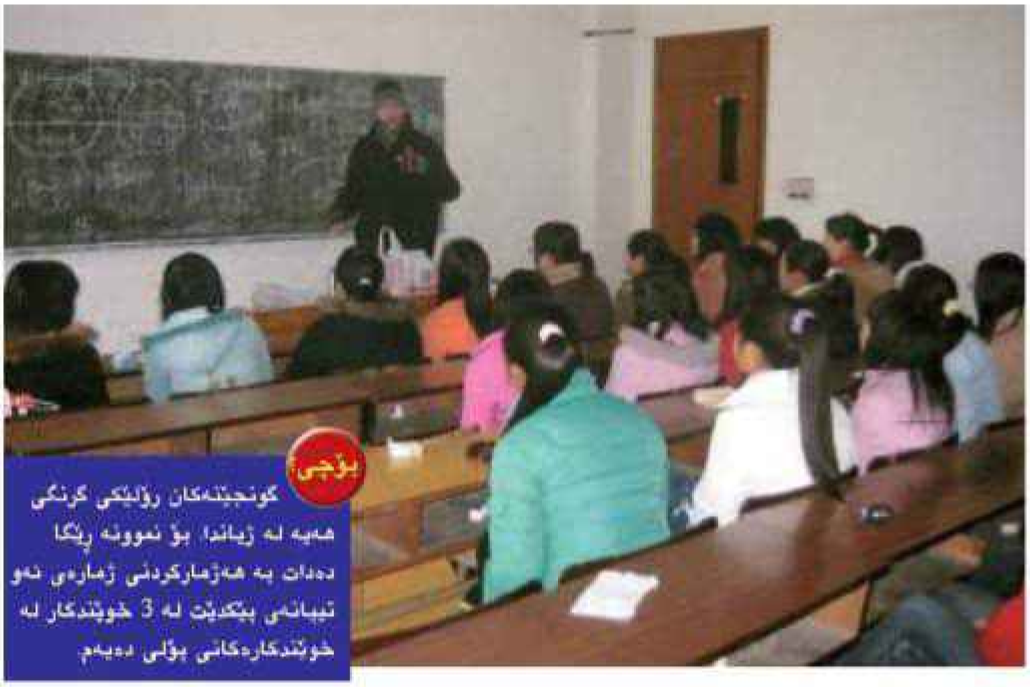
[illegible] 5 [illegible]

34 [illegible] 6 [illegible]

گونجێنەکان

Combinations

وانەی 3



بزجی

گونجێنەکان ڕۆڵێکی گرنگی هەیە لە ژیاندا بۆ نموونە ڕێگا دەدات بە هەژمارکردنی ژمارەی ئەو تیپانەی پێکدێت لە 3 خوێندکار لە خوێندکارەکانی پۆلی دەیەم.

ئامانجەکان

- ئەو پرسیارانە شیکار دەکات کە گونجێنی تێدایە. هەموو گونجینەکانی r دانە لە n دانە دیاریدەکات.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە پەیوەندی نێوان گۆڕێن و گونجێنی تێدایە.

لەبیرت بێت کە ڕیزکردن بریتییە لە ڕێکخستنی r شت لە بنەڕەتی n شت لە ڕیزکردنێکی دیاریکراودا. ئەگەر لە ڕێکخستنەکەدا هیچ گرنگیەك نەدرا بەڕیزکردن. ئەوەی دەستمان دەکەوێت پێی دەڵێین گونجێن. گونجێنی r دانە لە بنەڕەتی n دانە بریتییە لە کۆمەڵەیەك کە پێکدێت لە r دانە لە بنەڕەتی n دانە.

ئەگەر ئەم ژمارانەت هەبێت، 1، 2، 3، 4، 5، ژمارەکانی 2، 3، 5 گونجێنی 3 دانە لە بنەڕەتی 5دانە پێکدێنێت. سەرنجبدە کە ژمارەکانی 3، 2، 5 هەمان گونجێن پێکدێنێت بە پێچەوانەی ڕیزکردنەکەوە.

نموونە 1

یانەیەکی وەرزشی هەڵبژاردنێکی نهێنی سازدا بو هەڵبژاردنی لیژنەیەکی کارگێڕی کە پێکدێت لە سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك و ڕازگر و بەرپرسی دارایی و بەرپرسی پەیوەندییەکان. لە نێوان 7 پاڵێوراودا. بۆ وەرگرتنی لیژنەی کارگێڕی یانەکە، چەند لیژنە دەتوانرێ پێکبهێنرێت؟

جێبەجێکردنەکانی

وەرزش

هەڵبژاردنی بەرپرسی پەیوەندیەکان لە		هەڵبژاردنی بەرپرسی دارایی لە		هەڵبژاردنی ڕازگر لە		هەڵبژاردنی یاریدەدەری سەرۆك لە		هەڵبژاردنی سەرۆك لە
3	×	4	×	5	×	6	×	7

$$7\times6\times5\times4\times3=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=\frac{7!}{2!}=\frac{7!}{(7-5)!}=2520$$

نموونە 2

یانە وەرزشییەکە ڕێگای هەڵبژاردنی لیژنەی کارگێڕی گۆڕی بەمەرجێك هەر ئەندامێك لە ئەندامەکان بۆی هەبێت 5 هەڵبژێراو لە حەوت هەڵبژێرێت، بۆ دروستبوونی لیژنەی کارگێڕی بێ دیاریکردنی کاری هەریەکەیان، بۆئەوەی ئەندامانی لیژنە هەڵبژێراوەکە خۆیان کارەکان دابەشبکەن.

شیکاری پرسیارەکان

أ | بەچەند ڕێگا دەتوانرێ پێنج ئەندامە هەڵبژێراوەکە لەنێوان خۆیاندا کارەکانیان دابەشبکەن؟

ب | چەند لێژنەی سەرپەرشتی ئەندامەکان دەتوانن پێکبهێنن بەڕێگای هەڵبژاردنە تازەکە.

شیکار

أ | ژمارەی ڕێگاکان بریتییە لە ژمارەی گۆڕینەکانی کۆمەڵەی 5 دانەییەکە کە دەکاتە

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$$

ب | یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربێنە

ژمارەی لێژنە پێکهاتوەکان = ژمارەی لێژنە هەڵبژێراوەکان × ژمارەی گۆڕینەکانی هەموو لێژنەکە 2520 = ژمارەی لێژنە هەڵبژێراوەکان × 120

ژمارەی لێژنەکان کەدەتوانین هەڵیانبژێرین. $\frac{2520}{120} = 21$ واتا 21 لیژنە.

چالاکی

بەراوردکردنی ڕیزکردنەکان و گونجێنەکان Comparing Arrangements and Combinations

یەکێك لە یانەکان یارییەکی سازکرد لە نێوان ئەندامەکانی بەم شێوەیەی خوارەوە.

- یاریکەر 3 ڕەنووس لە دە ڕەنووس (لە 0 تا 9) هەڵدەبژێرێت و لەسەر بۆردەکە دەینووسێت.
- یاریکەر 3 گۆی ڕەنووسکراو لە 0 تا 9 لە تورەگەیەك ڕادەکێشێت یەك لەدواییەك.
- بۆ ئەوەی یاریکەرەکە بیباتەوە پێویستە ڕەنووسە نووسراوەکان لەسەر بۆردەکە بەهەمان ریز ڕابکێشێت.

1. ئارام ڕەنووسەکانی 8، 4، 1 ی هەڵبژارد یەکبەدواییەك. ئەو ئەنجامانەی کە دەبنە هۆی بردنەوەی چین؟
2. ڕێکخەری یارییەکە ڕێساکەی گۆڕی بۆ ئەوەی یاریکەرەکە بباتەوە مەرجی دانا، ئەویش بە ڕاکێشانی سێ ڕەنووسەکە بەبێ بایەخدان بەڕیزکردن.ئارام یارییەکەی دووبارەکردەوە و سوور بوو لەسەر ڕەنووسەکانی خۆی، ئەو ئەنجامانە چین کە دەبێتە هۆی بردنەوەی؟
3. کام دوو یاری گەورەترین بەختیان هەیە بۆ یاریکەرەکە: یەکەم یان دووەم؟هۆی وەڵامەکەت دیاریبکە.

خاڵی چاودێری ✓

گونجێنی r شت لە بنەڕەتی n شت Combinations of *n* Objects Taken *r* at a Time

ژمارەی گونجێنەکانی r شت لە بنەڕەتی n شت کاتێك $r \le n$ بریتییە لە $C(n, r) = {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

بەرەنگاری پەیوەندی نێوان ${}_nP_r$ ، ${}_nC_r$ چییە؟

نموونە 3

ئاکام پێویستە 3 پەرداخ لە 5 پەرداخ هەڵبژێرێت کە ناوی ئەم میوانەی تیدایە: لیمۆ، سێو، ترێ، مۆز، ئەناناس. چەند ڕێگای هەیە بۆ ئەم کردارە؟

جێبەجێکردنەکانی
بازرگانی

شیکار

دەتوانی پەرداخی یەکەم لە 5 پەرداخ و دووەم لە 4 پەرداخ و سێیەم لە 3 پەرداخ هەڵدەبژێرێت. بەڵام هەڵبژاردنی ناوی لیمۆ و ناوی مۆز و ناوی ترێ هیچ جیاوازیەکی نییە لە هەڵبژاردنی ناوی مۆز و ناوی ترێ و ناوی لیمۆ واتە ڕیزکردن هیچ بایەخێکی نییە لێرەدا ئەمە ئەوە دەگەیەنێت کە ژمارەی ئەو ڕێگایانەی لەبەردەم ئاکام دایە بریتییە لە ڕیزکردنی3 لە 5 دابەشبێت لەسەر گۆڕینی 3 شت واتە:

$$\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=\frac{5!}{(5-3)!}\div3!=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=10$$

هەوڵبدە ئاکام چەند هەڵبژاردنی هەیە ئەگەر وا پێویست بوو 4 پەرداخ هەڵبژێرێت؟

هزرێکی ڕەخنەگرانە کامیان گەورەترە: ژمارەی ڕیزکردنی 3 لە 5 یان ژمارەی گونجێنەکانی 3 لە 5 ؟

لە دوو نموونەکەی پێشوو ئەوەمان دەستدەکەوێت کە پەیوەندیەک هەیە لە نێوان ژمارەی ڕیزبەتی r شت لە بنەڕەتی n شت و ژمارەی گونجێنی r شت لە بنەڕەتی n شت.

پەیوەندی لە نیوان ریزکردنەکان و گونجێنەکاندا
Relation Between Arrangements and Combinations

ژمارەی ڕیزکردنەکان r شت لە بنەڕەتی n شت = ژمارەی گونجێنەکانی r شت لە بنەڕەتی n شت × ژمارەی ڕیزکردنەکان r شت.

نموونە 4

لە شیکارکردنی پرسیارێکدا، زۆر جار پێویستیمان بە هەڵبژاردنی شێوازێکی گونجاو دەبێت: ڕیزکردنەکان یان گونجێن.

شێوازێکی گونجاو دیاریبکە بۆ هەریەک لەمانەو لە دواییدا ژمارەکانی هەژمێربکە.

أ چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك و ڕازگر لە 5 هەڵبژێراو؟

ب چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی لێژنەیەکی 3 ئەندامی لە 5 هەڵبژێراو.

شیکار

أ شێوازەکە لێرەدا شێوازی ڕیزکردنەکانە. چونکە داواکراو هەڵبژاردنی کەسێکە بۆ سەرۆك و ئەوی تریان بۆ یاریدەدەری سەرۆك و سێیەمیان بۆ ڕازگر. $\frac{5!}{(5-3)!}=5\times4\times3=60$

ب شێوازەکە لێرەدا شێوازی گونجێنەکانە چونکە داواکراو کۆمەڵەیەکە لە 3 کەس پێکهاتووە ژمارەی ڕێگاکان $_5C_3=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

هەوڵبدە چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی لێژنەیەکی دوو کەسی لە نێوان 7 کەسدا؟ چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی سەرۆك و یاریدەدەر لە ئەندامەکانی لێژنەیەك کە لە 7 کەس پێکهاتووە؟

بەکارهێنانی گونجێنەکان لەهەژمێرکردنی ئەگەرەکان
Using Combinations in Probability

نموونە 5

گێلاس دوو گۆی لە تورەگەیەك ڕاکێشا 5 گوێ سوور و 3 گوێ شینی تێدابوو، ئەگەری ئەوەی **دوو گۆ ڕاکێشراوەکە سوورین چەندە؟**

شیکار

ئەم ئەگەرە یەکسانە بەڕێژەی ژمارەی ئەو بارانەی کەدوو گۆیە ڕاکێشراوەکە سوور بن بۆ ژمارەی

دانەکانی کۆمەڵەی ئەنجام (بۆشایی نموونە). ژمارەی یەکەم ژمارەی گونجێنی 2 بۆ 5 ودووەم ژمارەی گونجێنی 2 بۆ 8. ژمارەی یەکەم $_5C_2 = \binom{5}{2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$ ، ژمارەی دووەم $_8C_2 = \frac{8\times7}{2\times1} = 28$
ئەگەری ئەوەی دوو گۆیەکە سوور بن.

$$\frac{10}{28} = 0.3\,571 = 35.71\%$$

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی دوو گۆیەکە دوو ڕەنگی جیاواز بن چەندە؟

ڕاهێنـــــــــــان

بەردەوامبوون لەبیرکاریدا

1 جیاوازی نێوان ڕیزکردنەکان و گونجێنەکان ڕوونبکەوە بەنموونەیەک زیاتر ڕوونبیکەوە.

2 پەیوەندی چییە لە نێوان ڕیزکردنی 5 لە بنەڕەتی 7 و گونجێنی 5 لە بنەڕەتی 7؟ئەو پەیوەندیە بنووسە و ژمارەی گونجێنی 5 لە بنەڕەتی 7 هەژمێربکە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 چەند ڕێگا دەکرێت سەرۆک و یاریدەدەری سەرۆک و ڕازگر لە نێوان ئەندامەکانی لێژنەیەکی 6 کەسی هەڵبژێردرێت؟

4 چەند ڕێگا دەکرێت 3 پەرتووک و 4 شریتی مۆسیقا لە هاوڕێیەکت کە 9 پەرتووک و 7 شریتی هەبێت وەربگری؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەمانە هەژمێربکە:

5 $_7C_4$ **6** $_8C_4$ **7** $_{10}C_7$ **8** $_9C_5$

9 $_9C_1$ **10** $_{11}C_1$ **11** $_{15}C_{15}$ **12** $_{12}C_{12}$

13 $\frac{6!}{2!\times4!}\times\frac{5!}{4!\times1!}$ **14** $\frac{4!}{3!\times1!}\times\frac{9!}{4!\times5!}$ **15** $\frac{_6C_5\times{}_{15}C_2}{_{21}C_7}$ **16** $\frac{_{14}C_5\times{}_9C_7}{_{23}C_{12}}$

چەند لێژنە دەتوانرێ پێکبهێنرێت لە هەر یەکێک لەم بارانەی خوارەوەدا.

17 3 ئەندام لە 5 پاڵێوراو **18** 7 ئەندام لە 8 پاڵێوراو

19 8 ئەندام لە 12 پاڵێوراو **20** 6 ئەندام لە 10 پاڵێوراو

تورەگەیەک 5 گۆی سپی و 3 گۆی سەوزی تێدایە ئەگەری ئەم ڕاکێشانانە چین؟

21 دوو گۆی جیاواز لە ڕەنگدا. **22** 3 گۆ دووانیان سەوز و سێیەم سپی بێت

23 4 گۆ دووانیان سپی و دووانیان سەوز بن

24 5 گۆ سێیان سەوز ودووانیان سپی بێت.

لە پرسیاری 25-28 ڕێگای شیکاری هەریەك لەم بارانە دیاریبکە. «ڕیزکردن یان گونجێن».

25 هەڵبژاردنی 4 پەرتووك بۆ بڵاوکردنەوە لە بنەڕەتی کۆمەڵە پەرتووکێك کە ژمارەیان302 پەرتووکە.

26 هەڵبژاردنی 9 یاریکەر لە15 یاریکەر بۆ پێکهێنانی تیپێکی سەبەتە.

27 هەڵبژاردنی چوار پاڵێوراو لە 200 بۆ وەرگرتنی پاداشت لە 100 هەزار دینار و 200 هەزار دینار و 500 هەزار دینار، و ملیۆنێك دینار.

28 هەڵبژاردنی سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك بۆ سەندیکایەك کە 100 ئەندامی تێدایە.

جێبەجێکردنەکان

29 پزیشکی لە توێژینەوەیەکی نەخۆشییەکانی دڵدا. یەکێك لە توێژەرەوەکان سامپڵێکی هەڵبژارد لە 5 کەس لە نێوان 10 کەس کە وەرزشی ڕاکردنیان ئەنجامدەدا. و15کەس ئەم وەرزشەیان نەدەکرد.

أ ژمارەی ئەو پێکهاتانەی لەتوانادایە چەندە؟

ب ژمارەی ئەو پێکهاتانەی پێکدێت لە 3 کەس لەوانەی ئەو وەرزشە دەکەن چەندە؟

ج ئەگەری ئەوەی لە نێوان ئەو پێنج پێکهاتانە تەنها 3 یان ئەم وەرزشە بکەن چەندە؟

ڕوانین بۆ دواوە

ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە

30 $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}$

31 $\frac{2}{x(x-2)}-\frac{x}{x^2-4}$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە:

32 $\sqrt{x+4}=2$

33 $\sqrt{x-1}=3\sqrt{x-2}$

34 $\sqrt{-x}=4\sqrt{-x-2}$

ڕوانین بۆ پێشەوە

35 بەمەبەستی ناونانی ئەندامەکانی نوسینگەی یانەی بروسك. 5 ناو بە تیروپشك ڕاکێشرا لە نێوان ناوی 8 پاڵێوراو کە پێکهاتبوو لە 8 ئەندامی شەرەف و 22 ئەندامی کارا.

أ ئەگەری ئەوەی پێنج ناوەکە ئەندامانی شەرەف بن چەندە؟

ب ئەگەری ئەوەی 4 ناو لە پێنج ناوەکە ئەندامەکانی شەرەف بن چەندە؟

ج ئەگەری ئەوەی لە نێوان پێنج ناوکە 3 ناویان بەلایەنی کەمەوە ئەندامانی شەرەف بن چەندە؟

کۆکردنەوەی ئەگەرەکان

Adding Probabilities

وانەی 4

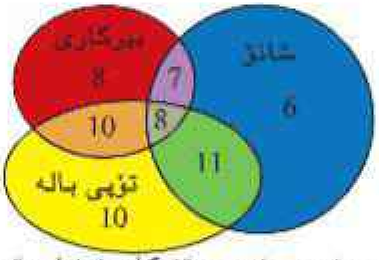
بۆچی؟ دەتوانیت کرداری کۆکردنەوە بەکاربهێنێت بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداو یان زیاتر.

ئامانجەکان

- ئەگەری دووڕووداوی جیا هەژماردەکات.
- ئەگەری دوو ڕووداو جیانەبن هەژماردەکات.
- ئەگەری دژە ڕووداو هەژماردەکات

جێبەجێکردنەکان

بۆ خۆشی



لە ئامادەیی ڕزگاریدا سێ جۆر یانە هەیە. یانەی شانۆ لە 32 ئەندام پێکهاتووە و یانەی بیرکاری لە 33 ئەندام پێکهاتووە ویانەی تۆپی باڵە لە 39 ئەندام پێکهاتووە.

هەندێ لە خوێندکاران سەر بەیانەیەك زیاترن هەروەك لەم هێڵکاریەی بەرامبەرت ڕوونکراوەتەوە بەڕێوەبەر یەکێك لە ئەندامەکانی یانەکانی بەشێوەیەکی ڕەمەکی هەڵبژارد. ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارە ئەندام بێت بە لایەکی کەمەوە لە دوو یانە چەندە؟ هەندێ

لە ڕووداوەکان جیان ئەگەر یەکێکیان ڕوویدا ئەوا ئەوانی تر ڕوونادەن. ئەگەر زارێك هەڵبدەین ئەو دوو ڕووداوی (دەستکەوتنی ژمارەی تاك) و (دەستکەوتنی ژمارەی جووت) دوو ڕووداوی جیان.

بەپێچەوانەی ئەوە دوو ڕووداوی (دەستکەوتنی ژمارەی جووت) و (دەستکەوتنی ژمارەی کەمتر لە 3)دوو ڕوداوی جیانین چونکە دەستکەوتنی 2 پاسادانی هەردوو ڕووداوەکە بەیەکەوە دەکات.

چالاکی

دۆزینەوەی ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداو — Exploring Two-Events Probability

لەمەودوا پێویستیت بە دوو بەردەزاری ڕەنگاورەنگی جیاواز دەبێت.

1. خشتەی خوارەوە بنووسەوە پاشان تەواوی بکە. بەهەڵدانی دوو بەردەزار 10 جار. لەگەڵ وەرگرتنی ئەو دوو ژمارەیەی لەسەر هەردوو ڕووی سەرەوەی دوو بەردەزارەکە دەردەکەوێت.

هەڵدان	بەردەزاری یەکەم	بەردەزاری دووەم	سەرجەم	ئەنجامی لێکدان
1				
2				
3				
⋮				

2. ئەم خشتەیەی بەرامبەرت تەواوبکە بەسوود وەرگرتن لە خشتەی نموونەی یەکەم و ئەگەری ڕوودانی هەر ڕووداوێك لەم ڕوودانە ڕوونبکەوە.

	أ	ب	ج
$P(A)$			
$P(B)$			
$P(A\cup B)$			
$P(A)+P(B)$			

أ لەم بارەدا A : «ڕووداوێکە ژمارەی 6 لەسەر ڕووی زاری یەکەم دەرکەوێت» و B «ڕووداوێکە ژمارە 3 لەسەر ڕووی زاری یەکەم دەردەکەوێت».

ب لەم بارەدا A :«ڕووداوێکە. لەسەر ڕووی زاری یەکەم 6 دەرکەوێت» و B : «ڕووداوێکە کۆی ژمارەی سەر هەردوو زارەکە 7 بێت».

ج لەم بارەدا A لەسەر ڕووی زاری یەکەم ئەو ژمارەیەی دەرکەوت بچوکترە لە 5 و B ڕووداوێکە (ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارەی سەر دوو زارەکە گەورەترە لە 5).

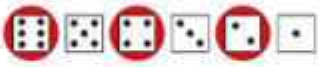
3. بە پشت بەستن بەو ئەنجامانەی دەستتکەوتووە ئایا $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ؟ لە چ بارێکدا ئەم پەیوەندیە ڕاستە؟

خاڵی چاودێری ✓

بۆ ئەوەی زیاتر هەستبکەیت بە ئاشکرایی جیاوازی نێوان ڕووداوە جیاکان و ڕووداوە ناجیاکان سەرەنجی ئەمانەی خوارەوە بدە.

دوو ڕووداوی جیا

A = دەستکەوتنی ژمارەی جووت

$P(A)=\frac{3}{6}$ 

B = دەستکەوتنی ژمارە 3

$P(B)=\frac{1}{6}$

بڕوانە $A\cap B=\varnothing$ وە $P(A\cap B)=0$

$P(A\cup B)=\frac{4}{6}$

لەبەرئەوەی دوو ڕووداوەکە جیان. ئەگەری ڕووداوی $A\cup B$ یەکسانە بە کۆی ئەگەری هەردوو ڕووداوەکە

$P(A\cup B)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

دوو ڕووداوی ناجیا

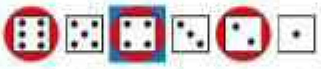
A = دەستکەوتنی ژمارەی جووت

$P(A)=\frac{3}{6}$

C = دەستکەوتنی ژمارە 4

$P(C)=\frac{1}{6}$

بڕوانە $A\cap B\neq\varnothing$ ، $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$P(A\cup C)=\frac{3}{6}$ 

لەبەرئەوەی دوو ڕووداوەکە جیانین.پێویستە ئەگەری ڕووداوی $A\cap C$ لە کۆی ئەگەری دوو ڕووداوەکە دەربکەین.

$P(A\cup C)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

ئەگەری ڕووداوی A یان B — Probability of A or B

A ، B دوو ڕووداوی هەمان تاقیکردنەوەی ڕەمەکین

ئەگەر A و B جیابن ئەوا: $P(A \text{ یان } B)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

ئەگەر A و B جیانەبن ئەوا: $P(A \text{ یان } B)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

خاڵی چاودێری ✓ کام لە دوو ڕێسایەی پێشوو بۆ هەموو بارەکان بەکاردێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

نموونه 1

جێبەجێکردن: ئامار

لە ڕاپرسییەکدا بۆ ڕای گشتی لەبارەی نوێکردنەوەی شێوازە پەروەردەییەکان. نموونەیەك کە لە 100 هاوڵاتی پێکهاتبوون پرسیاریان ئاڕاستەکرا. ئەم خشتەیەی بەرامبەرت ئەنجامی ئەم ڕاپرسییە ڕووندەکاتەوە

	نێر	مێ	سەرجەم
لەگەڵ	18	9	27
دژ	12	25	37
بێ ڕا	20	16	36
سەرجەم	50	50	100

یەکێك لەوانەی ڕاپرسییەکەیان ئاڕاستەکرابوو وبەشێوەیەکی هەڕەمەکی هەڵبژێرا. ئەگەری ئەوەی ئەو هاوڵاتییە دژی نوێخوازیی بێت یان هیچ ڕایەکی نەبێت چەندە؟

شیکار

هەردوو ڕووداوی (دژ) و (بێڕا) دوو ڕوداوی جیان. لێرەدا ئەوەی هەمانە

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{37}{100}+\frac{36}{100}=\frac{73}{100}=73\%$$

نموونه 2

ئەگەری ئەوەی ئەو کەسەی هەڵبژێراوە بە هەڕەمەکی نێربێت یان لەوانە بێت کە دژی نوێخوازی بێت چەندە؟

شیکار

هەردوو ڕووداوی (نێر) و (دژ) دوو ڕووداوی جیانین

P(نێر یان دژ) = P(نێر) + P(دژ) − P(نێر و دژ)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{50}{100}+\frac{37}{100}-\frac{12}{100}=\frac{75}{100}=75\%$$

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی ئەو کەسەی هەڵبژێراوە بە هەڕەمەکی مێ بێت یان لەوانەبێت کە (بێڕا)ن چەندە؟

دژە ڕووداو Probability of an Event

ئەگەر بگەڕێینەوە بۆ نموونەکەی پێشوو. دوو ڕووداوی (دژ) و (لەگەڵ یان بێڕا) تەنها دوو ڕووداوی جیانین. بەڵکو ڕوونەدانی یەکێکیان واتە ڕوودانی ئەوی تریان لەم بارەدا هەریەکێکیان دژی ئەوەی تریانە **Complement** .بەشێوەیەکی گشتی: دەڵێین ڕووداوی B دژی ڕووداوی A دەبێت کاتێك دوو ڕووداوەکە جیابن ویەکێکیان بە دڵنیاییەوە ڕوویدات.

ئەگەری دژە (تەواوکەری) ڕووداو Probability of the Complement

ئەگەر ڕووداوی B دژە ڕووداوی A بێت ئەوا:

$$P(A)=1-P(B)\qquad P(B)=1-P(A)\qquad P(A)+P(B)=1$$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ئەو هۆیە چییە کە ڕێگات پێدەدات بە نووسینی $P(A)+P(B)=1$ کاتێك دوو ڕووداوی A و B تەواوکەری یەکترین.

نموونه 3

جێبەجێکردنەکان: بۆ خۆشی

بە گەڕانەوە بۆ ئەو پرسیارەی کە لە سەرەتای وانەدا باسکرا. ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارەی بەهەڕەمەکی هەڵبژێرا ئەندام بێت بەلایەنی کەمەوە لە دوو یانەدا چەندە؟

شیکار

ڕووداوی (ئەندام لە یەك یانەدا) تەواوکەری ڕووداوی (ئەندام بەلایەنی کەمەوە لە دوو یانەدا).

کەواتە (ئەندام تەنیا لەیەك یانە) p − 1 = (ئەندام لە دوو یانەدا بەلایەکی کەمەوە) p

$$P(A)=1-P(B)=1-\frac{6+8+10}{60}=\frac{36}{60}=0.6=60\%$$

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارەی بەڕەمەکی هەڵبژێرا ئەندام بێت لە دوو یانەدا چەندە؟

ڕاهێـــــــــنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 نموونەیەك بێنەوە بۆ دوو ڕووداوی جیا، ویەکێکی تر بۆ دوو ڕووداوکە جیانەبن.

2 تەواوکەری ڕووداوی ئەم ڕووداوە چییە: «دەستکەوتنی 1 یان 2 » لە کاتی هەڵدانی بەردەزارێکدا

3 چۆن ئەگەری ئەم ڕووداوە هەژمێردەکەیت: « دەستکەوتنی ژمارەی تاك یان 3 » لە هەڵدانی بەردەزارێکدا؟

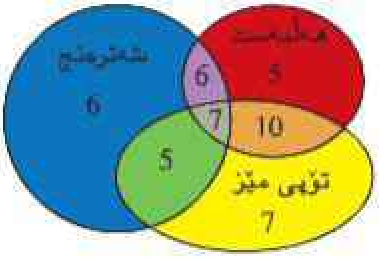
ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەنجامەکانی ڕاپرسی بۆ نویکردنەوەی شێوازی پەروەردەیی بکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هەردوو پرسیاری 4 و5 .

4 ئەگەری ئەو کەسەی بەڕەمەکی هەڵبژێرا ڕای هەبێت چەندە ؟

5 ئەگەری ئەوەی ئەو کەسەی بە هەڕەمەکی هەڵبژێرا نێر بێت یان لەوانە نەبێت کە لەگەڵ نوێخوازی بێت چەندە ؟

6 لە دواناوەندییەکدا سێ یانە هەیە: یانەی شەترەنج 24 ئەندامی هەیە و یانەی تۆپی سەرمێز 29 ئەندامی هەیە و یانەی هەڵبەست 28 ئەندامی هەیە. هەندێ لە خوێندکارەکان سەربەیانەیەك زیاترن. هەروەك لەم هێلکارییەی بەرامبەردا ڕوونکراوەتەوە. بەڕێوەبەر ئەندامێکی ئەم یانەی بەڕەمەکی هەڵبژارد. ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارە بەلایەنی زۆرەوە ئەندام بێت لە دوو یانەدا چەندە؟



ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هەڵۆ بەردەزارێکی هەڵدا. ئەگەری دەستکەوتنی ئەم ڕوداوانە چەندە؟

7 5 یان 6 ؟ **8** 1 یان 4 ؟ **9** ژمارەی جووت یان 3 ؟

10 ژمارەی تاك یان 2 ؟ **11** 1 یان ژمارەیەك بچوکتر لە 4؟ **12** 6 یان ژمارەیەك گەورەتر لە 2 ؟

13 ژمارەیەك بێجگە لە یەك؟ **14** ژمارەیەك جووت نەبێت؟ **15** ژمارەیەکی جووت یان تاك؟

جێبەجێکردنەکان

ئەم خشتەیە ئەنجامەکانی هەڵدانی دوو بەردەزار ڕووندەکاتەوە. لە پرسیاری 16 تا 18 خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەوەی کە دوو ڕووداوەکە جیان، و بۆ دۆزینەوە ئەگەری ڕووداوە ناوێتەکە.

(6 :1)	(5 :1)	(4 :1)	(3 :1)	(2 :1)	(1 :1)
(6 :2)	(5 :2)	(4 :2)	(3 :2)	(2 :2)	(1 :2)
(6 :3)	(5 :3)	(4 :3)	(3 :3)	(2 :3)	(1 :3)
(6 :4)	(5 :4)	(4 :4)	(3 :4)	(2 :4)	(1 :4)
(6 :5)	(5 :5)	(4 :5)	(3 :5)	(2 :5)	(1 :5)
(6 :6)	(5 :6)	(4 :6)	(3 :6)	(2 :6)	(1 :6)

16 دەستکەوتنی سەرجەمێك یەکسان بێت بە 2 یان دەستکەوتنی سەرجەمێك یەکسان بێت بە 4 .

17 دەستکەوتنی سەرجەمێك گەورەتربێت لە 2 یان دەستکەوتنی سەرجەمی گەورەتربێت بێت لە 6 .

18 دەستکەوتنی سەرجەمێك بچوکتربێت لە 3 یان دەستکەوتنی سەرجەمێك بچوکتربێت لە 10 .

19 چەند ژمارەی تەواو لە 1 تا 600 هەیە کە توانای دابەشبوونی هەیە بەسەر 2 یان 3 دا ؟
ئەگەری ئەوەی ئەو ژمارەی کە بە هەڕەمەکی هەڵبژێراوە لە نێوان 1 تا 600 و توانای دابەشبوونی نیە بەسەر 2 و 3 دا چەندە؟

20 چەند ژمارەی تەواو لە 1 تا 3 500 هەیە کە توانای دابەشبوونی هەیە بەسەر 5 یان 7 دا ؟
ئەگەری ئەوەی ئەو ژمارەی بە هەڕەمەکی هەڵبژێراوە لە نێوان 1 تا 3 500 و توانای دابەشبوونی نەبێت بەسەر 5 و 7 دا چەندە؟

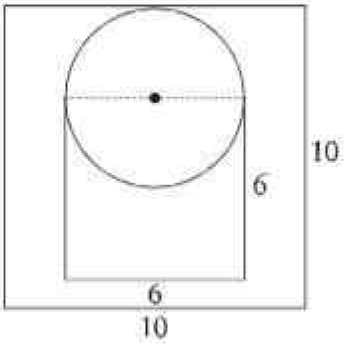
لە پرسیاری 21–26 ئەگەری تەواوکەری ڕووداوی هەریەك لەم ئەگەرانەی خوارەوە بدۆزەوە.

21 $\frac{1}{3}$ **22** $\frac{4}{11}$ **23** 0.782

24 0.324 **25** 0 **26** 1

بەستنەوە

ئەندازە ئالان تیرەکەی بۆ سەر چوارگۆشە گەورەکە هەڵدا. ئەگەری ئەوەی ئەو تیرە کە هەریەك لەمانەی خوارەوە بپێکێت چەندە.



27 بازنەکە؟

28 چوارگۆشە بچووکەکە؟

29 چوارگۆشە بچووکەکە بە مەرجێك ئەو بەشەی تێدانەبێت کە هاوبەشە لەگەڵ بازنەکە؟

30 ناوچەی هاوبەش لە نێوان بازنە و چوارگۆشە بچووکەکە یان بازنەکە؟

31 چوارگۆشە بچووکەکە یان بازنەکە؟

جێبەجێکردن

32 **چاودێری جۆری** سندوقێك 35 پارچەی یەدەگی ئۆتۆمبیلی تێدایە، 8 پارچەیان باش نییە، یەکێك لە پشکنەرانی فەرمانگەی چاودێری جۆری هەستا بەوەرگرتنی 5 پارچە بۆ پشکنینیان. ئەگەری ئەوەی یەکێك لەم پارچانە باش نەبێت چەندە؟

ڕوانین بۆ دواوە

ئەمانە بەرێگای ڕوونکردنەوە شیکاریکە لە ڕووتەختی پۆتاندا.

33 $3 < x < 8$ **34** $-14 \le x \le -2$ **35** $-1 < y < 3$

ئەم برانە شیتەڵبکە.

36 $x^2 - x - 42$ **37** $3x^2 - 16x - 12$ **38** $81x^2 + 18x + 1$

ڕوانین بۆ پێشەوە

39 تورەگەیەك 4 گۆی سووری تێدایە ڕەنوسکراون لە 1 تا 4 و 4 گۆی شینی تێدایە ڕەنوسکراون لە 1 تا 4 ، و 4 گۆی سەوزی ڕەنووسکراو لە 1 تا 4. ڕزگار گۆیەکی ڕاکێشا ئەگەری ئەوەی گۆیەکە ژمارە 1 هەڵگربێت چەندە؟ ڕزگار گۆیەکەی گەڕاندەوە بۆ تورەگەکە. ئەم جارەیان گۆیەکی تری ڕاکێشا سوور بوو. ئایا گۆڕانکاری بەسەر ئەگەری ئەوەی کە گۆیەکە هەڵگری ژمارەی 1 بێت چەندە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە.

ڕووداوە سەربەخۆیەکان
Independent Events

وانەی 5

ئامانجەکان

- هەژمێری ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداوی سەربەخۆ یان زیاتر دەکات

بۆچی؟
دەتوانیت یاسای ئەگەری دووڕوداوی سەربەخۆ بەکاربهێنێت بۆ دۆزینەوەی گەلێك لە ئەگەرە گرنگەکان. نموونە بۆ ئەوە ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکار لە پۆلێکدا لەیەك ڕۆژدا لە دایك بووبن

پۆلی دەیەم 35 خوێندکار دەگرێتەوە، ئەگەری ئەوەی دوو خوێندکار لەوانە بەلایەنی کەمەوە لەیەك مانگ ولە یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن چەندە!

بۆ ئەوەی وەڵامی ئەم پرسیارە بدەیتەوە، پێویستە بزانیت چۆن جیاوازی دەکەیت لە نێوان ڕووداوە سەربەخۆیەکان و ڕووداوە بەیەکبەستراوەکان و چۆن هەژمێری ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداوی سەربەخۆ دەکەیت. ئەمەت لەم چالاکییەی خوارەوە بۆ ڕووندەبێتەوە.

چالاکی

Exploring Independent Events — دۆزینەوەی ڕووداوە سەربەخۆیەکان

کامەران پارچە دراوێکی کانزایی و بەردەزارێکی هەڵدا.

1. هێمای A دابنێ بۆ ڕووداوی: « دەستکەوتنی شێر » لەکاتی هەڵدانی پارچە پارەکە، ئەگەری ئەم ڕووداوە چەندە $P(A)$ ؟ ×
2. هێمای C دابنێ بۆ ڕوداوی: « دەستکەوتنی ژمارە 3 » لەکاتی هەڵدانی زارەکە ئەگەری ئەم ڕووداوە چەندە $P(C)$ ؟
3. ئایا ڕوودانی یەکێك لەو دوو ڕووداوە کاردەکاتە سەر ڕوودانی ئەوی تریان؟هۆیەکەی دیاریبکە.
4. بەشێوەی جووتە ڕێکخراو ئەنجامی هەڵدانی پارچە پارە کانزاییەکە و زارەکە بەیەکەوە بنووسە. بۆ نموونە $(A, 3)$ ئەگەر کامەران شێر و ژمارەی 3 دەستکەوت. لیستێك پێکبهێنە کە هەموو ئەنجامەکانی لە تواناداهەیە لە هەڵدانی پارچە پارەکە و زارەکە. هەژمێری ئەگەری ڕوودانی هەردوو ڕووداوی A و C بەیەکەوە بکە واتا $P(A) \times P(C)$.
5. هەژمێرەی $P(A) \times P(C)$ بکە. ئایا $P(A \cap C)$ یەکسانە بە $P(A) \times p(C)$.
6. هێمای D دابنێ بۆ ڕووداوی: « دەستکەوتنی ژمارەی جووت » لە کاتی هەڵدانی زارەکە $P(D)$ بدۆزەرەوە $P(A \cap D)$.
7. $P(A \cap D)$ بدۆزەرەوە بەبەکارهێنانی ئەو لیستەی کە دروستتکردووە لە پرسیاری 4 دا. ئایا $P(A \cap D)$ یەکسانە بە $P(A) \times P(D)$ ؟
8. چیت دەست دەکەوێت لە ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداو بەیەکەوە. ئەگەر ڕوودانی یەکێکیان کارنەکاتە سەر ڕوودانی ئەوی تریان؟

خاڵی چاودێری ✓

بە زۆر ڕووداو دەوترێت سەربەخۆن **Independent**. ئەگەر ڕوودانی یەکێکیان یان ڕوونەدانی کارنەکاتە سەر ڕوودانی ڕووداوەکانی تر. نموونە بۆ ئەوە هەڵدانی دوو بەردەزار. بەزۆر ڕووداو دەوترێت **بەیەکبەستراو Dependent** ئەگەر ڕوودانی یەکێکیان یان ڕوونەدانی کاریکاتە سەر ڕوودانی ڕووداوەکەی تر یان ڕووداوەکانی تر.

ئەگەری دوو ڕووداوی سەربەخۆ Probability of Independent Events

دوو ڕووداوی A و B سەربەخۆ دەبن تەنها ئەگەر $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ و دوو ڕووداوەکە **بەیەکبەستراو** دەبن لە بارەکانی تردا.

نموونە 1

خونچە دوو تورەگەی هەبوو یەکێکیان 9 گۆی سوورو 3 گۆی سەوزی تێدابوو و ئەوی تریان 9 گۆی ڕەش و 6 گۆی زەردی تێدابوو. خونچە گۆیەکی لەهەر تورەگەیەک ڕاکێشا. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکیشراوەکە لە تورەگەی یەکەمدا سەوز بێت و گۆیە ڕاکێشراوەکە لە تورەگەی دووەمدا ڕەش بێت چەندە.

شیکار

تورەگەی یەکەم

$P(G) = \frac{3}{3+9} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ کاتێك G ڕووداوی «گۆی سەوز» بێت

تورەگەی دووەم

$P(B) = \frac{9}{6+9} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ کاتێك G ڕووداوی «گۆی ڕەش» بێت

لەبەر ئەوەی دوو ڕوداوەکە سەربەخۆن

$$P(G \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$$

ئەگەری ئەوەی گۆی ڕاکێشراو لە تورەگەی یەکەم سەوز و لە تورەگەی دووەم ڕەش بێت بریتییە لە $\frac{3}{20} = 0.15 = 15\%$

نموونە 2

خوێندکارەکانی هەر یەکە لە هۆبەکانی A و B لە پۆلی دەیەم نوێنەرێکیان بۆ خۆیان هەڵبژارد بەناوی ئەوانەوە لە ئاهەنگی کۆتایی ساڵی خوێندن قسەبکات. دانا لە هۆبەی A کەژمارەیان 18 خوێندکار بوو و زانا لەهۆبەی B کە ژمارەیان 20 خوێندکارە بوو. ئەگەری ئەوەی ئەم دووانە نوێنەربن چەندە؟

شیکار

گریمان M هێمابێت بۆ ڕووداوی (دانا نوێنەربێت) و هێمای T کەزانا نوێنەربێت

$P(M) = \frac{1}{18} \qquad P(T) = \frac{1}{20}$

لەبەر ئەوەی هەردوو ڕووداوی Mو T سەربەخۆن ئەوا.

$P(M \cap T) = P(M) \times P(T) = \frac{1}{18} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{360} = 0.03\%$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

یاسای ئەگەری دوو ڕووداوی سەربەخۆ دەتوانیت گشتگیری بکەیت بۆ ئەوەی ژمارەیەکی زۆر ڕووداوی سەربەخۆ بگرێتەخۆ ئەگەری دەستکەوتنی ژمارەی جووت لە هەڵدانی بەردەزارێکدا سێ جار بەیەك بەدواییەك بریتیە لە $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

ئەگەری ئەوەی 4 شێرت دەستکەوێت لە هەڵدانی پارچە پارەیەکی کانزایی 4 جاری یەك بەدواییەك، چەندە. یاسایەك بنووسە بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ڕوودانی n ڕووداو بەیەکەوە کاتێك ئم ڕوداوانە سەربەخۆ بن.

نموونە 3

جێبەجێکردنەکان
بۆخۆشی

بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکەی سەرەتای وانەکە، گرا ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکارەکە بەلایەنی کەمەوە لە یەک مانگ و لە یەک ڕۆژدا لە دایك بووبن لە نێوان کۆمەڵە 5 خوێندکاردا چەندە؟

شیکار

لە گۆشەیەکی جیاوازەوە. سەیری کارەکە بکە دژە ڕووداو بەکاربهێنە. وا دابنێ کە لە پۆلەکەدا دوو خوێندکار نییە کە لەیەك مانگ ویەك ڕۆژدا لە دایك بوون. وای دابنێ کە ساڵەکە 365 ڕۆژە.

لەوانەیە ڕۆژی لە دایکبوونی یەکەم هەر ڕۆژێك بێت لە ڕۆژەکانی ساڵ $\frac{365}{365}$.

لەوانەیە ڕۆژی لە دایکبوونی دووەم هەر ڕۆژێك بێت لە 364 ڕۆژدا $\frac{364}{365}$.

لەوانەیە ڕۆژی لە دایکبوونی سێیەم هەر ڕۆژێك بێت لە 363 ڕۆژدا $\frac{363}{365}$.

بەم شێوەیە بەردەوام دەبێت هەتا خوێندکاری چوارەم و پێنجەم $\frac{362}{365}$ ، $\frac{361}{365}$.

$$P(\overline{B})=\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\frac{361}{365}\approx 0.97$$

یاسای ئەگەری دژە ڕووداو بەکاربێنە بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکارەکە بەلایەنی کەمەوە لە یەك مانگ و یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن.

(دوو خویندکار لە هەمان مانگ و ڕۆژ لە دایك بووبن)P − 1 = (بەلایەنی کەم دوو خویندکار لە هەمان مانگ و ڕۆژ لە دایکبووبن)P .

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.97=0.03=3\%$$

کەواتە، ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکار بەلای کەمەوە هەمان ڕۆژی لەدایکبوونیان هەبێت نزیکەی 3%.

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی دوو خوێندکار بەلای کەمەوە لەیەك مانگ ولەیەك ڕۆژدا لە دایك بووبن لە نێوان 7 خوێندکاردا چەندە؟

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لەبیر کاریدا

1 نموونەیەك بهێنەوە لەسەر دوو ڕووداوی سەربەخۆ و نموونەیەکی تر لەسەر دوو ڕووداوی بەیەکبەستراو؟

2 چۆن ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداوی سەربەخۆ بەیەکەوە ئەژمێر دەکەیت؟

3 جیاوازی چییە لە نێوان دوو ڕووداوی جیا و دوو ڕووداوی سەربەخۆ. نموونە بۆئەمانە بهێنەرەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 دارا دوو تورەگەی هەیە یەکەمیان 5 گۆی ڕەش و 5 گۆی سپی تێدایە. دووەمیان گۆیەکی سەوز دوو و گۆی سووری تێدایە. دارا گۆیەکی لە هەر تورەگەیەك ڕاکێشا ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە لە تورەگەی یەکەم ڕەش بێت و لە تورەگەی دووەم سەوزبێت چەندە؟

5 خوێندکارەکانی هەردوو هۆبەی A و B پۆلی دەیەم هەریەکەیان نوێنەرێکی هەڵبژارد کە بە ناویانەوە قسەبکات لە ئاهەنگی کۆتایی ساڵی خوێندندا. تارین لە هۆبەی A هەڵبژێرا کە ژمارەیان 22 خوێندکارە وزارا لە هۆبەی B هەڵبژێرا کە ژمارەیان 19 خوێندکارە. ئەگەری ئەوەی هەردووکیان نوێنەر بن چەندە؟

6 یانەیەکی هەڵبەست لە دواناوەندییەکدا 40 ئەندامی هەیە. ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە دوو خوێندکار لە ئەندامەکانی یانەکە لە یەك مانگ و لە یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن چەندە؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ڕووداوەکانی $A,\ B,\ C,D$ سەربەخۆن $P(D)=0.1, P(C)=0.75, P(B)=0.25, P(A)=0.5$ ئەمانە هەژمێربکە.

7 $P(A\cap B)$ **8** $P(A\cap C)$ **9** $P(C\cap B)$

10 $P(C\cap D)$ **11** $P(A\cap D)$ **12** $P(B\cap D)$

لە کاتی هەڵدانی بەردەزارێکدا ئایا ئەم دوو ڕووداوانەی خوارەوە سەربەخۆن یان بەیەکبەستراون.

13 «دەستکەوتنی ژمارەی جووت»: «دەستکەوتنی ژمارەی 2 یان 4 ».

14 «دەستکەوتنی ژمارەی جووت»: «دەستکەوتنی ژمارەی 1 یان 4 ».

15 «دەستکەوتنی ژمارەی 6 »: «دەستکەوتنی ژمارەیەك کەلە 5 بچووکتربێت ».

16 «دەستکەوتنی ژمارەی 4 »: «دەستکەوتنی ژمارەیەك لە 3 گەورەتربێت ».

سەیری ئەم چەرخە میلدارەی بەرامبەرت بکە. کاتێك هەشت پارچەکەی لە ڕووبەردا یەکسان بن و چەرخەکە ژمارەکانی 1 تا 8 هەڵگرتووە.ئەگەری هەر ڕووداوێك لەم ڕووداوانەی خوارەوە بدۆزەرەوە لە کاتی جوڵانی چەرخەکە سێ جار

17 میلەکە لە هەر جارێکدا لە بەردەم ژمارە 3 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 5 گەورەترە ڕابوەستێت.

18 میلەکە لە هەر جارێکدا لە بەردەم ژمارە 4 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 6 بچووکترە ڕابوەستێت.

19 میلەکە لە هەر جارێکدا لە بەردەم ژمارە 5 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 7 بچووکترە ڕابوەستێت.

20 میلەکە یەك جار لە بەردەم ژمارە 8 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 3 گەورەترە ڕابوەستێت.

21 ئەگەری ئامادەبوونی کامەران لە ئاهەنگێکدا 80% بێت و ئەگەری ئامادەبوونی هەڵۆ 95% بێت ئەگەری ئامادەبوونی هەردووکیان پێکەوە چەندە، ئەگەربزانیت ئامادەبوونی یەکێکیان کارناکاتە سەر ئامادبوون و نەبوونی ئەویتریان.

22 تورەگەیەك 15 گۆی ڕەنوس کراوی لە 1 تا 15 تێدایە، باوان گۆیەکی ڕاکێشا لە دواییدا گەراندییەوە بۆ تورەگەکە، پاشان گۆیەکی بۆ جاری دووەم ڕاکێشا.

[أ] ئەگەری ئەوەی ئەو گۆیەی کە باوان ڕایکێشا لە هەردوو جاردا ژمارە 8 بێت چەندە؟

[ب] ئەگەری ئەوەی ئەو گۆیەی کە باوان رایکێشاوە ژمارەی 8 بێت لەیەك جاردا چەندە؟ (یارمەتی: ئەژمێری ئەگەری ئەوەی ئەو گۆیەی ژمارە 8 بێت لە یەکەم جاردا ڕاکیشرابێ یا لە دووەم جاردا نەك لە هەردوو جاردا بەیەکەوە)

23 **فرۆکەوانی** تۆمارەکانی یەکێك لە کۆمپانیاکانی فڕۆکەوانی پێشانی دەدات کە گەشتەکەیان لە تاران بۆ هەولێر کە لە کاتی خۆیدا دەگات لە 92% ی گەشتەکانیانە. گەشتەکەیان لەهەولێرەوە بۆ عەمان دەردەچێت لە کاتی خۆیدا لە 97% گەشتەکانە. ئاشتی ویستی گەشتێك بکات لە تارانەوە بۆ عەمان بەمەرجێك بە هەولێردا بڕوات، ئەگەری ئەوەی فڕۆکەکەی دەیگوازێتەوە بۆ هەولێر لە کاتی خۆیدا بێت چەندە لە دوایدا بگاتە عەمان لەکاتی خۆیدا؟

ڕوانین بۆ دواوە

ئەگەر x ، y سفر نەبن، ئەم بڕانەی خوارەوە بە سادەترین شێوە بنووسە.

24 $(x^{-2}y^{3})^{2}(3xy^{0})^{3}$

25 $(2x^{2}y^{-2})^{-3}(-x^{2}y)^{3}$

26 $\left(\dfrac{3x^{2}y^{-2}}{5x^{2}y}\right)^{2}$

ڕوانین بۆ پێشەوە

27 نیاز 3 پارچە دراوی کانزایی هاوشێوەی هەڵدا. ئەگەری دەستکەوتنی 3 خەت لە هەر بارێك لەم بارانەی خوارەوە بدۆزەرەوە.

أ باری یەکەم: یەکێك لە ڕووەکانی هەریەك لە پارچەکان شێربێت. (هەرسێ پارچە پارەکە ئاسایی بن)

ب یەك لە پارچەکان شێر لەسەر هەردوو ڕووەکەی هەبێت. (دوو پارچەکەی تر ئاسایی بن).

ج دوو لە پارچەکان شێر لەسەر هەردوو ڕووەکەی هەبێت. (پارچە پارەی سێیەم ئاسایی بێت).

وانەی 6

پێوەرەکانی پەرتبوون
Measurments of Dispersion

بۆچی؟

دەتوانیت پێوەرەکانی پەرتبوون بەکاربهێنیت بۆ بەراوردکردنی دوو کۆمەڵە پێدراوی هاوشێوە وەک تێکرای مانگانە بۆ پلەکانی گەرما لە دوو شاردا.

ئامانجەکان

- پێوەرەکانی پەرتبوون وەک مەوداو لادانی ناوەندی و لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی هەژمار دەکات وبەکاریان دەهێنێت.

چەمکی پەرتبوون Dispersion Concept

جێبەجێکردنەکان

کەش و هەوا

ئەم خشتەی بەرامبەرت تێکرای پلەکانی گەرما لە 12 مانگدا ڕووندەکاتەوە لە هەردوو شاری ریاز و جدە. ناوەندی پلەکانی گەرما لە خشتەی یەکەمدا دەکاتە 27 بەڵام لە خشتەی دووەمدا ناوەندی پلەکانی گەرما دەکاتە 28.51، ئەگەر بەهاکانی دوو خشتەکە لەسەر تەوەرەی ژمارەکان دابنێین دەبینین:

ناوەندی پلەکانی گەرما لە شاری ریاز.

کانوونی دووەم	16.63
شوبات	17.8
ئازار	22.94
نیسان	26.37
مایس	32.61
حزیران	35.62
تەموز	37.06
ئاب	36.81
ئەیلول	33.06
تشرینی یەکەم	28.34
تشرینی دووەم	22.5
کانونی یەکەم	14.35

ناوەندی پلەکانی گەرما لە شاری جەددە.

کانوونی دووەم	23.32
شوبات	23.77
ئازار	25.8
نیسان	28.08
مایس	30.51
حزیران	31.25
تەموز	32.7
ئاب	32.25
ئەیلول	31.27
تشرینی یەکەم	30.1
تشرینی دووەم	28.2
کانونی یەکەم	24.9

نواندنی پێدراوەکانی خشتەی یەکەم لەسەر تەوەری ژمارەکان

نواندنی پێدراوەکانی خشتەی دووەم لەسەر تەوەری ژمارەکان

ناوەندی خشتەی دووەم (28.51) پلەکانی گەرما دەردەبڕێ لە شاری جدە بە شێوەیەکی باشتر لە دەربڕینی

تێکرای خشتەی یەکەم (27) کە پلەکانی گەرما لە شاری ڕیازە. پلەکانی گەرما لە جدە نزیکە لە ناوەندەکەی بە پێچەوانەی پلەکانی گەرما لە شاری ڕیاز. ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە دەتوانین بڵێین کە کۆمەڵەی بەهاکانی خشتەی یەکەم پەرتبوونەکەی زیاترە لە بەهاکانی خشتەی دووەم.

پێوەرەکانی پەرت بوون Measures of Dispresion

ئامارناسان هەندێ لە پێوەرەکان بەکاردەهێنن بودەربڕینی پێوانی مەودای پەرتبونی کۆمەڵە بەهایەک

مەودا **Range** : بریتییە لە جیاوازی نیوان گەورەترین بەها **Maximum Value** – وبچووکترین بەها **Minimum Value** لە کۆمەڵەکە. (مەودا = گەورەترین بەها – بچووکترین بەها)

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

ئایا وادەبینی کە مەودا پەرتبوونی کۆمەڵە بەهایەک دەردەبڕی؟

لادانی ناوەندی **Mean Deviation** : بریتییە لە تێکڕای دوورکەوتنەوەی کۆمەڵە بەهایەک لە ناوەندە کە. (لادانی ناوەندی = $\frac{1}{n}\left(|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\ldots+|x_n-\bar{x}|\right)$

بۆ ئەوەی لادانی نێوانەیی هەژماربکەین بۆ کۆمەڵەی بەهای $x_1, x_2, \ldots, x_n$ لادانی هەریەکیان دەدۆزینەوە لە ناوەندە ژمێرەییەکەوە واتە $|x_1-\bar{x}|, |x_2-\bar{x}|, \ldots, |x_n-\bar{x}|$ پاشان تێکڕای ئەو لادانانە دەدۆزینەوە.

$$\text{لادانی نێوانەیی} = \frac{1}{n}\left(|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\ldots+|x_n-\bar{x}|\right)$$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

بۆچی ئامار ناسان بڕی $|x_n-\bar{x}|$ بەکاردێن بۆ دۆزینەوەی لادانی بەهای x_n و لە ناوەندە ژمێری و $x_n-\bar{x}$ بەکارناهێنن لە جیاتی ئەو.

نموونە 1

جێبەجێکردنەکان

بازرگانی

یەکێك لە کۆمپانیاکان تایە بۆ ئۆتۆمۆبێلەکان دروست دەکات، 5 تاقیکردنەوەی ئەنجامدا لە سەر دوو چەشنی تایە.ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی تۆمارکرا کە هەر تایەك بڕیویەتی پێش ئەوەی لە کەلك بکەوێت ئەم خشتەی خوارەوە ئەنجامەکانی ئەم تاقیکردنەوانە ڕووندەکاتەوە. بەهەزاران کیلۆمەتر.

تایەی چەشنی 1	66	43	37	50	54
تایەی چەشنی 2	54	49	47	48	52

أ هەریەك لە مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ژمارەی ئەو کیلۆمەترانە بدۆزەرەوە کە هەریەك لەم جۆرە تایانە بڕیویەتی.

ب ئەم پێوەرانە ئامازە بۆچی دەکەن دەربارەی هەریەك لەم دوو جۆرە تایانە.

شیکار

أ

تایەی چەشنی یەکەم

مەودا $66-37=29$ واتە 29 000 م

بۆ هەژمێرەی لادانی ناوەندی. دەست بکەبە هەژمێرکردنی ناوەند

$$\bar{x}=\frac{66+43+37+50+54}{5}=50$$

پاشان لادانی هەر بەهایەك لەم ناوەندەوە هەژمێربکە.

بۆ ئەمەش ئەم خشتەیە ڕێك بخە .

تایەی چەشنی دووەم

مەودا $54-47=7$ واتە 7 000 م

بۆ هەژمێرکردنی لادانی ناوەندی. دەست بکەبە هەژمێرکردنی ناوەند

$$\bar{x}=\frac{52+48+47+49+54}{5}=50$$

پاشان لادانی هەر بەهایەك لەم ناوەندەوە هەژمێربکە.

بۆ ئەمەش ئەم خشتەیە ڕێك بخە .

x_n	$\lvert x_n-\bar{x}\rvert$
66	16
43	7
37	13
50	0
54	4
کۆ	40

پاشان لادانی ناوەندی هەژمێر بکە بەم شێوەیە:
لادانی ناوەندی
$\frac{16+7+13+0+4}{5}=8$ واتا $8000\ km$

x_n	$\lvert x_n-\bar{x}\rvert$
54	4
94	1
47	3
48	2
52	2
کۆ	12

پاشان لادانی ناوەندی هەژمێر بکە بەم شێوەیە:
لادانی ناوەندی
$\frac{4+1+3+2+2}{5}=2.4$ واتا $2400\ km$

ب تێبینی بکە کە لادانی ناوەندی بۆ تایەی چەشنی 2 کەمترە لە لادانی ناوەندی تایەی چەشنی 1ئەمەش ڕێگات پێدەدات کە بلێیت کە ناوەندی پێدراوەکانی چەشنی 2 زیاتر باوەڕی پێدەکرێت.

هەوڵبدە مەوداو لادانی ناوەندی بۆ پێدراوەکانی تایەی چەشنی سێیەم هەژمێربکە و بەراوردی بکە لەگەڵ پێوەرەکانی کە دەگەڕێنەوە بۆ دوو تایەی پێشوو.

تایەی چەشنی 3	64	52	50	49	35

خاڵی چاودێری ✓ ئایا دەتوانرێ بۆ دوو کۆمەڵە پێدراوەکانی هەمان مەودایان هەبێت بێ ئەوەی لادانە ناوەندییەکانیان وەك یەك نەبن؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە بە نموونە.

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی: دوو پێوەرن بۆ پەرتبوون بەکاردەهێنرێن بۆ بەراوردکردنی پێدراوەکان و شیکارکردنیان.

لێکنەچوون $\sigma^2=\frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$

لادانی پێوانەیی $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ **ڕەگی دووجای لێکنەچوون.**

نموونە

2 لادانی پێوانەیی هەژمێربکە بۆ ئەو دوو تایەی کە دوو چەشنی تایەکە لە نموونەی پێشوو بڕیویانە

شیکار

جێبەجێکردنەکان
پیشەسازی

تایەی چەشنی یەکەم

$\bar{x}=\frac{66+43+37+50+54}{5}=50$

x_n	$x_n-\bar{x}$	$\lvert x_n-\bar{x}\rvert^2$
66	16	256
43	−7	49
37	−13	169
50	0	0
54	4	16
سەرجەم	0	490

تایەی چەشنی دووەم

$\bar{x}=\frac{54+49+47+48+52}{5}=50$

x_n	$x_n-\bar{x}$	$\lvert x_n-\bar{x}\rvert^2$
54	4	16
49	−1	1
47	−3	9
48	−2	4
52	2	4
سەرجەم	0	34

لێکنەچوون: $\sigma^2 = \frac{490}{5} = 98$
لادانی پێوانەیی: $\sigma = 9.9$ واتە 900 9 *km*.

لێکنەچوون: $\sigma^2 = \frac{34}{5} = 6.8$
لادانی پێوانەیی: $\sigma = 2.6$ واتە600 2 *km*.

ئەم ئەنجامانەی لە نموونەی پێشوودا دەست کەوتووە دڵنیامان دەکات کە لادانی پێوانەیی بۆ تایەی 2 کەمترە لە لادانی پێوانەی بۆ تایەی 1 .

هەوڵبدە لادانی پێوانەیی چەندە بۆ تایەی 3 .

خاڵی چاودێری ✓ ئەگەر لادانی پێوانەیی بۆ تایەی چوارەم یەکسان بێت 1 500km. لەبارەی ئەم تایە چی دەڵێیت بە بەراوردکردنی لەگەڵ دوو تایەی 1 ، 2 ؟

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە کام دوو پێوەر زیاتر بەکاردێت: لێکنەچوون یان لادانی پێوانەیی؟هۆی وەڵامەکەت لێکبدەوە؟ بەگەڕانەوە بۆ ناوەندی پلەکانی گەرما لە دوو شاری ڕیاز و جدە.ئەم خشتەیەی خوارەوە پێوەرەکانی پەرتبوون ڕووندەکاتەوە بۆ ناوەندی پلەکانی گەرما لەم دوو شارەدا.

پێوەر	ڕیاز	جدە
مەودا	22.71	9.38
لادانی ناوەندی	6.91	2.83
لێکنەچوون	66.46	11.2
لادانی پێوانەیی	8.15	3.35

ئەوە مانای ئەوەیە کە ناوەندی پلەی گەرما پەرتبوونەکەی کەمترە لە جدە تا ڕیاز لە بەرئەوەی لادانی پێوانەیی شاری یەکەم کەمترە لە لادانی پێوانەیی شاری دووەم.

ڕاهێنــــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1. بۆچی هەریەك لە لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی ژمارەیەکی سالب نین؟
2. پەیوەندی لە نێوان لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی ڕوونبکەرەوە. ئایا لادانی پێوانەیی هەمیشە کەمترە لە لێکنەچوون؟ وەڵامەکەت لێکبدەوە.
3. بۆچی هەریەك لە لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی زیاتر پەرتبوون دەردەخەن وەك لەمەودا؟

راهێنان و ئاڕاستەکراو

جێبەجێکردنەکان

ئاری	توانا
81	98
84	68
88	99
82	59
85	96

4 تاقیکردنەوە ئەم خشتەیەی بەرامبەر نمرەکانی دوو خوێندکار لە 5 تاقیکردنەوە ڕووندەکاتەوە. مەوداو لادانی ناوەندی بۆ نمرەکانی هەردوو قوتابی ئەژمێربکە. وە ڕوونی بکەوە کە ئەم پێوانانە چی دەگەێنن؟

5 لادانی پێوانەیی بۆ نمرەکانی ئەو دوو خوێندکارە ئەژمێربکە.

ڕاهێنانی جێبەجێکردن

مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ئەمانە ئەژمێربکە

6 8; 10; 3; 9; 10

7 1; 2; 4; 2; 6

8 31; 103; 34; 98; 107; 23

9 32; 23; 68; 74; 26; 93

10 2; 13; 9.4; 7.3; 12.3; 8.6; 7.6

11 1; 11; 14.2; 8.4; 12.2; 15.2; 10.9

12 −1.22; 4.35; −2.42; 2.33; 4.66

13 8.72; 7.43; 2.92;−3.56; 8.78

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەمانە ئەژمێربکە.

14 9; 10; 10; 8; 7; 11; 12; 9

15 8.1; 10.3; 3.4; 9.8; 10.7

16 −3; 2; −5; 4; −2; 8; 9;−1

17 2; 4; −8; 8; 7; −2;−4; 3; 7

لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی ئەژمێربکە. کام پێوەر لەم دوو پێوەرانە کەمتر پابەندە بەبەهای دەستکەوتووەوە؟

18 20; 30; 40; 500

19 0; 500; 510; 520

بەرەنگاری

20 دوو کۆمەڵە بەها پێك بهێنە کە هەمان مەودایان هەبێت. ولادانی پێوانەکانیان جیاواز بێت

21 ئایا دەبێت لادانی پێوانەیی بۆ کۆمەڵە بەهایەك یەکسان بێت بە سفر؟ئەگەر ئەوە لە توانادایە، مەرجەکانی بەدی هێنانی دیاریبکە. نموونەیەك بەکاربهێنە بۆ باسەکەت.

بەستنەوە

22 گۆڕانکاری چی ڕوودەدات لە لادانی پێوانەیی بۆ کۆمەڵە بەهایەك ئەگەر ژمارەیەکی دیاریکراوی a بخریتە سەر هەموو بەهاکانی کۆمەڵەکە؟ چی ڕوودەدات لە لادانی پێوانەیی کۆمەڵە بەهایەك ئەگەر هەموو بەهاکانی کۆمەڵەکە لە ژمارەیەکی دیاریکراوی وەك a بدرێت؟

وەرزش ئەم خشتەیەیی خوارەوە ژمارە پێوانەییەکان (بە خولەك و چرکە و بەشەکانی سەد لە چرکەدا) بۆ کوران وکچان ڕووندەکاتەوە کە بەشداریان لە پێشبڕکێیەکی هەزارمەتریدا کرد بۆ خلیسکاندن لەسەر بەفر.

	1976	1980	1984	1988	1992	1994	1998
کوڕان	1:59.38	1:55.44	1:58.36	1:52.06	1:54.81	1:51.29	1:47.87
کچان	2:16.58	2:10.95	2:03.42	2:00.68	2:05.87	2:02.19	1:57.58

23 ناوەند و ناوەڕاستە بۆ ژمارە پێوانەییەکانی کوڕان وکچان هەژمێربکە.

24 مەوداو لادانی پێوانە بۆ کوڕان وکچان هەژمێربکە: بەو پێوەرانە دەربارەی ژمارە پێوانەییەکان کوڕان وکچان چی دەڵێیت؟

25 لادانی پێوانەی بۆ کوڕان وکچان چی دەڵێن؟

ڕوانین بۆ دواوە

بەبەکارهێنانی یاسا، دوو ڕەگی ئەم دوو هاوکێشە دووجایانە بدۆزەرەوە. وەڵامەکەت نزیکبکەوە بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە.

26 $3x^2 - 10x + 1 = 0$ **27** $2x^2 + 12x - 4 = 0$

ڕوانین بۆپێشەوە

28 زۆرجار ئامارناسان پەنادەبەن بۆ بەکارهێنانی سامپڵێك بۆ توێژینەوەی کۆمەڵە بەهایەك، بۆ ئەمەش دەست بەکار دەبن لە پێوەرەکانی ئاماری سامپلەکە هەمووی. ئەوان وای دادەنێن کە ناوەندی نموونەکە ناوەندی کۆمەڵەکە دەردەخات. بەڵام بۆ لادانی پێوانەیی ئەوان لێکنەچوونی سامپلەکە هەژمێر دەکەن بە یاسایەك کەمێك جیاوازە لەگەڵ یاسای هەژمێرکردنی لێکنەچوونی کۆمەڵەکە. ئەوانە ئەم یاسایە بەکاردەهێنن.

لێکنەچوونی سامپلەکە $= \frac{1}{(n-1)}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$

أ لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم نموونەیە هەژمێربکە. 12 ;5 ;16 ;18 ;15

ب بۆ مەبەستی هەژمێرکردنی ناوەندی ژمارەی ئوتومبیلەکان لە خێزانێك، ئەنجوومەنی شارەوانی شارێك هەستا بە بەکارهێنانی سامپلێك کە لە 10 خێزان پێکهاتبوو بە هەڕەمەکی هەڵبژێرابوون. لە وەرگرتنی ڕاپرسی لەم سامپلە گەیشتنە ئەم ژمارانە: 4 ;3 ;1 ;2 ;4 ;1 ;1 ;2 ;3 ;2 ناوەندی ژمارەی ئوتومبیلەکان لای یەك خێزان بخەملێنە لەگەڵ لادانە پێوانەییەکەی.

ئەی گەشتیار لەگەڵ خۆتم بەرە

لەگرنگترین کێشەکانی بەرەو ڕووی کۆمپانیاکانی فرۆکەوانی دەبنەوە کێشەی ڕێکخستنی ڕێکوپێک بۆ کرداری تۆمارکردنی گەشتیارەکان و کەلوپەلەکانیانە بۆ گەیشتن بە باشترین چارەسەر بۆ ئەم کێشانە پلاندانەرەکانی ئەم کۆمپانیایانە پەنا دەبەنە بەر ئەنجامدانی کردارە ئامارییەکان و توێژینەوەی ئەنجامەکان بەکرداری بیرکاری، لەوانەش هەژمارکردنی ئەگەرەکان، لەمەودوا کۆمپانیاکە هەڵدەستێت بەسێ چالاکی لە بارەی کێشەی تۆمارکردنی گەشتیارەکان.

چالاکی 1

ئامارناسانی کۆمپانیاکە بەلایانەوە گرنگە توێژینەوەی تەواویکەن لەسەر ئەو کاتەی کە کرداری تۆماری گەشتیارەکان پێویستیەتی.و شایەنی باسە لێرەدا ئاماژە بۆ ئەوە بکەین کە ئەم کاتە لە گەشتیارێکەوە دەگۆڕێ بۆ گەشتیارێکی تر. بە هۆی جیاوازی بارودۆخی گەشتیارەکان.

ئامارناسەکان دەستیانکرد بە لێکۆڵینەوەی کاتی خایەنراو بۆ تۆمارکردنی هەر گەشتیارێك لەو پەنجا گەشتیارەی گەیشتونەتە نووسینگەی تۆمارگەکە، لە نێوان کاتژمێر 1:00 و کاتژمێر 1:10 و ئامارناسان گەیشتنە ئەم ئەگەرانەی کە لەم خشتەیەدا ڕوونکراوەتەوە

کاتی خایەنراو بە چرکە	10	20	30	40	50	60
ئەگەر	0.052	0.132	0.158	0.135	0.123	0.104

کاتی خایەنراو	70	80	90	100	011	120
ئەگەر	0.058	0.034	0.116	0.050	0.026	0.012

کاتەکان نزیککراونەتەوە لە نزیکترین چەند جارە لە دە چرکەدا، و ئەگەرەکان بۆ نزیکترین بەش لە هەزار. خشتەکە بەم واتەیە دەخوێنرێنەوە ئەگەری کاتی تۆمارکردنی گەشتیارەکە لە 10 چرکەدا بریتیە لە 0.052 وئەگەری کاتی پێویست لە 20 چرکەدا دەکاتە 0.132 . ئامارناسەکان دەیانەوی ئەگەری کاتی پێویست بۆ تۆمارکردنی 50 گەشتیارەکە زۆرتربێت لە 50 خولەکدا. ڕێگای یەکەم بۆ دیاریکردنی ئەمە پێویست دەکات بە تۆمارکردنی هەموو ئەو کاتانەی کە ژمارەیەکی زۆر لە گەشتیارەکان پێویستیان بووە و پوختەکردنی ئەنجامەکە؟ بەلام ئەم ڕێگایە پێویستی بە کات و توانا و تێچوون هەیە لەبەر ئەوە پەنایان بردە بەر وەك نواندن **Simulation** . چۆن هەستان بەم لێکچونە؟

پەنایان بردەبەر ئەو وردەکاریانەی کە ئەگەرەکانی پێ هەژمارکرابوو لە خشتەی پێشوو لەبەر ئەوەی وردەکارییەکە نزیککرابۆوە بۆ نزیکترین بەش لە هەزار.

بڕیاریاندا کە گەیشتنی 1000 گەیشتیار وەك یەك لێكردن بكەن بۆ ئەوەی بگەنە ئەو مەبەستە. هەستان بە كۆكردنەوەی ژمارەكان لە 1 بۆ 1000 لە چەشنەكاندا.

بەپێی ئەگەرەكانی خشتەی پێشوو وایان دانا كە ژمارەكان لە 1 بۆ 52 بەرامبەری ئەگەری 0.052 دێت. و ژمارەكان لە 53 بۆ 184 (132 ژمارە) بەرامبەر ئەگەری 0.132 و بێت و هەروەها...

خشتەكەی بەرامبەر تەواو بكە

كات	ئەگەرەكان	تۆماركردنی گەشتیار
0	0	000
10	0.052	052-001
20	0.132	184-053
30	0.158	342-185
⋮	⋮	⋮

چۆن ئەم خشتەیە بەكار دەهێنێت؟ داوا بكە لە بژمێری ڕوونكردنەوەیی بەهەرەمەكی ژمارەیەكت بداتێ بكەوێتە نێوان 1 و 1000 كە ئەو دوو ژمارەیەی تێدابێت. وا دابنێ كە ئەو ژمارە هەرەمەكییە گەیشتنی گەشتیارەكە بۆ نوسینگەی تۆماركە بنوێنێ. خشتەی پێشوو بەكاربێنە بۆ دیاریكردنی ئەو كاتەی كەگەشتیارەكە ویستویەتی بۆ تۆماركردن.

ئەگەر ژمارە هەرەمەكیەكە 122 بێت بۆ نموونە وادابنێ ئەو كاتەی كە گەشتیارەكە پێویستیەتی بۆ تۆماركردنی 20 چركەیە چونكە ژمارە 122 دەكەوێتە نێوان هەردوو ژمارەی 53 و 418 لە ستونی سێیەمدا.

چالاكی 2

كاتی گەیشتنی 50 گەشتیار بۆ نووسینگەی تۆمارگە لە نێوان كاتژمێر 1:00 و كاتژمێر 1:10 هەڵدەستیت بەوەی (وەك یەكێیان لێ بكەیت) بە داواكردن لە بژمێرەكە 50 ژمارەی هەرەمەكیت بداتێ ئەوەی كە دەستتكەوتووە لەم خشتەیەی بەرامبەرت ڕێكبخە.

1 بژمێری ڕونكرنەوەیی بەكاربهێنە بۆ دەستكەوتنی 50 ژمارەی هەرەمەكی كە بكەوێتە نێوان 1 و 1000 و ئەم دوو ژمارەیە خۆشیانی تێدابن.

2 ستوونی دووەم لەخشتەكەدا تەواوبكە.

3 ئەو خشتەیەی كە دروستتكردوە لە چالاكی یەكەم بەكاربهێنە بۆ تەواوكردنی ستوونی سێیەم. نموونە: ئەگەر ژمارە هەرەمەكیەكە 179 بێت ئەو كاتەی كە پێویستە دابنێت لە ستوونی سێیەم بەرامبەر 179 دەكاتە 20 چركە.

كات	ئەو ژمارە هەرەمەكییە گەشتیارەكە دەینوێنێ	گەشتیار
		1
		2
		3
		⋮
		49
		50

چالاكی 3

1 نواندنی گەیشتی 50 گەشتیار كە بۆ نوسینگەی تۆمارگە 10 جار دووبارەبكەوە. ئەگەری كاتی پێویست بۆ تۆماركردنی گەشتیارەكان كە لە 50 خولەك زیاترە بخەملێنە.

2 تێبینیت كرد لە كاتی ئیشكردنت لەم وانەیەدا چارەسەركردنی كاری تۆماركردنی گەشتیاران ئاسان نییە. ئایا دەتوانیت لەسەرەتایی دەستپێكردنت بەكاری ئەم پرۆژەیە نمونەیەك بدەی لەسەر بارێكی تر كە بتوانرێ نواندن بەكاربهێنرێت بۆ دیاریكردنی ئەگەرەكان؟ ئەمە ڕوونبكەرەوە.

6 پێداچوونەوەی بەش

1 سۆزان گۆیەکی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 3 گۆی سوور و 3 گۆی شینی تێدابوو ئەگەری ئەوەی گۆی ڕاکێشراو سوور بێت چەندە؟

2 ئاواز گۆیەکی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 4 گۆی سوور و 10 گۆی ڕەشی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆ ڕاکێشراوەکە سوور بێت چەندە؟

ئاهەنگێك لە نێوان کاتژمێر 8:00 د.ن و 8:30 د.ن دەست پێدەکات ئەگەری گەیشتنی یەکەم میوان بدۆزەرەوە لەنێوان:

3 8:00 د ن و 8:05 د ن ؟

4 8:12 د ن و 8:18 د ن ؟

5 8:21 د ن و 8:24 د ن ؟

6 چەند وشەی نهێنی لە 4 پیت دەتوانیت پێکبهێنی بەبەکارهێنانی 5 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی بەبێ دووبارەبوونەوە؟

7 لە 4 پیت چەند وشەی نەهێنی دەتوانیت پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی 5 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی لەگەڵ ڕێگادان بە دووبارە بوونەوە؟

8 بەچەند ڕێگا دەتوانیت 6 شەشپاڵووی ڕەنگ جیاواز لە ڕیزێکدا ڕیزبکەی.

9 بەچەند ڕێگا دەتوانیت دوو کتێب لە 5 کتێب هەڵبژێری ولەسەر ڕەفەکە ڕیزیانبکەیت.

10 بەچەند ڕێگا 5 خوێندکار دەتوانن لە دەوری مێزێکی بازنەییدا دابنیشن؟

11 بەچەند ڕێگا 8 خوێندکار دەتوانن لە دەوری مێزێکی بازنەییدا دابنیشن؟

12 بەچەند ڕێگا دەتوانیت دوو پەرتووك هەڵبژێری لە نێوان 10 پەرتووکدا؟

دلۆڤان پەردە زارێکی هەڵدا. ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە بدۆزەرەوە

13 دەستکەوتنی ژمارەی 4 یان 7

14 دەستکەوتنی ژمارەی 1 یان 6

15 دەستکەوتنی ژمارەی تاك یان گەورەترە لە 4

16 دەستکەوتنی ژمارەی جووت یان بچووکترە لە 4

17 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 1

18 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 2

ئەگەری ئەم ڕووداوانە هەژماربکە

19 لەدایکبوونی 3 منداڵی کوڕ یەك بەدوای یەك لە نەخۆشخانەی لە دایکبوون

20 دەستکەوتنی دوو ژمارەی جووت لە هەڵدانی دوو پەردەزار.

21 مەودا و لێکنەچوون و لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم کۆمەڵە بەهایانە هەژمێربکە. 3، 2، 3، 5، 7، 5.

مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ئەم کۆمەڵە بەهایانە هەژمێربکە

22 14; 11; 8; 14; 4; 12; 10; 6

23 20; 22; 15; 14; 13; 17

24 2; −3; 9; −7; 6; 3

25 . 21; 24; −22; 13; 12; −8; 4

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەریەك لەم کۆمەڵە بەهایانە هەژمێربکە

26 20; 19; 16; 14; 13; 11; 18; 15; 12; 10

27 160; 80; 180; 130; 140; 100

38 14; 13; 11; 9; 7; 14; 12; 9; 8

29 2; 20; 18; 12; 6; 4; 3; 2; 12; 4; 3

6 تاقیکردنەوەی بەش

ئەگەری هەر ڕووداوێك لەمانە دیاریبکە

1 گۆیەك لە تورەگەیەك ڕاکێشرا کە 4 گۆی سوور و 4 گۆی سەوزو 4 گۆی شین و 40 گۆی زەردی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆی ڕاکیشراو سوور بێت.

2 ڕاکێشرانی گۆیەکی سەوز لە تورەگەیەك کە 8 گۆی سەوز و 6 گۆی سووری تیدابوو لە کاتی ڕاکیشانی یەك گۆ.

3 دەستکەوتنی ژمارەی تاك لە هەڵدانی بەردەزارێك.

4 **ڕەنووسکردن** ڕەنووسکردنی پلیتی مۆڵەتی ڕاوکردن لە دوو پیتی جیا لە بیست و هەشت پیتەکانی زمانی عەرەبی و 8 ڕەنووسی جیاواز لە 10 ڕەنووسە بنەڕەتییەکە. ژمارەی ڕەنووسکراوەکانی کە لە توانادایە چەندە؟

ئەنجامی ئەم برانە بدۆزەرەوە.

5 $12! - 7!$

6 $_{8}P_{3}$

7 بەچەند ڕێگا دەتوانرێ سەرۆك ویاریدەدەری سەرۆك ڕازگری لێژنەیەك هەڵبژێری کە پێکهاتووە لە 24 ئەندام؟

8 ژمارەی گۆڕینەکانی وشەی (کوردستان) چەندە؟

9 **وەرزش** بەچەند ڕێگا دەتوانیت 3 گۆی ڕەنگ جیاواز بەشبکەیت بەسەر 32 سەندوقی ڕەنووس کراودا ؟

ئەمانە بدۆزەرەوە

10 $_{8}C_{3}$

11 $_{8}C_{8}$

12 $\frac{_{8}C_{5}}{_{5}C_{3} \times _{5}C_{2}}$

13 **بازرگانی** چێشتخانەیەك ژەمێك خواردن کەپێکدێت لە هەڵبژاردنی 3 قاپ خواردن لە نێوان 7 قاپدا میوانێك هەڵیبژێرێت ئەم هەڵبژاردنە بە چەند ڕێگا دەبێت؟

بەترۆس گۆیەکی ڕاکیشا لە تورەگەیەك کە 12 گۆی هاوشێوەی تێدابوو ڕەنووسکراون لە 1 تا 12 .ئەگەری ئەوەی گۆ ڕاکیشراوەکە یەکێك لەم ژمارانە هەڵگرێت چەندە.

14 ژمارە 7 یان ژمارەیەکی جووت.

15 ژمارەیەکی خۆبەش یان ژمارەیەکی چەند جارەی 4 .

16 ژماریەکی تاك یان ژمارەیەك چەند جارەی 5 بێت.

17 ژماریەك گەورەتربێت لە 8 یان ژمارەیەك چەند جارەی 3 بێت.

18 ژمارەیەکی جووت یان جووت یان بچووکتر بێت لە 6 .

ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە بدۆزەرەوە.

19 سیروان پارچە دراوێکی کانزایی و زارێکی هەڵدا. ڕووداوەکە دەستکەوتنی خەتێك و ژمارەی 5 بێت.

20 دەزگای بۆشایی ئاسمان کاتێکی هەڵبژارد بۆ هەڵدانی مەکۆکێکی بۆشایی لە هەفتەی داهاتوودا. ڕودەدات کە پێویستە لە ڕۆژی سێشەممە بێت لە نێوان کاتژمێرا پێش نیورۆ و کاتژمێر 2 پێش نیوەڕۆ.

بچووکترین بەها و گەورەترین بەها و مەودا بۆ هەریەکە لەم کۆمەڵە پێدراوانە دیاریبکە

21 34; 65; 32; 19; 28; 23; 45; 59; 24; 18
. 34; 41; 19; 23; 54; 42; 27; 25; 39

22 7; 5; 8; 2; 6; 2; 5; 6; 1; 4; 9; 8; 5; 3

مەودا ولادانی ناوەندی بۆ هەر یەکە لەم کۆمەڵە بەهایانە بدۆزەرەوە

23 13; 11; 9; 7; 5; 3

24 33; 30; 25; 23; 15; 18; 12; 10

لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەر یەکە لەم کۆمەڵە بەهایانە بدۆزەرەوە.

25 . 13; 11; 9; 7; 5; 3

26 33; 30; 25; 23; 15; 18; 12; 10

27 چی دەڵێیت دەربارەی کۆمەڵە بەهایەك لادانە پێوانەکەی سفر بێت؟

6

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 کام لەم جووتە ڕێکخراوانەی خوارەوە ئەم سیستەمە ساغدەکاتەوە $\begin{cases} 2y+x \le 6 \\ y-3x \ge 4 \end{cases}$

أ $(0, 5)$ ب $(-1, 2)$

ج $(1, -1)$ د $(0, 0)$

2 شیکاری لاسەنگەی $2(x+2)-7<8x+15$ بریتییە لە

أ $x>-3$ ب $x<-3$

ج $x>2$ د $x<2$

3 بۆ ئەوەی ئەم برە x^2-12x ببێتە دووجای تەواو دەبێت چی بخرێتە سەری

أ 6 ب -6 ج 36 د -36

4 کام دەربڕین لەمانەی خوارەوە باسی پەیوەندی نێوان ئەم دوو ڕاستەهێڵە دەکات $y=-2x-3$ $y=\frac{1}{2}x$

أ دوو ڕاستەهێڵی ناسۆیین   ب دوو ڕاستەهێڵی ستوونین

ج ئەستوونن لەگەڵ یەکتر   د تەریبن بەیەکتری

5 سادەترین شێوەی $\left(-\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ دەکاتە.

أ $\frac{1}{25}$ ب $-\frac{1}{25}$

ج 25 د -25

6 پۆتانی خاڵی ناوەڕاستی ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی دوو سەرەکانی $(-4, -1)$ ، $(2, -7)$ بریتییەلە

أ $(-1, -3)$ ب $(-3, 3)$

ج $(-1, -4)$ د $(-3, -3)$

7 کامیان شێوەی گشتی ئەم برەیە دەنوێنێت.

$$(5x^3-2x^2+x-10)+(2x^3-3x-1)$$

أ $3x^3-2x^2-4x-9$

ب $3x^3+2x^2+4x-9$

ج $7x^3-2x^2-2x-9$

د $7x^3-2x^2-2x-11$

8 ئەم برە بەسادەترین شێوە بنووسە

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2} \times \frac{x^2-2x}{2x+8}$$

9 ئەو هاوکێشەیە بنووسە لە سەر شێوەی لاری یەکتربڕینی بۆ ئەو ڕاستەهێڵەی بەم دوو خاڵە دا دەڕوات $(3, -4)$ $(2, 7)$

10 سفرەکانی نەخشە $f(x)=x^2-8x+12$ بدۆزەوە.

11 ئەم برە ئەگەر لەتوانادابوو شیتەڵبکە $5x^2+10x-40$

12 ئەم برە شیتەڵبکە $8x^3+64$

13 هاوکێشەکانی هەموو ڕاستەهێڵە دەرکەنارەکانی ئاسۆیی و ستوونی ئەم نەخشە ڕێژەییە بنووسە $f(x)=\frac{(x+2)^2}{3x}$

14 ئەم برە ئەگەر شیتەڵ دەکرێ، شیتەڵبکە.

$$6x^2+8x-15x-20$$

15 ئەم برە بۆ سادەترین شێوە کورت بکەرەوە. $\dfrac{\frac{x+4}{9x^2}}{\frac{x-6}{3x^4}}$

16 کۆمەڵەی شیکاری ئەم هاوکێشەیە بدۆزەرەوە $\frac{6x+2}{3x}=6$

17 لاری ئەم ڕاستەهێڵە بدۆزەرەوە $y=8$

18 چی پێویستە بخرێتە سەر بڕی x^2+8x بۆ ئەوەی ببێتە دووجای تەواو.

جالاکییەکانی دەرەوەی پۆل یانەی شەترەنج لە قوتابخانەیەکدا لە 12 ئەندام پێکهاوە کە 5 کوڕ و 7 یان کچن

19 چەند تیپ لە 6 یاریکەر پێکبێت دەتوانرێ پێکبهێنرێت بەمەرجێك بە لایەنی کەمەوە 3 کوڕەی تێدابێت.

20 چەند تیپ لە 6 یاریکەر پێکبێت دەتوانرێت پێکبهێنرێت بە مەرجێك بەلایەنی کەمەوە 3 کچوکی تێدابێت.

21 چەند تیپ لە 6 یاریکەر پێکبێت دەتوانرێ پێکبهێنرێت بەمەرجێك بەلایەنی زۆرەوە 3 کوڕی تێدا بێت.

بۆ خۆشی کۆمەڵەی چاودێری کۆمەڵایەتی بە پێی ئەم خشتەیەی خوارەوە بەملیۆنان دینار پارەمەی هەژارانیدا لە ماوەی 12 مانگدا.

14.8	2.5	2.9	3.0	3.7	4.0
5.7	4.8	4.2	5.6	6.1	10.6

22 ناوەندی خەرجی مانگێك بدۆزەرەوە.

23 مەودا و لێکنەچوون و لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی بۆ پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەرەوە.

بەشی حەفتەم

ئەندازە

Geometry

1. هەندێك لە دەسپێكەكانی ئەندازەی ئیقلیدس.

2. ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكان لە بۆشاییدا.

3. وێنە بینراوەكان.

4. چەندلا ڕێكەكان.

5. هاوڕێژەی ئەندازەیی.

6. بازنە.

پرۆژەی بەشەكە

پێداچوونەوە

تاقیكردنەوەی بەش

تاقیكردنەوەی كەڵەكەبوو

بەشی 7

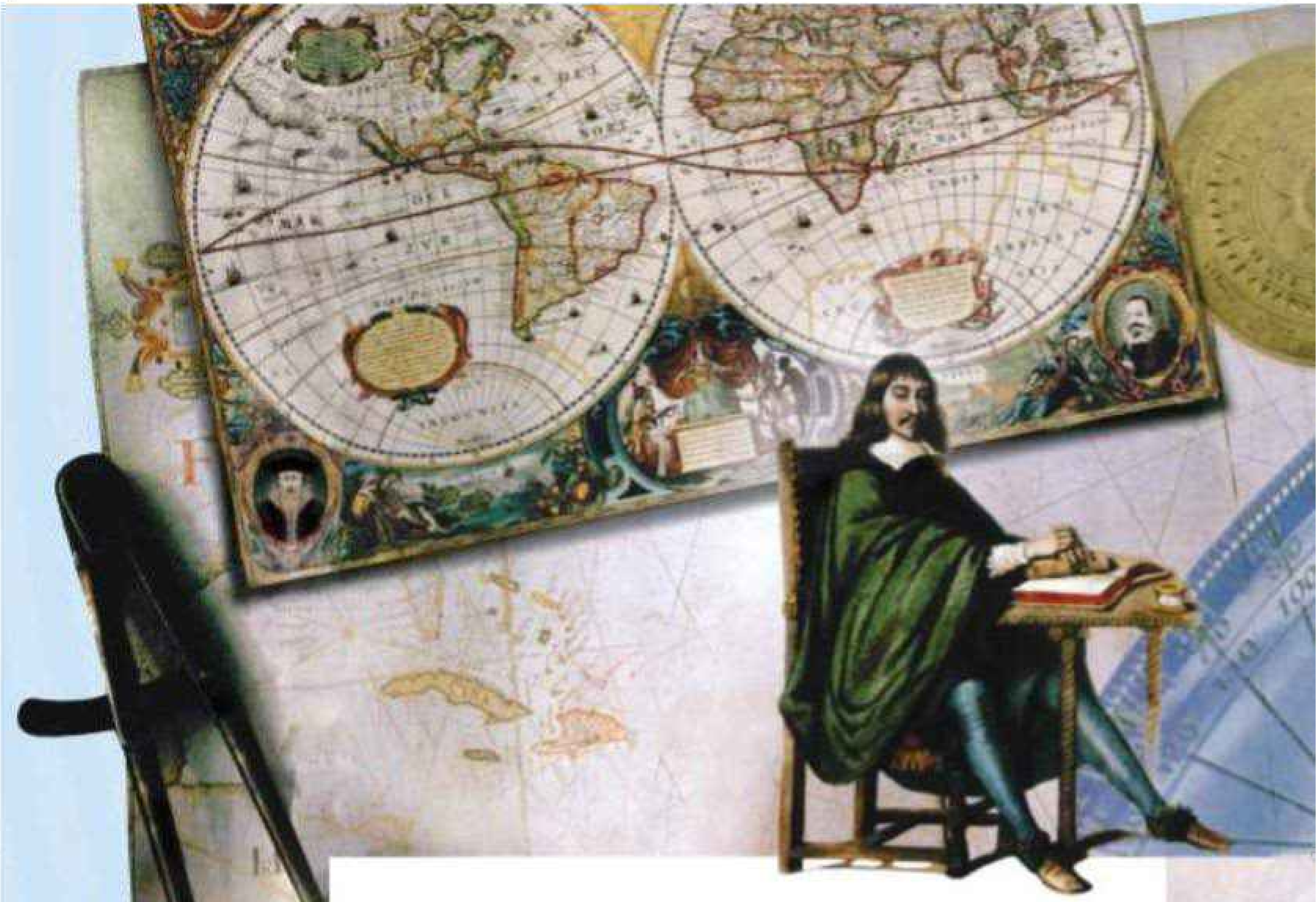
ئەندازە Geometry

ئەندازە زانستێکی کۆن و تازەیە لە یەک کاتدا. دووهەزار ساڵە ئەندازە بەبێ دابڕان پێشدەکەوێت. ئەندازە لەکۆنەوە دەستپێکردووە و جێگای خۆی کردەوە لە کارەکانی ئەقلیدس و بەبەردەوامی لە برەودابوو تا دەگاتە کارەکانی فەیلەسوف و بیرکاریزانی فەرەنسی ڕینە دیکارت، تاکو گەیشتە سەردەمی تازە بەبەکارهێنانی بژمێرەکان و بژمێرە پێشکەوتووەکان. لەم بەشەدا فێری پەیوەندییە بنەڕەتیەکان دەبیت کە پێکهێنەرەکانی ئەندازە لە ڕووتەخت و بۆشاییدا بەیەکەوە دەبەستێتەوە. هەروەها فێردەبیت چۆن تەنەئەندازە سێ دوورییەکان وێنە بکێشیت لە ڕووتەختێکدا بەوشێوەیەی بینەرێك دەیبینێت.

هەروەها جێگۆرکێیەکی ئەندازەیی نوێ فێردەبیت کە جیاوازە لەو جێگۆرکێیانەی فێری بویت، بەوەی دووریەکان پارێزراونابێت و هەندێ شتی تریش فێردەبیت.

وانەکان

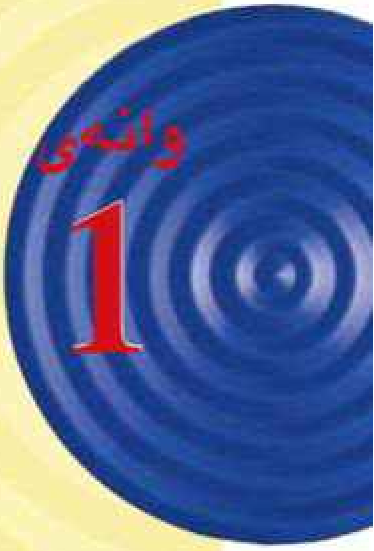
1. هەندێك لە دەسپێکەکانی ئەندازەی ئیقلیدس.
2. ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشاییدا.
3. وێنە بینراوەکان.
4. چەندلا ڕێکەکان.
5. هاوڕێژەی ئەندازەیی.
6. بازنە
پرۆژەی بەش



دەربارەی پرۆژەی بەش

پێشتر بیرکاریزان جۆرج بێڵ ڕێسایەکی بۆ ڕووبەری چەندلا دۆزیبووەوە کە جیاوازبوو لە ڕێساکانی پێش خۆی. لەمەودوا کاغەزی خاڵدار (بەیانی) بەکاردەهێنێت و هەندێک خاڵ بەیەکدەگەیەنیت بۆ ئەوەی چەندلایەکت دەستکەوێت. و لەمەودوا شێوازێکت دەست دەکەوێت کە ڕێگات پێدەدات بەداڕشتنی ڕێسایەك بۆ هەژمێرکردنی ڕووبەری ئەم چەشنە چەندلایانە. لەدوای کۆتایی هاتنی ئەم پرۆژەیە لە تواناتدا دەبێت.

- ڕووبەرەکانی هەندێك لە شێوە ئاڵۆزەکان هەژمێربکەیت، بەبێ بەکارهێنانی ڕێساکانی ڕووبەرە پەیڕەوکراوەکان.



هەندێك لە دەستپێكەكانی ئەندازەی ئیقلیدس

Building of Eculidean Geometry

بۆچی

دەتوانین شێوە ئەندازەییەكان بەكاربهێنین لە خاڵەكان و ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكان بۆ ئەوەی نموونەكانی بیركاری دروستبكەین بۆ شێوە ماددەكان ئەو نموونانە بەكاردێت، بۆ شیكاركردنی پرسیارەكان لە ژیاندا بەكاردەهێنرێت

خەتی كاكێشانی لوولپێچ $M\,31$ لە كۆمەڵەی ئەندرۆمید وەك هاوڕێی خەتی كاكێشانی ئێمە وایە. هەروەك خەتە كاكێشەكان لە ئەستێرەكان و هەسارەكان پێكدێن، ئاواش شێوە ئەندازەییەكان لە خاڵەكان پێكدێن.

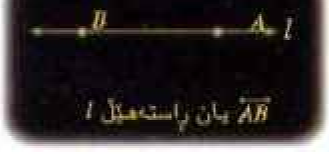
ئامانجەكان

- خاڵ و ڕاستەهێڵ و ڕووتەخت جیا دەكاتەوە.
- پارچە ڕاستەهێڵ و تیشك و گۆشەو خاڵەكانی ڕێكی یەكتر لە یەك ئاست دەناسێت.
- لەو بەڵگەنەویستانە دەكۆڵێتەوە كە پەیوەندیان بە خاڵەكان و ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكانەوە هەیە.

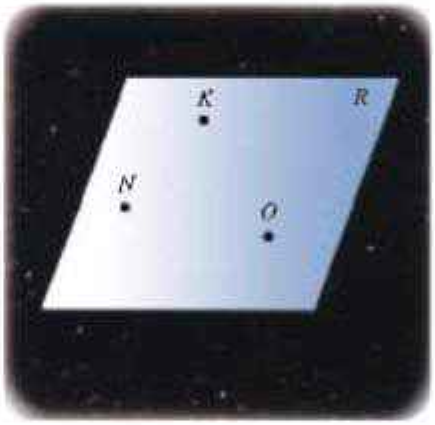
Basic elements in geometry — پێكهاتە بنەڕەتییەكانی ئەندازە

شێوە ئەندازە بنەڕەتییەكان بریتیین لە **خاڵ** و **ڕاستەهێڵ** و **ڕووتەخت**. هەر ئەوانەش هەموو شێوەكان و تەنەئەندازەییەكان پێكدێنن. زاناكانی بیركاری گەیشتنە ڕێگایەكی داخراو لە پێناسەكردنی ئەم دانانە، ئەوەی لە سەری ڕێككەوتن و پەسەندیانكرد كە ئەو دانانە وەربگرن بێ ئەوەی پێناسەیان بكەن، لەگەڵ ئەوەی ئەو دانانە پێناسە نەكراون، دەتوانین لێیان بدوێین. پێشەكی پێویستە بزانین كە شێوەكان و تەنەئەندازییەكان لە جیهانی هەستپێكراوی ئێمە دانین، خاڵ پێوانەی نییە، ڕاستەهێڵ پانی نییە ئەم پەرتووكە نواندنی شێوەكان وتەنە ئەندازەییەكانی تێدایە. بەڵام نواندن شتێكە و شێوە و تەنی ئەندازەیی شتێكی ترە. شێوەكان و تەنە ئەندازییەكان تیۆریانە تەنها لە هۆشمان هەیە.

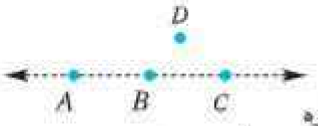
خاڵ كاتێ سەیری ئاسمان دەكەیت لە شەوێكی سامالدا هەندێك ئەستێرەی دووری درەوشاوە دەبینیت وا دەردەكەون كە خاڵن. خاڵ بەو شوێنەوارە دەنوێنرێت كە نوكی قەڵەمەكە بەجێی دێڵێ لەسەر كاغەزەكە.پێوەری ئەم نواندنە گەورە دەبێت وبچووك دەبێتەوە، لە كاتێك ئەو شوێنەوارەی كە خاڵەكە دەینوێنێ پێوانەی نییە. زۆربەی كات پیتەكانی $A, B, C \ldots$ بەكاردێت بۆ ناولێنانی خاڵەكان



ڕاستەهێڵ ڕاستەهێڵی ئەندازەیی پانی نییە. هێڵێكە خواروخێچی تێدانییە، لە هەردوو سەرەوە بۆ ناكۆتا درێژدەبێتەوە بۆ ناولێنانی ڕاستەهێڵ ناوی دوو خاڵی جیاواز بەكاربهێنە كە پێیاندا بڕوات لەگەڵ دانانی نیشانەی تیر لەسەر هەردوو سەرەكانی و ئەم ڕاستەهێڵە بەم شێوەیە دەنووسرێت $\overleftrightarrow{AB}$ كە ناوی ئەو ڕاستە هێڵەیە بە دوو خاڵی A ، B دەڕوات و دەتوانیت ناو لە ڕاستەهێڵەكە بنێیت بەیەك پیت.



ڕووتەخت ڕوویەکی تەختە درێژدەبێتەوە بۆ ناکۆتایی لە هەموو لایەکانەوە. دەتوانیت بەشێك لە ڕووتەختێك بنوێنیت بەهەر ڕوویەك کە بەرزو نزمی تیدانەبێت. وەك ڕوویەکی مێز، یان بەرگی پەرتووك. ئەو ڕووە تەختەی لە وێنەی بەرامبەر دایە بەشێك لە ڕووتەختێك دەنوێنێ. بۆ ناولێنانی ڕووتەخت ناوی سێ خاڵ بنێ کە ڕووتەختەکە پێیاندا بڕوات: دەڵێین ڕووتەختی *MNO*، بەمەرجێك ئەو سێ خاڵە نەکەونە سەر ڕاستەهێڵێك و دەتوانیت یەك پیت بەکاربهێنین بۆ ناو لێنانی ڕووتەختەکە.دەڵێین ڕوتەختی *R*.



خاڵەکانی A، B، C لە ڕێکی یەکترن

خاڵەکانی A، B، Dلە ڕێکی یەکترنین

بە چەند خاڵێکی جیاواز دەڵێین لە ڕێکییەکترن ئەگەر بکەونە سەر یەك ڕاستەهێڵ. ئەم وێنەی بەرامبەر ڕوونی دەکاتەوە کە خاڵەکانی A و B و C لە ڕێکی یەکترن. دەڵێین ژمارەیەك لە خاڵە جیاوازەکان لەیەك ئاست دەبن ئەگەر بکەونە ناویەك ڕووتەخت. تێبینی ئەوە بکە کە دوو خاڵ هەمیشە لە ڕێکی یەکترن و سێ خاڵ هەمیشە لەیەك ئاستدان.

پێناسەی شێوە ئەندازەییەکان بەپێی پێکهاتە بنەڕەتییەکانی ئەندازە
Defining Figures in Terms of the Basics

دەتوانیت پێناسەی ژمارەیەك لە شێوە ئەندازییەکان بکەیت بە دەستپێکردن لە پێکهاتە بنەڕەتییەکانی ئەندازەوە. لەمەودوا پێناسەی پارچە ڕاستەهێڵ و تیشك و گۆشە دەکەین بەم شێوەی خوارەوە.

پێناسەی پارچە ڕاستەهێڵ Segment Definition

پارچە ڕاستەهێڵ **Segment** بەشێکە لە ڕاستەهێڵ لە خاڵێکەوە دەستپێدەکات و لە خاڵێکی ترەوە کۆتایی **Endpoints** دێت. دوو سەرەکانی پارچە ڕاستەهێڵەکە ئەو دوو خاڵە دیاریان دەکات.

بۆ ناو لێنانی پارچە ڕاستەهێڵ ناوی دوو سەرەکەی بەکاربهێنە، خەتێك لەسەر هەردوو ناوەکە دابنێ. پارچە ڕاستەهێڵی $\overline{AB}$ بریتیە لەو پارچە ڕاستەهێڵەی کە A و B دوو لایەکەی دەنوێنن.

پێناسەی تیشك Ray Definition

تیشك **Ray** بەشێکە لە ڕاستەهێڵ کە لە خاڵێکەوە دەست پێدەکات و درێژدەبێتەوە بۆ ناکۆتا بە یەك ئاڕاستە. سەری تیشکەکە بریتیە لە خاڵی دەستپێکردنی **Endpoints** .

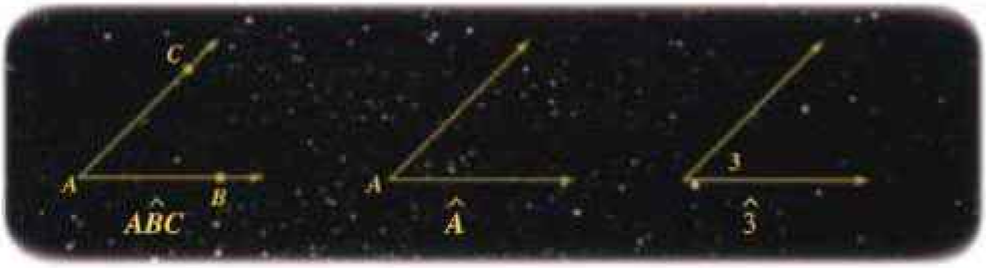
بۆ ناولێنانی تیشك ناوی خاڵی سەری تیشکەکە و ناوی خاڵێکی تر بەکاربهێنە. نوسینی تیشکی YX ئەوە دەگەیەنێت سەری تیشکەکە (X)ەو بەخاڵی Yدا دەڕوات.

پێناسەی گۆشە Angle Definition

گۆشە **Angle** ئەو شێوە ئەندازەییە لە ئەنجامی بەیەك گەیشتنی دوو تیشك پەیدادەبێت کە هەمان خاڵی دەستپێکردنیان هەیە. خاڵی دەستپێکردنەکە سەری **گۆشەکەیە Vertex** و دوو تیشکەکە **دوو لای گۆشەکەیە Sides** .

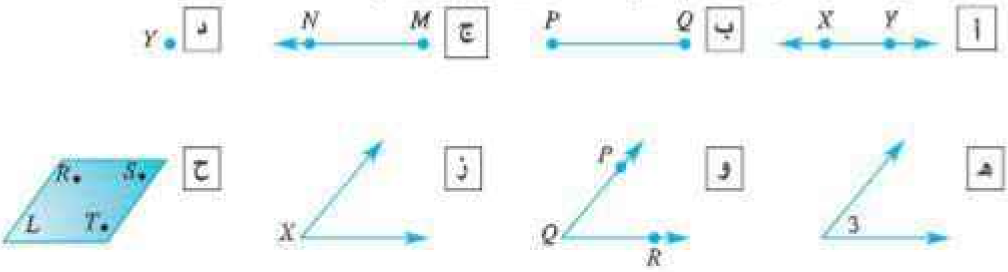
گۆشە ئەو ڕووتەختەی کە تێیدایە دەکات بە دوو بەشەوە دوو لاکانی گۆشەکە جیایان دەکاتەوە، ئەو دوو بەشە بریتیین لە **ناوە گۆشە Interior** و دەرەگۆشە **Exterior**. ئەگەر خاڵێکی سەر یەکێك لەو دوو تیشکی گۆشە بگەیەنیت بەخاڵێکی تری سەر تیشکەکەی تر، ئەو پارچە ڕاستە هێڵەی ئەو دوو خاڵە دەگەیەنیت دەکەوێتە ناو گۆشەکەوە

بۆ ناولێنانی هەر گۆشەیەك دەتوانرێت یەکێك لەم سێ ڕێگایانەی خوارەوە بەکاربهێنرێت ڕێگای یەکەم دانانی پیتێك وەك D بۆ سەری گۆشەکە و دەخوێنرێتەوە بە گۆشەیD و بەشێوەی$\hat{D}$ دەنووسرێت. ڕێگای دووەم بۆ ووردەکاری زیاتر، سێ پیت بەکاردەهێنرێت یەکێکیان بۆ سەری گۆشە و دووانەکەی تر هەریەکیان دەکەوێتە سەر لایەکی گۆشەکە،وەك گۆشەی ABC کە دەنوسرێت بە شێوەی $B\,A\,C$ یان گۆشەی $C\,A\,B$ دەنوسرێت بە شێوەی $C\,A\,B$ ڕێگای سێیەم بە دانانی ڕەنووسێك لەسەر گۆشەکە وەك گۆشەی 3 دەنووسرێت $\hat{3}$.



نموونە 1

ناوێك بنووسە بۆ هەریەك لەم شێوە ئەندازەییانەی خوارەوە.



شیکار

أ ڕاستەهێڵی XY یان ڕاستەهێڵی YX

ب $\overline{PQ}$ یان $\overline{QP}$ یان پارچە ڕاستەهێڵی PQ

ج تیشکی MN یان $\overrightarrow{MN}$ د خاڵی Y هـ $\hat{3}$ یان گۆشەی 3

و $P\hat{Q}R$ یان $R\hat{Q}P$ یان گۆشەی RQP ز $\hat{X}$ یان گۆشەی X

ح ڕووتەختی TSR یان ڕووتەختی RTSیان ڕووتەختی STRیان ڕووتەختی SRT یان ڕووتەختی RST یان ڕووتەختی TSRیان ڕووتەختی L .

یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان Intersection of Lines and Planes

دوو شێوەی ئەندازەیی یان دوو تەنی ئەندازەیی یان شێوە ئەندازەییەك و تەنێکی ئەندازەیی یەکتری دەبڕن کاتێك لە خاڵێك یان زیاتر هاوبەشبن. لەم بارەدا بە کۆمەڵەی خاڵە هاوبەشەکان دەوترێت یەکتربڕینی دوو شێوەکە یان دوو تەنەکە، یان شێوە و تەنەکە.

لەو چالاکیانەی کە لەوانەکەدایە، چەند ژمارەیەك لە بنەما بنەڕەتییەکان یان بەڵگەنەویستەکان لە ئەندازەدا فێردەبیت. ئەو بنەمایانە یەکتربڕینی شێوە ئەندازەییەکان و تەنەئەندازەکان دەگرێتەوە. ئەم بەڵگەنەویستانە ڕستەی ڕاستی شتەکانمان بۆ دڵنیادەکەن بەبێ سەلماندن.

چالاکی

دۆزینەوەی هەندێك بەڵگەنەویست لە بارەی توێژینەوەی نموونەیەك

Disconering Geometry Ideas in model

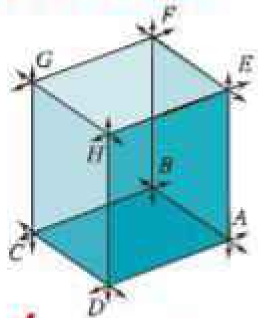
دەتوانیت بڕوانیتە وێنەی بەرامبەرت ئەمە نموونەیەکە بۆ ئەو شتانەی لە ژیانی ڕۆژانەمان دایە. وەك سندوق یان ژوور.هەر ڕستەیەك لەم ڕستانەی خوارەوە تەواوبکە بۆ ئەوەی بەڵگەنەویستەکەت دەستکەوێت.

1. سەرنجی نموونەکە بدە، دیاریبکە چۆن ڕاستەهێڵەکان یەکتری دەبڕن. یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ لە چی پێکدێت؟

بەڵگەنەویست

دوو ڕاستەهێڵی لەیەك ___؟___ یەکتردەبڕن.

خاڵی چاودێری ✓



ژمارەی ئەو ڕاستەهێڵانە چەندن کە لە هەر سەرێك لە سەرەکانی شێوەکە یەکتر دەبڕن؟ ئایا لەو بڕوایەدای کە ژمارەیەکی زیاتر هەیە بۆ ئەو ڕاستەهێڵانەی کە لە خاڵێکدا یەکتری دەبڕن، وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە بەبەکارهێنانی وێنەکە.

2. بەسەرەنجدانت لە نموونەکە جیایبکەرەوە، چۆن ڕووتەختەکان یەکتری دەبڕن یەکتربڕینی دوو ڕووتەخت لە چی پێکدێت.

بەڵگەنەویست

دوو ڕووتەخت لەیەك ___؟___ یەکتری دەبڕن.

خاڵی چاودێری ✓

لە نموونەکە ژمارەی ئەو ڕووتەختانە چەندن کە لە هەر ڕاستەهێڵێکدا یەکتریان بڕیوە؟ ئایا لەو ژمارەیە زۆرتر هەیە ؟

3. سەرنجی دوو خاڵی A و B بدە. چەند ڕاستەهێڵ بەهەردوو خاڵەکەدا دەڕوات؟ ئایا دەتوانیت بیر لە ڕاستەهێڵێکی تر بکەیتەوە کە بەودوو خاڵەدا بڕوات.

بەڵگەنەویست

تەنها یەك ___؟___ بە دوو خاڵی جیاوازدا دەڕوات؟

ئەو ڕاستە هێڵەی بە دوو خاڵی A ، B دەڕوات هێما دەکرێ بە هێمای $\overleftrightarrow{AB}$

خاڵی چاودێری ✓

↔

4. سەیری خاڵەکانی A و B و C بکە، ئایا لەڕێکی یەکترن؟ چەند ڕووتەخت بەهەرسێ خاڵەکەدا دەڕوات؟ ئایا دەتوانیت بیر لە ڕووتەختێکی تر بکەیتەوە بەو سێ خاڵەدا بڕوات؟

بەڵگەنەویست

تەنها یەك ______ بەسێ خاڵدا دەڕوات کەلەڕێکی یەکترنەبن. ئەو ڕووتەختەی بەخاڵەکانی A و B و C دا دەڕوات بەڕووتەختی ABC دەناسرێت.

خاڵی چاودێری ✓

ڕووتەختێك لە ڕووتەختەكانی نموونەی پێشوو هەڵبژێرە و دوو خاڵ لە خاڵەكانی هەڵبژێرە. ئەو ڕاستەهێڵە ناو بنێ كە بەو دوو خاڵەدا دەڕوات. ئایا ئەو ڕاستەهێڵە بەتەواوی دەكەوێتە ناو ڕووتەختەكەوە؟

بەڵگەنەویست

ئەو ڕاستەهێڵەی دوو خاڵی جیاواز لە ڕووتەختێكدا دەگەیەنێت دەكەوێتە ناو ____؟____

خاڵی چاودێری ✔

ڕاهێنـــــــــــــان

بەردەوامبوون لە بیركاریدا

1 جیاوازی چیە لە نێوان شێوە ئەندازەییەكان و شتەكان لە ژیانی ڕۆژانەدا؟

2 سەرنجی پۆلەكەت بدە. ئەو شتانە دیاریبكە كە خاڵ یان ڕاستەهێڵ یان ڕووتەخت دەنوێنێ.

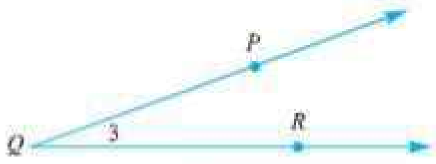
3 بۆچی خاڵێك بەس نیە بۆ دیاریكردن و ناونانی ڕاستەهێڵێك؟

4 بۆچی دوو خاڵ بەس نیە بۆ دیاریكردن و ناونانی ڕووتەختێك؟

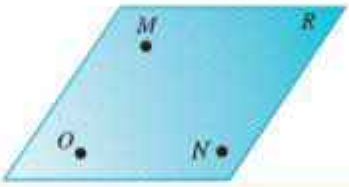
5 گرنگی ڕیزی خاڵەكان لەكاتی ناونانی تیشك چیە؟ ئەمە بە وێنە ڕوونبكەرەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو

6 ئەم شێوەیەی بەرامبەرت بەكاربهێنە بۆ ناولێنانی خاڵ و ڕاستەهێڵ و پارچە ڕاستەهێڵ و تیشك.



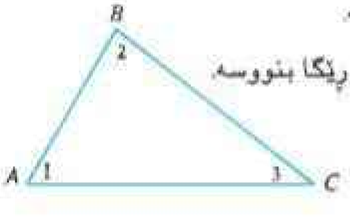
7 لە شێوەی بەرامبەرت 4 ناو بۆ گۆشەكە بنووسە.



8 لە شێوەی بەرامبەرت 3 ناو بۆ ئەم ڕووتەختە بنووسە.

ڕاهێنان و جێبەجێكردن

سێگۆشەكە بەكاربێنە بۆ شیكاری پرسیارەكانی 9 تا 12



9 هەموو پارچە ڕاستەهێڵەكانی سێگۆشەكە بنووسە.

10 هەموو گۆشەیەك لە گۆشەكانی سێگۆشەكە بەسێ ڕێگا بنووسە.

11 دوو تیشكی هەر گۆشەیەك لە گۆشەكانی سێگۆشەكە بنووسە.

12 ئەو ڕووتەختە بنووسە كە سێگۆشەكەی تێدایە.

جێبەجێکردن

ئارەزووەکان وێنەی ئەم حەوزە ماسییەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکانی 13 تا 17 . ئایا هەریەک لە لە پێکهێنەرەکانی حەوزەکە خاڵ یان ڕاستەهێڵ یان ڕووتەخت دەنوێنێت؟

13 لایەک لە لاکانی حەوزەکە

14 دەنکە لم

15 ڕوویەک لە ڕووەکانی حەوزەکە

16 ڕووی ئاوەکە

17 گۆشەیەک لە گۆشەکانی حەوزەکە

ئایا ئەم ڕستانەی خوارەوە لە هەرپرسیارێک لە پرسیارەکانی 18-25 ڕاستە یان هەڵەیە هۆیەکەی دیاریبکە.

18 ڕاستەهێڵ خاڵی سەری هەیە

19 ڕووتەخت سنووری هەیە

20 ئەگەر سێ ڕاستەهێڵ لە خاڵێکدا یەکتری ببڕن ئەوا دەکەونە یەک ڕووتەختەوە

21 دەکرێت دوو ڕووتەخت لەگەڵ ڕووتەختی سێیەم یەکتری ببڕن بەبێ ئەوەی خۆیان یەکتری ببڕن.

22 دەکرێت سێ ڕووتەخت لەیەک خاڵدا یەکتری ببڕن.

23 کام دوو خاڵ دەکەونە تەنها یەک ڕووتەخت.

24 کام سێ خاڵ دەکەونە تەنها یەک ڕووتەخت.

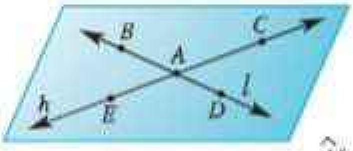
25 کام چوار خاڵ دەکەونە تەنها یەک ڕووتەخت.

ئەم شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 26 تا 30 .

26 ناوی ڕاستەهێڵێک لە شێوەکە بنووسە، 3 ناوی تر بۆ ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە.

27 خاڵێک لە سەر ڕاستەهێڵی l ناوبنێ

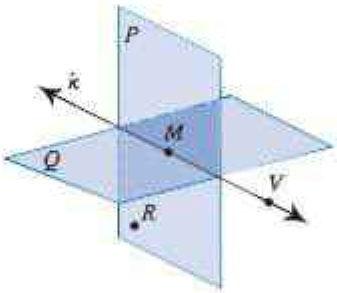
28 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ l و h ناوبنێ



29 گۆشەیەک لە شێوەکە ناوبنێ، سەری ئەو گۆشەیە و ئەو دوو تیشکەی پێکیهێناوە ناوبنێ.

30 ئایا دەتوانرێت یەکێك لە گۆشەکانی شێوەکە ناوبنرێ $\hat{A}$ هۆی وەڵامەکەت دیاریبکە؟

بڕوانە ئەم شێوەی بەرامبەرت بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 31 بۆ 33

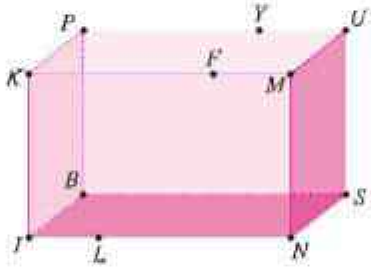


31 یەکتر بڕینی هەردوو ڕووتەختی P و Q ناوبنێ.

32 ڕاستەهێڵێك ناوبنێ کە بکەوێتە ناو ڕووتەختی Q

33 خاڵێك ناوبنێ کە بکەوێتە ناو ڕووتەختی P

ئەم شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 34 بۆ 37



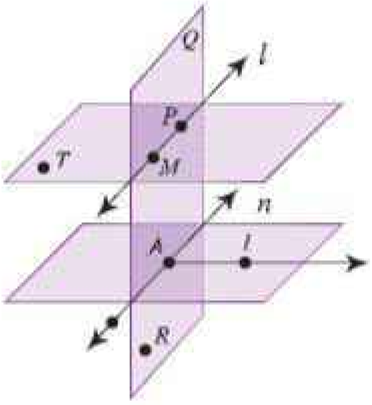
34 خاڵێك ناوبنێ لە سەر $\overline{KM}$

35 یەکتربڕینی $\overline{MU}$ ، $\overline{MN}$ ناوبنێ.

36 سێ خاڵ لە ڕێکی یەکتری بن ناوبنێ.

37 دوو پارچە ڕاستەهێڵ کە لەیەك ئاست بن ناوبنێ

بڕوانە شێوەی بەرامبەر بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 38 بۆ 40



38 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ n و AI ناوبنێ

39 یەکتربڕینی ڕووتەختی Q و ڕووتەختی MPT ناوبنێ.

40 سێ خاڵ ناوبنێ کە لە یەك ئاست بن.

ژمارەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵە جیاوازانەی کە دەتوانرێ ناوبنرێن لە هەریەك لەم شێوانەی خوارەوە چەندن؟ هەریەکیان ناوبنێ

41

42

43

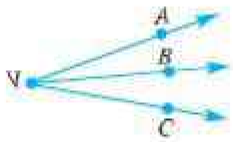
جەبر

44 ڕێسایەکی گشتی بنووسە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵانەی کە دەتوانرێ ناویان لێبنرێت بە زانینی ژمارەیەکی دیاری کراو n لە خاڵەکان کە دەکەونە سە ر یەك ڕاستەهێڵ. ڕوونیبکەوە چۆن ڕێساکەت دۆزییەوە

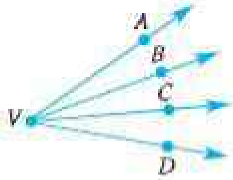
ژمارەی ئەو گۆشە تیژانەی کە دەتوانیت ناویان لێ بنێیت لە هەریەکێك لەم شێوانەی خوارەوە چەندن؟ناوەکانیان دیاریبکە.

45

46

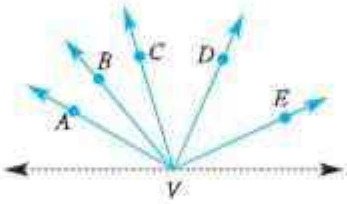


47



جەبر

48 ڕێسایەکی گشتی بنووسە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو گۆشانەی لە 180 بچووکترن کە دەتوانیت ناویان بهێنیت بە زانینی ژمارەیەکی دیاریکراو، n لەو تیشکانەی کە هەمان خاڵی دەست پێکردنیان هەیە ڕوونیبکەرەوە چۆن دۆزیتەوە. وای دابنێ کە هەموو تیشکەکان بکەونە دیوێکی ڕاستەهێڵەکەوە.هەروەك لەم شێوەیەی بەرامبەر ڕوونکراوەتەوە



ڕوانین بۆ دواوە

هاوکێشەیەك بە شێوەی لاری – یەکتربڕین بنووسە بۆ ڕاستە هێڵێك.

49 تەریب بێت بە ڕاستەهێڵی $y=\frac{3}{4}x-1$ و بەخاڵی $(-2, 5)$دابڕوات.

50 ئەستون بێت لەگەڵ ڕاستەهێڵی $2x-3y=1$ و بەخاڵی $(-4, 2)$دابڕوات.

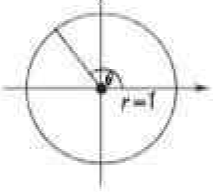
جیاکەرەوەی ئەم هاوکێشە دووجایانە هەژماربکە و ژمارەی ڕەگەکانی دیاریبکە پاشان ڕەگەکان هەژماربکە

51 $x^2-6x+12=0$ **52** $4x^2-4x+1=0$ **53** $x^2-6x+8=0$

ژمارەی ریزکردنەکان یان ژمارەی گونجێنەکان هەژماربکە

54 ${}_8P_3$ **55** ${}_9P_7$ **56** $\binom{10}{3}$ **57** $\binom{8}{4}$

ڕوانین بۆ پێشەوە



2π بریتیە لە چێوەی بازنەیەك کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی 1 یەکەیە لە ڕووتەختی پۆتاندا. دەتوانی درێژی ئەو کەوانەی کە چەقە گۆشەکەی θ دیاری کردووە بدۆزیتەوە بەم یاسایە. $l=\frac{\theta}{360}\times 2\pi$ ، و درێژی کەوانەکە بە l هێما دەکرێت.

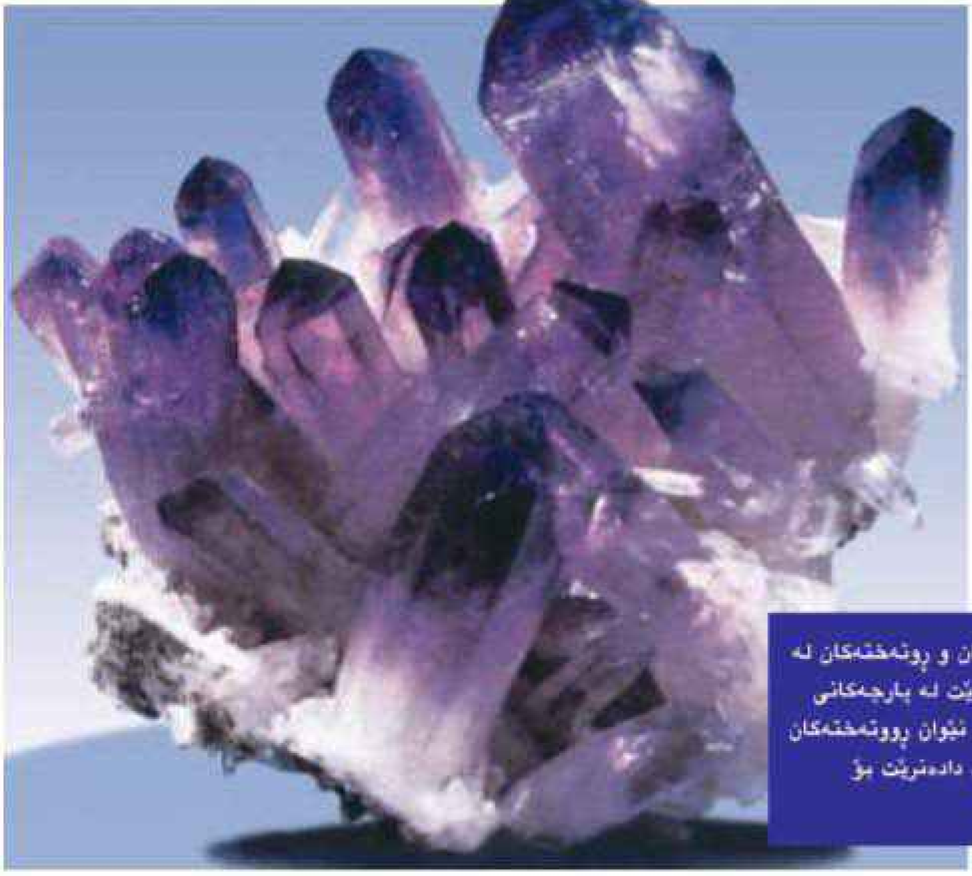
درێژی کەوانەکە هەژماربکە کە هەریەك لەم گۆشانە دیاریدەکات.

58 $\theta=180°$ **59** $\theta=90°$

60 $\theta=360°$ **61** $\theta=45°$

وانەی 2

ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشاییدا
Lines and Planes in Space



ئامانجەکان

- پەیوەندییەکانی نێوان خاڵەکان و ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشاییدا جیادەکاتەوە.
- گۆشەی دوو ڕووتەخت جیادەکاتەوە.

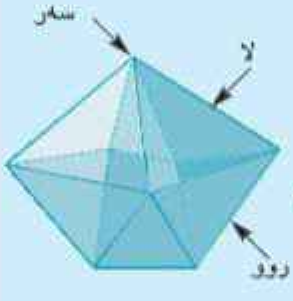
بۆچی؟

تێبینی تێکهەڵکێشی ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە زۆرشتدا دەکەیت هەروەک چۆن دەردەکەوێت لە پارچەکانی کریستاڵدا. هەستکردن بە پەیوەندییەکانی نێوان ڕووتەختەکان و ڕاستەهێڵەکان لە بۆشاییدا بە پێویست دادەنرێت بۆ تێگەیشتنی زۆر لە بنیاتەکانی سروشت.

تەنە ئەندازەییەکان Figures in Space

زۆر ڕووەکان **Polyhedron** تەنێکی داخراوە لەبۆشاییدا و لە ژمارەیەک ڕووی تەخت پێکدێت کە هەریەکەیان شێوەی چەندلایەک وەردەگرێ.

زۆر ڕووەکان Plolyhedron



زۆر ڕووەکان تەنێکی داخراون لە بۆشاییدا لە ژمارەیەک ڕووی تەخت پێکدێت هەریەکەیان شێوەی چەندلایەک وەردەگرن. ئەو چەند لایانە پێیان دەوترێت ڕووەکانی **Faces** تەنەکە. ئەم ڕووانە یەکتری دەبڕن لەچەند پارچە ڕاستەهێڵێک کە پێیان دەوترێت لاکانی زۆر ڕووەکە. سەرەکانی زۆر ڕووەکان بریتین لە سەرەکانی چەندلاکانی کە ڕووەکانیان **Vertices** پێکهێناوە.

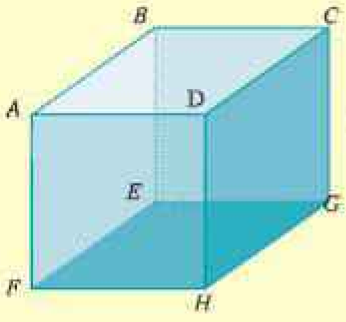
هەندێك ڕوو هەیە لەوانەی تر زۆرتر دەیان ناسی وەك خشتەك (شەشپاڵو)، شەشپاڵۆ تەنێکی بۆشایی گرە شەش ڕوو و 12 لا و 8 سەری هەیە. شەشپاڵوو کە بەسیفەتێکی گرنگ ناسراوە ئەوەش ئەوەیەکە هەموو ڕووەکانی چوارگۆشەی جووتن لەسەریەکتری و هەرسەرێك لە سەرەکانی خاڵی بەیەکگەیشتنی سێ ڕوویەتی و پێی دەوترێت زۆر ڕووی ڕێك **Regular Polyedron**. بەشێوەیەکی گشتی بەزۆر ڕوویەك دەوترێت ڕێك **Regular** ئەگەر هەموو ڕووەکانی چەندلای جووت بن، و هەر سەرێك لە سەرەکانی خاڵی بەیەك گەیشتنی هەمان ژمارەی ڕووەکان بێت.

ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشایی: ڕێگای هەنگاو بە هەنگاو
Lines and Planes in Space: A Step-by-Step Procedure

لەم چالاکییانەی خوارەوە لەمەودوا چەند بۆچوونێك دەدۆزیتەوە لە بارەی پەیوەندیەکانی نێوان ڕووتەختەکان و ڕاستەهێڵەکان لە بۆشاییدا و هەڵدەستێت بە برەوپێدانیان.

چالاکی 1

ڕاستەهێڵ و ڕووتەختە تەریبەکان لەبۆشاییدا
Plane and Parallel Lines in Space



بەشی یەکەم

1. شەشپاڵویەك بکێشە و سەرەکانی ناوبنێ هەروەك ڕوونکراوەتەوە لە شێوەی بەرامبەردا. ناوی لاکانی ستونی شەشپاڵووەکە بنووسە. ئایا وا دەردەکەوێت کە هەردوو ڕاستەهێڵی AE و CG، لەیەك ڕووتەختدابن؟وا دەردەکەون کە تەریبن بەیەکتری؟ ئایا لەو باوەڕەدایت کە ئەم دووڕاستەهێڵە بەیەکبگەن کاتێك درێژبکرێنەوە تاناکۆتا؟

2. کام لە لایەکانی شەشپاڵووەکە تەریبن بەیەکتری؟ ✓ خاڵی چاودێری

3. ئایا لێرەدا لا هەیە تەریب نەبێت لەگەڵ ئەوەی بەیەکتری ناگەن ئەگەر درێژیش بکرێنەوە بۆ ناکوتا؟ هۆیەکەی دیاریبکە. بەم ڕاستەهێڵانەی کە ئەم لایەنە دەنوێنن پێیان دەوترێت تەکولۆ **Skew** چوار جووت لەو ڕاستەهێڵە تەکولۆیانە دیاربکە لەوێنەکەدا

بەشی دووەم

1. ژمارەی ڕووەکانی شەشپالووەکە چەندن؟ کام لەم ڕووانە تەریبن بەیەکتری؟

2. پێناسەی تایبەتی خۆت بنووسەبۆ ڕووتەختە تەریبەکان.بەتەواوکردنی ئەم ڕستەیەی خوارەوە. ✓ خاڵی چاودێری

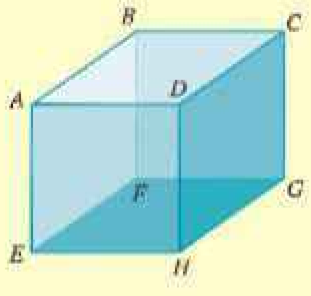
پێناسەی ڕووتەختە تەریبیەکان Parallel Planes

دوو ڕووتەخت تەریب دەبن تەنها ئەگەر ____؟

تێبینی دوو شێوەی ئەندازەیی تەریب دەبن، تەنها ئەگەر بکەونە دوو ڕووتەختی تەریب.

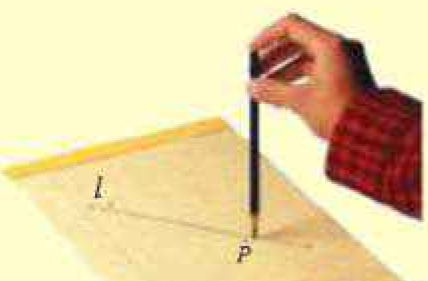
چالاکی 2

پارچە ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان Segments and Plane



بەشی یەکەم

1. هەر ڕاستەهێڵێك لایەك لە لاکانی شەشپالوی بەرامبەر دەنوێنێت ئەستون دەبێت لە سەر دوو ڕووی جیاوازی خشتەکەکە. لیستێك دروست بکە بەو ڕاستەهێڵانەی لاکانی خشتەکەکەیان پێکهێناوە لەگەڵ دیاریکردنی دوو ڕووی ئەستون لەگەڵ هەریەك لەو ڕاستەهێڵانە.



2. کە دەڵێین ڕاستەهێڵێك ئەستونە لەگەڵ ڕووتەختێك ئەمە مانای چی دەبەخشێت بۆتۆ؟ ڕاستە هێڵی l لەسەر کاغەزێك بکێشە و خاڵێکی وەك P ی لەسەر دیاربکە. قەڵەمەکە لەسەر ڕووتەختی کاغەزەکە بەستوونی ڕاگرە و سەرەکەی لە خاڵی P بێت. ئایا قەڵەمەکە لەسەر ڕاستەهێڵی l ئەستوون دەبێت.
3. ئایا دەتوانیت قەڵەمەکە لاربکەیتەوە بەمەرجێك هەر ئەستون بێت لەسەر ڕاستەهێڵی l بەبێ ئەوەی ئەستوون بێت لەسەر ڕووتەختی کاغەزەکە؟ وێنەیەك دروست بکە، ئەم وەلامەت ڕوونبکاتەوە.
4. وێنەی ڕاستەهێڵێکی تازە m بکێشە کە بە خاڵی P دا بڕوات. سەری قەڵەمەکە لەسەر خاڵی P دابنێ، بەمەرجێك قەڵەمەکە ئەستوون بێت لەگەڵ هەریەك لە دوو ڕاستەهێڵی l و m پەیوەندی نێوان قەڵەمەکەو ڕووتەختی کاغەزەکە چ جۆرە پەیوەندیەك دەبێت؟
5. ژمارەیەکی تر ڕاستەهێڵ بکێشە کە بەخاڵی P دابڕۆن. ئەگەر قەڵەمەکە ئەستون بێت لەسەر ڕووتەختی کاغەزەکە، ئایا ئەستون دەبێت لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵانەی کەلەخاڵی P کێشراون.
6. پێناسەی تایبەتی خۆت بنوسە بۆ ڕاستەهێڵی ئەستون لەسەر ڕوووتەخت بە تەواوکردنی ئەم ڕستەیەیی خوارەوە.

خاڵی چاودێری ✓

پێناسە

ڕاستەهێڵێك ئەستون دەبێت لەسەر ڕووتەختێك لە خاڵێك لە خاڵەکانیدا ئەگەرو تەنها ئەگەر ئەستون بێت لەسەر هەموو ئەو ڕاستەهێڵانەی دەکەونەوە ڕووتەختەکەوە و دەڕۆن بە ___؟___

بەشی دووەم

ڕاستەهێڵ تەریب دەبێت بەڕووتەختێك ئەگەر نەیبڕێت.

1. هەموو لایەك لە لاکانی شەشپاڵوویەك تەریبە بە دوو ڕوو لە ڕووەکانی شەشپاڵووەکە (سەیری پرسیاری ١ لە بەشی یەکەم بکە) لیستێك دروستبکە بەلاکانی شەشپاڵووەکە، دوو ڕووی تەریبی بەرامبەری هەر لایەك دیاریبکە.
2. ڕاستەهێڵی l لە سەر کاغەزێك بکێشە. قەڵەمەکەت بگرە بەمەرجێك بەرزتربێت لە ڕووتەختی کاغەزەکە و تەریب بێت بەڕاستەهێڵی l. ئایا قەڵەمەکە وا دیاردەبێت کە تەریب بێت بە ڕووتەختی کاغەزەکە؟
3. قەڵەمەکە بسوڕێنە بەمەرجێك هەرتەریب بێت بە ڕووتەختی کاغەزەکە و بێ ئەوەی تەریب بێت بە ڕاستەهێڵی l . ئایا لەو بڕوایە دایت کە لە توانات دا دەبێت ڕاستەهێڵێکی تر بکێشێت لە کاغەزەکەدا بەمەرجێك تەریب بێت بە قەڵەمەکە لەو بارەی تازەیدا؟
4. سیفەتێك لە سیفەتەکانی ڕاستەهێڵی تەریب بە ڕووتەختێك بنووسە بە تەواوکردنی ئەم ڕاستیەی خوارەوە.

خاڵی چاودێری ✓

پێناسە

ڕاستەهێڵێك تەریب دەبێت بەڕووتەختێك ئەکەوێتە ناویەوە ئەگەرو تەنها ئەگەر تەریب بێت بە ___؟___ بکەوێتە ناو ئەو ڕووتەختە.

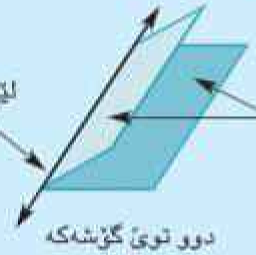
گۆشەی دوو ڕووتەخت Angles Formed by Planes

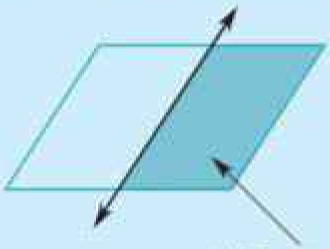
هەر ڕاستەهێڵێك بكەوێتە ڕووتەختێكەوە دابەشی دەكات بە دوو بەشەوە هەریەشێكیان پێی دەوترێت نیوە ڕووتەخت و بەو ڕاستەهێڵە دەوترێت لێواری نیوە ڕووتەختەكە.

دوو تویێ گۆشە Dihedral Angle

دوو تویێ گۆشە Dihedral Angle بریتییە لەو شێوە بۆشاییەی كە لە دوو نیوە ڕووتەخت پێكدێت كە هەمان لێواریان هەیە

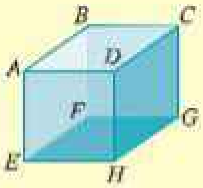
هەریەك لەو دوو نیوە ڕووتەختەكە پێی دەوترێت ڕووی **Face** گۆشەكە و بەلێوارە هاوبەشەكەی نێوانیان دەوترێت لێواری گۆشەكە **Edge of the Angle**.



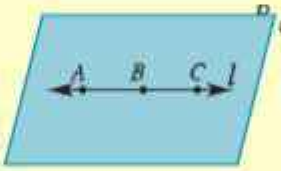


چالاكی 3

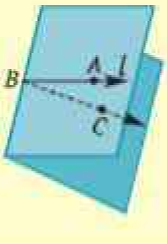
پێوانی دوو تویێ گۆشە Measure of a Dihedral Angle



1. هەندێك ڕووەكانی شەشپاڵوو دوو تویێ گۆشەی وەستاوێك دێنن (واتە ئەو دوو ڕووەی ئەستوونن لە سەر یەكتری). هەر ڕوویەك لە ڕووەكانی شەشپاڵووەكە ئەستون دەبێت لەگەڵ ژمارەیەك لە ڕووەكانی تر. ئەو ژمارەیە چەند دەبێت؟



2. ڕاستەهێڵێكی ئاسۆیی l لەسەر كاغەزێك بكێشە و لەسەر ئەو ڕاستەهێڵە سێ خاڵی A و B و C دیاریبكە بەمەرجێك خاڵی بكەوێتە نێوان هەردوو خاڵەكەی تر. كاغەزەكە بنوشتێنەوە بە مەرجێك هەردوو نیوەی ڕاستەهێڵی l كە سنوردراوە بەخاڵی B جووتبن، پەیوەندی چییە لەنێوان ڕاستەهێڵی نوشتێنراو و ڕاستەهێڵی l ؟

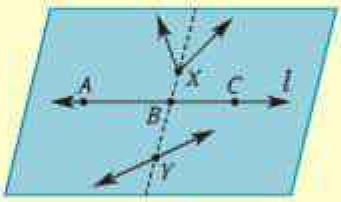


3. كاغەزەكە لەسەرخۆ بكەوە بۆ ئەوەی دوو تویێ گۆشەیەكت دەست بكەوێت پێوانەی گۆشەی ABC دادەنرێت بە پێوانەی دوو تویێ گۆشەكە.
4. پێناسەی تایبەتی خۆت بنووسە بۆ پێوانەی دوو تویێ گۆشە بە تەواوكردنی ئەم ڕستەیەی خوارەوە.

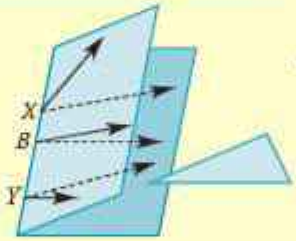
خاڵی چاودێری ✓

پێوانەی دوو تویێ گۆشە Measure of a Dihedral Angle

پێوانەی گۆشەیەكە سەرەكەی لەسەر لێواری دووتویێ گۆشەكە بێت و دوو لاكانی ____؟ لەگەڵ ئەو لێوارە، و هەریەكێكیان بكەونە ڕوویەك لە دوو ڕووی دوو تویێ گۆشەكەوە.



5. کاغەزەکە بکەوە و ڕایبخە. ڕاستەهێڵێکی نوشتێنراوە بکێشە و دوو خاڵی X و Y لەسەر دیاریکە. لە و دوو خاڵەوە دوو تیشك بکێشە کە هەریەکیان بکەونە لایەکی ڕاستەهێڵە نوشتاوەکەوە هەروەك لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکراوەتەوە



خاڵی چاودێری ✓

6. کاغەزەکە جارێکی تر بنوشتێنەوە. لە دوایدا پارچە کاغەزەکە بەوردی ببڕە کە بتوانیت بیخەیتە ناو هەموو گۆشە جیاوازەکان کە دروست بووە لە ئەنجامی تیشکە کێشراوەکان. شێوەکانی پارچە کاغەزەکانی دەستت کەوتووە بەراوردبکە. ئایا پێوانەی ئەو گۆشانەی دروستبووە لەئەنجامی کێشانی تیشکەکان یەکسانن بە پێوانەی ABC یان جیاوازە لێی؟

7. ئەو سێ گۆشەیەی لە پرسیاری 6 دەستتکەوتووە پێوانەبکە و پێوانەکانیان بەراوردبکە، کام گۆشەیان بچووکترە ؟ کام گۆشەیان گەورەترە؟ ئەو ئەنجامانە بەکاربهێنە بۆ ئەوەی ڕوونیبکەیتەوە بۆچی دوو توێ گۆشە دەپێورێ بە پێوانی ئەو گۆشەیەی دوو لاکەی ئەستوونن لەسەر لێواری دوو گۆشەکە.

تێبینی : 1. پێوانەی دوو توێ گۆشە یەکسانە بە پێوانەی ڕووە گۆشەکەی

2. ڕووە گۆشە بۆ دوو توێ گۆشە ئەو گۆشەیە کەدوو لایەکانی ئەستوونن لەگەڵ لێواری دوو توێ گۆشەکەو هەریەکێکیان دەکەونە ڕوویەك لە دوو ڕووەکەیەوە.

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 لە بۆشاییدا ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون بن لەسەر ڕاستەهێڵی سێیەم. ئایا ئەو دوو ڕاستەهێڵە بەیەکتر تەریب دەبن؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

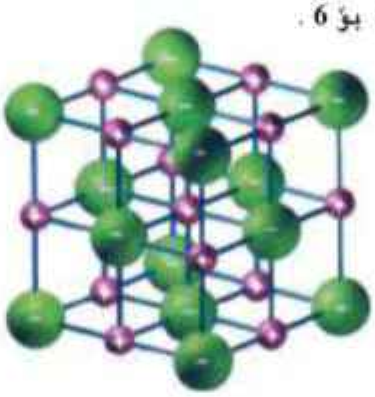
2 ئەگەر ڕاستەهێڵێك بکەوێتە ڕووتەختێك و ئەستون بێت لەسەر ڕاستەهێڵێکی تر کە نەکەوێتە ڕووتەختەکەوە، ئایا ڕاستەهێڵی دووەم ئەستون دەبێت لەسەر ڕووتەختەکە؟ هۆی وەڵامەکەت بنووسە.

3 ئەگەر ڕاستەهێڵێك ئەستوون بێت لە سەر دوو ڕاستەهێڵی یەکتربڕی ناو ڕووتەختێکەوە ئایا ئەستون دەبێت لە سەر ڕووتەختەکەیان؟ هۆی وەڵامەکەت دیاریکە

جێبەجێکردنەکان

کیمیا

ئەو شێوەیەی بەرامبەر پێکهاتەی سێجایی نموونەی کریستاڵی کلۆریدی سۆدیۆم ڕووندەکاتەوە. خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەو پارچە ڕاستەهێڵانەی کە دەیبینیت ناویان لێبنێ و بەکاریان بهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 4 بۆ 6 .



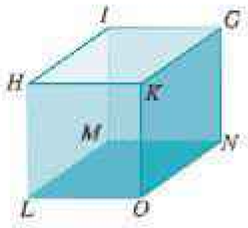
4 دوو پارچە ڕاستەهێڵی تەریب بەیەکتر دیاریکە. و هۆی تەریب بوونەکەیان ڕوونبکەوە.

5 دوو ڕووتەختی تەریب بەیەکتر دیاریکە. هۆی تەریب بونەکەیان ڕوونبکەرەوە.

6 دوو ڕووتەختی ئەستوون دیاریکە، هۆی ئەستوون بوونەکەیان ڕوونبکەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

وێنەی ئەم خشتەکەی بەرامبەرت بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 7 تا 11



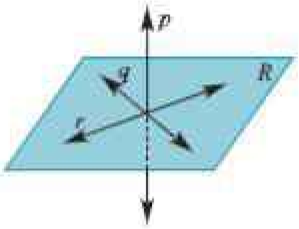
7 دوو جووت لە لاتەریبەکان دیاریکە

8 دوو جووت لە لا تەکولۆکان دیاریکە

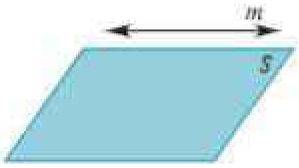
9 دوو جووت لە ڕووە تەریبەکان دیاریکە

10 دوولا دەستنیشانبکە و ئەو ڕووتەختانە دیاریبکە کە ئەستونن لەسەر هەر یەکێکیان.

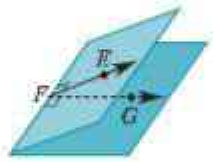
11 دوو جووت لەلاتەریبەکان دیاریکە کە ناکەونە ناو یەک ڕەوە.



12 ڕاستەهێڵی p لە وێنەی بەرامبەر ئەستونە لەسەر ڕووتەختی R پەیوندی نێوان ڕاستەهێڵی p و ڕاستەهێڵی q و هەروەها نێوان ڕاستەهێڵی p و ڕاستەهێڵی r چییە؟

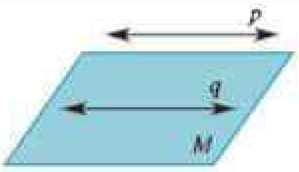


13 لە وێنەی بەرامبەر ڕاستەهێڵی m تەریبە بە ڕووتەختی S، پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵی l و ئەو ڕاستەهێڵەی دەکەوێتە ڕووتەختی S و چییە؟

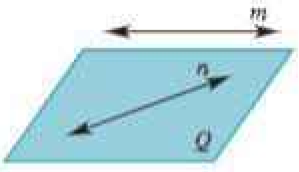


14 لە وێنەی بەرامبەردا پێوانەی دوو توێ گۆشەکە چەندە؟

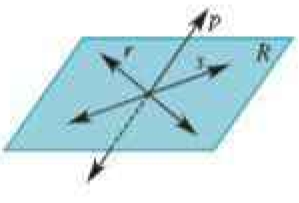
ڕاهێنان و جێبەجێکردن



15 لە وێنەی بەرامبەردا ڕاستەهێڵی p تەریبە بەڕاستەهێڵی q پەیوەندی چییە لە نێوان ڕاستەهێڵی p و ڕووتەختی M



16 لە وێنەی بەرامبەر ڕاستەهێڵی m تەریب نییە بە ڕاستەهێڵی n. چی دەڵێیت بە پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵی m و ڕووتەختی Q ؟ ڕوونبیکەوە.



17 لە وێنەی بەرامبەردا ڕاستەهێڵی p ئەستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی r و ئەستوون نیە لەسەر ڕاستەهێڵی s چی دەڵێیت بە پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵی p و ڕووتەختی R ؟

ئایا ئەم ڕستانە لە هەر پرسیارێك لە پرسیارەکانی 18–22 ڕاستن یا هەڵەن؟ بۆچوونەکانت بە وێنە ڕوونبکەرەوە.

18 ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ تەریب بن بە ڕاستەهێڵی سێیەم ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

19 ئەگەر دوو ڕووتەخت تەریب بن بە ڕووتەختی سێیەم ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

20 ئەگەر دوو ڕووتەخت ئەستون بن لەگەڵ ڕووتەختی سێیەم ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

21 ئەگەر دوو ڕووتەخت ئەستون بن لەگەڵ ڕاستەهێڵێك ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

22 ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستون بن لەگەڵ ڕووتەختێك ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

ئەو نموونەیەی کە دروستی دەکەیت بە پێی ڕێنمایەکان لە پرسیاری 23 بەکاریبهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 24 تا 26 .

23 پارچە کارتۆنێکی لاکێشەیی بنوشتێنەوە، لەسەر یەکێك لە دوو بەشەکەی، دوو ڕاستەهێڵی AB و CD بکێشە بە مەرجێك AB ئەستون بێت لەسەر هێڵە نوشتاوەکە، ڕاستەهێڵی CD ئەستون نەبێت لەسەر هێڵە نوشتاوەکە پارچەیەك ببڕە بە پێی دوو ڕاستەهێڵەکە و دەستپێبکە لە هێڵی نوشتانەوەکە. ئەو دوو پارچە بڕاوەی کە دروستت کردن بخەرە ناوەوە بۆ دروست کردنی نموونەیەك.

24 لە دوو پارچە بڕاوەکە کامەیان ئەستون نییە لە سەر هێڵی نوشتێنراوە؟

25 لە دوو پارچە بڕاوەکەی خراوتە نێوانەکەوە کامەیان دەتوانرێ بەکاربهێنرێت بۆ پێوانی دوو توێ گۆشەکە؟

26 کام لە دوو توێ گۆشەکە کە سنووردراوە بە دووپارچەکانی دانراو گەورەترین پێوانەی هەیە؟

ڕوانین بۆ دواوە

پرگاڵ و ڕاستە بەکاربهێنە بۆ کێشانی وێنەکان لە پرسیارەکانی 27 بۆ 30 .

27 گۆشەی ABC بکێشە و لە دواییدا کۆپیەکی وەك خۆی دروستبکە.

28 پارچە ڕاستەهێڵێك بکێشە و لە دواییدا تەوەرەکەی دروستبکە.

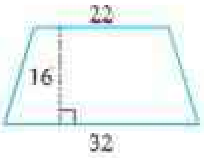
29 ڕاستەهێڵی FG و خاڵی H کە دەکەوێتە دەرەوەی بکێشە. ئەو ڕاستەهێڵە دروستبکە کە بەخاڵی H دادەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵی FG .

30 سێگۆشەیەك بکێشە لە دواییدا کۆپیەکی وەك خۆی دروستبکە.

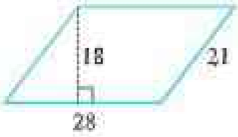
ڕووبەری ئەم چەندلایانە هەژماربکە:

31 چوارگۆشە

32 نیمچە لاتەریب



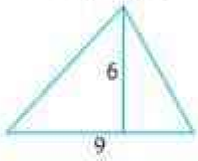
33 لاتەریب



34 سێگۆشەی وەستاو

35 سێگۆشەی ڕێك (لا یەکسان)

36 سێگۆشەی جیالا

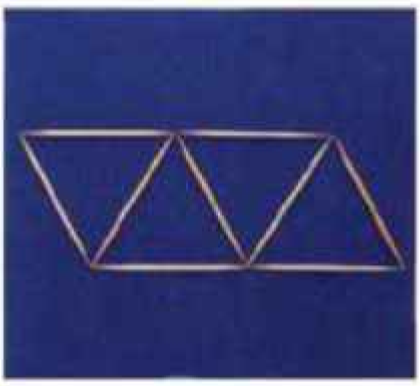


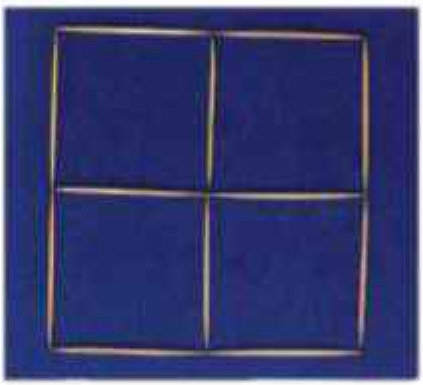
ڕوانین بۆ پێشەوە

بەرەنگاری

37 تەنها دوو دەنکە شقارتە بجوڵێنە لەم وێنەیەی خوارەوە بۆ ئەوەی وێنەیەکت دەستکەوێت تەنها سێ سێگۆشەی تێدابێت.

38 تەنها سێ دەنکە شقارتە بجوڵێنە لەم وێنەیەی خوارەوە بۆ ئەوەی وێنەیەکت دەستدەکەوێت تەنها سێ سێگۆشەی تێدابێت.





وانەی 3

وێنە بینراوەکان Perspective Drawing

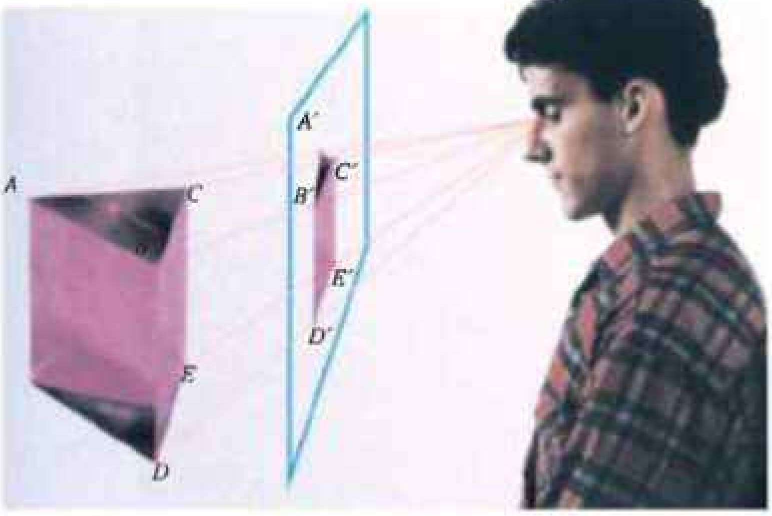
ئامانجەکان

- چەمکە بنەڕەتییەکانی وێنە بینراوەکان دەناسێت.
- ئەو چەمکانە بۆ کێشانی وێنە بینراوەکان بەکاردەهێنێت.

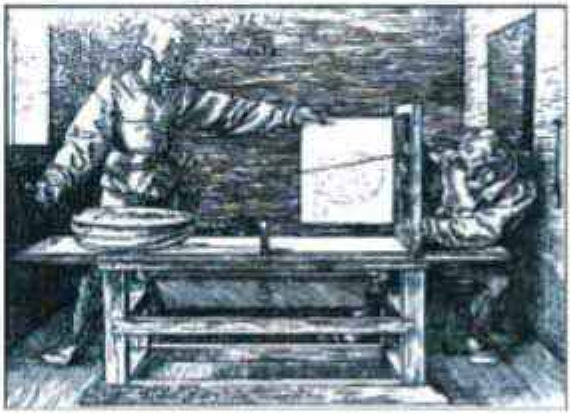
هونەرمەندە ئەوروپییەکان لە چەرخی سەرهەڵدان، لە نێوان هەردوو سەدەی چواردە و شازدەی زاینی گەڕانەوە بۆ دواوە و دۆزیانەوە چۆن هەستێکی قوڵ لە وێنەکان و تابلۆ هونەریەکان پەیدابکەن. بە دەستپێکردن لەکارە هونەریە کلاسیکیەکانی یۆنان و ڕۆمان .دەتوانیت تێبینی ئەوە بکەیت چۆن کارەکانی پێشوو لەسەردەمی ڕاپەڕین دەردەکەوێت (لە وێنەی لای ڕاست) بەبەراوردکردن لەگەڵ تابلۆکانی ئەم سەردەمە(لە وێنەکەی لای چەپ).

وێنەی بینراو: پەنجەرەیەك لەسەر ژیانی ڕۆژانە Windows to Reality

ڕێگاکانی وێنە بینراوەکانی نوێ لە سەردەستی تەلارسازی ئیتاڵی فلیپ برنولیتشی دۆزرایەوە (1377-1466م) .ئەم ڕێگایانە پشت دەبەستن بە بیرۆکەیەکی بنەڕەتی ئەویش بریتییە لەوەی کە وێنە وەك پەنجەرە وایە. ئەو هونەرمەندەی هەوڵدەدات تابلۆیەك بکێشێت یان ئەو کەسەی سەیری تابلۆیەکی هونەری ئامادەکراو دەکات، لە ڕێگای وێنەکە شتە ڕاستەقینەکان ببینێت کە تابلۆکە دەینوێنێت. کاتێك کەسێك دەڕوانێتە شتێك هێڵەکانی بینینی خەیاڵی دادەنێت، کە چاو و هەموو خاڵە جیاوازەکانی ئەو شتەی پێکهێناوە بەیەکەوە دەبەستێت. وادابنێ لێرەدا ڕووتەختێك هەیە (شووشە) بکەوێتە نێوان چاوی بینەرو ئەو شتەی سەیری دەکات. هەموو هێڵەکانی ڕوانینی ئەم ڕووتەختە بریتییە لەو خاڵانەی کە وێنەی شتەکە پێکدێنێت. وا دەردەکەوێت هەر وەکو جێکەوتەکەی بێت لەسەر ڕووتەختەکە، بۆیە دەتوانین بڵێین وێنەی شتێك بریتیە لە جێکەوتەکەی لە سەر ڕووتەختی وێنەکە **Picture Plane**



پەنجەرەی ڕووتەختی وێنەکە جێکەوتی ئەوەی دەیبینێت لە خۆدەگرێت



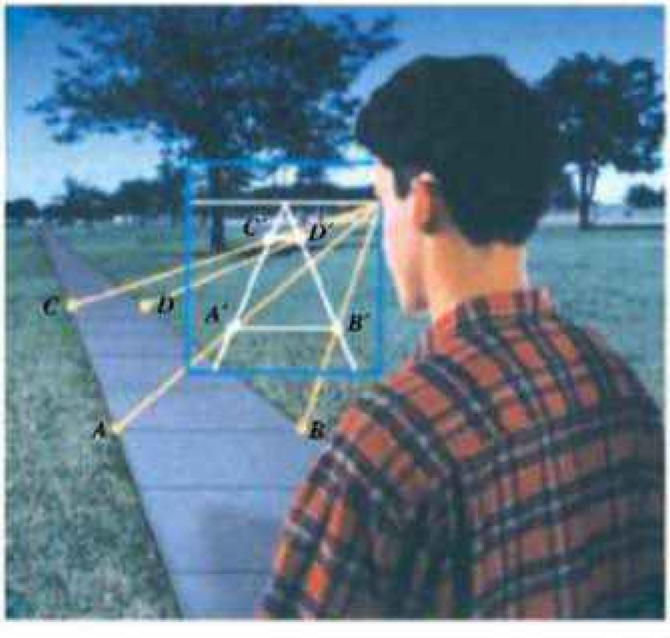
هونەرمەندی ئەڵمانی ئەلبەرت دو
سەردانی ئیتاڵیای کرد بۆ فێربوونی
تەکنیکی وێنە بینراوەکان لەدواییدا
وێنەی کۆمەڵێك کاری هونەری کێشا
کە هونەرمەندەکان ئەم جۆرە
تەکنیکەیان تێدا بەکارهێناوە هەروەك
لەم تابلۆیەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.

خاڵی چاودێری ✓ سەیری تابلۆکەی (دورر) لەسەرەوە بکە و باسیبکە چۆن هونەرمەند ئەو تەکنیکەی بەکارهێناوە بۆ ڕوونکردنەوەی جێکەوتی شتێك لەسەر ڕووتەختی وێنەکە.

هێڵە تەریبیەکان و خاڵی پوکانەوە Parallel Lines and Vanishing Points

ئایا سەرنجت داوە کە دوولای هێڵی ئاسن یان دوولای ڕێگایەکی درێژی ڕاست وا دەردەکەون کە لە دوور بەیەکتری دەگەن؟ ئەو خاڵەی کەوا دەردەکەوێت ئەو هێڵانەی تێدا بەیەك دەگەن هەمیشە لە ئاسۆدا دەبن پێی دەوترێت خاڵی پوکانەوە لە وێنە بینراوەکاندا

بۆ هەردوو پارچە ڕاستەهێڵی AB، CD هەروەك دەردەکەون لە وێنەکەی خوارەوەدا لە ڕاستیدا یەك درێژیان هەیە کاتێك بینەر ئەمانە دەخاتە سەر ڕووتەختی وێنەیەك شێوەی $\overline{AB}$ وا دەردەکەوێت درێژترە لە شێوەی $\overline{CD}$.

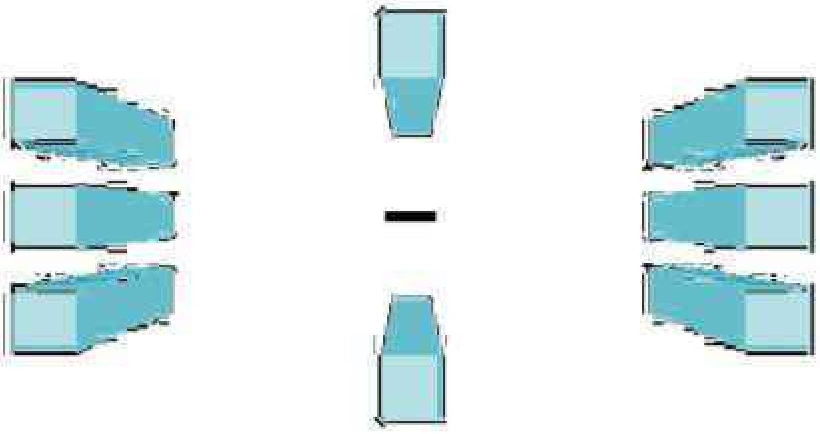


ڕێساکانی وێنە بینراوەکان Principles of Perspective Drawing

ئەم دوو ڕێسایەی لەم وانەدا دێت دەبێتە بنچینە بۆ تێگەیشتنی چەمکەکانی وێنە بینراوەکان. دەتوانرێت ڕاستی ئەم دوو ڕێسایە بسەلمێنین بە خوێندنی ئەو ڕێگایەی کە بە هۆیەوە جێکەوتی هێڵە تەریبەکان لە سەر ڕووتەختی وێنەکە لە وێنە بینراوەکە دەهێنرێتەدی.

ڕێسای 1 : کۆمەڵەکانی هێڵە تەریبیەکان Principle 1: Sets of Parallel Lines

لەوێنەی بینراودا هەموو ڕاستەهێڵە تەریبیەکان، ئەوانەی تەریب نین بە ڕووتەختی وێنەکە، لە یەک خاڵدا بەیەک دەگەن کە پێی دەوترێت خاڵی پوکانەوە.



خاڵی چاودێری ✓ ئایا لەوباوەڕەدای کە ئەو خاڵەی وا دەردەکەوێت کە هەموو ڕاستەهێڵە تەریبەکان لەوێدا بەیەکدەگەن پێویستە لە وێنەکەدا بێت؟ وێنەیەک بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی ئەوە.

ڕێسای 2 : هێڵەکانی تەریب بە زەوی Principle 2: Lines Parallel to the Ground

لە وێنەی بینراودا، هەر ڕاستەهێڵێك بکەوێتە ڕووتەختی زەوی و تەریب نەبێت بە ڕووتەختی وێنەکە، بە هێڵی ئاسۆ دەگات لە خاڵێکدا. هەر ڕاستەهێڵێك تەریب بێت پێی لە هەمان خاڵدا بە هێڵی ئاسۆ دەگات.

خاڵی چاودێری ✓ ڕاستەهێڵە تەریبەکان ئەوانەی تەریبن بە ڕووتەختی وێنەکە لە وێنەی بینراودا، هەمیشە دەکێشرێن بە بێ خاڵی پوکانەوە. لە زۆر باردا دوورکەوتنەوە لەوە کێشە دروست دەکات. ئایا دەتوانیت باسی چەند بارێك بکەیت کە ئەم تەکنیکە وێنەیەکی ڕاستەقینەمان ناداتێ؟

خاڵی چاودێری ✓

دەتوانرێ بیرۆکەی خاڵی پوکانەوە لە وێنەی بینراودا پەیڕەو بکرێت هەرچەند ئەو ڕاستەهێڵە تەریبە دەرکەوتووەکان لە وێنەکەشدا دەرنەکەون. لە ڕیزکردنی سێڵە وەرگرەکان (الصحون اللاقطة)کە لەخوارەوە ڕوونکراوەتەوە ڕاستەهێڵە خەیاڵییەکان بەو خاڵانەدا دەڕۆن کە کەوتونەتە سەرو بنی سێڵەکان. ئەو ڕاستەهێڵانە لە ئاسۆدا بەیەک دەگەن.هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

ئەندازەی تەلارسازی لە بیرۆکەی وێنە بینراوەکان سوودی زۆری بینیوە و بابەتە سەرەتاییەکانی لێ پێکهێناوە. خانووەکان و تەلارەکان جوانترین نموونەن بۆ بڕەوپێدانی بیرۆکەی وێنە بینراوەکان لە بەر ئەوەی زۆر ڕاستەهێڵی تەریبی تێدایە کە لە ناوخۆیاندا تەریبن بەیەکتری و تەریبن بە زەوی.

ڕاهێنــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 مانای خاڵی پوکانەوە لە وێنەی بینراودا چی دەگەیێنێت؟

2 ئەو ڕاستەهێڵەی بکەوێتە ڕووتەختی زەوی و تەریب نەبێت بە ڕووتەختی وێنەکە، بۆچی لە ئاسۆدا کۆتایی دێت. وێنەیەک بکێشە وەڵامەکەت ڕوونبکاتەوە.

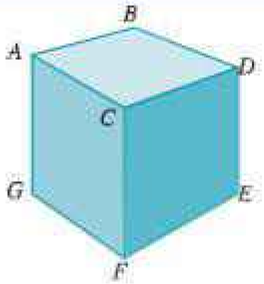
3 وێنەکانی تەلارەکان و خانووەکان بۆچی بە جوانترین نموونە دادەنرێن بۆ پەیڕەوکردنی چەمکی وێنەی بینراو؟ وێنەیەک دروستبکە بۆ ڕوونکردنەوەی وەڵامەکەت

4 ئاسۆ لە وێنەی بینراودا بە ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی دەنوێنرێ کە لە ئاستی چاودا بێت، ئەم گریمانە بە بۆچوونی تۆ بۆ وا دانراوە؟

خاڵی چاودێری ✓

5 ئەو دوو وورچەی لە وێنەکەدا دەرکەوتوون هەمان درێژیان هەیە بەڵام یەکێکیان درێژتر دەردەکەوێت لەوی تریان هۆیەکەی دیاریکە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو



6 وێنەی بەرامبەر وێنەیەکی بینراوە بۆ شەشپاڵویەك دەربارەی ئەو ڕاستەهێڵانە AB، CD، EF چی دەڵێیت؟ و بەڕاستەهێڵەکانی AC، BD، GF دەڵێین چی؟

7 ڕاستەهێڵە ستوونییەکان لە وێنەی شەشپاڵوەکەی بەرامبەردا لە خاڵی پۆکانەوە بەیەکناگەن. هۆیەکەی دیاریبکە بە بەکارهێنانی ڕێسابینراوەکان.

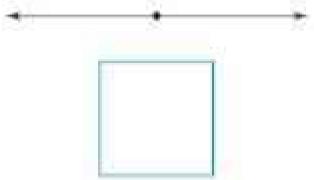
8 وادابنێ وێنەی شەشپاڵوەکەی پێشوو خانوویەك بنوێنی لەسەر ڕووتەختی زەوی ئەو ڕاستەهێڵانەی کە لێوارە ناستوونیەکانی خانوەکە دەنوێنن لە کوێ بەیەکدەگەن.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

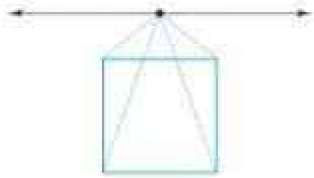
ئەم پرسیارانەی لەخوارەوە هاتوون ئەو هەنگاوانەی پێویستە بەکاربێت بۆ تەواوکردنی نموونە جۆراوجۆرەکان لەوێنەی بینراو ڕووندەکاتەوە.

9 ئەو وێنە بینراوەی کە یەك خاڵی پوکانەوەی هەبێت پێی دەوترێت وێنەیەك کە یەك پوکانەوەی هەیە.

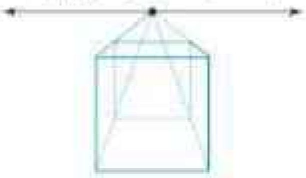
أ چوارگۆشەیەك بکێشە لە دوایدا ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی بکێشە ئاسۆ بنوێنێت. خاڵی پوکانەوەی لەسەر دیاریبکە.



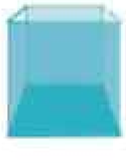
ب ڕاستەهێڵێکی خاڵدار و باریك بکێشە لە نێوان هەر سەرێك لەسەرەکانی چوارگۆشەکە و خاڵی پوکانەوە.



ج چوارگۆشەیەکی خاڵدار بچووکتر لە چوارگۆشەی یەکەم بکێشە سەرەکانی بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵەکان کە کێشاوتن لە (ب)وە.



د لە وێنەکەدا هەموو ئەوانەی دەکەونە پشت چوارگۆشە بچوکەکە لاببە، ڕاستەهێڵەکانی خاڵدار کە لە وێنەکەدا دەمێنێتەوە ئاماژە دەکەن بۆ ئەو لێوارانەی کە نابینرێن .

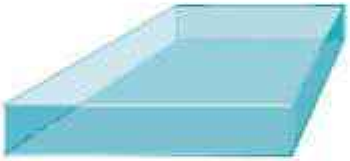


10 هەنگاوەکانی پرسیاری 9 دووبارە بکەرەوە لەگەڵ دانانی خاڵی پوکانەوە بۆ لای چەپی یان لای ڕاستی چوارگۆشەکە.

11 هەنگاوەکانی پرسیاری 9 دووبارە بکەرەوە لەگەڵ دانانی هێڵی ئاسۆ و خاڵی پوکانەوە لە ژێر چوارگۆشەکەدا

12 چی ڕوودەدات ئەگەر خاڵی پوکانەوە لە ناو چوارگۆشەکە یان لە سەر یەکێك لەلاکانی بێت

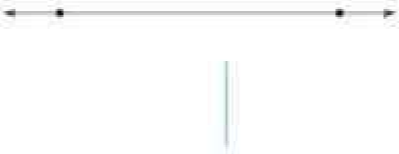
ئەم وێنەی خوارەوە دروست بکە لە سەر کاغەزێك بۆ شیکارکردنی هەردوو پرسیاری 13 ، 14 .



13 خاڵی پوکانەوە لە وێنەکەدا دیاریبکە.

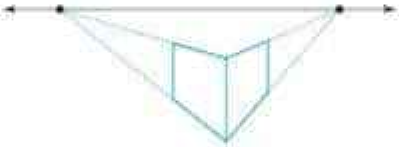
14 هێڵی ئاسۆ بکێشە

15 ئەو وێنە بینراوەی کە دوو خاڵی پوکانەوەی هەیە پێیدەوترێت وێنەیەك بە دووخاڵی پوکانەوە.

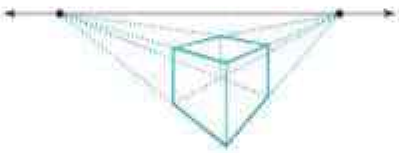


أ پارچە ڕاستەهێڵێکی ستونی بکێشە کە لای پێشەوەی شەشپاڵویەك بنوێنێ. هێڵێکی ئاسۆیی لەسەر ئەو پارچەیە بکێشە و دوو خاڵی پوکانەوە بکەونە هەردوو لای پارچە ڕاستەهێڵەکەوە هەڵبژێرە، هەروەك چۆن لە وێنەی بەرامبەردا ڕوونکراوەتەوە

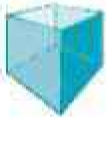
ب ڕاستەهێڵەکانی خاڵدار و باریك کە هەردوو لای پارچە ستونەکە لەگەڵ هەردوو خاڵی پوکانەوە دەگەیەنێت بکێشە هەروەك لەم وێنەدا ڕوونکراوەتەوە.



ج پارچە ڕاستەهێڵە ستونیەکان کە لایەکانی ڕووەکانی پێشەوەی شەشپاڵوەکە پێکدێنن بکێشە.



د پارچە ڕاستەهێڵێکی باریك و خاڵدار بکێشە کە لاکانی پارچەکانی کە وێنەت کێشاوە لە ج دا لەلەگەڵ هەردوو خاڵی پوکانەوە دەگەیەنێت . پارچەیەکی ستونی خاڵدار بکێشە کە هەردوو خاڵی بەیەك گەیشتنی ڕاستەهێڵەکانی وێنەی بینراو کۆ دەکاتەوە



هـ هەموو ئەوشتانەی کەوتونەتە دەرەوەی لێوارەکانی شەشپاڵوەکە لاببە پارچە ڕاستەهێڵەکانی خاڵدار بەکاربهێنە بۆ لایە نەبینراوەکانی شەشپاڵوەکە.

16 هەنگاوەکانی پرسیاری 15 دووبارە بکەوە لەگەڵ دانانی هێڵی ئاسۆ، و دوو خاڵی پوکانەوە لە ژێر پارچە ستونیەکەدا.

17 هەنگاوەکانی پرسیاری 15 دووبارە بکەرەوە لەگەڵ دانانی هێڵی ئاسۆ، بەرێگایەك کە لەگەڵ پارچە ڕاستەهێڵە ستونیەکە بەیەکبگەن.

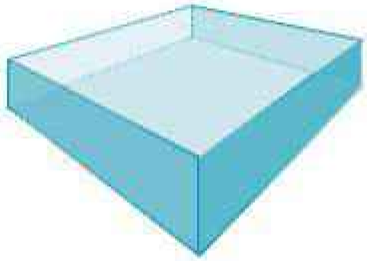
18 چی ڕوودەدات کە وێنەیەك دوو خاڵی پوکانەوەی هەبێت ئەگەر ئەو دوو خاڵە نزیککەوتنەوە؟ ئەگەر دورکەوتنەوە؟

19 چی ڕوودەدات لە وێنەیەك کە دوو خاڵی پوکانەوەی هەبێت کاتێك ئەو دوو خاڵە لە هەمان ڕووی پارچە ڕاستەهێڵە ستورنیەکەبن.

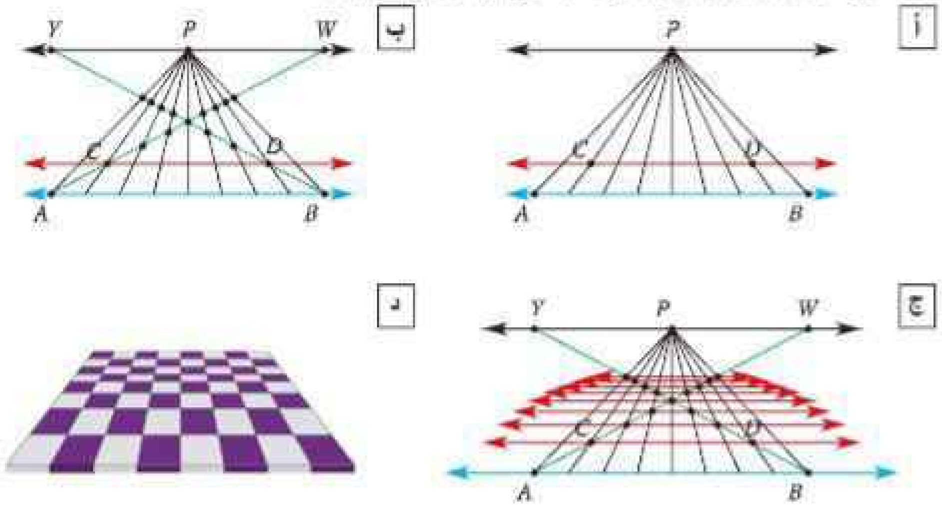
ئەم وێنەی خوارەوە لە سەر کاغەزێك بکێشە بۆ شیکاری هەردوو پرسیاری 20، 21 .

20 دوو خاڵی پوکانەوە لەم وێنەدا دیاریبکە.

21 هێڵی ئاسۆ بکێشە



ئەخشە ڕێژکردن و ئەخشاندنی نیگاری کارێکی سەرنج ڕاکێشن بۆ هونەرمەندان و وێنەکێشان ئەوانەی دەستیان کردوە بە خوێندنی وێنە بینراوەکان. ئەم وێنانەی خوارەوە بە تەکنیکێکی دیاریکراو بۆ دەستکەوتنی شێوەی ئەخشەڕێژی ڕیزکراو لە کرداری وێنەی بینراو دەنوێنێ. لەم وێنانەی خوارەوە وردبەرەوە بۆ شیکاری پرسیاری 22 بۆ 23 .



22 دەتوانیت هەردوو تیرەی $\overleftrightarrow{AW}$ ، $\overleftrightarrow{BY}$ بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوە ئەو ڕاستەهێڵانەی تەریبن بە ڕاستەهێڵی AB چۆن ئەو دوو تیرەیە بەکاردەهێنیت بۆ دیاریکردنی ئەو ڕاستەهێڵانە؟

23 چۆن دەتوانرێ شێوەی ئەخشەڕێژی ببینیت لە گۆشەیەك لە گۆشەکانەوە بەبەکارهێنانی دوو خاڵی پوکانەوە؟ چۆن ڕاستەهێڵەکانی یەکتربڕ دیاری دەکەیت؟

24 تواندنی تایبەتی خۆت دروستبکە کاتێ یەك خاڵی پوکانەوە یان دوو خاڵی پوکانەوە بەکاربهێنیت بۆ ئەخشەڕێژی چوارگۆشەکە.

ڕوانین بۆ دواوە

لەهەریەك لەم پرسیارانەی خوارەوە ئایا دوو ڕاستەهێڵەکە تەریبن یان ئەستونن لەسەر یەکتری یان چ جۆریکی ترن.

25 $y = 3x + 5$
$y = 3x - 7$

26 $y = x + 2$
$y = 2 - x$

27 $y = 2x - 1$
$y = -2x + 4$

28 $2x + 3y = 6$
$3x - 2y = 6$

29 $ABCD$ لاکێشەیەکە $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ دووتیرەکەیەتی، بسەلمێنە کە دوو سێگۆشەی ACD و BCD جووتن.

وانەی 4

چەندلا ڕێکەکان
Regular Polygons

بۆچی

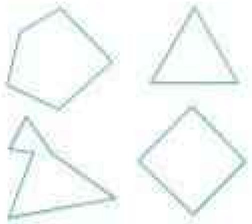
هەرچۆنێك بڕوانیتە نیشە دەستییەکان لە دەوروبەرتدا چەندلاکانت بەرچاو دەکەوێت تێگەیشتن لە سیفەتە بیرکارییەکانی چەندلاکان یارمەتیت دەدات بۆ بەکارهێنانیان لەکارە هونەرییەکان و کردارییەکاندا

ئامانجەکان

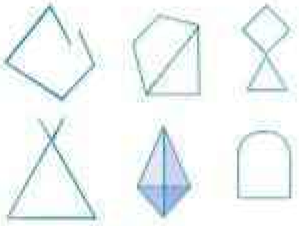
- چەندلاکان جیادەکاتەوە و ناویانلێدەنێت.
- چەندلا ڕێکەکان و دانەکانیان جیادەکاتەوە.
- گۆشەکانی ناوەوە و چەقە گۆشەکان و ڕووبەرەکانیان هەژماردەکات.

چەندلاکان — Defining Polygons

سەرەنجی ئەم وێنانەی خوارەوە بدە و پێناسەیەك بۆ هەرچەندلایەکیان هەڵبژێرە.



ئەم شێوانە چەندلان



ئەم شێوانە چەندلانین

ئەو پێناسەی کە هەڵتبژاردبوو بۆ چەندلا لەگەڵ ئەم پێناسەی خوارەوە بەراوردی بکە ئایا پێناسەکەت وەك ئەو پێناسەی خوارەوەیە؟ ئایا پێدراوی زیاتری تێدایە؟

چەندلا Polygon

چەندلا شێوەیەکی ئەندازەیی ڕووتەختە لە سێ پارچە ڕاستەهێڵ یان زیاتر پێکدێت بە جۆرێك هەریەکێکیان لەگەڵ تەنها دوانی تریان یەکتردەبڕن، هەریەکی لە کۆتایی لایەکیدا ببڕێت. بە مەرجێك دووپارچەڕاستەهێڵی یەك بەدوای یەك لە ڕێکی یەکتر نەبن، پارچە ڕاستە هێڵەکان پێیان دەڵێین لاکانی **Sides** چەندەلایەکەو خاڵەکانی یەکتربڕین پێیان دەڵێین **سەرەکانی چەندلاکە Vertices** .

ناوی جیاواز لە چەندلاکان دەنرێن، بەپێی ژمارەی لایەکانی. ڕاهێنانێکە لەسەر ناولێنانی ئەو چەندلایانەی لە خشتەی خوارەوە داهاتوون.

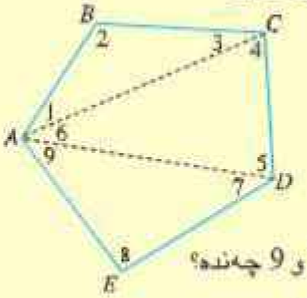
پۆلینکردنی چەندلایەکان بەپێی ژمارەی لایەکانی

ناو	ژمارەی لاکان	ناو	ژمارەی لاکان
سێگۆشە (سێلا) Triangle	3	نۆلا Nonagon	9
چوارلا Quadrilateral	4	دەلا Decagon	10
پێنجلا Pentagon	5	یازدەلا 11-gon	11
شەشلا Hexagon	6	دوازدەلا Dodecagon	12
حەفتلا Heptagon	7	سێزدەلا 13-gon	13
هەشتلا Octagon	8	نون لا n-gon	n

گۆشەکانی چەندلا Angles of a Polygon

چالاکی 1

سەرجەمی گۆشەکانی ناوەوە Angles of a Polygon



پێنجلای بەرامبەر بۆ سێ سێگۆشە دابەشکرا بە کێشانی ئەو تیرانە کە لە یەکێك لە سەرەکانیەوە دەرچووە.

1. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 1 و 2 و 3 چەندە؟
2. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 4 و 5 و 6 چەندە؟
3. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 7 و 8 و 9 چەندە؟
4. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و 9 چەندە؟
5. لە پرسیارەکانی پێشوو سەرجەمی گۆشەکانی ناوەوەی پێنج لا دەرئەنجام بکە.
6. ڕێگای پێشوو بۆ تەواوکردنی ئەم خشتەیەی خوارەوە بەکاربهێنە.

چەندلا	ژمارەی لاکان	ژمارەی سێگۆشەکان	سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە
سێگۆشە (سێلا)	؟	1	180 پلە
چوارلا	؟	؟	؟
پێنج لا	؟	3	540 پلە
شەش لا	؟	؟	؟
چەندلای نونی	؟	؟	؟

7. ڕێسایەك بنووسە بۆ هەژمێرکردنی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەك بەپێی ژمارەی لایەکانی ئەم ڕێسایەی خوارەوە تەواوبکە:

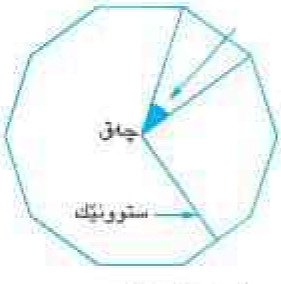
خاڵی چاودێری ✓

سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەك Sum of the Interior Angles of a Polygon

سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەك کە ژمارەی لایەکانی n بێت بریتییە لە ___؟___ پلە.

خاڵی چاودێری ✓

بەچەند لایەک دەڵێین ڕێک **Regular** ئەگەر لایەکانی لە درێژیدا یەکسانبن و گۆشەکانی ناوەوەی لە پێوانەدا یەکسانبن. چەندلای ڕێکی سێلا بریتیە لە سێگۆشەیەکی ڕێک. و چەندلایەکی ڕێکی چوارلا بریتییە لە چوارگۆشە.



چەقی چەندلای ڕێک ئەو خاڵەیە کە بەیەکسانی دوورە لە هەموو سەرەکانییەوە. ئەو گۆشەیەی کە سەرەکەی لەچەقی چەندلا ڕێکەکەدایەوە و دوولاکانی بە دوو سەری هاوسێ لە سەرەکانیدا دەروات پێی دەوترێت **چەقە گۆشە Central Angle** بۆ چەندلا ڕێکەکە. هەمووچەقە گۆشەکانی چەندلایەکی ڕێک یەکسانن.

ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە لە دوایدا ئەو ڕێسایەی کە لەدواوەی دێت تەواوبکە

چەند لایەکی ڕێک	ژمارەی لاکان	سەرجەمی گۆشەکانی ناوەوە	پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوە
سێگۆشە (سێلا)	؟	180 پلە	؟
چوارلا	؟	؟	90 پلە
پێنجلا	؟	؟	؟
شەشلا	؟	؟	؟
چەند لای نۆنی	؟	؟	؟

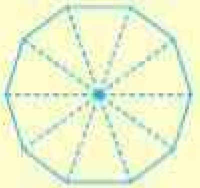
پێوانەی گۆشەی ناوەوەی چەندلای ڕێک

The Measure of an Interior Angle of a Regular Polygon

پێوانەی هەرگۆشەیەکی ناوەوە بۆچەندلایەکی ڕێک ژمارەی لاکانی n بێت بریتیە لە ___؟___ پلە

چالاکی 2

چەقە گۆشەکان لە چەندلایەکی ڕێکدا Central Angles of a Reguler Polygon



1. سەرجەمی پێوانەی چەقە گۆشەکان لە چەند لایەکی ڕێکدا چەندە
2. ئەم ڕێسایەی خوارەوە تەواوبکە.

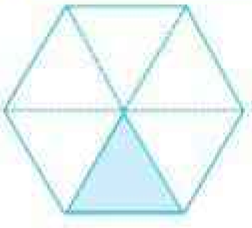
خاڵی چاودێری ✓

پێوانەی چەقە گۆشە لە چەندلای ڕێکدا

The Measure of a Central Angle of a Regular Polygon

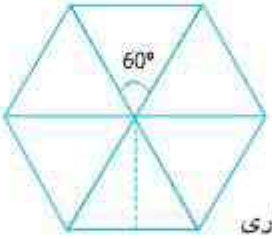
پێوانەی هەر چەقەگۆشەیەک لە چەندلایەکی ڕێکدا ژمارەی لاکانی n بێت دەکاتە ___؟___ پلە.

ڕووبەری چەندلای ڕێک Area of a reguler polygonr



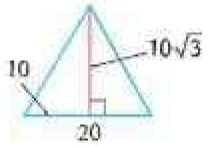
ئەستوندەکی چەندەلای ڕێک ئەو پارچە ڕاستەهێڵەیە کە چەقی چەندلایەکە دەگەیەنێت بە ناوەڕاستی یەکێك لە لایەکانی. تێبینی دەکەیت کە ئەستوندەك بەرزی هەریەکە لە سێگۆشە ڕێکەکانە کە سەرەکەی لە چەقی چەندلا ڕێکەکە دایە و بنکەکە یەکێك لە لاکانی چەندلاکەیە. بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك، شەشلاکە دابەش دەکەین بۆ شەش سێگۆشەی هاوسێی ڕێکی جووت. ڕووبەری شەشلای ڕێك یەکسانە بە شەش ئەوەندەی ڕووبەری هەر یەکێك لە ڕووبەری سێگۆشەکان.

نموونە 1 هەژمێری ڕووبەری شەشلایەکی ڕێک بکە درێژی لایەکی **20cm**



شیکار

بۆ ئەوەی ڕووبەری شەشلایەکە بدۆزینەوە پێویستە یەکەم جار ڕووبەری یەکێك لەو شەش سێگۆشەی کە شەشلاکەیان پێکهێناوە بدۆزینەوە، هەر سێگۆشەیەك لەو سێگۆشانە سێگۆشەیەکی ڕێکە. لەلایەکی ترەوە گۆشەی سەری سێگۆشەکە، چەقە گۆشەیەکە لە گۆشەکانی شەشلا ڕێکەکە. پێوانەکەی یەکسانە بە $360 \div 6 = 60$ لەوەوە بۆمان دەردەچێت کە هەریەکە لەو شەش سێگۆشەیە سێگۆشەی ڕێکن.درێژی لایەکی 20 Cm ، ئەستوندەکی شەشلا ڕێکەکە بریتیە لە بەرزی ئەو سێگۆشە ڕێکە.کەواتە، درێژی ئەستوندەکە یەکسانە بە: $20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$



ڕووبەری هەر سێگۆشەیەك یەکسانە : $\frac{1}{2}(20)(10\sqrt{3}) = 100\sqrt{3}$

ڕووبەری شەشلا ڕێکەکە یەکسانە $6(100\sqrt{3}) = 600\sqrt{3}$

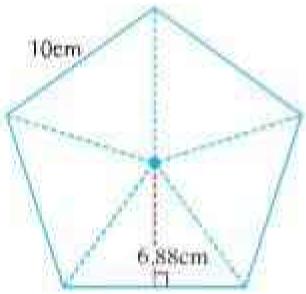
$$1039cm^2 = 600\sqrt{3}\ cm^2$$

دەتوانیت ڕێگاکەی پێشوو بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری چەندلایەکی ڕێك کە ژمارەی لاکانی n بێت. دەتوانرێ ئەو چەندلایە دابەش بکرێت بۆ n سێگۆشە لە سێگۆشە جووت بووەکان.

Area of regula polygon ڕووبەری چەندلای ڕێك

ڕووبەری چەند لایەکی ڕێك ئەستوندەکەی a بێت و چێوەکەی P بێت دەکاتە $A = \frac{1}{2}ap$

نموونە 2 ڕووبەری پێنجلای بەرامبەر بدۆزەرەوە



شیکار

چێوەی پێنجلای ڕێکەکە $5 \times 10 = 50$

ڕووبەری پێنجلا ڕێکەکە $\frac{1}{2} \times 6.88 \times 50 = 172$

$172cm^2$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. ئایا دەتوانیت چوارلایەك بکێشیت سێ سێگۆشەی ناوەوەی هەبێت پێوانەی هەر یەکێکیان 60 پلە بێت ؟ هۆی وەڵامەکەت بنووسە
2. سێگۆشەیەکی ڕێك چەندلایەکی ڕێکە کە سێلای هەیە. بەرزییەکەی (ئەستوندەکەی) کامەیە؟
3. چوارگۆشە چەندلایەکی ڕێکە لە چوارلا پێکهاتووە ئەستوندەکەی کامەیە.

ڕاهێنانی ئاراستەکراو

4 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی هەشتلایەك چەندە؟

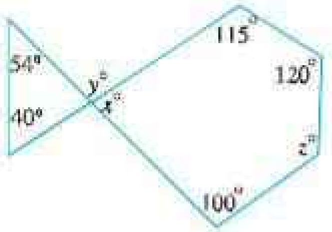
5 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی سێزدەلایەك چەندە؟

6 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی حەوتلایەك چەندە؟

7 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی یازدەلایەك چەندە؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

8 ئەم شێوەیەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی پێوانە داواکراوەکان



$x^\circ =$ ________

$y^\circ =$ ________

$z^\circ =$ ________

9 ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك چەندە کە درێژی لایەکی 12cm ؟

10 ڕووبەری دەلایەکی ڕێك چەندە کە درێژی لایەکی 6m و درێژی ئەستوندەکەی 9.23m بێت.

پێوانەی گۆشەی نادیار لەهەریەك لە پرسیارەکانی 11–14 بدۆزەرەوە.

11

12

13

14

لە پرسیارەکانی 15 تا 18 پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکە بدۆزەوە

15 چوارگۆشە

16 سێگۆشەیەکی ڕێك

17 دوازدەلایەکی ڕێك

18 پێنجلای ڕێك

ژمارەی لاکانی چەندلایەکی ڕێك چەندە ئەگەر پێوانەی هەر گۆشەیەك لە گۆشەکانی ناوەوەی یەکسان بێت بە

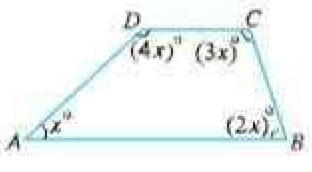
19 135°؟

20 150°؟

21 165°؟

جەبر

بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 22 تا 25 پێوانەی گۆشەکان بدۆزەرەوە؟بە پشت بەستن بە وێنەکەی بەرامبەر



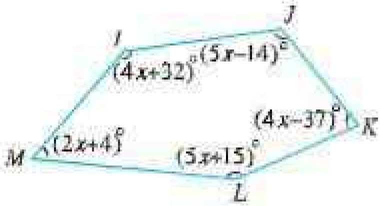
22 گۆشەی A

23 گۆشەی B

24 گۆشەی C

25 گۆشەی D

بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی **26** تا **30** پێوانەی گۆشەکە دیاریبکە بەسەرنجدان لە وێنەکەی بەرامبەر.



26 گۆشەی I

27 گۆشەی J

28 گۆشەی K

29 گۆشەی L

30 گۆشەی M

چێوەو رووبەری هەر یەک لەو چەندلا ڕێکانە بدۆزەوە.وەڵامەکەت بەشێوەی بڕێکی ڕەگی و بە سادەترین شێوە بێت.

31 سێگۆشەیەکی ڕێك درێژی لاکەی 8 Cm

32 شەشلایەکی ڕێك درێژی لاکەی 13 m

33 چوارگۆشەیەك تیرەکەی 14 Cm

34 هەشتلایەکی ڕێك درێژی ئەستوندەکەی = 5 Cm

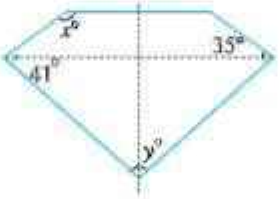
35 گەورەترین ژمارە بۆ گۆشە تیژەکانی سێگۆشە چەندە؟ ئایا سێگۆشە هەیە گۆشەی تیژی نەبێت؟هۆی وەڵامەکەت دیاریکە.

36 گەورەترین ژمارە بۆ گۆشە تیژەکانی چوارلایەك چەندە؟ ئایا چوارلا هەیە گۆشەی تیژی نەبێت؟هۆ بۆ وەڵامەکەت دیاریکە.

37 گەورەترین ژمارە بۆ گۆشە تیژەکانی پێنجلایەك چەندە؟ ئایا پێنجلا هەیە گۆشەی تیژی نەبێ؟ هۆی وەڵامەکەت دیاریکە

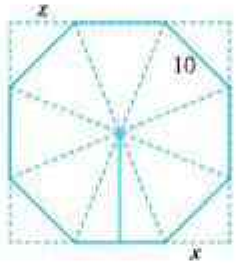
جێبەجێکردنەکان

38 بەردە بەنرخەکان ئەڵماس دەبڕدرێ لە شێوەی (برلنت) بۆ ئەوەی توانای تیشکدانەوەکەی زۆربێ و گۆشەی بڕینەکان دیاری دەکرێت بە پێی سیفەتی بەردەکە لە شکاندنی تیشکی ڕووناکی، ئەم شێوەیەی خوارەوە پارچەیەکی هەڵبژاردەیە لە بەردی ئەڵماس بە شێوەیەك کەپارچەکە تەوەری هاوجێبوونی هەیە.گۆشەکانی ئەم شێوەیە هەژماربکە.



شێوەی بەرامبەر بەکاربێنە کە هەشتلایەکی ڕێك دەنوێنێ لە ناو چوارگۆشەیەکدا بۆ شکاری پرسیارەکان لە 39 بۆ 42 .

39 جۆری ئەو سێگۆشانە بنووسە کە سەرەکانیان سەرەکانی چوارگۆشەکەن. و دەکەونە دەرەوەی هەشتلا ڕێکەکە؟ بەهای x هەژماربکە.



40 ئەستوندەکی هەشتلا ڕێکەکە بدۆزەرەوە

41 ڕووبەری هەشتلا ڕێکەکە بدۆزەرەوە

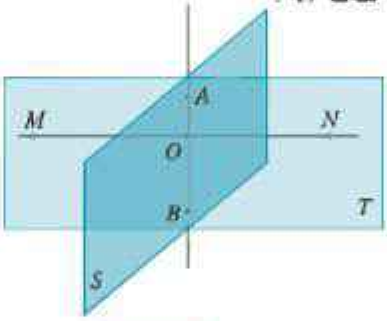
42 ڕووبەری هەشتلا ڕێکەکە کە درێژی لایەکی y بێت چەندە؟

43 ئایا چەندلایەکی ڕێك هەیە پێوانەی هەریەکە لە چەقە گۆشەکانی 50 پلە بێت؟

44 ئایا چەند لایەکی ڕێك هەیە پێوانەی هەریەکە لە گۆشەکانی ناوەوەی 30 پلە بێت؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

ڕوانین بۆ دواوە

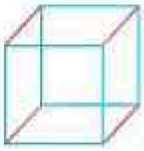
شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە **45** هەتا **47** .



45 یەکتربڕینی هەردوو ڕاستەهێڵی AB و MN ناوبنێ.

46 سێ خاڵ دیاریکە کە ڕووتەختی T یان دیارکردووە .

47 یەکتربڕینی دوو ڕووتەختی T و S ناوبنێ.



48 شێوەی بەرامبەر شەشپاڵویەک دەنوێنێ. ئەو ڕاستەهێڵانەی کە ڕەنگکراون بە سوور چیان پێ دەڵێین.

49 ئەگەر ئەو لا سوورانە درێژبکرێنەوە چی ڕوودەدات.

ڕوانین بۆ پێشەوە

50 خاڵی$A(2, 2)$وخاڵی$B(4, 1)$لە ڕووتەختی پۆتانەکان دیاریبکە

51 هەریەک لە پۆتانی خاڵیA لێکبدە لە 3 پۆتانی خاڵێکی تازەت C دەستدەکەوێت. خاڵیC دیاریبکە.

52 هەریەک لە پۆتانەکانی خاڵی B لێکبدە لە 3 پۆتانی خاڵێکی تازە D دەستدەکەوێت خاڵی D دیاریبکە.

53 هەردوو ڕاستەهێڵی AB و CD چییان پێ دەوترێت؟هۆی وەڵامەکەت دیاربکە.

54 ئەگەر 4 بەکاربهێنی لە جیاتی 3 لە هەردوو پرسیاری 52 ، 53 ئایا بۆچوونەکەت دەگۆڕێ لە سەر هەردوو ڕاستەهێڵیAB ، CD ؟

وانەی 5

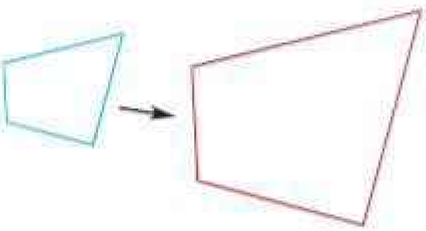
هاوڕێژەی ئەندازەیی Geometric Proportion

ئامانجەکان

- هاوڕێژەی ئەندازەیی و ڕانەکانیان جیادەکاتەوە
- وێنەی شێوەیەک بە هاوڕێژەی ئەندازەیی پێکدێنێت

بۆچی؟
کاتێک وێنەی مرۆڤێک بە ئامێرێکی کۆن دەگیرێت لە ژوورە تاریکەکەی ئامێرەکە وێنەیەکی هەڵگەڕاوە بۆ ئەو مرۆڤە دروست دەبێت دەتوانی ئەمە ڕوونبکەیەوە بەبەکارهێنانی هاوڕێژەی ئەندازەیی.

دۆزینەوەی بنەمای کارکردنی ئامێری وێنەگرتن دەگەڕێتەوە بۆ زانای عەرەبی (ابن هیثم) کە لە نێوان ساڵەکانی 965-039 1 ک ژیاوە



سێ جێگۆڕکێ ئەندازەییت خوێندوە: کشانەوە و وێنەدانەوە و خولانەوە.ئەم جێگۆڕکێیانە بە سیفەتێکی گرنگ جیادەکرێنەوە. ئەویش بریتیە لە پاراستنی شێوە و پێوەرەکان. بەو جێگۆڕکێیانە دەڵێین پارێزگاری لە پێوانە دەکات واتە پێوانەیین. لەم وانەیەدا جۆرێکی تازە لە جێگۆڕکێ دەخوێنین کە پارێزگاری لە پێوەرەکان دەکات. ئەویش هاوڕێژەی ئەندازەییە.

هاوڕێژەیی ئەندازەیی Dilation

وێنەی خاڵی $A(x, y)$ دەستدەکەوێت بە هاوڕێژەی ئەندازەیی، ئەویش بەلێکدانی هەریەک لە پۆتانەکەی لەهەمان ژمارە کەپێی دەوترێت **کۆڵکەی هاوڕێژەکە Scale Factor** . کەواتە وێنەی خاڵی $A(x, y)$ بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بەڕێژەی n دەکاتە (nx, ny).

نموونە

1 **وێنەی خاڵی(2,3) بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بەڕێژەی 4 چەندە؟**

شیکار

وێنەی خاڵی $(2\times4, 3\times4)=(8,12)$

چالاکی 1

پۆتانی هاوڕێژەیی ئەندازەیی Geometric Proportion in the Coordinate Plane

1. خاڵی $A(3, 4)$ لە ڕووتەختی پۆتاندا دیاریبکە. یاسای دووری نێوان دوو خاڵ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی دووری خاڵی A و خاڵی بنەڕەت O لە ڕووتەختی پۆتاندا. ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە لە ڕێگای دیاریکردنی پۆتانی خاڵی A' کە وێنەی خاڵی A یە بەڕێژەی ئەندازەیی کە لە ستونی سێیەمدا ڕوونکراوەتەوە.

خاڵی A	AO	کۆڵکەی هاوڕێژە	وێنەی A'	OA'	$\frac{OA'}{OA}$
(3, 4)	؟	2	؟	؟	؟
(3, 4)	؟	0.5	؟	؟	؟
(3, 4)	؟	−1	؟	؟	؟
(3, 4)	؟	n	؟	؟	؟

2. خاڵی A وێنەکەی A' لە هەربارێکدا بکێشە. تێبینی چی دەکەیت لەسەر هەموو ئەو خاڵانە؟

3. ئەم گریمانانەی خوارەوە تەواوبکە.

گریمانە

ئەگەر A' وێنەی A و بێت بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی ڕێژەکەی n ئەوا $OA' =$ ____؟____ $\times OA$.

خاڵی چاودێری ✓

4. خاڵی $A(3, 4)$ جارێکی تر دیاریبکە و خاڵی $(5, 6)$ لەگەڵی دیاریبکە ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە.

خاڵی B	AB	کۆڵکەی هاوڕێژە	وێنەی B'	$A'B'$	$\frac{A'B'}{AB}$
(5, 6)	؟	2	؟	؟	؟
(5, 6)	؟	0.5	؟	؟	؟
(5, 6)	؟	−1	؟	؟	؟
(5, 6)	؟	n	؟	؟	؟

جەبر

5. ئەم گریمانانەی خوارەوە تەواوبکە:

گریمانە

ئەگەر $\overline{A'B'}$ وێنەی پارچە ڕاستەهێڵی AB بێت بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی بەڕێژەی n ئەوا $A'B' =$ ____؟____ $\times AB$

خاڵی چاودێری ✓

6. لاری ڕاستەهێڵی AB بدۆزەرەوە.

7. لاری ڕاستەهێڵی $A'B'$ لەهەربارێکدا بدۆزەوە.

8. ئەم گریمانەی خوارەوە تەواوبکە

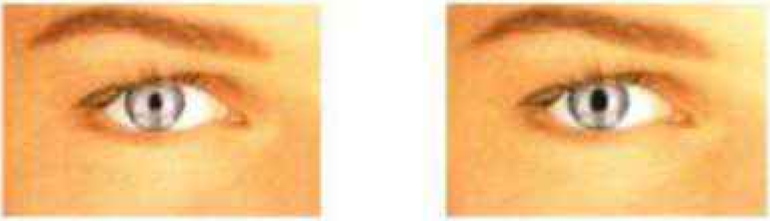
گریمانە

هاوڕێژەی ئەندازەیی پارچە ڕاستەهێڵێک دەگۆڕێت بۆ پارچە ڕاستەهێڵی ____؟____

هەموو ئەو ڕاستەهێڵانەی بەخاڵێك و وێنەکەی بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی دیاریکراودا تێدەپەڕن لەیەك خاڵدا یەکدەگرن، پێی دەوترێت (چەقی هاوڕێژە). هەموو هاوڕێژە ئەندازەییەکان لە چالاکی 1 دا چەقەکەیان خاڵی بنەڕەتە. هەموو هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقێکی هەیە.

جیهەجێکردنەکان
ڕۆناکی

بیلبیلەی چاو فراوان دەبێتەوە یان تەسک دەبێتەوە بۆ ڕۆیشتنی ڕووناکی پێویست پیایدا تاکو مرۆڤ بتوانیت شتەکان ببینێت لەڕۆژدا تەسک دەبێتەوە و لە شەودا فراوان دەبێت لە ئامێری وێنەگرتندا ئەم شتە وەک بیلبیلەکە وایە بۆ دەست بەسەراگرتنی بڕی ڕووناکی پێویست بۆ گرتنی وێنەیەکی باش



بیلبیلەی چاوەکە لە وێنەی چەپدا تەسک بۆتەوە چونکە بڕی ڕووناکیەکە زۆرە. بەڵام لە وێنەی لای ڕاستدا زیاتر کراوەتەوە چونکە بڕی ڕووناکی پێویست کەمترە؟

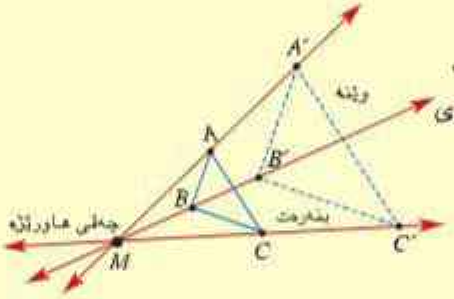
لە چالاکی ۱ دا تێبینیت کرد کە درێژی وێنەی پارچە ڕاستەهێڵەکە بەگۆڕانی کۆڵکەی هاوڕێژەکە دەگۆڕێت. کاتێک پێوەرەکانی وێنەکە بچووکتربێت لە پێوەرەکانی شێوە بنەڕەتیەکە بەو هاوڕێژە دەوترێت بچووک کردنەوە و کاتێک پێوەرەکانی وێنەکە گەورەتر بوو لە پێوەرەکانی شێوە بنەڕەتیەکە بەو هاوڕێژەیە دەوترێت (گەورەکردن).

بیرکردنەی ڕەخنەگرانە چیمان دەستدەکەوێت لە وێنەی خاڵێک یان پارچە ڕاستەهێڵێک بەهاوڕێژەیەکی ئەندازەیی کەڕێژەکەی سالیب بێت؟

چالاکی 2

کێشانی وێنەی شێوەیەک بە هاوڕێژەی ئەندازەیی — Drawing a Dilation

1. سێگۆشەیەک بکێشە وخاڵێکی دەرەوەی، M کە چەقی هاوڕێژەکە دەنوێنێت، ئەو ڕاستەهێڵانە بکێشە کە بەچەقی هاوڕێژەکە و هەموو سەرەکانی سێگۆشەکەدا دەڕۆن.
2. ژمارەیەکی موجەب n هەڵبژێرە بۆ کۆڵکەی هاوڕێژەکە، سەرێک لە سەرەکانی سێگۆشەکە وەک B هەڵبژێرە، و دووری x بدۆزەرەوە لە نێوان ئەو سەرە و چەقی هاوڕێژەکە. دووری x لە کۆڵکەی هاوڕێژەکە n بدە بۆ ئەوەی دووری نێوان وێنەکەی B' لە لوتکەی B و چەقی هاوڕێژەکە M دەستکەوێت. خاڵێک لە سەر MB وەربگرە کە لە چەقی هاوڕێژەکە بە nx. ئەو خاڵە خاڵی B' وێنەی سەری B یە کە هەڵت بژاردبوو بەهاوڕێژەیی.



3. کردارەکە دووبارە بکەوە.
4. هەرسێ خاڵە دەستکەوتووەکە بەیەکبگەیەنە سێگۆشەیەکی تازەت دەستدەکەوێت کە وێنەی سێگۆشە بنەڕەتییەکەیە بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی.

خاڵی چاودێری ✓

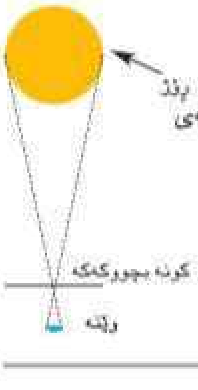
نموونە

چێنەجێکردنەکان

گەردوون

2 لەم وێنەیەی خوارەوە دوو خوێندکار چاودێری گیرانی ڕۆژیان دەکرد لە کونێکی بچووکەوە. بۆ ئەوەی کردارەکە تێبگەی وایدابنێ کە کارەکە پابەندە بە وێنەی ڕۆژەکە بەهاوڕێژەیەک کە چەقەکەی بکەوێتە کونە بچووکەکەوە. تیرەی ڕۆژ دەکاتە 1 400 000km بەنزیکی تێکڕای هاوڕێژە چەندە؟ ئەگەر تیرەی وێنەی ڕۆژەکە 0.63cm بێت.

شیکار



وێنەی بەرامبەر ڕێڕەوی تیشکی ڕۆژ ڕووندەکاتەوە کە لە لاکانی ڕۆژەکە دەردەچێت هەروەکو دەیبینین لە زەوییەوە. ڕێژەی هاوڕێژەکە سالبە. چونکە وێنەی ڕۆژەکە دەکەوێتە لاکەی تر بەپێی چەقی هاوڕێژەکە (کونە بچووکەکە) بۆ دەستکەوتنی کۆڵکەی هاوڕێژەیی تیرەی وێنەکە دابەش دەکەین بەسەر تیرەی ڕۆژەکەدا وەك لە خوارەوە دەردەکەوێت.

$$\frac{0.63}{1400000 \times 100000} = \frac{0.63}{1.4 \times 10^{11}} = \frac{63}{140} \times 10^{-11} = 4.5 \times 10^{-12}$$

ڕاهێنـــــــــــان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 بەچی هاوڕێژەی ئەندازەیی لە جێگۆڕکێ ئەندازەییەکانی تر جیادەکرێتەوە.

2 کۆڵکەی هاوڕێژەی ئەندازەیی چییە؟چۆن کۆڵکەی هاوڕێژەی ئەندازەیی دیاریدەکەیت. بەزانینی پارچە ڕاستەهێڵ و وێنەکەی؟

کاریگەری هاوڕێژەی ئەندازەیی ڕوونبکەوە لەسەر وێنەی شێوە ئەندازەییەک ئەگەر کۆڵکەکەی یەکسان بێت بە:

3 2 **4** 0.5 **5** –1 **6** 1

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

چەقی هاوڕێژەیی ئەندازەیی لە پرسیاری 7 بۆ 10 خاڵی بنەڕەتە وێنەی خاڵەکە لە هەر جارێکدا دیاریبکە لە دوابیدا خاڵ و وێنەکەی لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا بکێشە.

7 خاڵەکە: (1, 5) ڕێژەکە: 3

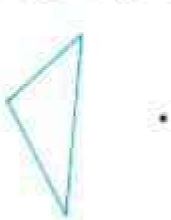
8 خاڵەکە: (4 ,1–) ڕێژەکە: 2

9 خاڵەکە: (2– ,6) ڕێژەکە: 0.25

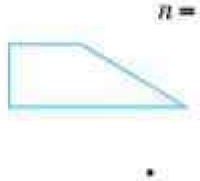
10 خاڵەکە: (2, 3) ڕێژەکە: 2–

شێوە و چەقی هاوڕێژە دروستبکە. لە دوایدا وێنەی شێوەکە بەهاوڕێژەیی n بکێشە:

11 $n = 2$



12 $n = -1$



13 وێنەی بەرامبەر پارچە ڕاستەهێڵێك و وێنەکەی بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی ڕووندەکاتەوە. ڕێژەی ئەو هاوڕێژەیە چەندە؟

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

جەبر

هەرپرسیارێك لە پرسیارەکانی 14–17 سەرەکانی شێوە ئەندازەییەك دەنوێنێت و کۆڵکەی هاوڕێژەیی ئەندازەییەکە لەخۆدەگرێت کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتاندا. وێنەی هەر سەرێك لە سەرەکانی هەر شێوەیەك دیاریبکە. لە دوابیدا شێوە بنەڕەتییەکە و وێنەکەی لە ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە.

14 (1, 3)؛ (2, 5)؛ (4, 3)؛
ڕێژەکە= : 2

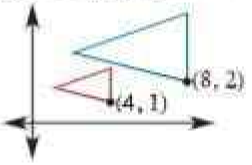
15 (3, 5–)؛ (8, 9)؛ (2, –6)؛
ڕێژەکە = $\frac{1}{3}$

16 (0, 0)؛ (6, 0)؛ (4, 4)؛ (2, 3)
ڕێژەکە = $-\frac{1}{2}$

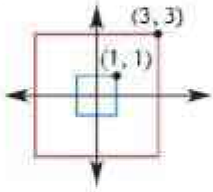
17 (1, 1)؛ (3, –1)؛ (–2, –3)؛
ڕێژەکە = 1.6

هەرپرسیارێک لە پرسیارەکانی **18-21** دوو شێوەی تێدایە یەکێکیان سوور و ئەوەی تریان شینە. شێوە سوورەکە وێنەی شێوە شینەکە دەنوێنێ بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتاندا. ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەییەکە لە هەر جارێکدا دیاریبکە.

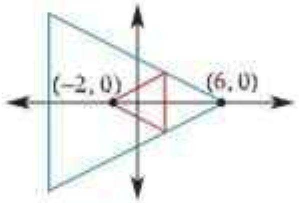
19



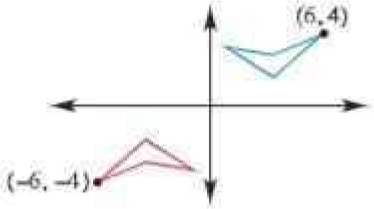
18

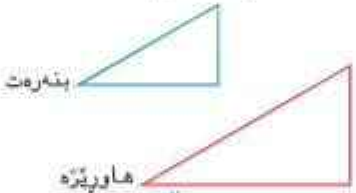


21



20





22 ئەم شێوەیەی بەرامبەرت بکێشە و چەقی هاوڕێژە و ڕێژەکەی دیاریبکە.

هەرپرسیارێک لە پرسیارەکانی **23–26** پۆتانی هەردوو سەری پارچە ڕاستەهێڵێکن، ڕێژەی هاوڕێژەیی ئەندازەیەکەی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕتە لە ڕووتەختی پۆتاندا. بەبەکارهێنانی لاری ڕوونبیکەرەوە کە وێنەی پارچەڕاستەهێڵەکە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بریتییە لە پارچە ڕاستەهێڵێک تەریبە بەبنەڕەتەکەی.

23 $(1, 0)$ و $(5, 3)$ $n=2$

24 $(-2, 3)$ $(3, 1)$ $n=5$

25 $(-2, 4)$ و $(4, 8)$؛ $n=\frac{1}{2}$

26 $(1, 1)$ و $(2, 4)$ $n=1.7$

جەبر

هەر پرسیارێک لە پرسیارەکانی **27–30** پۆتانی خاڵێک و کۆڵکەی هاوڕێژەیی ئەندازەییەکە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا. بسەلمێنە کە ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵەکەو وێنەکەی دادەڕوات بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بە خاڵی بنەڕەت دادەڕوات لە ڕووتەختی پۆتانەکەدا.

27 $(1, 5)$؛ $n=4$

28 $(3, -2)$؛ $n=\frac{5}{6}$

29 $(-5, 3)$؛ $n=-3$

30 $(7, 4)$؛ $n=2.5$

بەرەنگاری

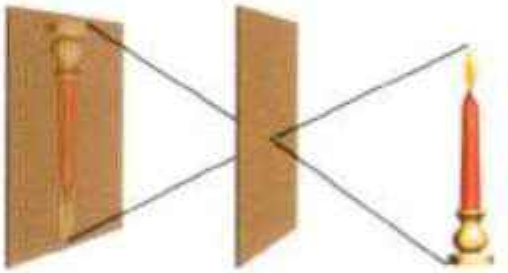
31 لە نموونەکانی هاوڕێژەی ئەندازەیی کە چەقەکەی نەکەوێتە خاڵی بنەڕەت لە ڕووتەختی پۆتاندا ئەو جێگۆڕکێیانەی کە خاڵی (x, y) دەگۆڕێت بۆ خاڵی $(2x-4, 2y-3)$ ئەو پارچە ڕاستەهێڵە بکێشە کە دوو سەرەکانی بریتین لە $(2, 3)$ و $(5, 5)$ وێنەکە بکێشە بە جێگۆڕکێیەی پێشوو.چەقی هاوڕێژەی ئەندازەیی و ڕێژەکەی دیاریبکە لەوەی پێی هەستایت: سوود وەربگرە بۆ نوسینی پۆتانی خاڵی(x, y) بەوڕێژە ئەندازەیەی کە چەقەکەی خاڵی $(1, 2)$ و ڕێژەکەی 4 بێت.

جێبەجێکردنەکان

32 گلارە ویستی ئەم شێوەیەی بەرامبەر گەورە بکات لەسەر چوارگۆشەیەک کە لاکەی12cm لە جیاتی 4cm کۆڵکەی هاوڕێژەی ئەندازەیی ڕێگاپێدراو بۆ ئەم کارە چەندە؟پۆتانی سەرەکانی یەکێک لە لاتەرییەکان ئەمانەن $(0, 0)$؛ $(1, 1)$؛ $(1, 2)$؛ $(0, 1)$ پۆتانی وێنەی هەرسەرێک لەسەرەکانی دیاریبکە، بە گەورەکردن لەدواییدا وێنەی لاتەرییەکە بکێشە. شێوە بنەڕەتیەکەی لاتەرییەکەو وێنەکەی بەتەواوەتی لەسەر ڕووتەختی پۆتان بکێشە.

جێبەجێکردنەکان

وێنەی بەرامبەر هێڵکاریەك ڕووندەکاتەوە کە چۆن ئامێری وێنەگرتن کاردەکات.



33 کام بەش لە ئامێری وێنەگرتنەکە چەقی هاوڕێژەکە دەنوێنێت؟

34 ئایا کۆڵکەی هاوڕێژەکە موجەبە یان سالبە؟ هۆی وەڵامەکەت دیاریبکە.

35 ئەو هۆیە چییە کەوا لە وێنەکە دەکات هەڵگەڕاوەبێت.

36 یەکێك لە ئەندازیارەکان هەستا بە بچووککردنەوەی هێڵکاری خانوێك بەبەکارهێنانی ئامێری لەبەرگرتنەوە. پانی هێڵکاریەکە 15 cm و پانی وێنەکە 6 cm بوو. ڕێژەی بچووککردنەوەکە چەندە؟

ڕوانین بۆ دواوە

37 چێوەی سێگۆشەیەکی دوولایەکسان بدۆزەوە کە درێژی بنکەکەی 6cm و درێژی لایەکی 8cm ڕووبەرەکەشی بدۆزەوە.

جێبەجێکردنەکان

38 درێژی ژێی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە، کە پێوانەی گۆشەکانی 45 ، 45 ، 90 و درێژی لایەکی 7cm .

39 **زەوی ناسی** چێوەی گەورەترین بازنەی زەوی دەگاتە 40 000km ئایا نیوەتیرەی زەوی چەندە؟

40 **زەوی ناسی** بەرزی بەرگە هەوای زەوی دەگاتە 550km ئەم زانیارییە بەکاربێنە بۆ وەڵامی پرسیاری 39 بۆ هەژمارکردنی [illegible] گۆی زەوی لەگەڵ بەرگە هەواکەی.

ڕوانین بۆ پێشەوە

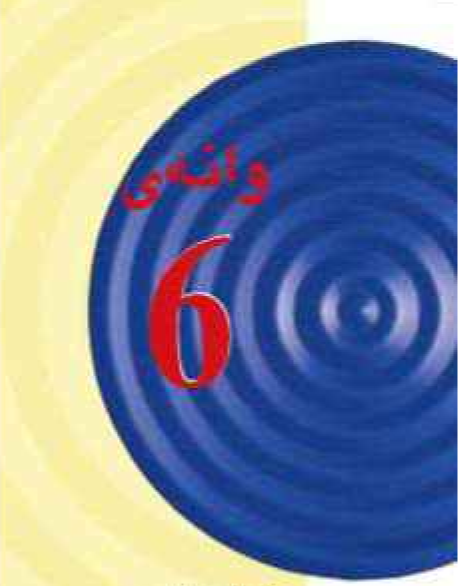
جێبەجێکردنەکان

کورسی پێچکەدار یەکێك لە ئەندازیاران ویستی دیزاینێك دابنێت بۆ کورسیەکی پێچکەدار کە پەککەوتووەکان بەکاری دێنن بۆ بەشداریکردن لە یاری تۆپی سەبەتە. بڕیاریدا کە تیرەی پێچکەکە 56cm بێت.

41 کورسی پێچکەدارەکە کاتێك $45°$ دەخولێتەوە چەند بەرەو پێشەوە دەڕوات.

42 درێژی یاریگایەکی تۆپی سەبەتە 23.5m ، چەند خول تایەکە دەخولێتەوە بۆ ئەوەی کورسیە تایەدارەکە یاریگەکە ببڕێت و بچێتە لایەکی تری.

بازنە Circles



ئامانجەکان

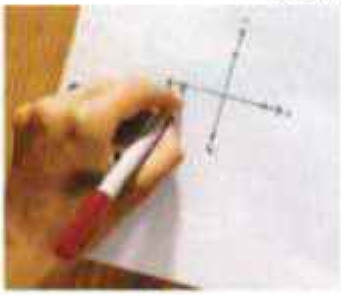
- هاوکێشەی بازنە دەنووسێت و بەکاریدەهێنێت.
- هاوکێشەی بازنە بە پێی گۆڕانی چەقەکەی ڕاستدەکاتەوە.

بۆچی؟
بەرنامە ئەندازەییەکان ژمارەیەك لە شێوە ئەندازەییەکان دروست دەکەن وەك خاڵ و ڕاستەهێڵ بازنە ئەم بەرنامانە هاوکێشە جەبری تایبەت بەو شێوانە بەکاردەهێنێت.

Graphing Circle From an Equation کێشانی بازنە لە هاوکێشەکەیەوە

لە ماوەی خوێندنی ڕابردوو کۆمەڵێك هاوکێشەی جۆراوجۆر هاتۆتەڕێت وەك $y=2x-3$ (هاوکێشەی ڕاستەهێڵ) یان $y=x^2-3$ (هاوکێشەی بڕگەی هاوتا) لەم وانەیەدا جۆرە هاوکێشەیەك دەدۆزیتەوە کە x و y بە دووجایی تێدا دەردەکەوێت.

نموونە 1 هێڵە ڕوونکردنەوەی هاوکێشەی $x^2+y^2=25$ بکێشە بە دۆزینەوەی ژمارەیەك لە جووتە ڕێکخراوەکان (x, y) کە پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکەن و دیاریکردنی ئەو خاڵانەی سەر بەو هاوکێشەیەن. ئەو شێوە ئەندازەییە لە هێڵە ڕوونکردنەوەیەکە بناسە. دەتوانیت پەنا بەریتە بەر بژمێری ڕوونکردنەوە (حاسبة بيانية) بۆ دڵنیابونت لە ڕاستی وێنەکەت.

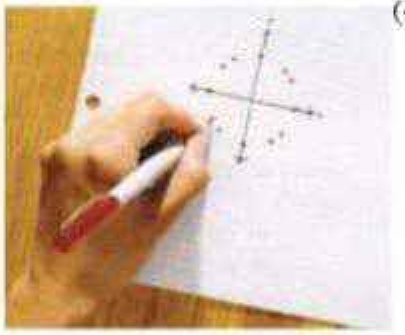


جابر

شیکار

لە کاتی هەوڵدانت بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوە بۆ جۆرێکی تازە لە هاوکێشەکان یەکەم جار هەوڵبدە ئەو خاڵانە دیاری بکەیت کە هەردوو تەوەرەکەی تێدا دەبڕێت. بۆ دیاریکردنی خاڵی یەکتر بڕین لەگەڵ تەوەرەی سینی لە جیاتی گۆڕاوی y سفر دابنێ ($y=0$).

$x^2+0^2=25$، یان $x^2=25$، یان $x=\pm5$



هێڵە ڕوونکەرەوەکە تەوەرەی سینی لە خاڵی $(5, 0)$ و $(-5, 0)$ دەبڕێت

بۆ دۆزینەوەی خاڵی یەکتربڕینی هێڵەکە لەگەڵ تەوەرەی صادی. y بدۆزەرەوە بە دانانی $x = 0$

$0^2 + y^2 = 25$ یان $y^2 = 25$ یان $y = \pm 5$ هێڵە ڕوونکەرەوە کە تەوەرەی صادی لە خاڵی $(0, 5)$ و $(0, -5)$ دەبڕێت لە دوای ئەوە لە جیاتی گۆڕاوی x چەند بەهایەکی تر وەربگرە وەك 3

$$3^2 + y^2 = 25$$

$y^2 = 16$ یان $y = \pm 4$ هێڵە ڕونکەرەوەکە بە هەردوو خاڵی $(3, 4)$ ، $(3, -4)$ دا دەڕوات. بەم شێوەیەی دەتوانیت ئەم خشتەیەی بەرامبەر دروستبکەیت بە لەجیاتی دانانی گۆڕاوی x بەچەند بەهایەکی گونجاو.ئەو خاڵانەی لە خشتەکەدا هاتووە لەسەر ڕووتەختی پۆتان دیاریبکە و خاڵەکان بگەیەنە ئەو وێنەی دەستدەکەوێت بریتییە لە و بازنەیەی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی 5 . ئەو بازنەیە بکێشە.

x	y	خاڵ لەسەر هێڵەکە
3	±4	$(3, 4)$ و $(3, -4)$
−3	±4	$(-3, 4)$ و $(-3, -4)$
4	±3	$(4, 3)$ و $(4, -3)$
−4	±3	$(-4, 3)$ و $(-4, -3)$

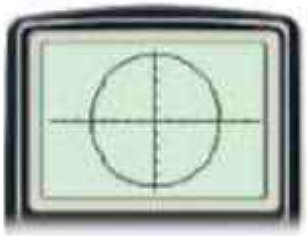
سەرەنجی ڕەخنەگرانە

چۆن وێنەی ڕوونکردنەوەکە دەگۆڕێت ئەگەر لە جیاتی ژمارە 25 ژمارەکانی 49 و 81 و 51 لە هاوکێشەکەیدا دابنرێن.

بەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی   Using Graphing Technology

دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوە بەکاربهێنیت بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەیی. بژمێرەکە داوات لێ دەکات کە هاوکێشەکە بخەیتە ناو بژمێرەکەوە لەسەر شێوەی $y = \ldots$ پێویستە لە سەرت هاوکێشەکە شیکار بکەیت بۆ دۆزینەوەی y بەپێی x.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$y^2 = 25 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

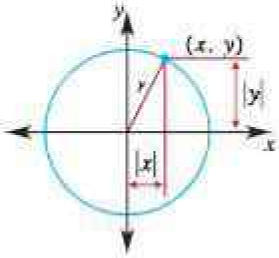


جەبر

بەم شێوەیە دەتوانیت وێنەی هێڵی ڕونکردنەوەی بۆ هاوکێشەی $y = \sqrt{25 - x^2}$ و $y = -\sqrt{25 - x^2}$ بکێشیت.

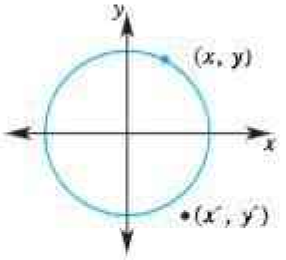
Deriving the Equation of a Circle پێکهێنانی هاوکێشەی بازنە

گرێدان
ئەندازەی تەردەوەکان



بازنە کۆمەڵەخاڵێکە بەدووری یەکسان نت (نیوەتیرە)لە خاڵێکی دیاری کراوەوە (چەقی بازنە). بەسادەترین شێوە دەستپێبکە ئەویش کە خاڵی بنەڕەت ببێتە چەقی بازنە.

خاڵی (x, y) هەڵبژێرە لەسەر بازنەکە کە ناکەوێتە سەر هەردوو تەوەرەکان سێگۆشەیەکی گۆشەوەستاو بکێشە لەو خاڵەوە دەستپێ بکات. هەروەك لەم وێنەی بەرامبەر ڕونکراوەتەوە. درێژی دوولای گۆشە وەستاوەکە بریتیە لە $|x|$ و $|y|$ و درێژی ژێیەکەی بریتیە لە درێژی نیوەتیرەکەی کە درێژبۆتەوە لە نێوان خاڵە هەڵبژاردەکەی سەربازنەکە و خاڵی بنەڕەت. بەوشێوەیە دەبینیت پۆتانی خاڵە هەڵبژاردەکە لە سەر بازنەکە پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکات



$x^2+y^2=r^2$ هاوکێشەی 1

دەتوانیت پاسەدانی ئەوە بکەیت کە پۆتانی خاڵەکانی یەکتربڕینی بازنەکە لەگەڵ هەردوو تەوەرەکان پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکاتە. بەرامبەر ئەوە ئەگەر$(x´, y´)$خاڵێك بێت لە دەرەوەی بازنەکە، دووری ئەو خاڵە لە بنەڕەتەوە یەکسان نیە بە r ، لەم ئەنجامەوە بۆمان دەردەکەوێت کە پۆتانی ئەو خاڵە پاسادانی هاوکێشەکەی پێشوو ناکات. کەواتە$(x´)^2+(y´)^2 \neq r^2$

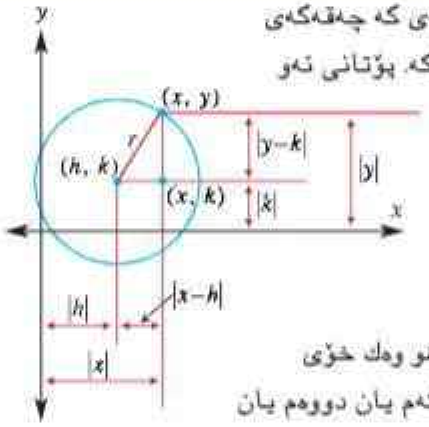
بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە بۆچی $(x´)^2+(y´)^2 \neq r^2$ کاتێك$(x´, y´)$ناکەوێتە سەربازنەکە؟ تێبینیبکە کە هاوکێشەی 1 ئەم دوو سیفەتەی تێدایە:

هەر خاڵێك بکەوێتە سەربازنەکە پاسادانی ئەو هاوکێشەیە دەکات.

هەر خاڵێك نەکەوێتە سەربازنەکە پاسادانی ئەو هاوکێشەیە ناکات.

لەوەی پێشەوە بۆمان دەردەکەوێت کە هاوکێشەی$x^2+y^2=r^2$ هاوکێشەی بازنەیەکە نیوەتیرەکەی (نت) یە و چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە.

Moving the Center of the Circle جولانی چەقی بازنە



بۆ دۆزینەوەی شێوەی گشتی هاوکێشەی ئەو بازنەیەی کە چەقەکەی ناکەوێتە خاڵی بنەڕەتەوە سەیری شێوەی بەرامبەربکە. پۆتانی ئەو خاڵەی دەکەوێتە سەربازنەکە کە پاسادانی هاوکێشەی بازنەکە دەکات.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ هاوکێشەی 2

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە چۆن ڕوونیدەکەیتەوە کەپەیوەندیەکان لە شێوەی پێشو وەك خۆی دەمێنیتەوە ئەگەر خاڵی (h, k) بکەوێتە چارەکی یەکەم یان دووەم یان سێیەم یان چوارەم .

نموونـــــه 2

چەقی ئەم بازنەیە دیاریبکە کە هاوکێشەکەی $(x-7)^2+(y+3)^2=36$ لە دواییدا نیوەتیرەکەی دیاریبکە.

شیکار

ئەگەر هاوکێشەی دراو لەگەڵ شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنە بەراوردبکەین.
ئەم لێکچوونانەی خوارەوە دەبینی .

لە شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنەیی	لە هاوکێشەی دراو
$(x-h)^2$	$(x-7)^2$
$(y-k)^2$	$(y+3)^2=(y-(-3))^2$
r^2	36

ئەم بەراوردکردنە ڕێگات پێدەدات کە بڵێیت $h=7$ $k=-3$ $r=6$
چەقی بازنەکە بریتییە لە خاڵی$(7, -3)$ یە و نیوەتیرەکەی یەکسانەبە 6 یەکەی درێژی.

هەوڵبدە چەق و نیوەتیرەی هەربازنەیەك لەم بازنانەی خوارەوە دیاریبکە. وێنەی هەر بازنەیەکیان بکێشە و وێنەکە لەگەڵ ئەوانەی دۆزیوتەوە بەراوردبکە.

أ $(x+3)^2+(y-3)^2=49$

ب $(x-3)^2+(y+3)^2=49$

ج $(x-4)^2+(y-5)^2=30$

د $(x+2)^2+(y-5)^2=50$

ڕاهێـــــــنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەو بازنەی هاوکێشەکەی$x^2+y^2=4$ بێت لەگەڵ هەردوو تەوەرەکە دیاریدەکەیت؟

2 چۆن خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەو بازنەی هاوکیشەکەی $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ بێت لەگەڵ هەردوو تەوەرەکە دیاریدەکەیت.

3 ئایا بازنەیەك هەیە هەردوو تەوەرەکە نەبڕێت؟ وێنەکەی چۆن دەردەکەویت لەم بارەدا؟

4 یاسای دووری نێوان دووخاڵ بەکاربهێنە بۆ نووسینی دووری نێوان دوو خاڵی (x, y) و (h, k) چ شتێك ئەم برە و شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنەکە بەیەکەوەدەبەستێتەوە؟

5 **تەکنەلۆجیا** زۆر جار کاری بژمێری ڕوونکردنەوە، بۆ کێشانی وێنەی هاوکێشە دراوەکان لە سەر شێوەی...= y دەبێت. چۆن شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنەیەك شیکاردەکات بە پێی گۆڕاوی x؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هاوکێشەی $x^2 + y^2 = 100$ بەکاربهێنە لە پرسیارەکانی 6 بۆ 8 .

6 خاڵی یەکتربڕینی بازنەکە لەگەڵ هەردوو تەوەری پۆتانەکان دیاریبکە.

7 ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە.

x	y	خاڵ لەسەر بازنەکە
0	?	?
؟	0	?
6	?	?
−6	?	?
8	?	?
−8	?	?

8 ئەو خاڵانەی لەخشتەی پێشوو دەستتکەوتوە لە ڕووتەختی پۆتانەکان دیاریکە لە دوابیدا وێنەی بازنەکە بکێشە.

هاوکێشەی $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 9 بۆ 11 .

9 چەقی بازنەکە دیاریبکە.

10 خاڵەکانی یەکتربڕینی بازنەکە لەگەڵ هەریەکە لە دوو تەوەری پۆتان دیاریبکە.

11 ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە.

x	y	خاڵ لەسەر بازنەکە
0	?	?
؟	0	?
1	?	?
−1	?	?
4	?	?
7	?	?
8	?	?
9	?	?

12 ئەو خاڵانەی لە خشتەی پێشوو دەستتکەوتوە لە ڕووتەختی پۆتانەکان دیاریبکە لەدوابیدا وێنەی بازنەکە بکێشە

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

جەبر

خاڵەکانی یەکتربڕینی هەربازنەیەک لەم بازنانەی خوارەوە لەگەڵ هەردوو تەوەری پۆتانەکان دیاریبکە

13 $x^2 + y^2 = 64$

14 $x^2 + y^2 = 50$

15 $x^2 + (y-4)^2 = 25$

16 $(x-2)^2 + y^2 = 9$

17 $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$

هاوکێشەی بازنەکە بنووسە ئەگەر چەق و نیوەتیرەکەی بزانیت

	چەق	نیوەتیرە
18	(0, 0)	6
20	(0, 0)	$\sqrt{13}$
22	(0, 6)	5
24	(1, −7)	10

	چەق	نیوەتیرە
19	(0, 0)	2.5
21	(2, 3)	4
23	(4, −5)	7
25	(4, −3)	$\sqrt{7}$

جەبر

چەق و نیوەتیرەی هەر یەک لەم بازنانەی خوارەوە بدۆزەوە.

26 $x^2 + y^2 = 100$

27 $x^2 + y^2 = 36$

28 $x^2 + y^2 = 101$

29 $(x-6)^2 + y^2 = 9$

30 $x^2 + (y-3) = 4$

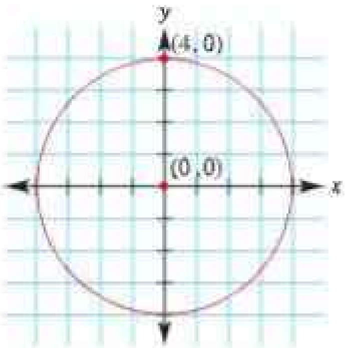
31 $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 16$

32 $x^2 + (y+3) = 49$

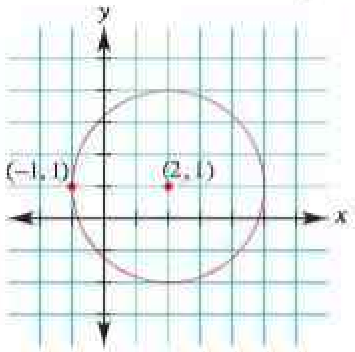
33 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 19$

هاوکێشەی ئەو بازنەیە بدۆزەوە کە لەم وێنانەی خوارەوە ڕوونکراوەتەوە

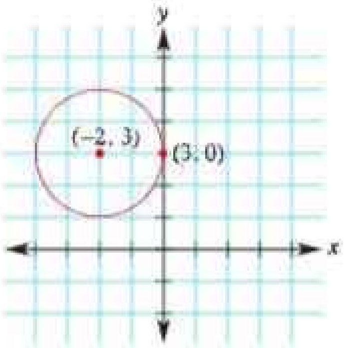
34



35



36



جەبر

خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەم بازنە لەگەڵ هەردوو تەوەرەکان وەک لەم خشتەیەدا دراوە بدۆزەوە بە پێی ئەو خاڵانە بۆ هەریەکێکیان وێنەی بازنەکە بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە .

	یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری سینی	یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری صادی
37	3 و −3	3 و −3
38	6 و 2	یەکتربڕین نییە
39	سفر	0 و 8
40	یەکتربڕین نییە	5
41	یەکتربڕین نییە	یەکتربڕین نییە

جەبر

هاوکێشەی ئەو بازنانە بدۆزەوە بەپێی ئەم زانیارییانەی دراوە. باشتر وایە وێنەکە بکێشیت.

42 چەقەکەی $(3,2)$؛ و لێکەوتە بۆ تەوەری سینەکان.

43 چەقەکەی $(3,2)$؛ و لێکەوتە بۆ تەوەری صادەکان.

44 چەق: $(1,0)$؛ بەخاڵی $(4,4)$ دا دەڕوات

45 چەق: $(3,2)$؛ بەخاڵی $(3,8)$ دا دەڕوات

46 چەق: $(3,2)$؛ بەخاڵی $(11,8)$ دا دەڕوات

47 $(3,1)$ و $(3,5)$دووسەری یەکێك لە تیرەکانیەتی

بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی یان کاغەزی ڕوونکردنەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە **48** تا **54** .

48 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-3)^2+(y-5)^2=4$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە دەوری تەوەری سینی بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەیەش بنووسە.

49 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-4)^2+(y-2)^2=1$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە دەوری تەوەری سینی بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەیە بنووسە.

50 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-2)^2+y^2=9$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە کشانەوەی 6 یەکە بۆلای ڕاست بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەیە بنووسە.

51 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-6)^2+(y-4)^2=9$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە کشانەوەی 2 یەکە بۆلای ڕاست بکێشە. هاوکێشەی وێنەکە بنووسە.

52 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-5)^2+(y-4)^2=9$بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە خولانەوەی گۆشەکەی بە 180 بکێشە لە دەوری خاڵی بنەڕەت بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەکە بنووسە.

53 هاوکێشەی لێکەوتی بازنەی $x^2+y^2=100$ لە خاڵی $A(-6,8)$ بدۆزەرەوە.

بەرەنگاری

54 ئەو سێگۆشەیەی کە سەرەکانی $(0,0)$، $(6,0)$، $(0,8)$ بن بکێشە لە دواییدا هاوکێشەی ئەو بازنەیە بدۆزەوە کە بەسەرەکانیدا ڕۆیشتوە.

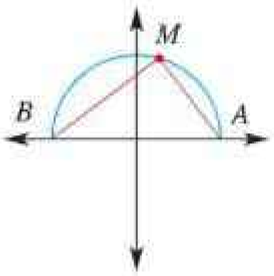
ڕوانین بۆ دواوە

55 پاوان تیرێکی هەڵدا بۆ سەر وێنەی بازنەیەك کە هاوکێشەکەی$x^2+y^2=100$ ئەگەری ئەوەی تیرەکە بکەوێتە ناو بازنەی$x^2+y^2=25$ چەندە؟

56 **گەردوون** ئارام پلێتێکی بەکارهێنا کونێکی بچووکی تێدا بوو تیشکی خۆری پێدا دەڕۆیشت بۆ بینینی ڕۆژگیران. شاشەیەکی سپی لە دووری 50cm لە کونەکەوە دانا. وێنەی خۆرەکەی دەستکەوت کە تیرەکەی xmm تیری وێنەی خۆرەکە چەند دەبێت ئەگەر ئارام شاشەکە دابنێ لە دووری 45cm؟ 25cm؟ 100cm؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

به هۆی شیکارکردنی پرسیارەکانی 57 تا 59 دەیسەلمێنیت کە ئەو چێوەگۆشەیەی لە نیوەی بازنەیەکدا کێشراوە گۆشە وەستاوە، وێنەی بەرامبەر بەکاربهێنە



57 هاوکێشەی ئەو بازنەیەی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی r ، بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی ئەوەی کە پۆتانی خاڵێك m لە خاڵەکان بریتییە لە $\left(a, \sqrt{r^2-a^2}\right)$.

58 لاری هەریەك لە دوو ڕاستەهێڵی MA ، MB بدۆزەوە.

59 بیسەلمێنە کە چێوەگۆشە وەستاوە (لە بیرت بێت: ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون بن ئەوا ئەنجامی لێکدانی لارییەکانیان یەکسانە بە ___؟

پرۆژەی بەش

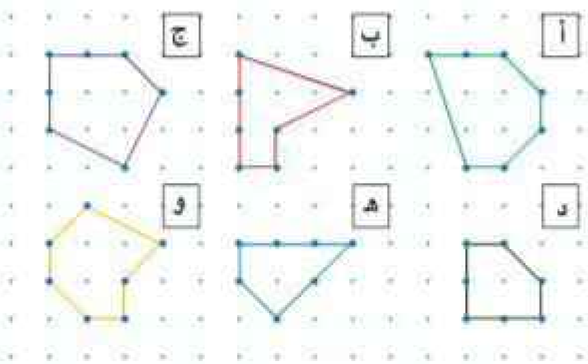
بیرکاری سەرسامکەر

ئەم پرۆژەیە هانت ئەدات بۆ گەیشتن بە ڕێسایەك كە یارمەتیت ئەدات ڕووبەری چەند لایەکی كێشراو لە سەر کاغەزێکی خاڵدار (بیاتی) بدۆزیتەوە. بە دانانی ئەوەی كە هەموو سەرەكانی چەندلاكە دەكەونە سەر خاڵەكانی کاغەزەكە. لە دوایدا سەرسام دەبێت بەبوونی تەنها ڕێسایەك كە دەگونجێت بۆ هەموو چەندلایەك. لەدوایدا كارەكە ئەنجام بدە بەكاری هەرەوەزی لەگەڵ برادەرەكانت لە گرووپی كاركردندا. باشتروایە كارەكە لە نێوان خۆتاندا دابەش بكەن.

چالاكی 1

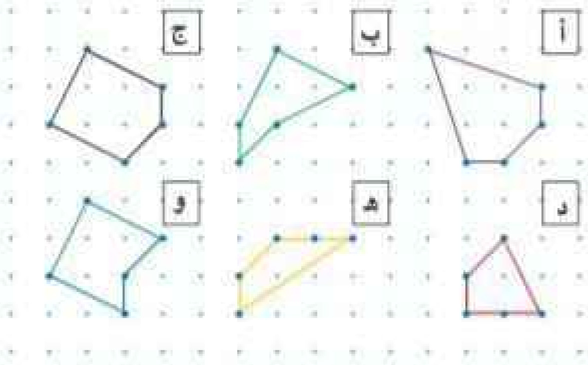
ڕووبەری هەریەك لەم چەندلایەنەی خوارەوە بدۆزەوە. هەستە بەم كارە بە درووستكردنی خشتەكە و تەواوكردنی. N_b هێمایەكە بۆ ئەو خاڵانەی كە دەكەونە سەر چێوەی چەندلایەك N_i هێمایەكە بۆ ئەو خاڵانەی كە دەكەونە ناو چەندلایەكە A هێمایەكە بۆ ڕووبەری چەندلایەكە

كۆمەڵەی یەكەم



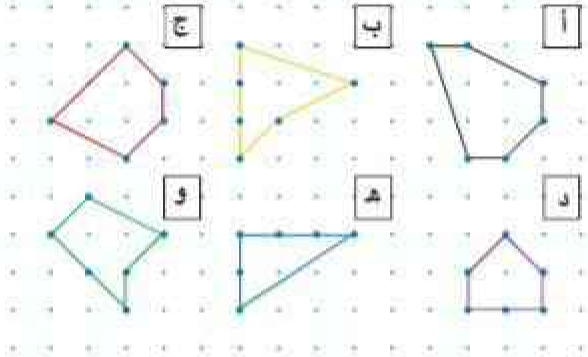
كۆمەڵەی یەكەم			
	N_b	N_i	A
(أ)	7	4	6.5
(ب)			
(ج)			
(د)			
(هـ)			
(و)			

كۆمەڵەی دووەم



كۆمەڵەی دووەم			
	N_b	N_i	A
(أ)			
(ب)			
(ج)			
(د)			
(هـ)			
(و)			

کۆمەڵەی سێیەم



کۆمەڵەی سێیەم			
	N_b	N_i	A
(أ)			
(ب)			
(جـ)			
(د)			
(هـ)			
(و)			

چالاکی 2

بۆ دۆزینەوەی یاسایەك پاساداتی ئەوە بکە کە ژمارەی هەموو ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر چێوەی هەموو چەندلاکان هەمان ژمارەیە.

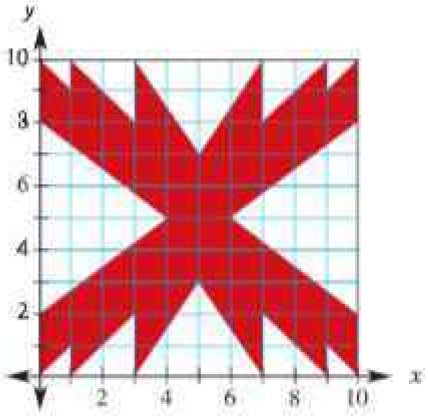
1. ئەو شێوازە چیە کە یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوی ڕووبەرەکە؟
2. ئەو شێوازە بنووسە، کە دۆزیوتەوە، بە شێوەی یاسایەك.
3. ئەو یاسایەی نوسیووتە پاسادان بکە بە ڕێگای کێشانی ژمارەیەك چەندلا لەسەر کاغەزی خاڵدار (بەیانی) و هەژمێری ڕووبەرەکانیان بکە

تۆ یەکەم کەس نیت ئەو یاسایە بدۆزیتەوە. پێش تۆ زانا جۆرج پێك ساڵی 1899ز دۆزیویەتیەوە.

چالاکی 3

شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە

بەشێوەی ڕەمەکی ئەگەر خاڵێك لەسەر کاغەزی بەیانی هەڵبژێری ئەگەری ئەوەی ئەو خاڵە لە خاڵە ڕەنگکراوەکان بێت چەندە؟



7

پێداچوونەوەی بەش

ئەم بۆشاییانەی خوارەوە بە دەستەواژەی گونجاو پڕبکەوە.

1 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ پێکدێت لەیەک ___؟___

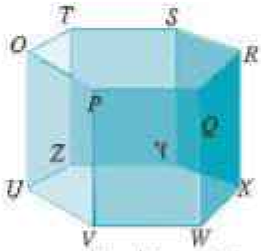
2 یەکتربڕینی دوو ڕووتەخت پێکدێت لەیەک ___؟___

3 بە دوو خاڵی جیاوازدا تەنها یەک ___؟___ دەڕوات.

4 بەسێ خاڵ کە لەڕێکی یەکترنەبن تەنها یەک ___؟___ دەڕوات.

5 ئەگەر دوو خاڵی جیاواز بکەونە ڕووتەختێك، ئەوا ئەو ڕاستەهێڵەی بەو دوو خاڵە دادەڕوات ___؟___

ئەو پوازکە وەستاوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 6 بۆ 9 .



6 دوو ڕووی تەریب ناوبنێ

7 دوو ڕووی ئەستون ناوبنێ

8 دوو لای تەکولۆ ناوبنێ

9 لایەك و ڕوویەکی ئەستون ناوبنێ

10 وێنەیەکی بینراو بۆ پوازکێکی وەستاو کە بنکەکەی لاکێشە بێت دروست بکە بەمەرجێك خاڵی پوکانەوە بکەوێتە لای ڕاستی پوازکەکە.

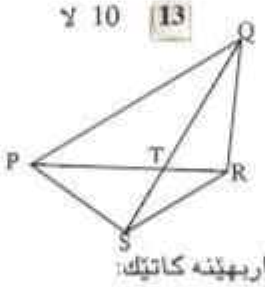
11 وێنەیەکی بینراو بۆ پوازکێکی وەستاو کە بنکەکەی لاکێشە بێت دروست بکە بەمەرجێك خاڵی پوکانەوەی لە پشت پوازکەکە بێت

ناوی ئەم چەندلایانە چیە؟

12 8 لا

13 10 لا

14 12 لا



شێوەکەی سەرەوە بەکاربهێنە کاتێك:

$\widehat{PRQ}=90°$ $\widehat{PTQ}=125°$ $\widehat{RQR}=57°$

$\widehat{PSQ}=83°$ $\widehat{RSQ}=30°$

بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 15 تا 18 ، پێوانەی گۆشەکانی هەرسێگۆشەیەك دیاریبکە.

15 سێگۆشەی RST

16 سێگۆشەی PST

17 سێگۆشەی PQR

18 سێگۆشەی PQT

19 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی هەشت لایەك چەندە؟

20 پێوانەی چەقە گۆشەیەك لە هەشت لایەکی ڕێك چەندە؟

21 پێوانەی گۆشەیەکی ناوەوە لە هەشت لایەکی ڕێك چەندە؟

22 پێوانەی دەرە گۆشەیەك لە هەشت لایەکی ڕێك چەندە؟

وێنەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی کە دوو سەرەکانی دوو خاڵی $(1, -2)$ و $(3, 4)$ بن دیاریبکە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و ڕێژەکەی.

23 3

24 -1

شێوەکە دروستبکەوە و وێنەکەی بکێشە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی کە چەقەکەی خاڵی دیاریکراوە و ڕێژەکەی n ە:

25 $n=3$

26 $n=\frac{1}{2}$

وێنەی ئەم بازنانەی خوارەوە لە ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە

27 $x^2+y^2=49$

28 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$

29 چەقی ئەم بازنەیە $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ ؟

هاوکێشەی ئەم بازنەیە بدۆزەرەوە کە چەقەکەیان M و نیوەتیرەکەیان r بێت.

30 $r=1$ ؛ $M(0, 0)$

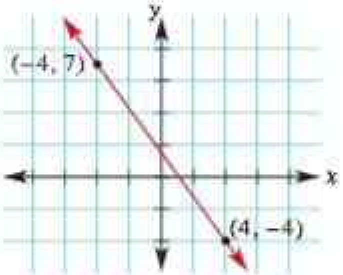
31 $r=8$ ؛ $M(6, -2)$

7 تاقیکردنەوەی بەش

1 کام جووت لە خاڵەکان ڕاستەهێڵێکی ستوون دیاریدەکات لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵەی لە وێنەی خوارەوە کێشراوە ؟

أ (0, 7) و (8, −4)   ب (−7, 4) و (−4, 4)

ج (−7, 0) و (4, 8)   د (−4, 7) و (−4, 4)



2 کام لەم پێوانانەی خوارەوە سێگۆشە دیاری ناکات؟

أ $A=50°$ ؛ $B=85°$ ؛ $C=45°$

ب $AB=12$ ؛ $BC=7$ ؛ $CA=9$

ج $A=90°$ ؛ $B=65°$ ؛ $C=15°$

د $A=18$ ؛ $BC=6$ ؛ $CA=10$

3 کام پێوانەی خوارەوە پێوانەی گۆشەی نۆلایەکی ڕێکە؟

أ 40°   ب 100°

ج 140°   د 160°

4 ڕۆژان دوو ڕاستەهێڵی کێشا لاری یەکەم = −5 و لاری دووەم = 0.2 بێت ئایا ئەم دوو ڕاستەهێڵە.

أ تەریبن   ب ستوونن

ج ناسۆیی   د بێجگە لەوانە

5 جێگۆرکێی ئەندازەیی کە خاڵی (x, y) دەگۆڕێت بۆ خاڵی (−x, −y) بریتییە لە:

أ کشانەوە   ب وێنەدانەوەی تەوەرەیی

ج خولانەوە   د هاوڕێژەی ئەندازەیی

6 بسەلمێنە ئەو چوار لایەی سەرەکانی $A(3, -1)$ $B(9, -5)$ $C=(7, -8)$ $D=(1, -4)$ لاکێشەیە؟

سەرەکانی سێگۆشەیەک بریتییە لە (4, 1) و (2, 2) و (3, 0) پۆتانی سەرەکانی وێنەکەی بەم جێگۆرکێیانە دیاریبکە.

7 وێنەدانەوە بە پێی تەوەرەی سینی

8 کشانەوە 3 یەکە بەلای چەپ و یەک یەکە بۆ خوارەوە.

ئەمانە تەواوبکە

9 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ پێکدێت لە ___؟___

10 یەکتربڕینی دوو ڕووتەخت پێکدێت لە ___؟___

11 ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی جیاوازدا لەناو ڕووتەختێکدا دەڕوات ___؟___

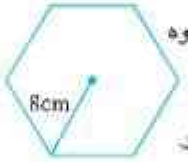
سێگۆشەی ABC بەکاربهێنە کاتێک $A(-1, 8)$ $B(4, 3)$ $C(1, 2)$ بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 12 بۆ 15 .

12 لاری هەر لایەک لە لاکانی بدۆزەوە

13 بیسەلمێنە سێگۆشەکە وەستاوە.

14 پۆتانی خاڵەکانی ناوەڕاستی لاکانی بدۆزەوە.

15 درێژی لاکانی بدۆزەوە هەموو وەڵامەکانت نزیکبکەوە لە نزیکترین بەش لە سەد.



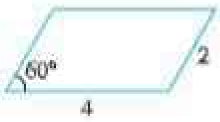
16 ڕووبەری چەند لای بەرامبەر بدۆزەوە

17 پۆتانی وێنەی خاڵی (3 ,3) بە خولانەوە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و گۆشەکەی 45° بدۆزەوە؟

18 ئاوات لە سەر ئەم پارچە ڕاستەهێڵەی خوارەوە بەشێوەیەکی هەڕەمەکی خاڵێکی هەڵبژارد. ئەگەری ئەوەی ئەو خاڵە بکەوێتە نێوان 2 و 2,5 بێت چەندە.

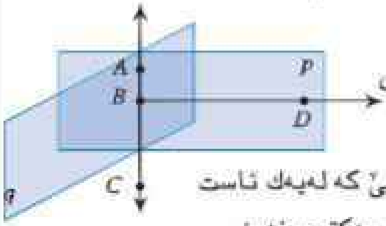
19 پێوانەی چەقە گۆشە لە سێزدەلایەکی ڕێک بدۆزەوە؟

20 ڕووبەری ئەم لاتەریبە بدۆزەوە؟



7 تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

ئەم وێنەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 1 بۆ 9 .



1 یەکتربڕینی هەردوو ڕووتەختی p و q ناوبنێ

2 سێ خاڵ کە لەڕێکی یەکتری بن ناوبنێ

3 سێ خاڵ ناوبنێ کە لەیەک ئاست دابن و لە ڕێکی یەکتری نەبن

4 سێ پارچە ڕاستەهێڵ ناوبنێ.

5 تیشکێك ناوبنێ.

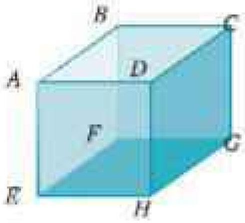
6 دووگۆشەی تەواوکەری یەکتری دیاریبکە.

7 ڕاستەهێڵێك دیاریبکە کە بکەوێتە ڕووتەختی p

8 ڕاستەهێڵێك دیاریبکە نەکەوێتە ڕووتەختی q

9 ڕووتەختی p بە ڕێگایەکی تر ناوبنێ.

ئەم شێوەیەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 10 بۆ 17



10 جووتێك لە ڕووەکانی تەریب بەیەکتر ناوبنێ

11 دوو لای تەکولۆ ناو بنێ

12 لایەك و ڕوویەك ناوبنێ بەمەرجێك لایەکە ئەستوون بێت لەگەڵ ڕووەکە.

13 لایەك وڕووێك ناوبنێ بەمەرجێك لایەکە تەریب بێت بەڕووەکە.

14 دووتۆی گۆشەیەك ناو بنێ وپێوانەکەی دیاریبکە

15 وێنەیەکی بینراو دروستبکە کە یەك خاڵی پوکانەوەی هەبێت بۆ خشتەکێك ئەگەر بزانی خاڵە پوکانەوەکە بکەوێتە پشت خشتەکەکە.

16 وێنەیەکی بینراو دروست بکە دوو خاڵی پوکانەوەی بۆ خشتەکێك هەبێت ئەگەر بزانی ئاسۆ دەکەوێتە پشت خشتەکەکەوە.

17 وێنەیەکی بینراو دروستبکە کە دوو خاڵی پوکانەوە بۆ خشتەکێك هەبێت ئەگەر بزانی ئاسۆبکەوێتە پێش خشتەکەکە.

وێنەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 18 بۆ 21 .

18 ژمارەی چەندلا ڕێکەکان لە شێوەی بەرامبەر چەندە؟ جۆری هەر شێوەیەك دیاربکە.

19 بۆ هەر چەندلایەکی ڕێك کە دۆزیتەوە لەپرسیارەکەی پێشوو پێوانەکانی گۆشەی ناوەوە و چەقە گۆشە و گۆشەکانی دەرەوە دیاریبکە؟

20 ئەستووندەکی هەشت لاکە بدۆزەرەوە.

21 ڕووبەری ئەو چەند لا ڕێکانە بدۆزەوە لەپرسیاری 18 دا.

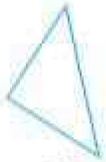
22 دیزاین دارتاشێك هەستا بە گەورەکردنی مێزێکی چوارگۆشە بە زیادکردنی پارچە تەختەیەکی لاکێشەیی بۆ ڕووەکەی. ئایا مێزە تازەکە ڕێکە؟لایەکسانە؟گۆشەکانی یەکسانن؟

وێنەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی کە سەرەکانی (1– ,6) (2 ,4–) دیاریبکە؛بەم دوو هاوڕێژە ئەندازەییە.

23 هاوڕێژە ئەندازەییەکە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و ڕێژەکەی = 2–

24 هاوڕێژە ئەندازەییەکە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و ڕێژەکەی = 0.5

25 شێوەی بەرامبەر بکێشە و وێنەی سێگۆشەکە دروستبکە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی دراوە و ڕێژەکەی = 2 .



وێنەی هەریەك لەم بازنانە بکێشە کە هاوکێشەکانیان ئەمانەن.

26 $x^2+y^2=36$

27 $x^2+y^2=64$

28 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

هاوکێشەی هەریەك لەم بازنانە بدۆزەوە.

29 چەقەکەی خاڵی بنەڕەتەو نت = 2

30 چەقەکەی خاڵی (5– ,1) وە نت = 4

بەشی هەشتەم

سێگۆشەزانی

Trigonometry

1. شیکاری سێگۆشەی وەستاو.
2. گۆشەکانی خولانەوە.
3. پێوانەی بازنەیی و درێژی کەوانە.
4. هاونەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان.

پڕۆژەی بەشەکە

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

سێگۆشەزانی Trigonometry

بەشی 8

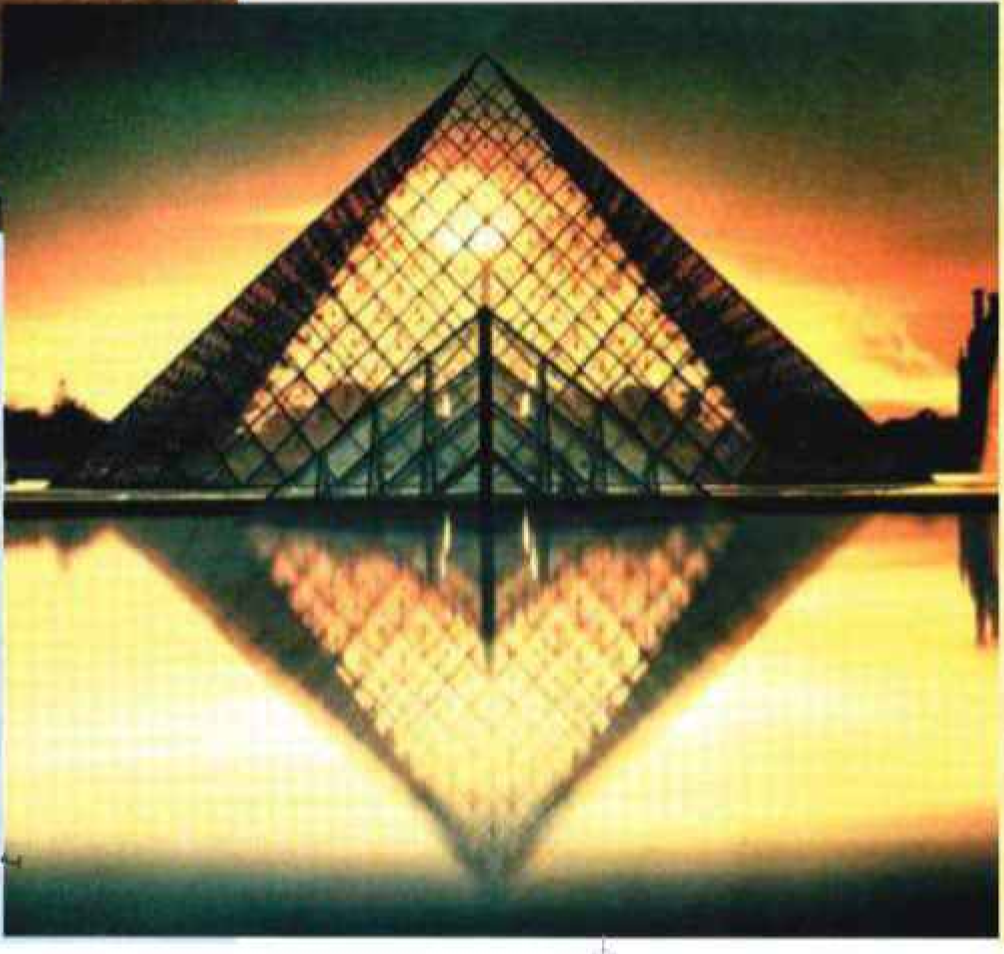
لە نێوان پێوانەکانی لاکانی سێگۆشە و گۆشەکانی پەیوەندی گرنگ هەیە کە زانستێکی کۆن نوێ لێیدەکۆڵێتەوە ئەویش سێگۆشەزانییە.

لە دێر زەمانەوە مرۆڤ گرنگی داوە بە سێگۆشەکان. لەم دوو لایەرە وێنەکان ئاماژە بۆ ئەوە دەکەن. سێگۆشەزانی بەکارهێنانەکانی زۆرفراوانە لە فیزیا و زانستی گەردوون و تەلارسازی و ئەندازە و ئەوانی تر.

وانەکان

1. شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو
2. گۆشەکانی خولانەوە
3. پێوانەی بازنەیی و درێژی کەوانە
4. هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان.

پرۆژەی بەش

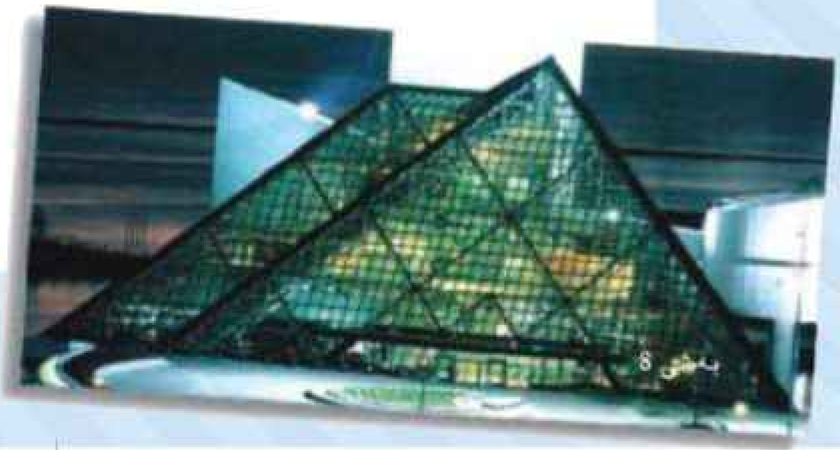


دەربارەی پرۆژەی بەش

بەبۆنەی کردنەوەی پێشانگای جیهانی لە شاری شیکاغۆی ئەمریکی ساڵی 1893 ، جۆرج فیریس چەرخێکی گەورەی دروستکرد، کە بە ناوی خۆیەوە ناسراوە، چەرخەکە خانەخانە کراوە، هەر خانەیەك جێگای چەند کەسێکی لێدەبێتەوە، بە خولانەوەی دۆلابەکە «چەرخەکە» ئەو نەفەرانەی دەگواستەوە لە خوارەوە بۆ سەرەوە و بە پێچەوانەوە. لە ماوەی کارکردنت لە بەشەکە، هەڵدەستیت بە پێشخستنی ئەم سامپڵە (نموونە) بۆ لێکۆڵینەوەی گۆڕانی بەرزبوونەوەی نەفەرەکەی خانەکە بە تێپەڕبوونی کات.

دوای تەواوبوونت لە بەشەکە دەتوانیت:

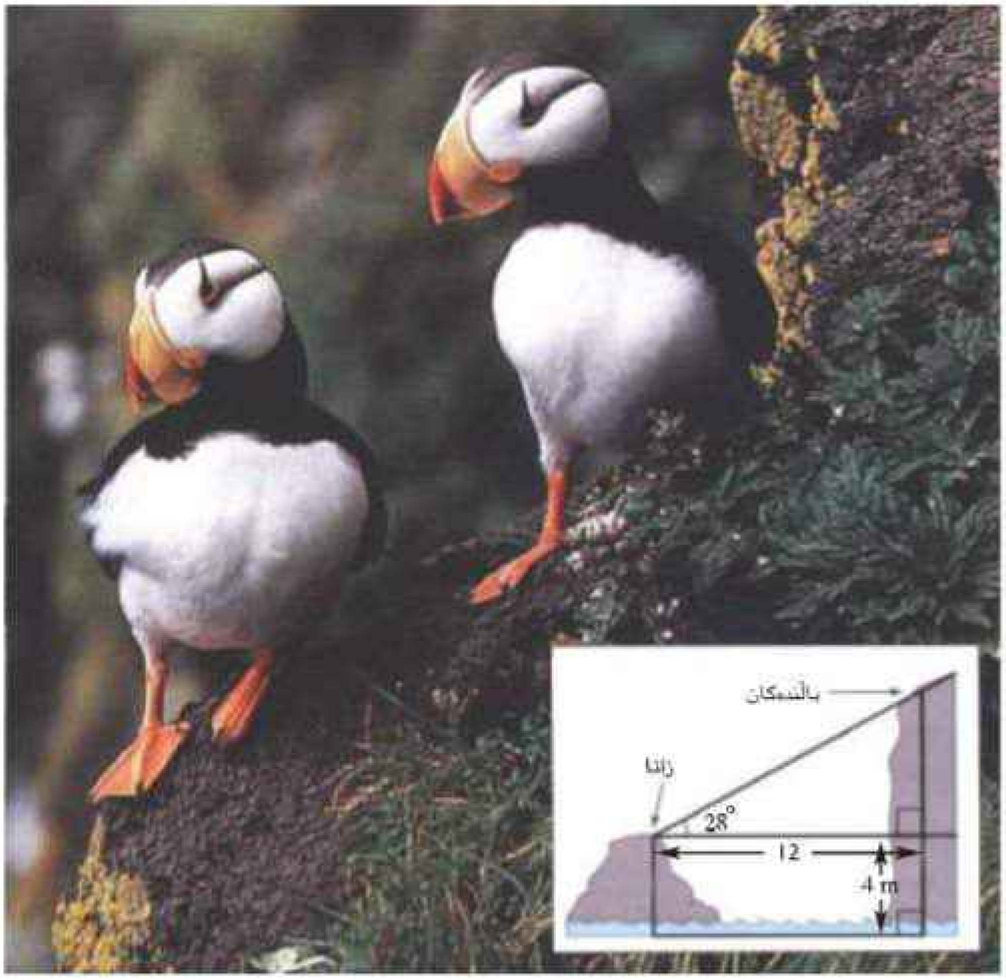
- سامپڵێکی بیرکاریانە دابنێیت بۆ بەرزی خاڵێك کە دەکەوێتە سەر چێوەی چەرخەکە بەپێی کات.
- ڕوونکردنەوەی هەر پێکهێنەرێك لەپێکهێنەرەکانی سامپڵەکە چی دەگەیەنێ لەژیانی ڕۆژانە.
- دیاریکردنی خێرایی خاڵێك لەسەر چێوەی چەرخەکە.



وانەی 1

شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو

Solving Right Triangle



ئامانجەکان

- ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی تیژ هەژماردەکات و جیا دەکاتەوە.
- سێگۆشەی وەستاو بەبەکارهێنانی ڕێژە سێگۆشەییەکان شیکاردەکات.

بۆچی؟
دەتوانیت ڕێژە سێگۆشەییەکانی سێگۆشەیەکی وەستاو بەکاربهێنێت بۆ شیکاری ئەو پرسیارانەی لە ژیانی ڕۆژانەدا دێتە ڕێگامان وەک لە دیاریکردنی بەرزی ئەو باڵندانەی لە وێنەکەدا دەرکەوتوون لە ڕووی ئاوەکەوە.

جێبەجێکردنەکان
باڵندەکان

یەکێك لە زاناکان هەستا بەگرتنی وێنەی کۆمەڵە باڵندەیەك لەقەدپاڵی شاخێکدا وەستابوون. بۆ دۆزینەوەی بەرزی ئەو باڵندانە لە ڕووی ئاوەکەوە. زاناکە هەستا بە پێوانی ئەو گۆشەی دروست بووە لە ئەنجامی هێڵی سەیرکردنی بۆ بلندەکان لەگەڵ هێڵی ئاسۆیی، بینی پێوانەی گۆشەکە 28° زاناکە چۆن ئەم کارەی ئەنجامدا.ئەگەر بزانیت ئەو لە بەرزی 4 m وەستاوە و دووری نێوان ئەو و قەدپاڵی شاخەکە 12m بوو؟

بۆ ئەوەی بەرزی شوێنی باڵندەکان دیاریبکەیت سێگۆشەزانی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەیەك لە گۆشەکانی سێگۆشە وەستاوەکە یان درێژی لایەك لە لاکانی.

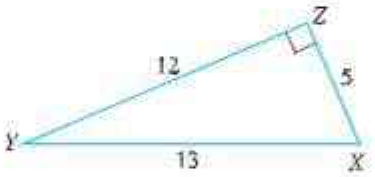
بیربکەوە که ژێی سێگۆشەی وەستاو ئەولایەیە کە بەرامبەر گۆشە وەستاوەکەیە. لەو سێگۆشەی لە لای چەپ کێشراوە، دەبینین $\overline{AB}$ ژێیەو و $\overline{AC}$ تەنیشت گۆشەی A و $\overline{BC}$ لای بەرامبەری گۆشەی A .

خاڵی چاودێری ✔
لای تەنیشت و بەرامبەری گۆشەی B دیاریبکە.

Trigonometric Ratios $\hat{A}$ **ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $\hat{A}$**

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{تەنیشت}} \qquad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{تەنیشت}}{\text{ژێ}} \qquad \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{ژێ}}$$

سەرنج بدە sin A = sine A , cos A = cosine A , tan A = tangent A



نموونە

1. هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی X لەسێگۆشەی بەرامبەر هەژماربکە.

شیکار

$\sin \hat{X} = \frac{YZ}{XY} = \frac{12}{13} = 0.9231$

$\cos \hat{X} = \frac{XZ}{XY} = \frac{5}{13} = 0.3846$ $\qquad$ $\tan \hat{X} = \frac{YZ}{XZ} = \frac{12}{5} = 2.4$

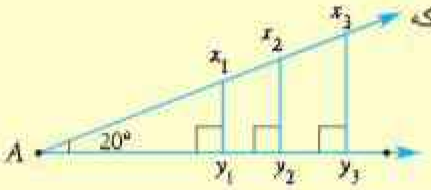
هەوڵبدە هەرسێ ڕێژە سێگۆشەیەکان بۆ گۆشەی Y لە سێگۆشەکەی سەرەوە هەژماربکە وەڵامی تەواوی بدەوە وەڵامەکانت لە نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەرەوە.

چالاکی

دۆزینەوەی ڕێژەی سێگۆشەکان Explrering Trigonometric Ratios

پێویستیت بە پرگالێك و ڕاستەیەك و بژمێرێك هەیە.

خشتەیەك دروستبکە وەك خشتەکەی خوارەوە.



1. ئەوەی لە خشتەکەدایە بینووسەوە. لەدوایدا تەواویبکە لە ڕێگای پێوانی لایە دیاریکراوەکان لەگەڵ دۆزینەوەی ڕێژە سێگۆشەیەکانی گۆشەی A .
2. ئایا ئەو بەهایانەی نووسیوتە لە ستونی $\sin A$ بە نزیکەیی یەکسانن؟ کارەکە لە ستونی $\cos A$ وایە؟ لەستوونی $\tan A$ وایە؟

$\tan \hat{A} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{تەنیشت}}$	$\cos \hat{A} = \frac{\text{تەنیشت}}{\text{ژێ}}$	$\sin \hat{A} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{ژێ}}$	ژێ	تەنیشت $\hat{A}$	بەرامبەر $\hat{A}$	سێگۆشە
						Ax_1y_1
						Ax_2y_2
						Ax_3y_3

3. ئەو ئەنجامانەی دەستتکەوتووە بەراوردی بکە لەگەڵ ئەنجامەکانی هاوڕێکانت لە پۆلەکەدا.
4. ئایا دەتوانیت گریمانەیەك دابڕێژیت دەربارەی هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی A ؟

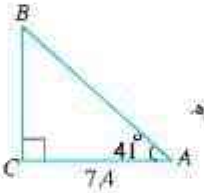
خاڵی چاودێری ✓

بەهاکانی ڕێژەی سێگۆشەیی گۆشەیەکی تیژ ناگۆڕێت بە گۆڕانی سێگۆشە وەستاوە بەکارهاتووەکە، هەروەك لە چالاکی سەرەوە بۆت دەرکەوت، بەهاکانی ئەم ڕێژانە تەنها بە پێوانەی گۆشەکە دیاری دەکرێت.

دەتوانیت بەهاکانی ڕێژە سێگۆشەیەکانی گۆشەکەت دەست بکەوێت بەزانینی پێوانەکەی بەبەکارهێنانی بژمێری زانستی. و دەتوانیت ڕێژە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی هەندێك لە لاکانی سێگۆشەی وەستاو هەروەك نموونەی 2 ڕوونیدەکاتەوە.

نموونە 2

درێژی لاکانی سێگۆشەی بەرامبەر بدۆزەرەوە.



شیکار

لە بەر ئەوەی درێژی AC زانراوە پێویستە درێژی هەریەك لە $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ بدۆزینەوە.

$\cos A$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی AB

$\tan A$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی BC

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \qquad \tan A = \frac{BC}{AC}$$

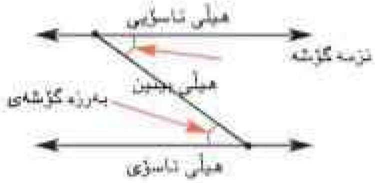
$$\cos 41° = \frac{7.4}{AB} \qquad \tan 41° = \frac{BC}{7.4}$$

$$AB = \frac{7.4}{\cos 41°} \qquad BC = 7.4 \times \tan 41°$$

$$BC = 7.4 \times 0.8693$$

$$AB \approx \frac{7.4}{0.7547} \approx 9.8 \qquad BC = 6.4$$

هەوڵبدە درێژی لاکانی سێگۆشەی بەرامبەر بدۆزەرەوە



بەرزە گۆشە Angle of Elevation ئەو گۆشەیە کە دەکەوێتە نێوان هێڵی ئاسۆیی لەگەڵ هێڵی بینینی خاڵێکی بەرزتر لە خۆی.

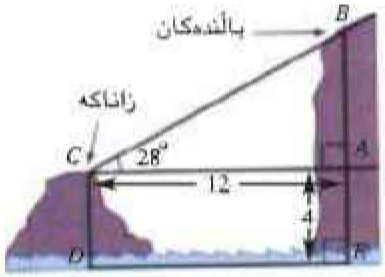
نزمە گۆشە Angle of Depression ئەو گۆشەیە کە دەکەوێتە نێوان هێڵی ئاسۆیی لەگەڵ هێڵی بینینی خاڵێکی نزمتر لە خۆی.

نموونە 3

بگەڕانەوە بۆ پرسیاری باسکراو لە سەرەتایی وانەکە.بەرزی شوێنی باڵندەکان لە سەر ڕووی ئاوەکە بدۆزەرەوە.

جێبەجێکردنەکان
باڵندەکان

شیکار



$\overline{BE}$ بەرزی شوێنی باڵندەکانە لەڕووی ئاوەکەوە.

لەبەرئەوەی $BE = BA + AE$

وە لەبەر ئەوەی $AE = CD = 4\text{m}$ ، کەواتە $\tan 28° = \dfrac{AB}{12}$

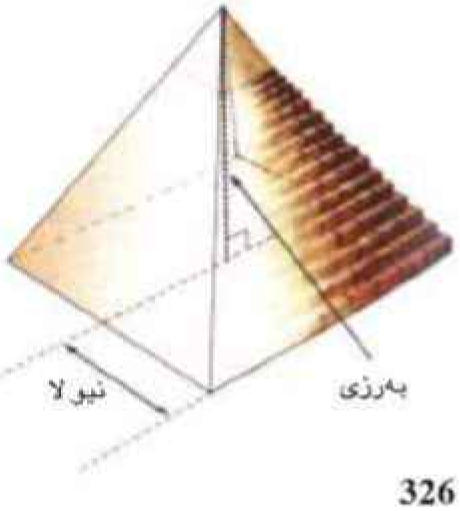
$$AB = 12 \times \tan 28°$$

$$AB \approx 6.38''$$

$$BE = BA + AE = 6.38 + 4 = 10.38\text{m}$$

دەروازەیەك لەسەر ڕۆشنبیری فیرعەونییەکان فیرعەونییەکان پەیوەندیەکی سێگۆشەییان بەکارهێناوە ناویان ناوە سیکد کە لاری ڕووی هەرەمەکە دەگەیەنێت.

$$\text{سیکد Cotangent} = \frac{\text{دوو ئەوەندەی پێوانی لای بنکەی هەرەم}}{\text{7 ئەوەندەی بەرزی هەرەمەکە}}$$



تێبینی ئەوە بکە کە سیکد هەڵگەڕاوەی سایەی (هەڵگەڕاوەی tan) گۆشەکەیە کە پێی دەوترێت سایەتەواوی گۆشەکە Cotangent یان cot گۆشەکە بەکورتکراوەیی.

جێبەجێکردنەکان
ئەندازە

ئەگەر بمانەوێت سێگۆشەیەکی وەستاو شیکاربکەین پێویستە پێوانەی گۆشەکانی سێگۆشەکە بدۆزینەوە لەگەڵ درێژی لا نەزانراوەکانی سێگۆشەکە. لە کارەکەدا بژمێری زانستی بەکاربهێنە. بۆ دۆزینەوەی پێوانەی ئەو گۆشەی کەیەکێك لە ڕێژە سێگۆشەیەکانی دەزانیت. ئەو ڕاستییە بەکاربهێنە کە: کۆی گۆشەکانی ناوەوەی سێگۆشەکە دەکاتە180° واتە کۆی هەردوو گۆشە تیژەکە لە سێگۆشە وەستاوەکە90°.

نموونــــــــە 4

سێگۆشەی بەرامبەر شیکاربکە بە دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی کە نزیکبکرێتەوە لە نزیکترین پلە و درێژی ژێیەکەی نزیکبکەیتەوە بۆ نزیکترین بەش لە دە.
ئەگەر زانیت $\tan 28 = 0.55$

شیکار

1. $\tan R = \frac{3.8}{6.8}$

$$R = \tan^{-1}\frac{3.8}{6.8} = 29^\circ$$

2. لەبەرئەوەی کۆی پێوانەی دوو گۆشە تیژەکە90° ئەوا $90^\circ - 29^\circ = 61^\circ$

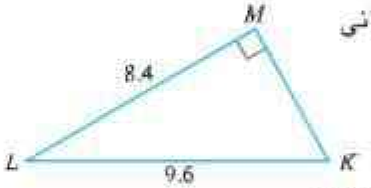
3. بیردۆزی فیثاگۆرس بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی ژێیەکە.

$$(RS)^2 = (6.8)^2 + (3.8)^2$$

$$RS = \sqrt{(6.8)^2 + (3.8)^2}$$

$$RS = 7.8$$

هەوڵبدە



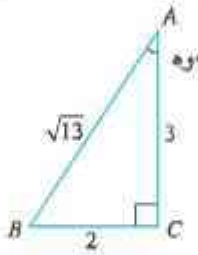
سێگۆشەی بەرامبەر شیکاربکە بە دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی بە نزیککردنەوەی بۆ نزیکترین پلە و درێژی لایەکەی بۆ نزیکترین بەش لە دە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

1. چۆن سێگۆشەکە شیکاردەکەیت لە نموونەی 4 بە دەستپێکردن بە دۆزینەوەی ژێیەکەی، لە دوایدا بەبەکارهێنانی cos یان sin بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکان؟
2. لە دوای دۆزینەوەی پێوانەیR° ئایا دەتوانی درێژی ژێیەکە بدۆزیتەوە بەبێ بەکارهێنانی بیردۆزی فیثاگۆرس؟

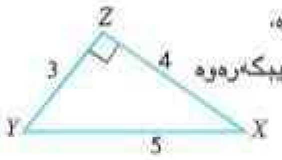
ڕاهێــــــــنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

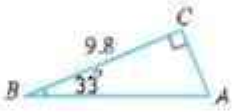


1 چۆن ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی A لە سێگۆشەی بەرامبەر دەدۆزێتەوە
2 چۆن پێوانەی دووگۆشەی A و B لە سێگۆشەی بەرامبەر دیاریدەکەیت.
3 جیاوازی نێوان $\sin^{-1} A$ و $\frac{1}{\sin A}$ چییە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

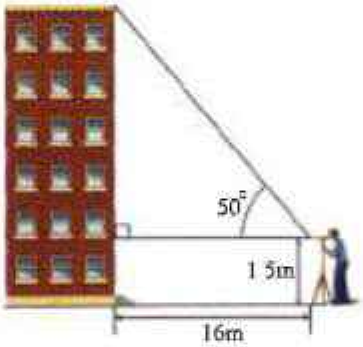


4 ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی X لە سێگۆشەی لای چەپ بدۆزەرەوە، وەڵامەکەت بە تەواوی بنەرەوە، بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکیبکەرەوە
5 درێژی هەردوو لای AC و BA لە سێگۆشەی لای ڕاست بدۆزەرەوە.

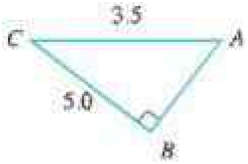


جێبەجێکردنەکان

6 ئەندازە ئەندازیاریك لە دووری m16 لە تەلاریکەوە وەستاوە سەیری بەرزترین خاڵی تەلارەکەی دەکرد بە دووربینێك لەبەرزی 1.5 m لەزەویەوە دانرابوو بەرزی تەلارەکە چەندە ئەگەر پێوانەی بەرزە گۆشەکە 50° بێت؟

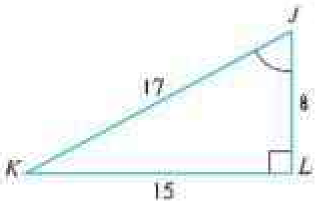


7 ئەم سێگۆشەیەی خوارەوە شیکاربکە. پێوانەی گۆشەکان بدۆزەرەوە بە نزیکی بۆ نزیکترین پلە و درێژی لای AB بەنزیکی بۆ نزیکترین دە.



ڕاهێنان و جێبەجێکردن

سێگۆشەی JKL بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای داواکراو. با وەڵامەکان تەواوبن.لە دوایدا بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەوە.

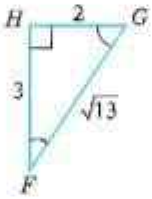


8 $\sin \hat{K}$ **9** $\sin \hat{J}$

10 $\cos \hat{J}$ **11** $\cos \hat{K}$

12 $\tan \hat{K}$ **13** $\tan \hat{J}$

سێگۆشەی FGH بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای داواکراو. با وەڵامەکان تەواوبن.لە دوایدا بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەوە.



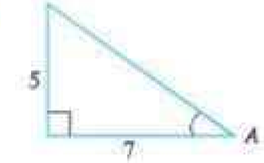
14 $\sin \hat{G}$ **15** $\sin \hat{F}$

16 $\cos \hat{G}$ **17** $\cos \hat{F}$

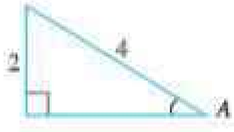
18 $\tan \hat{G}$ **19** $\tan \hat{F}$

پێوانەی گۆشەی A بەبەکارهێنانی بژمێر (ئەگەر هەبێت) بدۆزەرەوە.

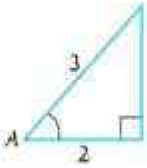
20



21



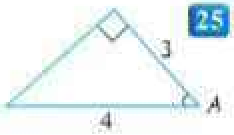
22



23

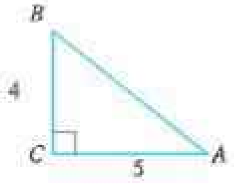
24

25

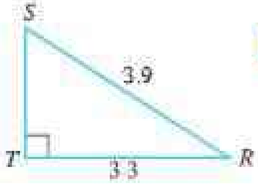


ئەم سێگۆشانە شیکار بکە. پێوانەی گۆشەکە بدۆزەرەوە بە نزیکی بۆ نزیکترین پلە و درێژی لایەکی بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەوە.

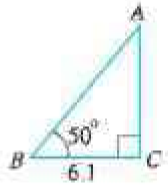
26



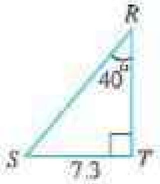
27



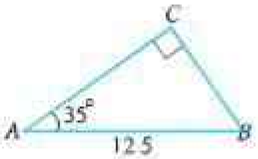
28



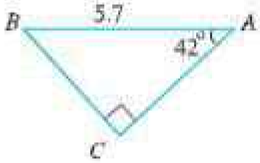
29



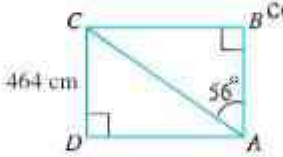
30



31



32 بسەلمێنە پەیوەندی $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ هەمیشە ڕاستە کاتێك $\cos A \neq 0$



33 ئەندازە درێژی هەریەکە لە لای AD و تیرەی AC لە لاکێشەی بەرامبەر بدۆزەرەوە.

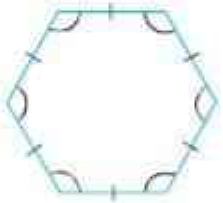
جێبەجێکردنەکان

34 جوانکاری ماڵەکان باوکی گوڵ بەهار ویستی (بالەکۆنێك) دروستبکات کە شێوەی سێگۆشە وەستاوی هەبێت ویستی ژێی سێگۆشەکە 6m بێت و دوو لای گۆشە وەستاوەکە لە درێژیدا یەکسان بن.

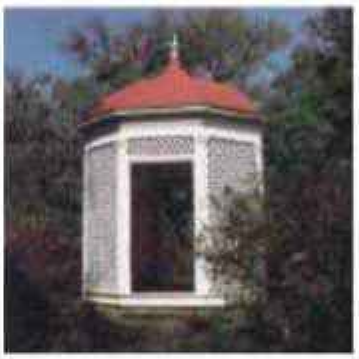
أ درێژی هەریەکە لە دوو لای گۆشە وەستاوەکە بدۆزەرەوە.

ب ڕووبەری بالەکۆنەکە بدۆزەرەوە.

بەرەنگاری



35 بینا بەڕێوەبەری باخچەی گشتی ویستی هۆڵێك بۆ پشوودان دروست بکات بنکەکەی بە شێوەی شەشلایەکی ڕێك بێت و درێژی لایەکی 10 m بێت، ئەگەر تێچوونی دارشتنی بنکەکە 170 هەزار دینار بێت بۆ هەرمەترە چوارگۆشەیەك. ڕێژە سێگۆشەیەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بڕی تێچونی دارشتنی بنکەکە.



ڕوانینێک بۆ دواوە

پلەی هەریەک لەم زۆر ڕادەدارانە دیاریبکە.

36 $3x^2-5x^8+4x^3+2$

37 $(x^2-9)(x^3+4)$

شیتەڵ بکە

38 $2x^3-18x$

39 $3x^3-7x^2+2x$

هەریەک لەم بڕانەی خوارەوە بە سادەترین شێوە بنووسە، دوای ڕێژەکردنی ژێرە.

40 $\frac{3}{\sqrt{2}}$

41 $\frac{1}{\sqrt{3}}$

42 $\frac{5}{1-\sqrt{2}}$

43 $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

ناوەندە ژمێرەیی هەریەکە لەم بەهایانەی خوارەوە بدۆزەرەوە لە دوایدا لادانی پێوانەکەیان بدۆزەرەوە

44 110; 119; 125; 130; 78; 100; 113; 121; 103; 99; 122; 107; 102

45 22; 26; 28; 17; 19; 24; 36; 25; 14; 17; 46; 53; 25; 18; 34; 12

ڕوانینێک بۆ پێشەوە

46 ئەندازە ئەگەر خاڵێک بخولێتەوە بە دەوری چەقی خولانەوە $360°$ ، ئەوا ڕێڕەوەکەی بازنەیەکی تەواو دەبێت. ئەو گۆشە خولانەوە بدۆزەرەوە کەوا لە ڕێڕەوی خاڵەکە دەکات ببێتە نیوە بازنەیەک؟ چارەکە بازنەیەک؟

گۆشەکانی خولانەوە Angles of Rotation

بۆچی؟ دەتوانیت گۆشەکانی خولانەوە بەکاربهێنیت بۆ باسکردنی تێکرای خولانەوەی بزوێنەری فڕۆکەیەکی پەروانەدار

ئامانجەکان

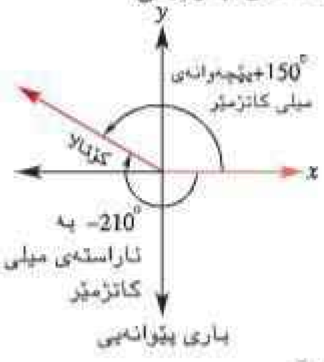
- گۆشەی گەڕانەوە بۆ گۆشەیەك دیاریدەکات.
- ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەیەك لە باری پێوانەییدا دیاریدەکات.

جێبەجێکردنەکان

فڕۆکەوانی

پەروانەی یەکێك لە فڕۆکەکان 1100 خول دەخولێتەوە لە خولەکێکدا، ئەو خاڵەی لەسەر پەروانەی فڕۆکەکەیە چەند پلە دەخولێتەوە لە چرکەیەکدا؟

ئەگەر پێناسەی گۆشە لە ئەندازەدا بریتی بێت لەو شێوەی کە دروست دەبێت لە ئەنجامی بەیەکگەیشتنی دوو تیشك هاویەشبن لە خاڵی بنەڕەتدا. ئەوا پێناسەکەی لە سێگۆشەزانیدا بریتییە لە **خولانەوەی تیشکێك** بەدەوری خاڵی بنەڕەتدا لە شوێنێکەوە بۆ شوێنێکی تر. هەر شوێنێکی تیشکەکە کە دەخولێتەوە لەگەڵ شوێنی دەستپێکردنی گۆشەکە، گۆشەیەك دیاریدەکات پێی دەوترێت گۆشەی خولانەوە **Angle of Rotation** بیرکاریزانەکان هەندێ جار پیتی یۆنانی « θ ثیتا » بەکاردەهێنین بۆ ناولێنانی گۆشەی خولانەوە.

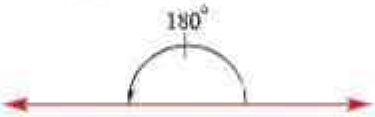


جێگای دەستپێکردنی تیشکەکە پێی دەوترێت لای یەکەمی **Initial side** گۆشەو شوێنی وەستانەکەی پێی دەوترێت کۆتالا **Terminal side** . گۆشەکە لە باری پێوانەییدا دەبێت کاتێك سەرەکەی لە خاڵی بنەڕەتدا دەبێت لە ڕووتەختی پۆتاندا و لای یەکەمی دەکەوێتە سەر نیوەی موجەب لە تەوەرەی سینی.

ئەگەر خولانەوەکە بە ئاراستەی پێچەوانەی جولانەوەی میلی کاتژمێر رویدا ئەوا پێوانەی گۆشەکە موجەب **Positive** دەبێت. وپێوانەی گۆشەکە سالب **Negative** دەبێت ئەگەر خولانەوەکە بە ئاراستەی جولانەوەی میلی کاتژمێر بێت.

(پلە) دادەنرێت بەگرنگترین پێوانەی گۆشە و ئامازەی بۆ دەکرێت بەهێمای(°). و لەبەر ئەوەی ئەو گۆشەیەی دەستمان دەکەوێت لە خولێکی تەواوی تیشکەکە دەکاتە °360 ئەوا پلە پێناسە دەکرێت بەوەی پێوانەی گۆشەی پەیدابوو لە خولانەوەی تیشکەکە لە $\frac{1}{360}$ لە خولێکی تەواو.

گۆشەیەك کە پێوانەکەی °45 دەکاتە $\frac{1}{8}$ خولێکی تەواو



گۆشەیەك کە پێوانەکەی °180 دەکاتە $\frac{1}{2}$ خولێکی تەواو

گۆشەیەك کە پێوانەکەی °270 دەکاتە $\frac{3}{4}$ خولێکی تەواو

✔ خاڵی چاودێری

ئاڕاستەی خولانەوەیەك كە گۆشەكەی $-90°$ و $120°$ چییە؟ ئەو بەشەی كە هەریەكە لەم دوو خولانەوەیە لە خولێكی تەواو پێكیدێنێت چەندە؟

نموونە 1

بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەكەی سەرەتای وانەكە.
خاڵێك لەسەر پەروانەی ئەو فڕۆكەیە لە چركەیەكدا چەند پلە دەخولێتەوە.

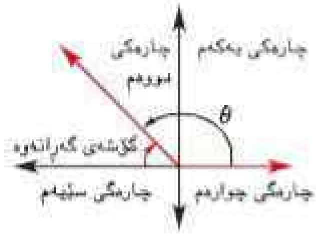
شیكار

پەروانەكە 1100 خول لە خولەكێكدا دەسوڕێتەوە، لەبەر ئەوە خاڵەكە لەسەر پەروانەی فڕۆكەكە $1100\times360° = 397000°$ دەخولێتەوە لە خولەكێكدا. و بەم شێوەیە خولانەوەی خاڵەكە لەسەر پەروانەی فڕۆكەكە لەیەك چركەدا $\frac{396000°}{60} = 6600°$

هەوڵبدە پەیكەكانی مۆسیقا 33.3 خول لە خولەكێكدا دەخولێنەوە. خاڵێك لەسەر پەیكەكە لە یەك چركەدا چەند پلە دەخولێتەوە؟

لەوانەی سێیەمدا فێردەبێت چۆن هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەكانی گۆشەیەك لەباری پێوانەیی بكەیت. كاتێك پێوانەكەی لە $90°$ زیاتر دەبێت (یان كەمتر دەبێت لە سفر) بۆ ئەوەی بتوانیت ئەمە بكەیت لە مەودوا پێویستت بە دیاریكردنی پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە دەبێت بۆ گۆشەكە لەباری پێوانەییدا.

ئەگەر θ گۆشەیەك بێت لە باری پێوانەییدا ئەوا (گۆشەی گەڕانەوەی) ئەو گۆشە تیژە موجەبەیە كە پێكدێت لە كۆتالا گۆشەكە و بەشێك لە تەوەرەی سینی (موجەب یان سالب) كە نزیكترە لێیەوە. ئەگەر بزانی كە بەشی موجەب لە تەوەرەی سینی لە هەردوو چارێكی یەكەم و چوارەم دایە. و بەشی سالب لە دوو چارێكی دووەم و سێیەم دایە.



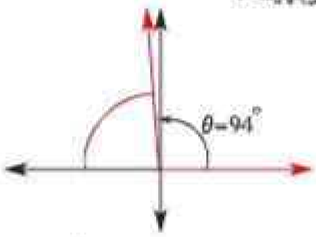
نموونە 2

گۆشەی گەڕانەوە بۆ هەریەك لەم گۆشانە چەندە!

أ $\theta=94°$	ب $\theta=245°$
ج $\theta=290°$	د $\theta=-110°$

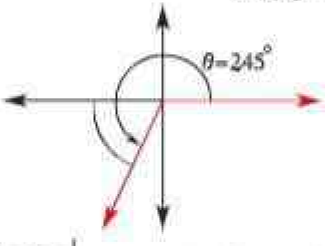
شیكار

أ كۆتالا گۆشەی $94° = \theta$ لە چارێكی دووەم دایە. بەشی سالیب لە تەوەرەی سینی بەكاربهێنە .



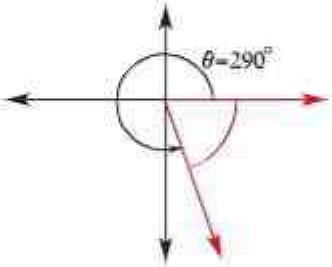
پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $86° = |180°-94°|$

ب كۆتالا گۆشەی $245° = \theta$ لە چارێكی دووەم دایە بەشی سالیب لە تەوەرەی سینی بەكاربهێنە.



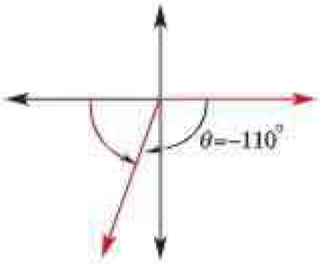
پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $65° = |180°-245°|$

ج کۆتالا گۆشەی $\theta = 290^{\circ}$ دەکەوێتە چارێگی چوارەم. بەشی موجەب لە تەوەرەی سینی بەکاربهێنە.



پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $|360^{\circ} - 290^{\circ}| = 70^{\circ}$

د کۆتالا گۆشەی $\theta = -110^{\circ}$ دەکەوێتە چارێگی سێیەم بەشی سالیب لە تەوەرەی سینی بەکاربهێنە.



پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $|180^{\circ}-110^{\circ}| = 70^{\circ}$

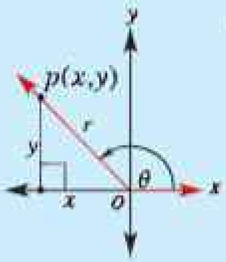
هەوڵبدە گۆشەی گەڕانەوە چەندە بۆ گۆشەی $\theta = 315^{\circ}$، و گۆشەی $\theta = -235^{\circ}$ لەباری پێوانەییدا؟

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ژمارەی ئەو گۆشانەی دەکەونە نێوان 0° و 360° چەندە کە لە هەمان گۆشەیی گەڕانەوەدا بەشداری دەکەن.

ئەگەر واتدانا کە x و y پۆتانی خاڵێکن لەسەر کۆتالا گۆشەیەك لەباری پێوانەیی. ئەوا لە توانات دەبێت نیشانەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی کە دەگەڕێتەوە بۆ گۆشەیەك دیاریبکەیت.

ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشە θ

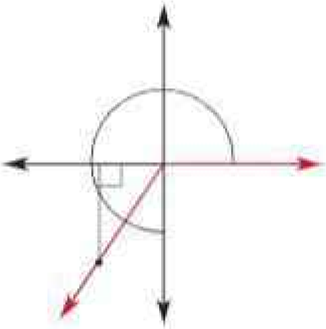
ئەگەر $p(x, y)$ خاڵێك بێت لە سەر کۆتالا گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا، ئەوا دووری نێوان P و خاڵی بنەڕەت لەڕووتەختی پۆتاندا دەکاتە:



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad x \neq 0$$

نموونە 3 خاڵی $P(-2, -3)$ دەکەوێتە سەر کۆتالا گۆشەی θ لەباری پێوانەیی. هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی بکە



شیکار

وێنەیەکی بۆ بکێشە $x = -2 \quad y = -3$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

هەوڵبدە خاڵی $P(3, -5)$ دەکەوێتە سەر کۆتالا گۆشەی θ لە باری پێوانییدا، هەژمێری ڕێژەی سێگۆشەییەکانی بکە.

چالاکی

دۆزینەوەی نیشانەکانی ڕێژە سێگۆشەییەکان لە چارێگەکانی ڕووتەختی پۆتاندا
Exploring the Sign of Trigonometric Ratios

ڕێژە سێگۆشەیی	چارێکی			
	یەکەم	دووەم	سێیەم	چوارەم
$\sin\theta$	+			
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

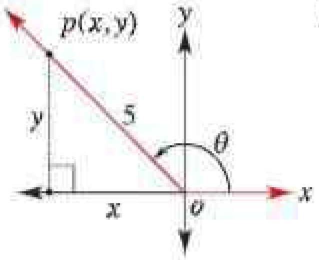
1. خشتەی بەرامبەر دروستبکە و تەواوی بکە و نیشانەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی بۆ گۆشەی θ دیاریبکە لە باری پێوانەییدا. بەپێی ئەو چارێگەی کۆتالا دەکەوێتە ناویەوە.
2. کۆتالا گۆشەی θ دەکەوێتە کام چارێگەوە، ئەگەر $\sin\theta=-\frac{2}{7}$ ، $\cos\theta=-\frac{2}{7}$ ، $\tan\theta=-\frac{1}{5}$ هەموو وەڵامەکانی کە لە تواناداية باسبکە.
3. ئایا r (ژێ)کاردەکاتە سەر نیشانەی هەریەك لەڕێژە سێگۆشەییەکان؟هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.
4. کام لە دوو گۆڕاوی x یان y نیشانەی $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$ دیاریدەکەن؟

خاڵی چاودێری ✓

ئەگەر زانیت کۆتالا گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا دەکەوێتە کام چارێگەوە و بەهای ڕێژەیەك لە سێ ڕێژە سێگۆشەکانت زانی. دەتوانیت هەژمێرەی دوو ڕێژەکەی تر بکەیت.

نموونە 4

هەژماربکە $\sin\theta$ ، $\tan\theta$ ئەگەر بزانی گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا و کۆتالاکەی دەکەوێتە چارەگی دووەم $\cos\theta=-\frac{3}{5}$.



شیکار

وێنەکە بکێشە و هەژمێری پۆتانی خاڵی P بکە لەبەرئەوەی $\cos\theta=-\frac{3}{5}<0$ ئەوا x سالبە کەواتە $x=-3$ وە $r=5$

بۆ هەژمێرکردنی y بیردۆزی فیثاگۆرس بەکاربهێنە.

$$5^2=(-3)^2+y^2$$
$$y^2=25-9=16$$
$$y=\pm\sqrt{16}=\pm4$$

$y=4$ $\qquad$ $y>0$ $\qquad$ $P(x,y)$ دەکەوێتە چارەگی دووەم

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$ $\qquad$ $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$

هەوڵبدە $\cos\theta$ و $\tan\theta$ هەژمێربکە ئەگەر بزانی گۆشەی θ لەباری پێوانەییدایە وکۆتالاکەی دەکەوێتە چارەگی سێیەم و $\sin\theta=-\frac{4}{5}$.

ئەگەر کۆتالاکەی گۆشەی θ لەباری پێوانەییدا لەگەڵ تەوەری صادی $(x=0)$ جووت بێت ئەوا $\tan\theta$ پێناسە نەکراوە.

خاڵی چاودێری ✓ هەژمێرەی ڕێژە سێگۆشییەکانی گۆشەی $\theta=90°$ بکە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1. جیاوازی چییە لەنێوان گۆشەکانی سێگۆشەی وەستاو و گۆشەکانی خولانەوە؟

جێبەجێکردن

2 ئەو جیاوازییانەی هەیە لە نێوان ڕێژە سیگۆشەییەکانی گۆشەیەك و ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی گەڕانەوەکەی چییە؟ هۆیەکانی ئەم جیاوازییانە چییە؟

3 ئایا پێویستیت بە زانینی پێوانەی گۆشەیەك هەیە بۆ ئەوەی هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی بکەیت؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 **فڕۆکەوانی** پەروانە گەورەکەی فڕۆکەی هەلیکۆپتەرێك 430 خول لە خولێکدا دەخولێتەوە. خاڵێك لەسەر پەروانەی ئەو فڕۆکەیە لە چرکەیەکدا چەند پلە دەخولێتەوە.

5 گۆشەی گەڕانەوە بۆ هەریەك لەم گۆشانە $93°$ ، $280°$ ، $-36°$ دیاریبکە.

6 خاڵی $P(3, -2)$ دەکەوێتە سەر کۆتالای گۆشەی θ لەباری پێوانەییدا. هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی ئەو گۆشەیە بکە.

7 هەژمێری $\cos\theta$ و $\tan\theta$ بکە ئەگەر بزانی گۆشەی θ لەباری پێوانەییدا. و کۆتالاکەی دەکەوێتە چارێگی سێیەم و $\sin\theta = -\frac{12}{13}$.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هەر گۆشەیەك لەباری پێوانەیی بکێشە

8 $115°$ **9** $280°$ **10** $-300°$ **11** $-130°$

گۆشەی گەڕانەوە بۆ هەریەك لەم گۆشانە دیاریبکە.

12 $35°$ **13** $23°$ **14** $112°$ **15** $160°$

16 $612°$ **17** $478°$ **18** $-135°$ **19** $-315°$

20 $90°$ **21** $-180°$ **22** $-450°$ **23** $-485°$

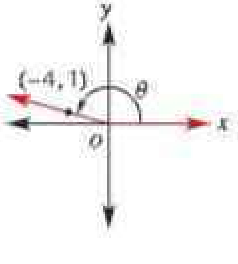
24 $540°$ **25** $270°$ **26** $225°$ **27** $195°$

28 $410°$ **29** $560°$ **30** $-120°$ **31** $-280°$

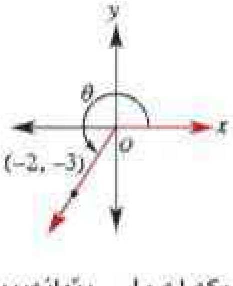
32 $-175°$ **33** $-295°$ **34** $-395°$ **35** $-540°$

هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی θ بکە

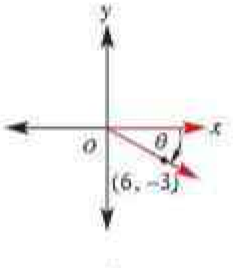
36



37



38



ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی θ هەژمار بکە لە باری پێوانەییدا ئەگەر زانیت ئەم خاڵە دراوانە دەکەونە سەر کۆتالاکانی.

39 $(3, 4)$ **40** $(5, 2)$ **41** $(-4, 2)$ **42** $(-4, 6)$

43 $(\sqrt{3}, -3)$ **44** $(2\sqrt{5}, -1)$ **45** $(-4, -3)$ **46** $(-1, -8)$

ئەگەر ڕێژەی سێگۆشەیی ئەو چارێکەی کۆتالاکەی گۆشەکە بزانیت لەباری پێوانەییدا ئەوا بەهای هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی داواکراو هەژماربکە.

47 چارێگی یەکەم: $\cos\theta = 0.25$ ؛ $\tan\theta$

48 چارێگی سێیەم: $\cos\theta = -0.50$ ؛ $\tan\theta$

49 چارێگی چوارەم: $\tan\theta = -1$ ؛ $\sin\theta$

50 چارێگی یەکەم: $\tan\theta = 2$ ؛ $\sin\theta$

51 چارێگی سێیەم: $\sin\theta = -0.50$ ؛ $\cos\theta$

52 چارێگی دووەم: $\sin\theta = 0.40$ ؛ $\cos\theta$

ژمارەی خولە تەواوەکان یان ئەو بەشانەی کە گۆشەکە دەیاننوێنێت دیاریبکە.ئاڕاستەی خولانەوە دیاریبکە لەگەڵ میلی کاتژمێر یان بە پێچەوانەوە.

53 45°

54 90°

55 -180°

56 -270

57 450°

58 720°

59 -420°

60 -640

بەرەنگاری

61 هەژمێری $\cos\theta$ بکە ئەگەر بزانی $\sin\theta = 0.375$ $\tan\theta < 0$

62 هەژمێری $\tan\theta$ بکە ئەگەر بزانی $\cos\theta = 0.809$ $\sin\theta < 0$

بەستنەوە

63 ئەگەر ئەگەری ئەوەی ئازاد تیرەکەی بچەقێتە بەشە سورەکەوە چەندە؟

جێبەجێکردن

64 ئەندازە پەروانەی یەکێك لە فڕۆکەکان 900خول لە خولەکێکدا دەخولێتەوە. خاڵێك لەسەر ئەم پەروانەیە لە چرکەیەکدا چەند پلە دەخولێتەوە؟

65 دەریاوانی کاپتنەکانی پاپۆڕەکان و فڕۆکەکان یەکەیەکی درێژی بەکاردەهێنن کە پێی دەڵێن (میلی دەریایی) بۆ پێوانەی دووریەکە. میلی دەریایی بەنزیکەیی یەکسانە بە درێژی کەوانەیەك لەسەر گۆی زەوی کە دیاریکرابێت بە چەقە گۆشەیەك کە پێوانەکەی یەك خولەك بێت(هەر60 خولەك یەکسانە بە یەك پلە) تیرەی زەوی لەهێڵی کەمەربەند 12756 km کم بەنزیکەیی.

أ چێوەی زەوی هەژمێربکە لە هێڵی کەمەربەند.

ب چەند خولەك یەکسانە بە چێوەی زەوی؟

ج چەند کیلۆمەتر یەکسانە بە میلی دەریایی؟

ڕوانین بۆ دواوە

66 $x^2 - 8 = 188$ شیکاربکە.

67 چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی 4 کەس لە 10 کەس؟

ڕوانین بۆ پێشەوە

ڕێژە سگۆشەییەکانی گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا هەژمار بکە. ئەگەر بزانی ئەم خاڵە دراوانە دەکەونە سەر لای کۆتایی گۆشەکە.

68 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

69 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

70 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

وانەی 3

پێوانەی بازنەیی Radian Measure

ئامانجەکان

- پێوانەی شەستی دەگۆڕی بۆ پێوانەی بازنەیی و بە پێچەوانەشەوە
- درێژی کەوانەیەك لەسەر بازنە هەژماردەکات.

بۆچی؟ پێوانەی بازنەیی بەکاردێنێت بۆ باسکردنی رووداوە خولییەکان وەك شەپۆلەکانی بۆمەلەرزە و گۆڕانکارییەکانی کەش وهەوا وجولانەوەی بازنەیی تەنەکان وەك مانگە دەستکردەکان

جێبەجێکردنەکان

کەشناسی

بازنەی یەکە

ئەو مانگە دەستکردەی کە کەش وهەوا دەستنیشاندەکات لەبەرزی 750 35 کلم بەنزیکەیی لە گۆی زەوییە دەسوڕێتەوە. ئایا **خێرایی هێڵی Linear Speed** مانگەکە چەندە؟ ئەگەر هەر 24 کاتژمێر جارێك بەدەوری زەویدا بسوڕێتەوە **گۆشەخێراییەکەی** چەندە؟

لەپۆلەکانی پێشوودا فێربوویت کە گۆشەکان بە پلە بپێویت بەلام لەم وانەیەدا پێوانەیەکی نوێ فێربوویت بۆ پێوانی گۆشە پێی دەوترێت **پێوانەی بازنەیی** کە یەکەی **پێوانەکەی** بریتییە لە رادیان. بەلام سیستمی پێوانە بە پلە پێی دەوترێت **پێوانەی شەستی**.

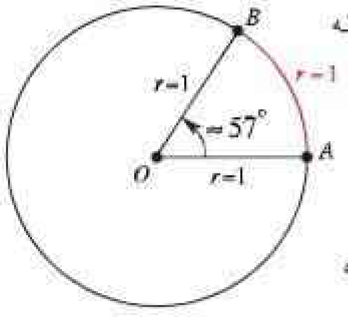
چالاکی

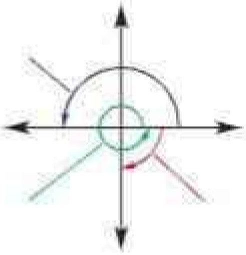
دۆزینەوەی ڕێژەی بازنەیی Exploring Radian Ratio

پێویستیت بە شریتێکی سەنتیمەتری و چەند قووتویەکی لوولەکی هەیە.

1. تیرەی بنکەی ژمارەیەك لەو قووتوانە کە پێوانەکانیان جیاوازە بپێوە و چێوەی هەر یەکێکیان بپێوە. ئەم ئەنجامانەی دەستتکەوتوە لە خشتەیەك دابنێ.
2. هەژمێری ڕێژەی چێوە بۆ تیرەی بنکەی هەر قووتویەك بکە و ئەوانە لە خشتەکەدا بنووسە.
3. بەهاکانی هەموو ئەو ڕێژانە نزیکدەبنەوە لە بەهایەك کە ژمارەیەکی بەناوبانگە و دەیزانین. ئەو ژمارەیە چییە؟

خاڵی جاودێری ✓





چێوەی بازنە = $2\pi r$ ،لەبەر ئەوەی نیوەتیرەی بازنەی یەکە یەك یەکەیە ئەوا چێوەی بازنەکە = 2π.

ڕادیان(گۆشەی نیوەتیرەیی) بەوە پێناسە دەکرێت کە پێوانەی چەقە گۆشەیەکە لە بازنەیەك نیوەتیرەکەی r و کەوانەیەك درێژییەکەی r دیاریدەکات ئەگەر بازنەی یەکەت بەکارهێنا. ئەوا گۆشەی نیوەتیرەیی پێوانەی چەقە گۆشەیەك لەبازنەیەکی یەکەییدا کەوانەیەك دیاریدەکات کە درێژیەکەی 1 بێت.لەم پیناسەیەوە ئەوەمان دەستدەکەوێت کە پێوانەی بازنەیی بۆ گۆشەیەکی وەستاوە دەکاتە چارێکی چێوەی بازنەی یەکە. کەواتە $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ گۆشە نیوەتیرەییە، و پێوانەی گۆشەیەکی خول تەواو دەکاتە 2π گۆشە نیوەتیرەیی بەواتایەکی تر:

یەك گۆشەی نیوەتیرەی $57^\circ \approx \frac{1}{2\pi}\times 360^\circ$

گۆڕینی پێوانە گۆشەیەك	
لەپلەك بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی	لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلەك
لە $\frac{\pi}{180}$ ی بدە	لە $\frac{180}{\pi}$ ی بدە

نموونە 1

ئەمانە بگۆڕە لە پلەوە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی یان لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە

أ 40°

ب 3π گۆشەی نیوەتیرەی

شیکار

أ $40^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{9}$

ب $3\pi \times \frac{180^\circ}{\pi}=540^\circ$

هەوڵبدە -120° بگۆڕە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی و $-\frac{2}{3}\pi$ بگۆڕە بۆ پلەك.

خاڵی چاودێری ✓ گۆشەیەك پێوانەکەی 1° . پێوانەکەی بەگۆشەی نیوەتیرەی چەندە؟

نموونە 2

هەژمێری ئەم ڕێژە سێگۆشاییانە بکە

أ $\sin\frac{\pi}{3}$

ب $\cos\frac{3\pi}{4}$

ج $\tan\frac{4\pi}{3}$

شیکار

دەستبکە بە گۆڕین لە گۆشەی نیوەتیرەییەوە بۆ پلەك پاشان هەژماری ڕێژە سێگۆشییەکان بکە.

أ $\frac{\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=60^\circ$

$\sin\frac{\pi}{3}=\sin 60^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب $\frac{3\pi}{4}\times\frac{180^\circ}{\pi}=135^\circ$

$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos 135^\circ$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ج $\frac{4\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=240^\circ$

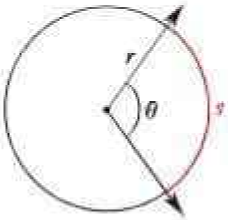
$\tan\frac{4\pi}{3}=\tan 240^\circ$

$=\sqrt{3}$

هەوڵبدە ئەمانە هەژمێریکە: $\tan\frac{5\pi}{4}$ ، $\cos\frac{2\pi}{3}$ ، $\sin\frac{3\pi}{2}$

خاڵی چاودێری ✓ گۆشە تایبەتییەکان ئەم گۆشانەن 0°، 30°، 45°، 60°، 90°، 180°، 270°، 360°. بازنەیەکی یەکە بکێشە و گۆشە تایبەتییەکانی لەسەر بکێشە، پێوانەی هەریەکێکیان بنوسە بەگۆشەی نیوەتیرەیی.

Arc Length دریژی کەوانە



شێوەی بەرامبەر بازنەیەك ڕووندەكاتەوە كە نیوەتیرەكەی r و پێوانەی چەقە گۆشەكەی θ گۆشە نیوەتیرەییە. دەتوانیت هاوڕێژە بەكاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕێسایەك بۆ هەژمێاركردنی دریژی كەوانەكەی s، كە چەقە گۆشەكە دیاریدەكات:

پێوانەی θ بەگۆشەی نیوەتیرەی ← $s = r\theta$ → دریژی كەوانەكە

پێوانەی بازنەكە بەگۆشەی نیوەتیرەی $\frac{s}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi}$ چێوەی بازنە

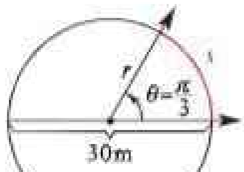
Arc Length دریژی كەوانە

بۆ هەژمێركردنی دریژی كەوانەیەك s كە چەقی گۆشەیەك دیاریكردووە پێوانەكەی θ گۆشەی نیوەتیرەیە لە بازنەیەك كە نیوەتیرەكەی r . ئەم ڕێسایە بەكاربهێنە. $s = r\theta$

سەرەنجێكی ڕەخنەگرانە ئایا دەتوانیت ئەو پێناسەیەی بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی (رادیان)ت كردوە لەوانەی یەكەم لێكبدەیتەوە؟

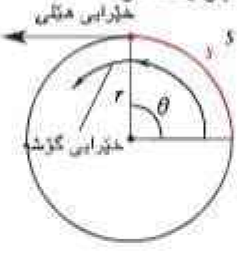
نموونە 3 هەژمێری دریژی ئەو كەوانە بكە كە چەقە گۆشەیەك دیاریكردووە پێوانەكەی $\frac{\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەییە لە بازنەیەكدا كە تیرەكەی 30m بێت

شیكار

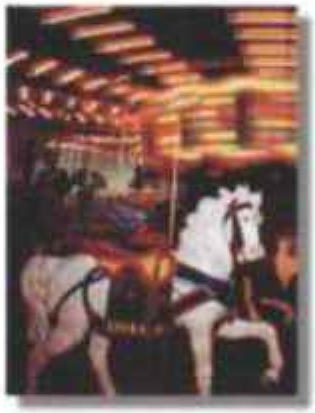


لەبەر ئەوەی تیرەی بازنەكە 30 m ئەوا.
نیوەتیرەكەی یەكسانە بە 15 .
$s = r\theta = 15 \times \frac{\pi}{3} = 5\pi$
كەواتە دریژی كەوانەكە 5πm یان 15.7m بەنزیكەیی.

هەوڵبدە هەژماری دریژی ئەو كەوانەیە بكە كە ئەو چەقەگۆشەیە دیاریدەكات كە پێوانەكەی 0.6 گۆشەی نیوەتیرەییە لە بازنەیەك نیوە تیرەكەی 1.25m .



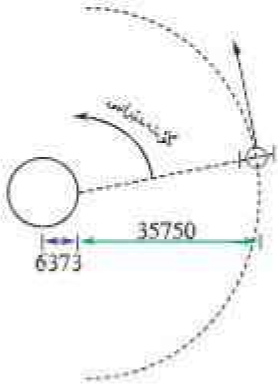
كاتێك تەنێك بە خێرایەكی نەگۆڕ لە ڕێڕەوێكی بازنەی كە نیوەتیرەكەی r دەجولێت ئەوا خێرایی هێڵی **Linear Speed** بۆ ئەو تەنە دەكاتە ڕێژەی دریژی كەوانەیەك s كە تەنەكە دەیبڕێت بۆ كات t واتە $\frac{s}{t}$ یان $\frac{r\theta}{t}$ كاتێك θ گۆشەی خولانەوەی تەنەكە دەنوێنێت بە گۆشەی نیوەتیرەیی.
(گۆشە خێرایی) (السرعە الزاویە) بۆ تەنێك بریتییە لە ڕێژەی پێوانە گۆشەی خولانەوەكەی θ بەگۆشەی نیوەتیرەیی بۆكات t واتە $\frac{\theta}{t}$.



نموونه 4

بەگەڕانەوە بۆ پرسیاری باسکراو لە وانەی یەکەم. هەژمێری خێرایی هێڵی (السرعه الخطیه) وگۆشە خێرایی بۆ مانگێکی دەستکرد بکە ئەگەر بڕانی نیوەتیرەکەی یەکسانە بە **6 373** کم بە نزیکەیی.

کەش ناسی



شیکار

دەستبکە بە دۆزینەوەی نیوەتیرەی مانگە دەستکردەکە.

نیوەتیرەی مانگی دەستکرد = نیوەتیرەی زەوی + بەرزی مانگەکە

= 6 373 + 35 750

= 42 123

خێرایی هێڵی بۆ مانگەکە کاتێك هەڵدەستێت بە خولێکی تەواو (2π گۆشە نیوەتیرەیی) لە 24 کاتژمێر خێرایی هێڵی

$$\frac{r\theta}{t}=\frac{42123\times 2\pi}{24}\approx 11028$$

کەواتە خێرایی هێڵی مانگە دەستکردەکە هێڵیە 11 208km کم/کاتژمێر بەنزیکەیی.

ئێستا هەژماری گۆشەخێرایی بۆمانگە دەستکردەکە بکە بە بەکارهێنانی ڕێسای $\frac{\theta}{t}$.

گۆشەخێرایی $\frac{\theta}{t}=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$.

کەواتە گۆشەخێرایی مانگە دەستکردەکە $\frac{\pi}{12}$ گۆشەی نیوەتیرەییە لە کاتژمێرێکدا.

هەوڵبدە هەژمێری خێرایی هێڵی و گۆشە خێرایی بکە بۆ کەسێك لە سەر زەوی کە 6373 کلم دوورە لە چەقەکەوە.

ڕاهێنــــــــان

بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 پێوانەی بازنەیی بۆ گۆشە چییە؟ بەچی جیاوازە لە پێوانەی شەستیەکەی؟

2 چۆن گۆڕانکاری دەکەیت لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە و بە پێچەوانەشەوە؟

3 چۆن درێژی کەوانەیەك کە سنووردراوە بە چەقەگۆشە لە بازنەیەکدا دەگۆڕێت ئەگەر نیوەتیرەی بازنەکە چەندجارە بکرێت؟

4 خێرایی هێڵی و گۆشە خێرایی بۆ تەنێك کە لەسەر ڕێڕەوێکی بازنەیی بجولێت چییە؟ و جیاوازی چییە لەنێوانیاندا؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەمانە بگۆڕە لە پلە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی یان بە پێچەوانەشەوە.

5 120° **6** $\frac{\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرە

هەژمێرەی هەریەك لەم ڕێژە سێگۆشەییانە بکە.

7 $\sin\frac{2\pi}{3}$ **8** $\cos\frac{5\pi}{4}$ **9** $\tan\frac{5\pi}{3}$

10 هەژمێری درێژی ئەو کەوانەیە بکە کە چەقە گۆشەیەک دیاریدەکات پێوانەکەی $\frac{4\pi}{3}$ لە بازنەیەکدا تیرەکەی 90cm بێت.

11 **بۆخۆشی** تیرەی چێشتخانەیەکی خولاوە لە لوتکەی تاوەرێکدایە 60 مەترە و ئەم چێشتخانەیە سورێکی تەواو دەخولێنەوە بە 58 خولەک. خێرایی هێڵی و گۆشەخێرایی پیاوێک کە دانیشتووە لە نزیک پەنجەرەیەک لە پەنجەرەکانی چێشتخانەکە بدۆزەوە.

ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەمانە بگۆڕە لە پێوانەی شەستی بۆ پێوانەی بازنەیی.

12 180°	**13** 90°	**14** 360°	**15** 270°
16 -30°	**17** -120°	**18** -240°	**19** -240°
20 720°	**21** 930°	**22** 80°	**23** 160°

ئەمانە بگۆڕە لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە. وەڵامەکەت نزیکبکەوە بۆ نزیکترین بەش لە سەد لە پلە.

24 2π	**25** π	**26** $\frac{\pi}{2}$	**27** $\frac{\pi}{4}$
28 $\frac{\pi}{3}$	**29** $\frac{\pi}{6}$	**30** $-\frac{\pi}{2}$	**31** $-\frac{\pi}{4}$
32 -3.91	**33** -9.799	**34** 9.27	**35** 4.96

هەژماری هەریەک لەم ڕێژە سێگۆشەییانە بکە.

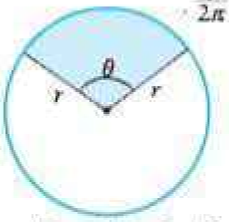
36 $\sin \pi$	**37** $\cos \pi$	**38** $\cos \frac{\pi}{3}$	**39** $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
40 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	**41** $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$	**42** $\tan \pi$	**43** $\tan \frac{\pi}{4}$
44 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	**45** $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$	**46** $\sin\left(\frac{11\pi}{2}\right)$	**47** $\cos 5\pi$

هەژمێری درێژی ئەو کەوانەیەبکە کە هەریەک لەم چەقە گۆشانە لەبازنەیەکدان کە نیوەتیرەکەی 10 مەترە

48 3.8 گۆشەی نیوەتیرەیی	**49** 2.4 گۆشەی نیوەتیرەیی	**50** 45 گۆشەی نیوەتیرەیی
51 72گۆشەی نیوەتیرەیی	**52** 4.28 گۆشەی نیوەتیرەیی	**53** 0.67 گۆشەی نیوەتیرەیی
54 $\frac{\pi}{3}$ گۆشەی نیوەتیرەیی	**55** $\frac{2\pi}{3}$ گۆشەی نیوەتیرەیی	**56** $\frac{\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەیی
57 $\frac{\pi}{2}$ گۆشەی نیوەتیرەیی	**58** $\frac{7\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەیی	**59** $\frac{7\pi}{6}$ گۆشەی نیوەتیرەیی

بەستنەوە

ئەندازە ڕووبەری کەرتە بازنەیی کە دیاریکراوە بە چەقە گۆشەیەک کە پێوانەکەی θ گۆشە نیوەتیرەییە بەشێکە لە بە های πr^2 لە ڕووبەری بازنەکە $\frac{\theta}{2\pi}$.



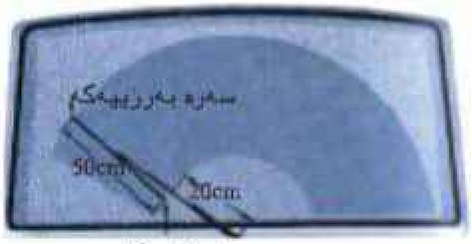
$$A = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{\theta r^2}{2}$$

60 هەژمێری ڕووبەری کەرتە بازنەیەک بکە کە دیاریکراوە بە چەقە گۆشەیەک پێوانەکەی $\frac{7\pi}{6}$ لە بازنەیەکدا نیوەتیرەکەی 20 m بێت.

61 هەژمێری پێوانەی چەقە گۆشەیەک بکە لە بازنەیەکدا نیوەتیرەکەی 12 cm بێت ئەگەر بزانی ڕووبەری کەرتە بازنەییەکەی گۆشەکەی دیاریکردووە دەکاتە $55.5\ cm^2$.

جێبەجێکردن

ئەندازە فلچەی شوشەی ئوتومبیلێک دەخولێتەوە بەگۆشەیەک پێوانەکەی $\frac{3\pi}{4}$ گۆشەی نیوەترەیی بێت لەهەر 0.9 لە چرکەدا.



سەرە نزمەکە

62 هەژمێری ئەو دوورییە بکە کە خاڵێک لەسەر کۆتایی بەرزییەکەی و خاڵێک لەسەر کۆتایی نزمییەکەی دەیبڕێت، کاتێک فلچەکە دەخولێتەوە بە $\frac{3\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەیی.

63 خێرایی هێڵی بۆ هەریەکە لە دوو خاڵەکەی پێشوو بە سانتیمەتر لە چرکەیەکدا هەژمێربکە،
هەژمێری ئەو دوو خێراییە بە کیلۆمەتر لە کاتژمێرێکدا بکە.

تەکنەلۆجیا خوێنەری پەپکە پەستێنراوەکان پەپکەکە دەسووڕێنێتەوە بە گۆشە خێراییەکی نەگۆڕ، بەڵام خێرایی هێڵی بۆ خاڵێك لەسەر پەپکەکە دەگۆڕێت بە پێی نیوەتیرەی ئەو بازنەیەی کە خاڵەکەی لەسەرە. وا دابنێ کە پێدراوەکان نوسراون لە سەر پەپکێك لە ناو بازنەیەك کەتیرەکەی 6 cm بێت.

64 خێرایی هێڵی بۆ خاڵێك هەژمێربکە کە دەکەوێتە سەر لای ئەو بازنەی کە زانیارییەکەی تێدایە. ئەگەر بزانی کە پەپکەکە دەسورێتەوە لە کاتی خوێندنەوەی ئەو خاڵە بە 200 خول لە خولەکێکدا:

65 خێرایی هێڵی بۆ خاڵێك هەژمێربکە کە دەکەوێتە دووری 2cm لەلای دەرەوەی بازنەیەك کە زانیارییەکەی تێدایە. ئەگەر بزانی پەپکەکە دەخولێتەوە لە کاتی خوێندنەوەی ئەو خاڵە بە 240 خول لەخولەکێکدا.

پێشبرکێی ئۆتۆمبیلەکان لە گۆڕەپانێکی بازنەیی پێشبرکێیەك دەکەن کە نیوەتیرەکەی300m ە. یەکێك لە ئۆتۆمبیلەکان کەوانەیەکی بڕی کە پێوانەی چەقە گۆشەکەی°120 لە 17.5 چرکەدا.

66 خێرایی هێڵی ئەو ئۆتۆمبیلە بە مەتر لە چرکەدا هەژمار بکە

67 گۆشەخێرایی بۆ ئەو ئۆتۆمبیلە بە گۆشەی نیوەتیرەیی لە چرکەدا هەژمار بکە.

ڕوانین بۆ دواوە

هەر لاسەنگەیەك شیکاربکە کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە

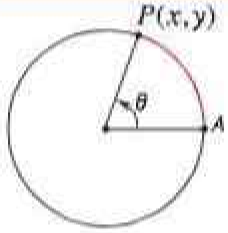
68 $|x-4| \le -2$ **69** $|2-x|>1$ **70** $|3x+5|<4$

هەریەکە لەم هاوکێشە ڕێژەییانە شیکاربکە. و پاسادانی شیکارەکە بکە بەهەر ڕێگایەك بێت.

71 $\frac{x-3}{x+5}=\frac{x}{2+1}$ **72** $\frac{y}{y-4}-\frac{y}{y+2}=\frac{5}{y^2-2y-8}$

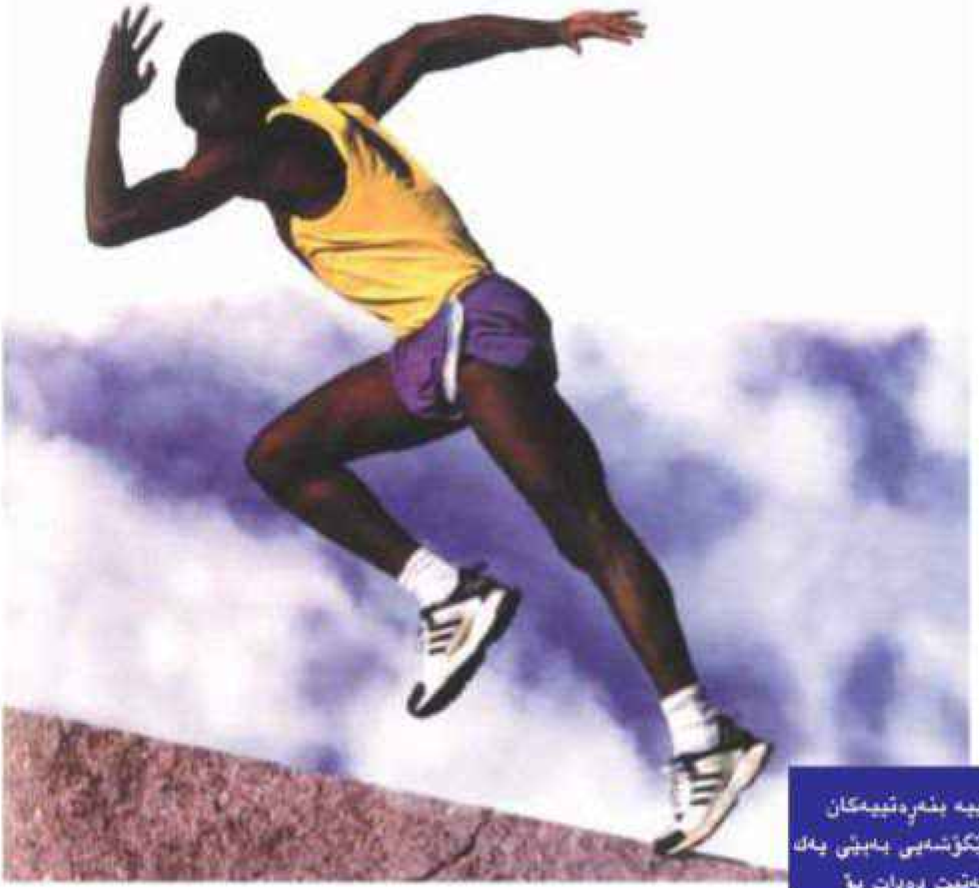
ڕوانین بۆ پێشەوە

73 هەژمێربکە $\sin^2\theta+\cos^2\theta$



هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان
Fundamental Trigonometric Identies

وانەی
4



ئامانجەکان

- هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان دەسەلمێنێ.
- هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بۆ کورتکردنەوەی بڕە سێگۆشەییەکان بەکاردێنێت.

بۆچی

دەتوانیت هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربهێنیت بۆ نوسینەوەی بڕێکی سێگۆشەیی بەپێی یەك لە ڕێژە سێگۆشەییەکان. کە ئەمە یارمەتیت دەدات بۆ شیکاری ژمارەیەکی زۆر لە پرسیارەکان لە ژیانی ڕۆژانەدا وەك دیاریکردنی گۆشەی خزان. کەوا لە نیمچە خشتەکێکی لاستیك دەکات کە دانراوە لەسەر ڕوویەکی چیمەنتۆ دەست بەخزاندن بکات.

چیمەجیکردنەکان

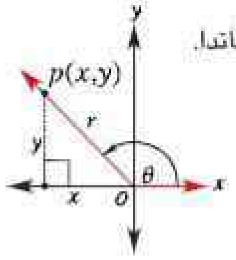
فیزیا

لاکێشە تەریبێکی لاستیك دانرا لەسەر ڕوویەکی چیمەنتۆیی. کە دەتوانرێ یەکێك لە لاکانی بە هێواشی بەرزکرێتەوە. گۆشەی چەمانەوە دەبێتە چەند کاتێك لاکێشە تەریبەکە دەستدەکات بە خزان؟ زاناکان ئەم گۆشەیان بەکارهێناوە بۆ دۆزینەوەی هاوکۆلکەی لێکخشاندن **μ_s Coefficient of Static Friction** کەنەگۆڕە m لە نێوان لاستیك و چیمەنتۆیەکەدا .ئەو هاوکۆلکە دەکاتە 1.4 .

ئەوەی لە خزاندنی لاکێشە تەریبەکە ڕێگری دەکات هێزێکە بریتییە لە بڕی $\mu_s mg\cos\theta$ کە هێمای m هاوکۆلکەی لێك خشاندنە، g بارستایی نیمچە شەشپاڵووەکە و μ_s خێرایی ڕاکێشانە بەڵام ئەو هێزەی پاڵنەری خزاندنەکەیە بەبڕی $mg\sin\theta$ دەردەبڕی و کاتێك دوو هێزەکە یەکسان بن ئەوا. ئەوا $1.4mg\cos\theta = mg\sin\theta$ ئەم هاوکێشەیە بۆ هەژماری گۆشە θ بەکاربهێنە کە پێی دەوترێت گۆشەی خزان.

هاونەنجامە سێگۆشەییەکان **Trigonometric Identities** ئەو هاوکێشانەن کە بەڕاستی دەمێنەیتەوە هەرچەندە گۆڕانکاری لە بەهایەکانی گۆڕاوەکانیاندا بکرێت.لەبیرت بێت کە پۆتانی خاڵێك لەسەر کۆتالاکەی گۆشەی θ لەباری پێوانەییدا ڕێگا دەدات بە هەژمارکردنی ڕێژەی سێگۆشەیەکانی ئەو گۆشەیە وەك خوارەوە:

$$x \neq 0 \ ,\ \tan\theta = \frac{y}{x} \ ,\ \cos\theta = \frac{x}{r} \ ,\ \sin\theta = \frac{y}{r}$$



کاتێك r دووری پۆتانی خاڵەکەیە لە خاڵی بنەڕەت بێت لە ڕووتەختی پۆتاندا.

نموونە 1 ئەم هاونەنجامە بسەلمێنە $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

شیکار

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{r} \div \frac{x}{r} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

دەتوانێت هاونەنجامەکانی تر بەهەمان ڕێگا بسەلمێنی یان بە بەکارهێنانی سەلمێنراوی فیثاغۆرس

هاونەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان Fundamental Trigonometric Identities

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \qquad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

نموونە 2 ئەم هاونەنجامە بسەلمێنە $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

شیکار

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

هەوڵبدە ئەم هاونەنجامە بسەلمێنە: $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

دەتوانیت هاونەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ سادەکردنەوەی بڕە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنی و بەپێی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بیانووسی.

نموونە 3 ئەم بڕە $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ بەپێی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە .

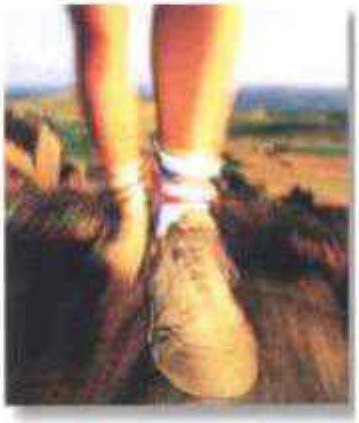
شیکار

$$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta} = \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta} = 1 + \cos\theta$$

هەوڵبدە ئەم بڕە $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$ بەپێی یەك لە ڕێژە سێگۆشەییەکان بنووسە .

نموونە

4 بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکەی سەرەتای وانەکە، یەکسانبوونی $mg \sin\theta = \mu_s mg \cos\theta$ بەکاربهێنەبۆ دیاریکردنی گۆشەی خزاندن لە هەر بارێکدا.



أ خزانی لاستیك لەسەر چیمەنتۆ، $\mu_s = 1.4$

ب خزانی شووشە لەسەر کانزایەکی چەورکراو $\mu_s = 0.25$.

شیکار

أ

$mg \sin\theta = \mu_s mg \cos\theta$

$mg \sin\theta = 1.4 mg \cos\theta$

$\sin\theta = 1.4 \cos\theta$

$\tan\theta = 1.4$

$\theta \approx 54.5°$

ب

$mg \sin\theta = \mu_s mg \cos\theta$

$mg \sin\theta = 0.25 mg \cos\theta$

$\sin\theta = 0.25 \cos\theta$

$\tan\theta = 0.25$

$\theta \approx 14.0°$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەو پەیوەندییە چییە کە sin و cos و tan بەیەکەوە دەبەستێت؟

2 ئەو پەیوەندییە چییە لە نێوان هاوئەنجامی $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ و سەلمێنراوی فیثاگۆرس هەیە؟

ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$.

4 ئەم برە $\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}$ بەپێی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە .

5 $\frac{1}{\tan^2\theta}$ بەپێی $\sin\theta$ بنووسە.

جێبەجێکردن

6 **فیزیا** گۆشەی خزان بۆ جۆرێك لاستیك لەسەر چیمەنتۆ دیاریبکە کاتێك $\mu_s = 1.2$.

راهێنان و جێبەجێکردن

بەبەکارهێنانی پێناسەی ڕێژە سێگۆشەییەکان ئەو هاوتەنجامانە بسەلمێنە.

7 $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

8 $\frac{1}{\sin^2\theta} = 1+\frac{1}{\tan^2\theta}$

ئەم بڕە سێگۆشەییانە بە پێی یەک ڕێژە سێگۆشەیی بنووسە.

9 $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$

10 $\tan\theta\cos\theta$

11 $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

12 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}$

ئەم بڕە سێگۆشەییانە بە پێی $\cos\theta$ بنووسە.

13 $2\sin^2\theta-1$

14 $\left(1+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\left(1-\sin^2\theta\right)$

15 $\left(1-\frac{1}{\tan^2\theta}\right)\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$

16 $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

ئەم بڕە سێگۆشەییانە بە پێی $\sin\theta$ بنووسە.

17 $\frac{\cos\theta}{\tan\theta}$

18 $\frac{1}{\tan^2\theta}$

19 $\cos^2\theta\tan^2\theta+\frac{1}{\sin\theta}$

20 $\tan^2\theta\sin^2\theta$

هاوتەنجامە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی ڕاستی هەریەک لەمانە.

21 $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta-1}=-\frac{1}{\cos}$

22 $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta-1}=-\frac{1}{\sin\theta}$

بەستنەوە

23 هەریەک لە $\tan\theta$ و $\sin\theta$ بەپێی $\cos\theta$ بنووسە

جێبەجێکردن

فیزیا بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکە لێک خشاندنی سەرەتای وانەکە هاوکێشەی $mg\sin\theta=\mu_s mg\cos\theta$ بۆ دیاریکردنی گۆشەی خزان بۆ هەر تەنێک بەکاربهێنە.

24 تەختەی مۆمکراو لەسەر بەفر $\mu_s=0.14$

25 تەختە لەسەر تەختە: $\mu_s=0.4$

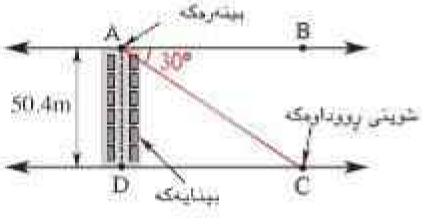
26 تەختە لەسەر قرمید: $\mu_s=0.6$

27 ئاوریشم لەسەر ئاوریشم: $\mu_s=0.25$

ڕوانین بۆ دواوە

28 هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشەی $y = 2(x-3)^2 + 5$ بکێشە. پۆتانی سەربڕگە هاوتاکە کامەیە؟

29 لە هێڵکاری بەرامبەردا گۆشەی $\widehat{BAC}$ نزمەگۆشەیە. خاڵی A چاوی کەسێکە لەسەر بینایەك وەستاوە دەڕوانێتە ڕووداوێکی هاتوچۆ لە خاڵی C دا. شوێنی ڕوداوەکە چەند لە خاڵی D بنکەی بیناکەوە دوورە؟ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەشی سەدی لەمەتر نزیکبکەوە.



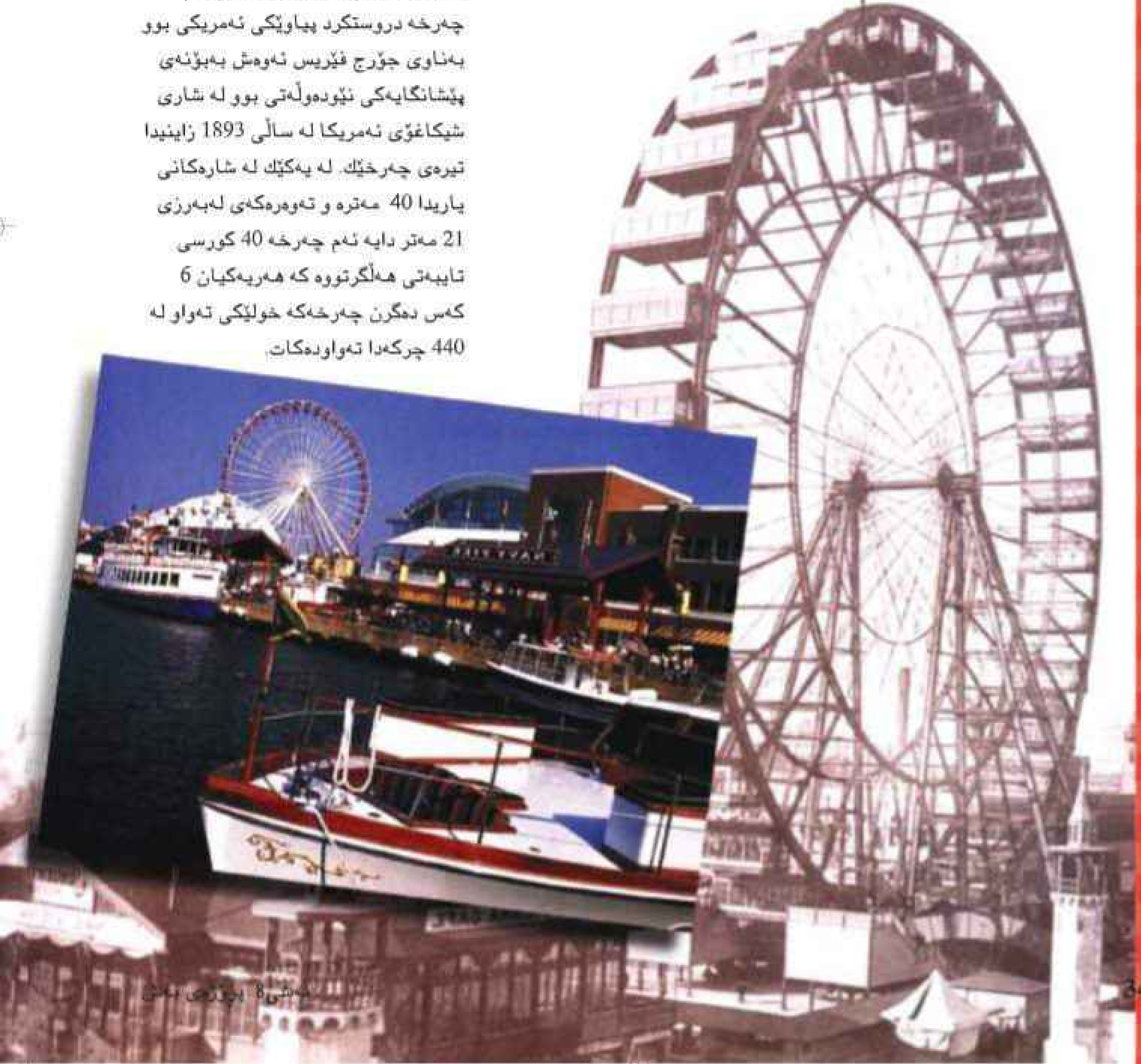
ڕوانین بۆ پێشەوە

30 لە جیاتی $\sin\theta$ نەزانراوی x لە هاوکێشەی $\sin^2\theta + 2\sin\theta - 3 = 0$ دا دابنێ، ئەو هاوکێشە دووجایەی دەستتدەکەوێت شیکاربکە. پاشان بەهای گۆشەی θ بدۆزەرەوە کە پاسادانی هاوکێشە سێگۆشەییەکە دەکات.

پرۆژەی بەش

چەرخی شاری یاری

لە گرنگترین یارییە خۆشەکانی شاری یاری سواربوونی چەرخە گەورەکەیەتی کە لەوێوە لە بەرزی جیاجیا سەیری دیمەنی شار دەکەیت بە خولانەوەی چەرخەکە ئەو بەرزییە دەگۆڕێت. ئەو کەسەی یەکەم جار نموونەیەکی لەم چەرخە دروستکرد پیاوێکی ئەمریکی بوو بەناوی جۆرج فێریس ئەوەش بەبۆنەی پێشانگایەکی نێودەوڵەتی بوو لە شاری شیکاغۆی ئەمریکا لەساڵی 1893 زایینیدا تیرەی چەرخێك. لە یەکێك لە شارەکانی یاریدا 40 مەترە و تەوەرەکەی لەبەرزی 21 مەتر دایە ئەم چەرخە 40 کورسی تایبەتی هەڵگرتووە کە هەریەکیان 6 کەس دەگرن چەرخەکە خولێکی تەواو لە 440 چرکەدا تەواودەکات.



چالاکی 1

نموونەیەك بۆ چەرخێكی شاری یاری لە ڕووتەختی پۆتاندا دروستبكە كە تەوەرەی چەرخەكە لە خاڵی بنەڕەتدا بێت. خشتەیەك بۆ بەهاكانی دووری خاڵێك لە لێواری چەرخەكە لە تەوەری سینەكان پێكبهێنە، بۆ هەر سوڕانەوەیەكی چەرخەكە، بەبەكارهێنانی گۆشەكانی سوڕانەوە °0 ، °90 ، °180، °270 ،... °810 لە ڕووتەختی پۆتاندا.
هەرجوتێكی ڕێكخراو كە پێكهاتووە لە گۆشەی سوڕانەوە و بەرزییەكەی بنوێنە، كە گۆشەكانی تەوەری سینەكان بگرێتەوە خاڵەكان بگەیەنە بۆ كێشانی وێنەیەكی ڕوونكردنەوەیی گونجاو.

چالاکی 2

خشتەیەك دروستبكە بۆ بەهاكانی بەرزی سورابویەك (وای دابنێ لەسەر لێواری دانیشتووە) لە ڕووی زەوییەوە بە گۆڕانی گۆشەی سوڕانەوە. گۆشە سوڕانەوەی چالاكی 1 بەكاربهێنە لە ڕووتەختی پۆتانەكەدا، هەر جووتێكی ڕێكخراو لە گۆشەی سوڕانەوەی بەرزی سواربووەكە لە ڕووتەختی پۆتانەكەدا پێكهاتووە بنوێنە كە گۆشەكانی تەوەری سینیەكان بگرنەوە. خاڵەكان بگەیەنە بۆ كێشانی وێنەیەكی ڕوونكردنەوەیی گونجاو.

چالاکی 3

1 خشتەكەی چالاكی 2 بەكاربهێنە كەچەرخەكە خولێك تەواو دەكات لە 440 چركەدا، بۆ گۆڕینی یەكەكانی تەوەری سینەكان لە پلەكەوە بۆ كات بەچركە. لە ڕووتەختی پۆتانەكەدا هەر جووتێكی ڕێكخراوەكە لەكات بە چركە لەڕووتەختی پۆتانەكەدا هەر جووتێكی ڕێكخراوكە لەكات بە چركە و بەرزیەكەی پێك هاتووە بنوێنە كە گۆشەكان تەوەرەی سینیەكان بگرنەوە. خاڵەكان بگەیەنە بۆ كێشانی وێنەیەكی ڕوونكردنەوەی گونجاو.

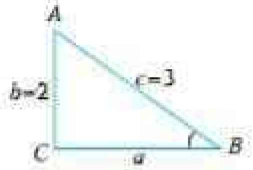
2 خێرایی هێڵی سواربووەكە بە كیلۆمەتر لە كاتژمێرێكدا هەژماربكە.

8

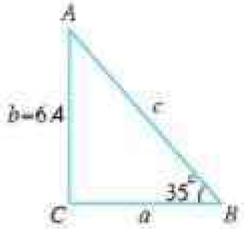
پێداچوونەوەی بەش

هەریەک لەم سێگۆشە وەستاوانە شیکاربکە

1

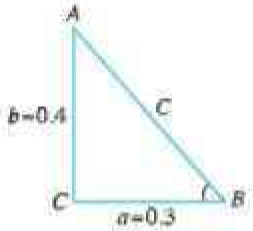


2



3

4



گۆشە گەڕانەوەی هەریەکە لەم گۆشانە دیارییکە

5	270°	**6**	150°	**7**	-135°
8	-225°	**9**	380°	**10**	440°
11	1028°	**12**	973°	**13**	-515°

ئەم ڕێژە سێگۆشەییانە هەژماربکە.

14	$\cos 135^\circ$	**15**	$\sin 315^\circ$
16	$\tan 225^\circ$	**17**	$\cos 0^\circ$
18	$\sin(-270^\circ)$	**19**	$\cos(-180^\circ)$
20	$\tan(-90^\circ)$	**21**	$\cos 675^\circ$
22	$\sin 600^\circ$	**23**	$\tan 765^\circ$

خاڵی P دەکەوێتە سەر بازنەیەک چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی r و کۆتالاکەی گۆشەی θ بێت لە باری پێوانەییدایە خاڵی p دیاریبکە

24 $r=1$ ؛ $\theta=60$

25 $r=2$ ؛ $\theta=-30$

26 $r=5$ ؛ $\theta=240$

27 $r=3$ ؛ $\theta=-240$

لە پلە بۆ ڕادیان یان لە ڕادیان بۆ پلە ئەمانەی خوارەوە بگۆڕە وەڵامەکان بۆ نزیکترین دە لە پلە نزیکبکەوە.

28 78°

29 334.61°

30 -230°

31 $\frac{\pi}{7}$ ڕادیان

32 $-\frac{15\pi}{16}$ ڕادیان

33 8.87 ڕادیان

34 هەژمێری درێژی ئەو کەوانەیەی سنووردراوە بە چەقەگۆشەیەک پێوانەکەی 30° یە لە بازنەیەکدابکە، کە نیوەتیرەکەی 4.5 مەترە.

هەر برێکی سێگۆشەیی لەمانەی خوارەوەدا بەپێی یەکەی ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە

35 $\cos^2\theta \tan^2\theta$

36 $\tan^2\theta \quad \frac{1}{\cos^2\theta}$

37 $\frac{\cos^2\theta}{\tan^2\theta+1}$

38 $\frac{\tan^2\theta}{\cos^2\theta-1}$

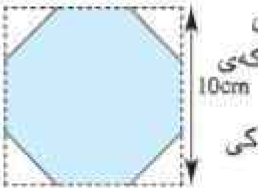
8 تاقیکردنەوەی بەش

هەر یەك لەم سێگۆشانە شیكاربكە بایێوانەی گۆشەكان نزیككراوەبن بۆ نزیكترین پلەو و پێوانەی لاكان بۆ نزیكترین دە نزیكبكەوە.

1

2

3 ژینۆ هەشت لایەكی رێكی دروستكرد ئەویش بە بڕینی سێگۆشەی لایەكسان لە هەر چوار لوتكەی چوارگۆشەكەوە كە درێژی لایەكی 10 بێت درێژی لایەكی هەشت لایەكە چەندە؟



بۆ هەریەك لەم گۆشانە ئەگەر هەبوو گۆشە گەڕاوەكانیان دیاریبكە

4 137°

5 515°

6 38°

7 $1\,729^\circ$

هەژماری ئەو رێژە سێگۆشەییە داواكراوە بۆ گۆشەی θ بكە بەزانینی ئەو چارێكەی كۆتالا گۆشەكەی تێكەوتووە لە باری پێوانەییدا و زانینی بەهای رێژە سێگۆشەییە پێدراوەكان.

8 چارێكی چوارەم $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ؛ $\sin\theta =$ ______

9 چارێكی دووەم $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ ؛ $\sin\theta =$ ______

هەریەك لەم رێژەی سێگۆشەییانە هەژماربكە. با وەلامەكەت بە تەواوەتی بێ.

10 $\sin 330^\circ$

11 $\cos(-150^\circ)$

12 $\sin 720^\circ$

13 $\tan(-765)$

14 $\cos 300^\circ$

15 $\tan 270^\circ$

پۆتانی خاڵی یەكتربڕینی بازنەیەك هەژماربكە. چەقەكەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەكەی r لەگەڵ كۆتالا گۆشەی θ لە باری پێوانەییدا. با وەلامەكان بەتەواوی بن.

16 $\theta = 30^\circ$ ؛ $r = 5$

17 $\theta = 225^\circ$ ؛ $r = 12$

18 $\theta = -150^\circ$ ؛ $r = 4$

19 $\theta = 300^\circ$ ؛ $r = 8$

20 **چیا** لێژی چیایەك دەكاتە $\frac{7}{12}$ واتە تا لە چیاكە 7 مەتر بەرزبینەوە دووری بەرامبەرەكە 12 مەتری ئاسۆیی دەبێت بەرزە گۆشەی چیاكە چەندە؟

لە پلە بۆ رادیان بگۆڕە، و بە پێچەوانە، با وەلامەكان بە تەواوی بن

21 315°

22 -150°

23 495°

24 $\frac{\pi}{12}$

25 $\frac{5\pi}{4}$

26 $-\frac{5\pi}{3}$

27 **پیشەسازی** تیرەی پانكەیەك 12cmە، بە خێرایی $33\frac{1}{3}$ لە چركەیەكدا دەخولێتەوە خێرایی هێڵی خاڵێك چەندە كە 4cm لە تەوەری پانكەكەوە دوورە.

هەموو بەها گونجاوەكان بۆ گۆشەی θ هەژمار بكە ئەگەر بزانیت $0 < \theta < 360^\circ$

28 $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

29 $\cos\theta = \frac{1}{2}$

30 $\tan\theta = 1$

31 $\tan\theta = \sqrt{3}$

هەریەك لەم بڕانە بەبێی یەك رێژە سێگۆشەیی بنووسە.

32 $\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\tan\theta} \times \cos\theta$

33 $\frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta - \sin^2\theta$

34 $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

پۆتانی هەریەك لەو خاڵانە هەژمێربكە بەسوڕانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت و بە گۆشە پێدراوەكان.

35 (5.8) ؛ 30°

36 (-2.6) ؛ -60°

37 درێژی میلی چركەژمێرێك 3cm . ئەو دوورییە چەندە كە سەرەكەی لە 5 چركەدا دەیبڕێت.

8

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ پێکهاتووە لەگشت ژمارەی ڕاستییەکان جگە لە.

أ 1 ب -1 ج $-\frac{3}{2}$ د $\frac{3}{2}$

2 کام لە زۆرڕادەکانی خوارەوە یەکسانە بە زۆر ڕادەداری.

$$\left(2x^3-x^4\right)+\left(3x^2-5\right)-\left(x^2-x^4+1\right)$$

أ $-2x^4+2x^3+3x^2-6$

ب $2x^3+2x^2$

ج $2x^3+2x^2-4$

د $2x^3+2x^2+4$

3 پۆی سینی سەری برگە هاوتای $f(x)=2x^2-4x+1$ کامەیە؟

أ -1 ب 1 ج 2 د $-\frac{1}{2}$

4 کام لەم ژمارانە ناکرێت بە شێوەی ڕێژەی دوو ژمارەی تەواو بنووسرێت.

أ خۆیەش ب تەواو

ج ڕێژەیی د ناڕێژەیی

5 شیکاری $|2x+5|=11$ دەکاتە.

أ $-3; 3$ ب $-8; 8$

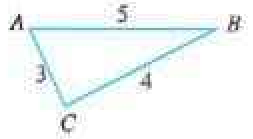
ج $-8; 3$ د $-3; 8$

6 دوو گوڕاوی x و y پەیوەستن بەیەکتریەوە بە گۆڕانێکی ڕاستەوانە. نەگۆڕی گۆڕانەکە لەم پەیوەندییەدا کامەیە ئەگەر بزانیت $y=8$ کاتێک $x=4$

أ $\frac{1}{2}$ ب 2 ج 32 د -2

7 بەهای بڕی $3\left(\sqrt{45}\right)^2$ چەندە؟

ئەم سێگۆشەیە بەکاربهێنە بۆ هەژماری ڕێژەی سێگۆشەییەکانی.



8 $\sin A$

9 $\cos A$

10 $\tan B$

11 $\sin B$

12 یاسا «دەستوور» بەکاربهێنە بۆ شیکاری هاوکێشە دووجای $5x^2+x-2=0$.

13 ئەم لاسەنگە ڕێژەییە $\frac{6}{x-2}>\frac{5}{x-3}$ شیکاربکە.

14 بە شێوەی گشتی هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەرەوە کە بە خاڵی $(-3, 4)$ دا دەڕوات و لەسەر ڕاستەهێڵی $y=3x-5$ ئەستوونە.

15 بڕی $\frac{x}{x+4}+\frac{6x^2}{3x+12}$ سادەبکە.

16 بواری نەخشەی $f\left(x\right)=\sqrt{2-3x}$ دیاریبکە؟

17 بڕی $3y\left(5x+2\right)-4\left(5x+2\right)$ شیتەڵ بکە.

18 بەهای $\sin\frac{\pi}{2}$ چەندە؟

19 گۆشەی گەڕانەوەی سەر بەگۆشەیەک پێوانەکەی 640° بێت چەندە ؟

20 ئەگەر بەچەند ڕێگا دەتوانیت سەرۆک و جێگری سەرۆک هەڵبژێریت لە دەستەیەک کە پێکهاتووە لە 15 ئەندام

21 دوا ژمارە لە شێوازی 50، 46، 24 ، ... کامەیە ؟

22 $\frac{3\pi}{5}$ لە ڕادیان بگۆڕە بۆ پلە.

23 ئەو گۆشەیە کامەیە کە بە $\cos 0=\sin 30°$

24 ئەگەر بروا بەردەزارێکی هەڵدا، ئەگەری دەستکەوتنی ژمارەی جووت یان ژمارە 1 چەندە؟