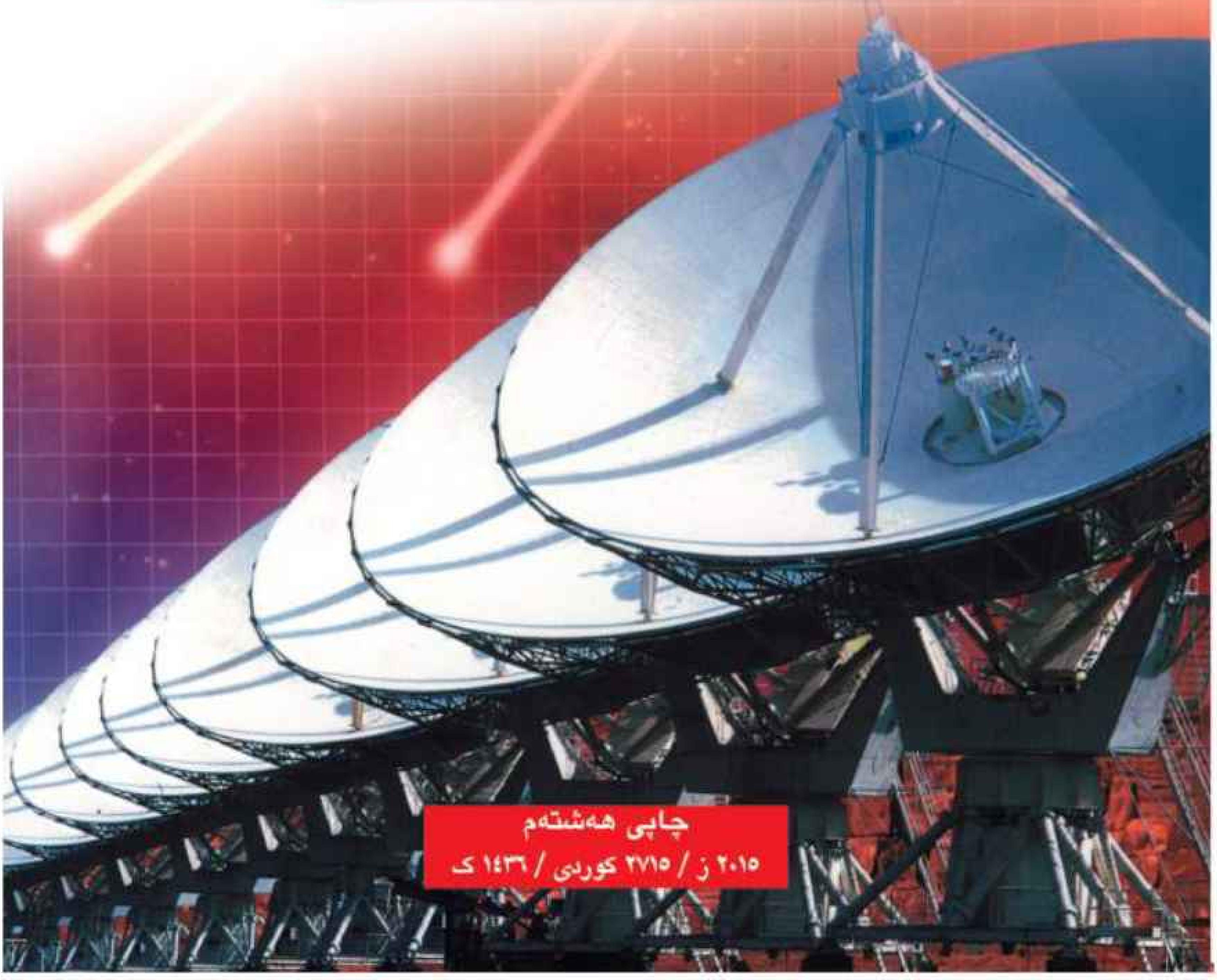
١٠

حکومەتی هەرێمی کوردستان - عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەکان

# بیرکاری بۆ هەمووان

## کتێبی خوێندکار
## پۆلی دەیەمی وێژەیی



چاپی هەشتەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ کوردی / ١٤٣٦ ک

سەرپەرشتی هونەری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ئاری محسن احمد

# ناوەڕۆکی کتێبەکە


بەشی 1 هاوکێشەکان
EQUATIONS

بەشی 2 هێزەکان و ڕەگەکان
POWERS AND RADICALS

بەشی 3 ئەگەرەکان
PROBABILITIES

بەشی 4 پێوەرەکانی ئامار
STATISTICAL MEASUREMENTS

بەشی 5 سێگۆشەزانی
TRIGONOMETRY

# ناوەڕۆكی كتێبەكە


## 1 Equations هاوكێشەكان 1

1 دەروازەیەك بۆ هاوكێشەكان
Introduction to Equations ........ 2

2 شیتەڵكردنی بڕە جەبرییە دووجاكان
Factoring Algebraic Quadratic Expressions ........ 7

3 شیكاركردنی هاوكێشە دووجاكان بە یاسا
Solving Quadrotic Equation By Formula ........ 16

## 21 Powers and Radicals هێزەكان و ڕەگەكان 2

1 هێزەكان Powers ........ 22

2 بڕە ڕەگییەكان Radical Expressions ........ 31

3 لۆگاریتمەكان Logarithms ........ 39

## 45 Probabilities ئەگەرەكان 3

1 دەروازەیەك بۆ ئەگەر Introduction To Probability ........ 46

2 ئەگەر Probability ........ 52

3 یاسای ژماردنی بنەڕەتی
Fundamental Counting Priciple ........ 60

4 گۆڕینەكان و ڕیزبەندییەكان و گونجێنەكان
Permutations, Arrongements and Combinations ........ 64

## 75 Statistical measurments پێوەرەكانی ئامار 4

1 پێوەرەكانی ڕووكردنە چەق Measures of Centrol Tendency ........ 76

2 پێوەرەكانی پەرتبوون Measures of Dispersion ........ 86

## 93 Trigonometry سێگۆشەزانی 5

1 ڕێژە سێگۆشەییەكان و شیكاركردنی سێگۆشەی وەستاو
Trigonometric Ratios and Solving Right Triangle ........ 94

# هاوکێشەکان Equations

## بەشی 1

پەرتووکی (الجبر و المقابلة)ی زانا محمد بن موسی الخوارزمی لە پەرتووکە بەراییەکان بوو، کە باسی جەبری کردووە. ووشەی جەبر لەو پەرتووکەوە بۆ جیهان بە جێما، کە ئێستا لە زۆربەی زمانەکانی جیهان بەکاردێت، لەگەڵ هەندێك گۆڕانی کەم لە دەربڕین. خوارزمی وشەی (الجبر)ی بەکارهێنا لە مامەڵەکردن لەگەڵ هاوکێشەکان بە مەبەستی شیکارکردنیان. جەبری هاوکێشە بەگوێرەی خوارزمی بەمانای زیادکردنی ژمارەیەك بۆ هەردوو لای هاوکێشە یان لێدەرکردنی بۆ ئازادکردنی نەزانراو و دیاریکردنی بەهاکەی. خوارزمی پشتی بە زانستی جەبر بەست بۆ ئەنجامداتی لێکۆڵینەوەی زانستی لە بوارەکانی جوگرافیا و گەردوونناسی.

### وانەکان

1. هاوکێشەکان
2. شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان.
3. شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بە یاسا.

ئەستەرلاب لە ئامرازە بەراییەکان بوو، کە زانایەکان بەکاریاندەهێنا بۆ لێکۆڵینەوە لە شوێنی ئەستێرەکان.

وانەی 1

# دەروازەیەك بۆ هاوكێشەكان

## Introduction to Equations

**بۆچی**

دەتوانین زۆر لە پرسیارەكانی ژیانی ڕۆژانە بە بەكارهێنانی هاوكێشەكان شیكاربكەین. هاوكێشە بە تەرازوو دەچێت، هاوكێش بوون وامان لێدەكات بە یەكسانی لەگەڵ هەردوو تایەكە (یان هەردوو لای هاوكێشەكە) مامەڵە بكەین.

**ئامانجەكان**

- سیفەتەكانی یەكسانبوون دەناسیت و بەكاریاندەهێنێت
- هاوكێشە هێڵییەكان بە جەبر و بە ڕوونكردنەوەیی دەنووسێت و شیكاریان دەكات

هاوكێشە **Equation** بریتییە لە یەكسانبوون لە نێوان دوو بڕ كە گۆڕاوێك یان زیاتر لە خۆدەگرن، پێی دەوترێت نەزانراو **Unknown**

$12x = 10$ ، هاوكێشەیەكی یەك نەزانراوە $x$ تێدایە.

$2x - 3y = 12$ ، هاوكێشەیەكی دوو نەزانراوە كە $x$ و $y$ تێدایە.

هەر ژمارەیەك بە لەجیاتیدانان پاسادانی هاوكێشەكە بكات (واتا بگۆڕێت بۆ یەكسانییەكی دروست پاش دانانی ژمارەكە لەجێگای گۆڕاوەكە) پێی دەوترێت ڕەگی **Root** هاوكێشەكە.

بۆ نموونە: ژمارە $\frac{5}{6}$ بریتییە لە ڕەگی هاوكێشەی $12x = 10$ چونكە ئەگەر ئەو ژمارە لەجیاتی نەزانراوەكە دابنێین دەبێتە هۆی یەكسانبوونێكی دروست $12 \times \frac{5}{6} = 10$ .

شیكاركردنی هاوكێشە بریتییە لە دۆزینەوەی كۆمەڵە ژمارەیەك كە دەبنە ڕەگەكانی هاوكێشەكە بەو كۆمەڵە دەوترێت **كۆمەڵەی شیكاری هاوكێشەكە Solution Set** ئەو كۆمەڵەیە لەوانەیە یەك دانەی تێدابێت، و لەوانەیە لە دانەیەك زیاتری تێدابێت، یان لەوانەیە ژمارەیەكی دوانەهاتوو دانەی تێدابێت، و لەوانەیە كۆمەڵەی شیكار **كۆمەڵەی بەتاڵ $\varnothing$ Empty Set** بێت، واتا هیچ دانەیەكی تێدانەبێت. سیفەتی یەكسانبوون لە ژمارە ڕاستییەكان و سیفەتی لە جیاتیدانان بۆ شیكاركردنی هاوكێشەكان بەكاربهێنە.

**سیفەتەکانی یەکسان بوون Properties of Equality**

| | |
|---|---|
| سیفەتی وێنەدانەوە **Reflexive Property** | $a = a$ |
| سیفەتی هاوجێبوون **Symmetric Property** | ئەگەر $a = b$ ئەوا $b = a$ |
| سیفەتی تێپەڕبوون **Transitive Property** | ئەگەر $a = b$ وە $b = c$ ئەوا $a = c$ |
| سیفەتی کۆکردنەوە **Addition Property** | ئەگەر $a = b$ ئەوا $a + c = b + c$ |
| سیفەتی لێدەرکردن **Subtraction Propret** | ئەگەر $a = b$ ئەوا $a - c = b - c$ |
| سیفەتی لێکدان **Multiplication Property** | ئەگەر $a = b$ ئەوا $ac = bc$ |
| سیفەتی دابەشکردن **Division Property** | ئەگەر $a = b$ ئەوا $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ کاتێك $c \neq 0$ |
| سیفەتی لەجیاتیدانان **Substitution Property** | |

ئەگەر $a = b$ لەجیاتیدانانی $b$ لە $a$ لەهەر دەستەواژەیەکی دروستدا، بە دروستی دەمینێتەوە.

شیکارکردنی هاوکێشەکان هەموو کات بە سادەکردنی بڕەکان و لابردنی هێماکانی یەکتربەستن دەستپێدەکات.

**نموونە** 1

**جێبەجێکردنەکان**
پلەکانی گەرما

دوو جۆر پێوەر هەیە بۆ پلەی گەرمی: پێوەری سەدی **Celsius** و پێوەری فەهرەنهایت **Fahrenheit** پەیوەندی نێوان دوو پێوەرەکە بریتییە لە $F = \frac{9}{5}C + 32$ کاتێك $F$ هێمای پلەی گەرمی بە پێوەری فەهرەنهایت، و $C$ پلەی گەرمی بە پێوەری سەدی بێت.
لە بڵاوکراوەی کەشوهەوادا هاتووە، پلەی گەرمی ئەمڕۆ 86 پلە بوو بە پێوەری فەهرەنهایت. پلەی گەرمی چەند بووە بە پێوەری سەدی؟

شیکار

| | |
|---|---|
| $F = \frac{9}{5}C + 32$ | ڕێساکە |
| $86 = \frac{9}{5}C + 32$ | لەجیاتی $F$ ژمارە 86 دابنێ |
| $86 - 32 = \frac{9}{5}C + 32 - 32$ | 32 دەربکە لە هەر لایەك بەبەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن |
| $54 = \frac{9}{5}C$ | سادەبکە |
| $\left(\frac{5}{9}\right)54 = \left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{9}{5}C\right)$ | هەردوولا لە $\frac{5}{9}$ بدە بەبەکارهێنانی سیفەتی لێکدان |
| $30 = C$ | کورتبکەوە |
| $C = 30$ | سیفەتی هاوجێبوون بەکاربهێنە |

هەوڵبدە پلەی گەرمی بە پێوەری فەهرەنهایت دەبێتە چەند؟ کاتێك بە پێوەری سەدی 35 پلە بێت.

## نموونە 2

هاوکێشەی $2x+7=5x-9$ شیکاربکە.

**شیکار**

$2x+7=5x-9$ هاوکێشەکە

$2x+7-7=5x-9-7$ 7 لە هەردوو لا دەربکە، بە بەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن

$2x=5x-16$ سادەبکە

$2x-5x=5x-16-5x$ $5x$ لە هەردوو لا دەربکە، بە بەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن

$-3x=-16$ سادەبکە

$\frac{-3x}{-3}=\frac{-16}{-3}$ هەردوو لا بەسەر 3- دابەشبکە بە بەکارهێنانی سیفەتی دابەشکردن

$x=\frac{16}{3}$ سادەبکە

ساغبکەوە:

$$2\times\frac{16}{3}+7\stackrel{?}{=}5\times\frac{16}{3}-9$$

$$\frac{32+21}{3}\stackrel{?}{=}\frac{80-27}{3}$$

$$\frac{53}{3}=\frac{53}{3}$$

کەواتە، $x=\frac{16}{3}$ ڕەگی هاوکێشەکەیە

**هەوڵبدە** هاوکێشەی $3x+12=-5x+24$ شیکاربکە، شیکارەکە بە لەجیاتیدانان ساغبکەوە.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

ئەو سیفەتانە دیاربکە کە لە شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاریدەهێنیت.

**1** $52=-2.7x-3$ **2** $x+2.2=\frac{x}{5}$ **3** $3x-5=2x-2$

**4** ڕوونی بکەوە، چۆن هاوکێشەیەکی هاوتای هاوکێشەی $4x-7=4$ بەدەستدەهێنێت.

**لەبیرت بێت**

دوو هاوکێشە هاوتا دەبن ئەگە ر هەمان ڕەگەکانیان هەبێت

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە و شیکارەکان ساغبکەوە بکە.

**5** $4x+12=20$ **6** $\frac{x}{5}+3=4$

**7** $-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}=2-3x$ **8** $7-6x=2x-9$

## راهێنان و جێبەجێکردن

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

**9** $2x-5=1$

**10** $-2x-7=9$

**11** $5x-3=12$

**12** $20=6x-10$

**13** $4-5x=19$

**14** $3x+1=\frac{1}{2}$

**15** $4x+80=-6x$

**16** $7x=-2x+5$

**17** $5x+3=2x+18$

**18** $4x-3=x+7$

**19** $\frac{1}{5}x+3=2$

**20** $\frac{1}{4}x-\frac{5}{2}=-2$

**21** $\frac{1}{2}x+2=0$

**22** $\frac{1}{3}x=-x+4$

**23** $x-5=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

**24** $-\frac{1}{3}x+1=\frac{3}{2}x-1$

**25** $\frac{2}{3}x+9=\frac{1}{2}x-4$

**26** $\frac{1}{4}x-3=6x$

**27** $\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}x-1$

**28** $\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}=x-3$

ئەم هاوکێشانە بە بەکارهێنانی بژمێر شیکاربکە. شیکارەکە بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

**29** $0.24x+1.1=2.56x-1.5$

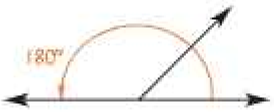
**30** $1.05x-4.28=-2.65x+4.1$

**31** $0.67x-8.75=-0.48x+3.99$

**32** $5.9(0.33x-1.33)=1.03x-5.72$

**بەستنەوە**

**33** ئەندازە پێوانەی یەکێك لە دوو گۆشەی پڕکەر دەکاتە دوو ئەوەندەی پێوانەی گۆشەکەیتر و 45 پلەی بۆ زیادکرابێت. هاوکێشەیەك بنووسە و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی دوو گۆشەکە.




**جێبەجێکردنەکان**

هاوکێشەی گونجاو بۆ ئەمانەی خوارەوە بنووسە پاشان شیکاریانبکە.

**34** بۆ خۆشی نرخی بلیتی چوونە ژوورەوەی شاری یاری 6000 دینارە، نرخی بەشداریکردن لەهەر یارییەك 1500 دینارە. ئەگەر 30 000 دینارت پێبێت، لە چەند یاری دەتوانیت بەشداری بکەیت؟

**35** ئابووری ژوان بە 1 750 000 دینار کۆمپیوتەرێکی نوێی کڕی. ئەم کۆمپیوتەرە ساڵانە 250 000 دینار نرخەکەی کەم دەکات. پاش چەند ساڵ نرخەکەی دەبێتە سفر؟

**36** داهاتی ئارام دوو خستنەڕووی کاری بۆ هات لە کۆگای فرۆشتنی جلوبەرگ.
- یەکەمیان: 600 هەزار دینار مانگانە لەگەڵ 10 هەزار دینار بۆ هەر کاڵایەك کە دەیفرۆشێت
- دووەمیان: 800هەزار دینار مانگانە لەگەڵ 8هەزار دیناری بۆ هەر کاڵایەك کە دەیفرۆشێت

ژمارەی ئەو کاڵایانەی پێویستە ئارام بیفرۆشێت چەندە، بۆ ئەوەی لە هەردوو خستنەڕووەکە هەمان دەستکەوتی هەبێت؟

**37** دەرامەت کارگەیەك کارێکی بە شارا سپارد بەرامبەر 60 هەزار دینار لە هەفتەیەکدا، بۆ هەر کاتژمێرێکی کارکردن 7500 دینار دەخرێتە سەر هەفتانەکەی. پێویستە شارا چەند کاتژمێر کاربکات بۆ ئەوەی لە کۆتایی هەفتە کراسێك بە 120 هەزار دینار بکرێت؟

## ڕوانین بۆ دواوە

ئەم بڕانە هەژماربکە.

**38** $3(2-(5-3)-7)+2$

**39** $-(-5^2)^3$

## ڕوانین بۆ پێشەوە

ئەم دەستەواژە بیرکارییانە چیدەگەیەنێت؟ باسیبکە.

**40** $y > -5$

**41** $-3 < x < 3$

**42** $-1 \leq y \leq 1$

**43** $x \geq -3$

وانەی 2

# شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان

## Factoring Algebraic Quadratic Expressions

**بۆچی**

بڕە جەبرییە دووجاکان بۆ وەسفکردنی زۆر نموونەی ژیانی ڕۆژانەمان بەکاردێت وەک شێوازی حەوزی ئەم وێنەیە

**ئامانجەکان**

- بڕە جەبرییە دووجاکان شیتەڵدەکات.
- بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا شیکارکردن بەکاردەهێنێت.

**جێبەجێکردنەکان**

**ئەندازەی تەلارسازی**

ئەندازیارێکی تەلارسازی حەوزێکی لە باخچەی گشتی دروستکرد، وەک لە وێنەی سەرەوە دەردەکەوێت. لەناو حەوزەکەدا چەند خشتەکێکی هاوشێوە لە شێوەی نیشانەی لێکدان × ریزکرد بەچەند ئاستێکی جیاواز، بە جۆرێك کە ژمارەی خشتەکەکانی هەر لایەکی شێوە هێماکە یەکی کەمتر بێت لەو لایەی دەکەوێتە ژێرخۆی. ڕێسای $m = 2n^2 - n$ هەژماری خشتەکەکانی $m$ مان بۆ دەکات بۆ دروستکردنی حەوزێك لە $n$ ئاستدا. ژمارەی ئاستەکانی ناوی حەوزێك چەندە کە 66 خشتەکی تێدابێت.

## شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان Factoring Algebraic Quadratic Expressions

لێکدان

$$2x^2 + 6x = 2x(x+3)$$

شیتەڵکردن

لەو کاتەی فێری لێکدانی دوو بڕی جەبری وەك $x+3$ ، $2x$بوویت، ئەنجامی لێکدانی دوو بڕەکەت دەگۆڕیێ بۆ سەرجەمی کۆمەڵێك ڕادە. شیتەڵکردن **Factoring** کرداری پێچەوانەی لێکدانە و شیتەڵکردن سەرجەمی چەند ڕادەیەکت بۆ دەگۆڕێت بۆ ئەنجامی لێکدان.

بۆ ئەوەی بڕێکی دووانی یان زیاتر شیتەڵبکەیت، گەورەترین کۆڵکەی هاوبەش (گ.ك.ه) بۆ دوو ڕادەکە دەربێنە ئەگەر هەبوو **Greatest Common Factor (GCF)** ، وەك لەم نموونەدا دیاردەکەوێت.

## نموونە 1

ئەم برە دووجایانە شیتەڵبکە.

أ $3m^2-12m$

ب $3x(4x+5)-5(4x+5)$

**شیکار**

گەورەترین کۆڵکەی هاوبەش دەربهێنە.

أ $3m^2-12m=3m\times(m)-3m\times(4)$

گەورەترین کۆڵکەی هاوبەش بریتییە لە$3m$

$3m^2-12m=3m\times(m)-3m\times(4)$

$=3m(m-4)$

ب $3x(4x+5)-5(4x+5)$

گەورەترین کۆڵکەی هاوبەش بریتییە لە $(4x+5)$

$3x(4x+5)-5(4x+5)$

$=(4x+5)(3x-5)$

**هەوڵبدە** ئەم دوو برە $5x^2+15x$ ، $4(2x-1)+(2x-1)x$ شیتەڵبکە.

شێوەی گشتی بڕی دووجا بریتییە لە $ax^2+bx+c$ کاتێك $a\neq 0$

دەتوانیت زۆر لە برە جەبرییە دووجاکان شیتەڵبکەیت. سەرنجی شیتەڵکردنی ئەم برانەی خوارەوە بدە کاتێك $a=1$.

**شیکارکردنی پرسیارەکان** بەدوای شێوازێکدا بگەڕێ سەیری شێوەی شیتەڵکردنی ئەم برە دووجایانە بکە. سەرنجبدە کە کۆی دوو رادە نەگۆڕەکە لە کۆڵکەکاندا یەکسانە بە هاوکۆڵکەی $x$ لە برە دووجاکەدا بەر لەشیتەڵکردنیان و ئەنجامی لێکدانیان یەکسانە بە رادە نەگۆڕەکە.

$x^2+7x+10=(x+5)(x+2)$

| | |
|---|---|
| $5+2=7$ | $5\times 2=10$ |

$x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$

| | |
|---|---|
| $(-5)+(-2)=-7$ | $(-5)\times(-2)=10$ |

$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$

| | |
|---|---|
| $5+(-2)=3$ | $5\times(-2)=-10$ |

$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$

| | |
|---|---|
| $(-5)+2=-3$ | $(-5)\times(2)=-10$ |

بە لێکۆڵینەوە لە شێوازەکانی پێشوو ڕێسایەکمان بۆ شیتەڵکردنی بڕی $x^2+bx+c$ دەستدەکەوێت.

بۆ ئەوەی بڕی $x^2+bx+c$ شیتەڵبکەیت، کاتێك $b$ ، $c$ دوو ژمارەی تەواوبن، لە دوو ژمارەی تەواوی $r$ و $s$ بگەڕێ کە سەرجەمیان $b$ بێت و ئەنجامی لێکدانیان $c$ بێت، پاشان برەکە بەم شێوەیە شیتەڵبکە $x^2+bx+c=(x+r)(x+s)$.

کاتێك $c$ ژمارەیەکی موجەب بێت، شیتەڵبکە بۆ ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارەکە هەمان نیشانەیان هەبێت، وەك نیشانەی رادەی دووەم.

## نموونە

**2** بڕی $x^2+5x+6$ شیتەڵبکە.

**شیکار**

شیکارکردنی پرسیارەکان

بخەملێنە و ساغبکەوە دەست بە نووسینی $(x\quad)(x\quad)$ بکە بەدوای دوو کۆڵگەی ژمارە 6 بگەڕێ کە هەمان نیشانەیان هەبێت و سەرجەمیان 5 بێت.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(x-2)(x-3)$ | $(x-1)(x-6)$ | $(x+2)(x+3)$ | $(x+1)(x+6)$ |
| $(-2)x+(-3)x$ | $(-1)x+(-6)x$ | $2x+3x$ | $1\times x+6x$ |
| $\stackrel{?}{=}$ | $\stackrel{?}{=}$ | $\stackrel{?}{=}$ | $\stackrel{?}{=}$ |
| $5x$ | $5x$ | $5x$ | $5x$ |
| هەڵەیە | هەڵەیە | دروستە | هەڵەیە |

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

تێبینیبکە لە کاتی شیتەڵکردنی $x^2-5x+6$ هەروەک پێشتر دەبینین کە $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

هەوڵبدە بڕی $x^2-10x-11$ شیتەڵبکە.

کاتێك $c$ ژمارەیەکی سالب بێت لە $x^2+bx+c$ بەدوای دوو کۆڵکە جیاواز لەنیشاندا بگەڕێ.

## نموونە

**3** بڕی $x^2-7x-30$ شیتەڵبکە.

**شیکار**

شیکارکردنی پرسیارەکان

بخەملێنە و ساغبکەوە دەست بە نووسینی $(x\quad)(x\quad)$ بکە بەدوای دووکۆڵگە لە کۆڵگەکانی ژمارە(30−)دا بگەڕێ، سەرجەمیان بکاتە 7− ئاگاداربە دوو کۆڵگەکە دەبێ لە نیشانەدا جیاواز بن.

| | | |
|---|---|---|
| $(x-2)(x+15)$ | $(x+1)(x-30)$ | $(x-1)(x+30)$ |
| $(-2)x+15x$ | $1x+(-30)x$ | $(-1)x+30x$ |
| $\stackrel{?}{=}$ | $\stackrel{?}{=}$ | $\stackrel{?}{=}$ |
| $-7x$ | $-7x$ | $-7x$ |
| هەڵەیە | هەڵەیە | هەڵەیە |
| $(x+3)(x-10)$ | $(x-3)+(x+10)$ | $(x+2)(x-15)$ |
| $3\times x+(-10)x$ | $(-3)x+10x$ | $2x+(-15)x$ |
| $\stackrel{?}{=}$ | $\stackrel{?}{=}$ | $\stackrel{?}{=}$ |
| $-7x$ | $-7x$ | $-7x$ |
| دروستە | هەڵەیە | هەڵەیە |

کەواتە $x^2-7x-30=(x+3)(x-10)$

هەوڵبدە بڕی $3x^2+11x-20$ شیتەڵبکە.

## نموونە 4

بڕی $8x^2+2x-15$ شیتەڵبکە.

شیکار

$$8x^2+2x-15=(2x+3)(4x-5)$$

$$+12x$$

$$-10x$$

$-10x+12x=2x$ ڕادە دووجاکە شیتەڵبکە بۆ دوو کۆلکەی $\left(8x^2=(2x)\times(4x)\right)$ و ڕادە نەگۆڕەکەش بۆ دوو کۆلکەی $\left((-5)(3)=-15\right)$ و پاسادانی ڕادە هێلیەکە بکە.

## نموونە 5

ئەم بڕانە شیتەڵبکە.

أ $6x^2-5x-1$

ب $3x^2+11x-20$

ج $3x^2-11x-20$

د $8x+6x^2-30$

لەهەر شیتەڵکردنێک بەکەم هەنگاو گەورەترین کۆلکەی هاوبەش دەربهێنە پێش لە شیتەڵکردن.

شیکار

أ $6x^2-5x-1=(6x+1)(x-1)$

ب $3x^2+11x-20=(3x-4)(x+5)$

ج $3x^2-11x-20=(3x+4)(x-5)$

د
$$\begin{aligned}8x+6x^2-30&=6x^2+8x-30\\&=2(3x^2+4x-15)\\&=2(3x-5)(x+3)\end{aligned}$$

هەوڵبدە بڕی $3x^2+9x-30$ شیتەڵبکە.

- لەئەنجامی لێکدانی دوو بڕی $x+3$ ، $x-3$ دەوردبەوە.

جیاوازی نێوان دوو دووجا

$$(x+3)(x-3)=x^2+3x-3x-9=x^2-9=x^2-3^2$$

**شیتەڵکردنی جیاوازی نێوان دوو دووجا Factoring The Difference Of The Squares**

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

بۆ نموونە: $x^2-16=(x-4)(x+4)$

لە ئەنجامی دووجاکردنی هەریەکە لە $x+3$ و $x-3$ وورردبەوە.

$$\begin{aligned}(x+3)^2&=(x+3)(x+3)\\&=x^2+3x+3x+9\\&=x^2+6x+9\\&=x^2+2\times3\times x+3^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-3)^2&=(x-3)(x-3)\\&=x^2-3x-3x+9\\&=x^2-6x+9\\&=x^2-2\times3\times x+3^2\end{aligned}$$

دووجای تەواو

### شیتەڵکردنی دووجای تەواو Factoring Perfect Squares

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$     $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

سەرنجبدە $x^2+6x+9=(x+3)^2$ و $x^2-6x+9=(x-3)^2$

**نموونە 6** ئەم برانە شیتەڵ بکە.

أ $x^4-16$     ب $4x^2-24x+36$

شیکار

أ
$$x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)$$
$$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$$

ب
$$4x^2-24x+36=4(x^2-6x+9)$$
$$=4\left[x^2-2\times3\times x+3^2\right]$$
$$=4(x-3)^2$$

**هەوڵبدە** ئەم برانە شیتەڵبکە $9x^2-49$ و $3x^2-6x+3$ .

## شیکارکردنی هاوکێشە دووجاکان بە شیتەڵکردن
## Using Factoring to Solve Quadratic equations

هەندێك جار دەتوانیت شیتەڵکردن بۆ شیکارکردنی هاوکێشەکان بەکاربهێنیت.

### سیفەتی لێکدانی سفری Zero Product Property

ئەگەر $p\times q=0$ ئەوا $p=0$ یان $q=0$

شێوەی گشتی هاوکێشەی دووجا بەم جۆرە دەنووسرێت $ax^2+bx+c=0$ ئەگەر توانیت بڕی $ax^2+bx+c$ شیتەڵبکەیت، ئەوا دەتوانیت هاوکێشەکە بە جێبەجێکردنی سیفەتی سفری شیکاربکەیت. چۆن لێکدانی سفری جێبەجێ دەکەیت؟ بڕەکە شیتەڵبکە و ئەنجامی لێکدانیان یەکسان بکە بە 0 .

**نموونە 7** هاوکێشەی $x^2+6x=-5$ شیکاربکە.

شیکار

لەسەرەتادا هاوکێشەکە لەسەر شێوەی گشتی بنووسە $x^2+6x+5=0$ بڕی $x^2+6x+5$ شیتەڵبکە $(x+5)(x+1)$ دەستدەکەوێت $x^2+6x+5=(x+5)(x+1)$ پاشان $(x+5)(x+1)=0$ بنووسە (یەکسان بکە بە سفر) چۆن ڕەگەکانی هاوکێشەی $(x+5)(x+1)=0$ دیاری دەکەیت؟
بە بەکارهێنانی سیفەتی سفری، دوا هاوکێشە ئەم دوو هاوکێشەمان دەداتێ $(x+5)=0$ یان $(x+1)=0$ کەواتە $x=-5$ یان $x=-1$ واتا $-5$ یان $-1$ دوو ڕەگی هاوکێشەکەن.

**نموونه** 8 سیفەتی لێکدانی سفری بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

أ $2x^2-11x=0$ ب $x^2-14x+45=0$

شیکار

أ
$$2x^2-11x=0$$
$$x(2x-11)=0$$
$x=0$ یان $2x-11=0$

$x=0$ $x=\frac{11}{2}$

ب
$$x^2-14x+45=0$$
$$(x-5)(x-9)=0$$
$x-5=0$ یان $x-9=0$

$x=5$ $x=9$

**هەوڵبدە** سیفەتی لێکدانی سفری بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

أ $3x^2+12x=0$ ب $x^2+4x-21=0$

**بیری ڕەخنەگر** بسەلمێنە کە هاوکێشەی $ax^2+bx=0$ کاتێك $a\neq 0$ دوو ڕەگی هەیە کە بریتیین لە0، $-\frac{b}{a}$ .

**نموونە** 9 بەگەڕانەوە بۆ نموونەی حەوزەکەی لە سەرەتای وانەکەدا باسکرا، ژمارەی ئاستەکانی حەوزەکە چەندە؟ کاتێك ژمارەی خشتەکان 66 بێت؟

شیکار

هاوکێشەی $2n^2-n=66$ شیکاربکە.

$2n^2-n-66=0$ — هاوکێشەکە بەشێوەی گشتی بنووسە

$(2n+11)(n-6)=0$ — بڕی $2n^2-n-66=0$ شیتەڵبکە.

$2n+11=0$ یان $n-6=0$ — سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە

$n=-5.5$ فەرامۆش دەکرێت چونکە ژمارەی ئاستەکان نابێ سالب بێت کەواتە $n=6$ ڕاستە.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن $m$ و $n$ دەدۆزیتەوە ئەگەر $(x+m)(x+n)$ $x^2+34x+285=$ ؟

2 چی دەزانی دەربارەی شیتەڵکردنی بڕە دووجای $x^2+bx+c$ کاتێك $c$ موجەب بێت؟ کاتێك $c$ سالب بێت؟ نیشانەی $b$ چ زانیارییەکت پێ دەبەخشێت لە هەریەکە لەو بارانەدا.

3 چی دەتوانیت بڵێیت دەربارەی$b$ و $c$ ئەگەر ئەنجامی لێکدانیان سفربێت$(bc=0)$ ؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم بڕە دووجایانە شیتەڵبکە.

4 $2x^2-8x$ 5 $2x^2-6x$

6 $5x^2-15x$ 7 $4x(x+3)-7(x+3)$

8 $3(4b+7)-2b(4b+7)$ 9 $8d(9d-5)+3(9d-5)$

**10** $x^2+5x+6$

**11** $x^2+8x+7$

**12** $x^2-5x+4$

**13** $x^2-4x-12$

**14** $x^2-9x-36$

**15** $x^2+10x-24$

**16** $2x^2+9x+10$

**17** $3x^2+5x+2$

**18** $5x^2+13x-6$

**19** $8x^2+24x-14x-42$

**20** $12x^2+21x-8x-14$

**21** $72x^2-56x-36x+28$

**22** $x^2-81$

**23** $2x^2-8$

**24** $16x^2-25$

**25** $x^2+8x+16$

سیفەتی لێکدانی سفری بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە

**26** $x^2+7x=0$

**27** $x^2+6x+9=0$

**28** $x^2+3x-10=0$

**29** ئەندازە ئازاد چەند خاڵێکی بە 36 پارچە ڕاستەهێڵ بەیەکگەیاند. ژمارەی خاڵەکان چەندن؟ ئەگەر بزانیت گەیاندنی $n$ خاڵ پێویستی بە $\frac{n(n-1)}{2}$ پارچە ڕاستەهێڵ هەیە؟

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم برانە شیتەڵبکە.

**30** $3x+6$

**31** $3x^2+18$

**32** $10n-n^2$

**33** $x-4x^2$

**34** $6x-2x^2$

**35** $3x^2-15x$

**36** $5x(x-2)-3(x-2)$

**37** $(x+3)(2x)+(x+3)7$

ئەم برانە شیتەڵبکە.

**38** $x^2-16x+15$

**39** $x^2+8x+16$

**40** $x^2-26x+48$

**41** $x^2+4x-32$

**42** $x^2+7x-30$

**43** $x^2-10x-24$

**44** $-22x-48+x^2$

**45** $2x-x^2-24$

**46** $x^2-56-10x$

**47** $56+10x-x^2$

**48** $30+x-x^2$

**49** $24+10x-x^2$

**50** $3x^2+10x+3$

**51** $2x^2+5x+2$

**52** $2x^2+3x+1$

**53** $3x^2+7x+2$

**54** $12x^2-3x-9$

**55** $3x^2-5x-2$

شیتەڵکردن و سیفەتی لێکدانی سفری بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

**56** $15x^2 = 7x + 2$ **57** $3x^2 - 5x = 2$

**58** $4x - 4 = -15x^2$ **59** $3x^2 + 3 = 10x$

**60** $2x^2 - 15 = -7x$ **61** $6x^2 - 17x = -12$

**62** $x^2 - 36 = 0$ **63** $t^2 - 9 = 0$

**64** $x^4 - 81 = 0$ **65** $x^4 - 1 = 0$

**66** $4x^2 - 9 = 0$ **67** $25x^2 - 16 = 0$

**68** $x^2 - 2x + 1 = 0$ **69** $x^2 + 4x + 4 = 0$

**70** $9x^2 = -6x - 1$ **71** $4x^2 + 1 = 4x$

**72** $-4 + 20x - 25x^2 = 0$ **73** $40x + 25 = -16x^2$

**74** $64 + 16x + x^2 = 0$ **75** $9 - 6x + x^2 = 0$

شیتەڵکردن و سیفەتی لێکدانی سفری بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

**76** $x^2 - 7x + 10 = 0$ **77** $t^2 - 2t - 15 = 0$

**78** $4x^2 + 4x - 24 = 0$ **79** $6x^2 + 3x - 9 = 0$

**80** $t^2 + 7t - 60 = 0$ **81** $x^2 - 15x + 56 = 0$

**82** $x^2 + 8x + 12 = 0$ **83** $x^2 - 3x - 40 = 0$

**84** $6x^2 + 20x - 16 = 0$ **85** $4x^2 - 8x + 3 = 0$

**بەرەنگاری**

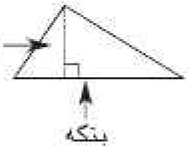
ئەم برانە شیتەڵبکە.

**86** $(a+b)^4 - (a-b)^4$ **87** $x^{2n} - 1$ **88** $x^{2n} - 2x^n + 1$

**بەستنەوە**

ئەندازە ڕێسای هەژمارکردنی ڕووبەری سێگۆشە بریتییە لە $A = \frac{1}{2}bh$، کە $A$ ڕووبەر و $b$ درێژی بنکە و $h$ بەرزی بێت. ئەم زانیارییە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی ڕاهێنانی 89 و 90 .

**89** بەرزی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەرەوە کە ڕووبەرەکەی $42\ cm^2$ و بنکەکەی $5\ cm$ زیاترە لە بەرزییەکەی.




**90** درێژی بنکەی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە کە ڕووبەرەکەی $12\ cm^2$ و بەرزییەکەی $5\ cm$ کەمترە لە درێژی بنکەکەی.

## ڕوانینێك بۆ دواوە

هەر لاسەنگەیەك شیكاربكە و كۆمەڵەی شیكار لەسەر هێڵی ژمارەكان بنوێنە.

**91** $2x - 4 > 12 + 5x$ **92** $2x - \frac{3}{4} \geq 7$

**93** $3(3x+7)-12 \le 8-(\frac{1}{2}x+9)$

**94** $-2(\frac{2}{3}x+5)-13<0$

لێکیان بدە.

**95** $(3x+4)(-x-5)$

**96** $(-2x+9)(-4x+7)$

**97** $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4})(-5x-2)$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەگەر کرا ئەم بڕە دووجایانە شیتەڵبکە

**98** $(x+2)^2-4$

**99** $(x+9)^2+36$

**100** $(x-1)^2-16$

وانەی
3

# شیکارکردنی هاوکێشە دووجاکان بە یاسا

## Solving Quadratic Equation By Formula

**بۆچی**

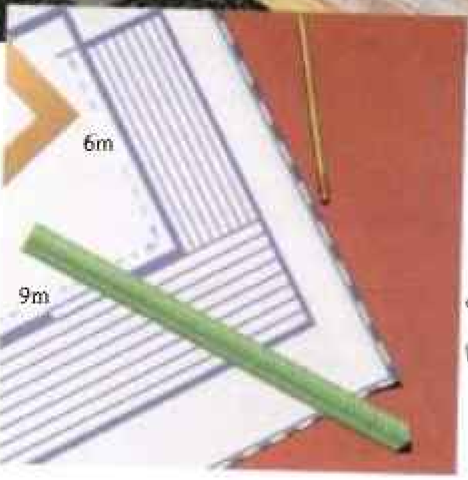
دەتوانین بە بەکارهێنانی یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا زۆر کێشەی ژیانی ڕۆژانە شیکاربکەین وەک دۆزینەوەی دووریەکانی ڕێڕەوی خانوویەک.

**ئامانجەکان**

- بۆ دۆزینەوەی ڕەگە ڕاستییەکانی هاوکێشەیەکی دووجا یاسا بەکاردەهێنین.

**جێبەجێکردنەکان**

بیناسازی




خانەوادەی وەسمان بڕیاریدا ڕێڕەوێك دروستبکات بە پانییەکی نەگۆڕ بە درێژایی هەردوولای ماڵەکەیان خێزانەکە ئەوەندە کەرەستەیان هەیە کە بەشی ڕێڕەوێکی ڕووبەر $54m^2$ دەکات. پانی ڕێڕەوەکە پێویستە چەند بێت؟ دەتوانیت یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بەکاربهێنیت بۆ شیکارکردنی ئەو پرسیارە.

زانایانی بیرکاری یاسایەکیان دانا، بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا لەسەر شێوەی گشتی $ax^2+bx+c=0$ ئەم یاسایە بڕێکی گرنگ بەکاردەهێنێت ناویاننا جیاکەرەوە.

**جیاکەرەوە Discriminant**

بەبڕی $\Delta=b^2-4ac$ دەوترێت بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەی دووجا $ax^2+bx+c=0$ کاتێك $a\neq0$ .

### شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بە یاسا

| جیاکەرەوە | ژمارەی ڕەگەکان لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان |
|---|---|
| $\Delta > 0$ | هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی جیاوازی هەیە کە بریتیین لە: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| $\Delta = 0$ | هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی یەکسانی هەیە. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ |
| $\Delta < 0$ | هاوکێشەکە ڕەگی ڕاستی نییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان. |

**نموونە** 1 یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2 + 5x - 14 = 0$

**شیکار**

ئەگەر $x^2 + 5x - 14 = 0$ لەگەڵ شێوەی گشتی هاوکێشەی دووجا $ax^2 + bx + c = 0$ بەراوردبکەین دەبینین $a = 1$ و $b = 5$ و $c = -14$.

هاوکێشەکە بەم شێوەیە شیکاربکە:

**1.** جیاکەرەوە هەژماربکە بە لە جیاتیدانانی بەهاکان لە $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 25 + 56 = 81$$

**2.** لەبەرئەوەی جیاکەرەوە موجەبە، هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی جیاوازی هەیە کە بریتیین لە:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{81}}{2} = 2 \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{81}}{2} = -7$$

**هەوڵبدە** یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2 - 7x + 6 = 0$

**خاڵی چاودێری** ✓ هاوکێشەی $x^2 + 5x - 14 = 0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە، بۆ ساغکردنەوەی دروستی وەڵامی نموونەی 1.

**نموونە** 2 یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $4x^2 = 8 - 3x$ دوو ڕەگەکە بە تەواوی بنووسە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە دەیەك نزیکیانبکەوە.

**شیکار**

شێوەی گشتی هاوکێشەکە بریتییە لە: $4x^2 + 3x - 8 = 0$ کە هاوکۆلکەکانی بریتین لە: $a = 4$ و $b = 3$ و $c = -8$.

جیاکەرەوە هەژماربکە بە لەجیاتیدانان $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 4(-8) = 9 + 128 = 137$

لەبەرئەوەی جیاکەرەوە موجەبە، هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی جیاوازی هەیە کە ئەمانەن:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3+\sqrt{137}}{8} \quad , \quad = \frac{-3-\sqrt{137}}{8}$$

$$\approx 1.1 \quad , \quad \approx -1.8$$

هەوڵبدە یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $2x^2 - 6x = -3$ دوو ڕەگەکە بە تەواوی بنووسە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە دەیەك نزیکیانبکەوە.

**نموونە** 3 یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2 - 3x + 6 = 0$ .

**شیکار**

هاوکۆڵکەکان بریتیین لە $a = 1$ و $b = -3$ و $c = 6$ .

جیاکەرەوە کە هەژماربکە. $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 9 - 24 = -15$

لەبەر ئەوەی جیاکەرەوە سالیبە بۆیە هاوکێشەکە ڕەگی نییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان

هەوڵبدە ئەم هاوکێشەیە $4x + 2 = -3x^2$ شیکاربکە.

**نموونە** 4 ئەم هاوکێشەیە $3x^2 + 12 = 12x$ شیکاربکە.

**شیکار**

هاوکێشەکە بەشێوەی گشتی بنووسە: $3x^2 - 12x + 12 = 0$

جیاکەرەوەکە هەژماربکە. $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 144 - 144 = 0$

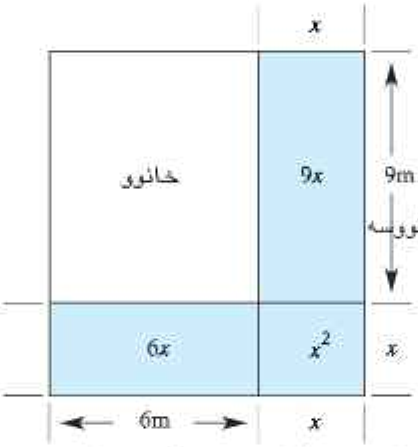
لەبەرئەوەی $\Delta = 0$ هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی یەکسانی هەیە کە ئەمانەن:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{6} = 2$$

هەوڵبدە ئەم هاوکێشەیە $x^2 - 14x = 49$ شیکاربکە.

نموونە **5**

بەگەڕانەوە بۆ سەرەتای وانەکە، پانی ڕێڕەوەکە دیاریبکە ئەگەر زانیت خێزانی وەسمان ئەوەندە کەرەستەی هەیە کە بەشی 54 مەتر دووجا بکات.




جێبەجێکردنەکان

شیکار

ئەو برەی ڕووبەری ڕاڕەوەکە دەنوێنێت بریتییە لە

داواکراو: شیکارکردنی $A(x) = x^2 + 9x + 6x = x^2 + 15x$

هاوکێشەی $x^2 + 15x = 54$ هاوکێشەکە بەشێوەی گشتی بنووسە

و هاوکۆلگەکانی دیاریبکە $a = 1$ و $b = 15$ و $c = -54$

جیاکەرەوەی ئەم هاوکێشەیە هەژماربکە:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 225 - 4 \times 1 \times (-54) = 441$$

لەبەرئەوەی جیاکەرەوەکە موجەبە، هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی جیاوازی هەیە کە ئەمانەن:

$$x_1 = \frac{-15 + \sqrt{441}}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{-15 - \sqrt{441}}{2} = -18$$

وەڵامەکە 3 یە چونکە ڕەگی 18− بەجێنیە، چونکە پانی ڕاڕەو نابێت ژمارەیەکی سالب بێت.

هەوڵبدە پانی ڕاڕەوەکە دیاریبکە ئەگەر کەرەستەکە بەشی 34 مەتر دووجا بکات.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

**1** چۆن یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بەکاردێنێت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2 + 2x - 3 = 0$ ڕوونیبکەوە.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

یاسا بۆ دیاریکردنی هەردوو ڕەگی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

**2** $x^2 - 5x + 4 = 0$

**3** $2x^2 - 5x = 3$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

یاسا بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشە دووجایانە بەکاربهێنە، شیکارەکان بە تەواوی بنووسە (بەبێ نزیککردنەوە).

**4** $x^2 + 7x + 9 = 0$

**5** $x^2 + 6x = 0$

**6** $(x+1)(x-2) = 5$

**7** $(x-4)(x+5) = 7$

**8** $t^2 - 9t + 5 = 0$

**9** $x^2 - 3x - 1 = 0$

**10** $x^2 + 9x - 2 = -16$

**11** $x^2 - 5x - 6 = 18$

**12** $5x^2 + 16x - 6 = 3$

**13** $4x^2 = -8x - 3$

**14** $3x^2 - 3 = -5x - 1$

**15** $x^2 + 3x = 2 - 2x$

**16** $x^2 + 6x + 5 = 0$

**17** $x^2 + 10x = 5$

**18** $-2x^2 + 4x = -2$

**19** $5x^2 - 2x - 3 = 0$

**20** $-6x^2 + 3x + 19 = 0$

**21** $-x^2 - 3x + 1 = 0$

## ڕوانینێك بۆدواوه

شیتەڵکردن وسیفەتی لێکدانی سفری لە شیکاکردنی ئەم هاوکێشانە بەکاربهێنە.

**22** $x^2 - 9x = 0$

**23** $4x^2 = 64$

**24** $4x^2 - 4x + 1 = 0^{25}$

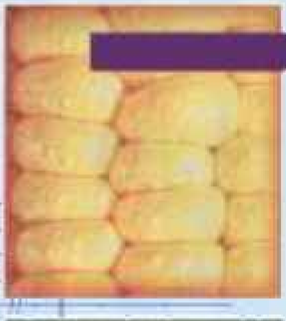
**25** $x^2 - 3x + 10 = 0$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوه

**26** ئایا دەتوانیت لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان شیکارێك بدۆزیتەوە بۆ هاوکێشە دووجای $2x^2 + 5x + 6 = 0$؟ ئەمە بە پشتبەستن بە یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا ڕوونبکەوە.

# هێزەکان و ڕەگەکان

## Powers and Radicals



## بەشی 2

مرۆڤ هەر لە زووەوە هێزەکان و ڕەگەکانی ناسیوەتەوە، لەسەرەتادا تەنها هێزی ژمارەی تەواوی توان تەواوی موجەبی ناسی بە هۆی لێکدان و ڕەگەکانیش تەنها ڕەگی دووجا بوون پاشان ڕەگی سێجا: مرۆڤ تووشی ئاستەنگی گەورە بوو لەکاتی لێکدانی هێزەکان و ڕەگەکان. لەگەڵ پێشکەوتنی کەشتییەوانی و گەردووونناسی، پێویستی بە جێبەجێکردنی کرداری ئالۆزی بیرکاری توانی تێدابێت زۆرتر بوو. زانایانی بیرکاری بەکارێکی سەخت هەڵسان بۆ گۆڕینی کرداری لێکدان بۆ کرداری کۆکردنەوەی خێرا. لەو کارە سەرکەوتوو بوون بە هۆی بەکارهێنانی چەمکی لۆگاریتم.

### وانەکان

1. هێزەکان
2. ڕەگەکان
3. لۆگارتمەکان

وانەی 1

# هێزەکان Powers

**بۆچی**
زانایانی گەردوونناسی هێزەکانیان بەکارهێناوە، بۆ دەربڕینی گەورە دوورییەکان وەك دووری نێوان زەوی و ئەمە ئەستێرەی باز (نموونە 5)

**ئامانجەکان**

- بە سادەترین شێوە ئەو بڕانەی هێزیان تێدایە دەنووسێت.
- شێوەی زانستی ژمارەکان بەکاردەهێنێت.

هێزەکان ئەو بڕانەن بەشێوەی $a^n$ دەنووسرێن، کاتێك $a$ ژمارەیەکی ڕاستی بێت جگەلە سفر، وپێی دەوترێت بنچینەی هێزەکە، و $n$ ژمارەیەکی تەواوە و پێی دەوترێت توانی هێزەکە.
کاتێك $n$ ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت، ئەوا $a^n$ لێکدانی ژمارە $a$ لەخۆی $n$ جار دەردەبڕێت.

توان ↓
بنچینە ←

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ جار}}$$

هەردوو کەوانەکە بۆ دەوردانی بنچینەکە بەکاربهێنە، کاتێك لەسەر یەك هێما نەوەستبێت.

| شێوەی درێژ بڕی | بنچینە | شێوەی توانی |
|---|---|---|
| $-2(x \times x \times x)$ | $x$ | $-2x^3$ |
| $-(2x)(2x)(2x)$ | $2x$ | $-(2x)^3$ |
| $(-2x)(-2x)(-2x)$ | $-2x$ | $(-2x)^3$ |

## نموونە 1

ئەم بڕانە بەشێوەی درێژ بڕی بنووسە

شیکار

أ $(4y)^3$

$(4y)^3$ — $4y$ بنچینەیە و توانەکە 3

$(4y)(4y)(4y)$ — $4y$ سێ جار لە خۆی لێکدراوە.

ب $-a^3$

$-(a)^3$ — بنچینە $a$ یەو توانەکەی 3 یە

$-(a\times a\times a)$ — ( $a$) سێ جار لە خۆی لێکدراوە

ج $2y^2(x-3)^3$

$2y^2(x-3)^3$ — ئەو برە دوو بنچینەی هەیە $y$ و $x-3$ ، $y$ دوو جار لە خۆی لێکدراوە، $x-3$ سێ جار لە خۆی لێکدراوە.

$2(y)(y)(x-3)(x-3)(x-3)$

**هەوڵبدە** هەر برێك بەشێوەی درێژبڕی بنووسە.

أ $(2a)^5$ ب $3b^4$ ج $-(2x-1)3y^2$

### ئەو هێزانەی توانەکانیان سفرە یان ژمارەیەکی تەواوی سالبە

با $a$ ، $b$ هەر ژمارەیەکی ڕاستی بن جگە لە سفر، $n$ هەر ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت.

| بە نووسین | بە ژمارە | بە جەبر |
|---|---|---|
| سیفەتی توانی سفری هێزی ژمارەیەکی ڕاستی جگە لە **0** بە توانی **0** بریتییە لە **1** . | $100^0=1$ | $a^0=1$ |
| سیفەتی توانی سالب هێزی ژمارەیەکی ڕاستییە جگە لە **0** بە توانی سالب بریتییە لە هێزی هەڵگەڕاوەی ئەو ژمارە بە توانێك یەکسانە بە دژە توانی بنەڕەتی | $7^{-2}=\left(\frac{1}{7}\right)^2=\frac{1}{7^2}$ <br> $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$ | $a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$ <br> $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$ |

## نموونە 2

هەریەک لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $2^{-3}$     ب $-\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$

أ $\frac{1}{2^{3}}$ هەڵگەڕاوی ژمارە 2 دەکاتە $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2\times2\times2}=\frac{1}{8}$

ب $-\left(\frac{4}{3}\right)^{4}$ هەڵگەڕاوەی ژمارە $\frac{3}{4}$ دەکاتە $\frac{4}{3}$

$-\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}=-\frac{256}{81}=-3\frac{13}{81}$

**هەوڵبدە**

هەریەک لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$     ب $(-5)^{-5}$

دەتوانیت سیفەتی هێزەکان بەکاربهێنیت بۆ نووسینی ئەو بڕانەی هێزیان تێدایە بە سادەترین شێوە.

### سیفەتی هێزەکان

با $a$ و $b$ دوو ژمارەی ڕاستی بن جگە لە $0$ ، $m$ و $n$ دوو ژمارەی تەواوبن.

| بە نووسین | بە ژمارە | بە جەبر |
|---|---|---|
| **سیفەتی لێکدانی هێزەکان** بۆ لێکدانی دوو هێز هەمان بنچینەیان هەبێت دوو توانەکە کۆبکەوە. | $4^{3}\times4^{2}=4^{3+2}=4^{5}$ | $a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$ |
| **سیفەتی دابەشکردنی هێزەکان** بۆ ئەوەی هێزێك دابەش بکەیت بەسەر ئەوی تریان هەمان بنچینەیان هەبێت توانی دووەم لە توانی یەکەم دەربکە. | $\frac{3^{7}}{3^{2}}=3^{7-2}=3^{5}$ | $\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$ |
| **سیفەتی هێزی هێز** بۆ ئەوەی هێزێکی توان $m$ بەرزبکەیتەوە بۆ توانی $n$ ، دوو توانەکە لە یەکتر بدە وبنچینەکەش بپارێزە | $\left(4^{3}\right)^{2}=4^{3\times2}=4^{6}$ | $\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}$ |
| **سیفەتی هێزی ئەنجامی لێکدان** بۆ ئەوەی ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارە بۆ توانێکی دیاری کراو بەرزبکەیتەوە هەریەکەیان بەرزکەوە بە ئەو توانە و هەردوو هێزە بەئەنجامهاتووەکە لەیەکتر بدە | $(4\times3)^{2}=4^{2}\times3^{2}$ | $(a\times b)^{n}=a^{n}\times b^{n}$ |
| **سیفەتی هێزی ئەنجامی دابەشکردن** بۆ ئەوەی ئەنجامی دابەشکردنی ژمارەیەك بەسەر ژمارەیەکی تر بە توانێکی دیاریکراو بەرزبکەیتەوە، هەریەکیان بۆ ئەو توانە بەرزکەوە و هێزی یەکەم بەسەر هێزی دووەم دابەشبکە. | $\left(\frac{3}{5}\right)^{2}=\frac{3^{2}}{5^{2}}$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}$ |

بڕێك بە سادەترین شێوە دەبێت کاتێك هەریەك لە هێزی توان سالب و هێمای یەکتربەستن و ڕادەی لەیەکچوو لەخۆ نەگرێت.

## نموونە 3

هەریەك لەم برِانە بە سادەترین شێوە بنووسە، وا دابنێ هەموو گۆڕاوەکان جیان لە سفر

شیکار

أ $2x^3(-5x)$

$2(-5)x^3x^1$

$-10x^{3+1}$ سیفەتی لێکدانی هێزەکان

$-10x^4$

ب $\left(\frac{ab^4}{b^7}\right)^2$

$(ab^{4-7})^2=(ab^{-3})^2$ سیفەتی دابەشکردنی هێزەکان

$=a^2\left(b^{-3}\right)^2$ سیفەتی هێزی ئەنجامی لێکدان

$=a^2b^{(-3)\times 2}$ سیفەتی هێزی هێز

$a^2b^{-6}=\frac{a^2}{b^6}$ سیفەتی توانی سالب

هەوڵبدە هەریەك لەم برِانە بە سادەترین شێوە بنووسە، وا دابنێ هەموو گۆڕاوەکان جیان لە **0**

أ $\left(5x^6\right)^3$

ب $\left(-2x^3y\right)^{-3}$

**شێوەی زانستی** بۆ ژمارەیەك بریتییە لە نووسینی ژمارەیەك بە بەکارهێنانی هێزەکانی ژمارە 10 بەم شێوەیە $m\times10^n$ کاتێك $m$ ژمارەیەکی ڕاستی بێت پاسادانی مەرجی $1\le m<10$ بکات و $n$ ژمارەیەکی تەواوبێت.

| شێوەی زانستی | جولاندنی فارزەی دەیی | شێوەی ژمارەیی |
|---|---|---|
| $1.275\times10^7$ | 7 خانە بەرەو لای ڕاست | 12 750 000 |
| $3.5\times10^{-7}$ | 7 خانە بەرەو لای چەپ | 0.00000035 |

دەتوانیت یاساکانی هێزەکان بەکاربهێنێت بۆ کرداری ژمارەیی لەسەر ئەو ژمارانەی بەشێوەی زانستی نووسراون.

## نموونە 4

هەریەك لەم برِانە بەسادەترین شێوە بنووسە وەڵامەکان بەشێوەی زانستی بنووسە.

شیکار

أ $\frac{9.1\times10^{-3}}{1.3\times10^8}$

$\left(\frac{9.1}{1.3}\right)\times\left(\frac{10^{-3}}{10^8}\right)$

$7.0\times10^{-11}$ 9.1 دابەشبکە بەسەر 1.3 و توانەکان لەیەك دەربکە 11-=8-3-

ب $(3.5\times10^{8})(5.2\times10^{5})$

$(5.2)(3.5)\times(10^{8})(10^{5})$

$18.2\times10^{13}$

$1.82\times10^{14}$

3.5 لە 5.2 بدە و دوو توانەکە کۆبکەوە $8+5=13$
لەبەرئەوەی $18.2>10$ فارزەکە بۆ لای چەپ
بجولێنەوە و 1 بۆ توانەکە زیادبکە.

**هەوڵبدە** هەریەك لەم برانە بەسادەترین شێوە بنووسە وەڵامەکان بەشێوەی زانستی بنووسە.

أ $\frac{2.325\times10^{6}}{9.3\times10^{9}}$

ب $(4\times10^{-6})(3.1\times10^{-4})$

**نموونە 5** جێبەجێکردن لەسەر شیکارکردنی پرسیارەکان.

**ڕوناکی بە خێرایی ڕووناکی بریتییەلە $3\times10^{5}$ km/sec بە نزیکەیی. ڕوناکی چەند خوولەکی پێویستە بۆ ئەوەی دووری نێوان ڕۆژ و موشتەری ببڕێت.**

| دووری نێوان ڕۆژ و هەسارەکان بەمەتر | |
|---|---|
| **هەسارە** | **دووری** |
| عەتارد | $5.8\times10^{10}$ |
| ڤینۆس | $1.1\times10^{11}$ |
| زەوی | $1.5\times10^{11}$ |
| مەریخ | $2.3\times10^{11}$ |
| موشتەری | $7.8\times10^{11}$ |
| زوحەل | $1.4\times10^{12}$ |
| ئۆرانۆس | $2.9\times10^{12}$ |
| نیبتۆن | $4.5\times10^{12}$ |
| بلۆتۆ | $5.9\times10^{12}$ |

**1. پرسیارەکە تێبگە.**

داواکراو بریتییە لە هەژمارکردنی ئەو کاتەی کە ڕوناکییەکە دەردەچێت لە ڕۆژ تا دەگاتە موشتەری.

**لیستێك بۆ زانیارییە گرنگەکان دروستبکە.**

- خێرایی ڕووناکی لەبۆشایی بریتییە $3\times10^{5}$ km/sec بەنزیکەیی
- دووری نێوان ڕۆژ و موشتەری دەکاتە $7.8\times10^{11}$m .

**2. پلان دابرێژە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکە**

ئەو پەیوەندییەی کە خێرایی و دووری و کات بەیەکەوە دەبەستێتەوە بەکاربهێنە.

خێرایی = $\frac{\text{دووری}}{\text{کات}}$

**3. شیکارکردنی پرسیارەکە بە گۆڕینی خێرایی ڕووناکی لە $\frac{\text{کیلۆمەتر}}{\text{چرکە}}$ بۆ $\frac{\text{مەتر}}{\text{خولەك}}$ دەستپێبکە.**

لێرە $10^{3}\text{m} = 1000\text{m}$ لە هەر کیلومەترێك.

$3\times10^{5}\frac{km}{sec}\left(\frac{10^{3}m}{1km}\right)\left(\frac{60sec}{1min}\right)$

$(3\times60)\times(10^{5}\times10^{3})\frac{m}{min}$

$180\times10^{8}$ m/min$=1.8\times10^{10}$ m/min

کەواتە خێرایی ڕۆناکی $1.8\times10^{10}$ مەترە لە خولەکێکدا.
ئێستا پەیوەندی نێوان خێرایی و دووری و کات بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ژمارەی ئەو خولەکانەی ڕووناکییەکە پێویستیەتی بۆ ئەوەی لە ڕۆژەوە بگاتە موشتەری.

$$\text{کات} = \frac{\text{دووری}}{\text{خێرایی}} = \frac{7.8\times10^{11}}{1.8\times10^{10}} \approx 43.33$$ خولەك

4. **ساغبکەوە** ڕووناکییەکە بە نزیکەیی پێویستی بە 43.33 خولەك هەیە بۆ ئەوەی ماوەی نێوان ڕۆژ و موشتەری ببڕێت. لەبەر ئەوەی ڕۆناکی بە خێرایی $3\times10^5$ km/s دەڕوات و پێویستی بە نزیکەی $43.33\times60\approx2600$ چرکە هەیە بۆ بڕینی ماوەی نێوان ڕۆژ و موشتری، کەواتە ئەو دوورییە دەکاتە:

$$3\times10^5\times2600=7.8\times10^8$$

$7.8\times10^8$km یان $7.8\times10^{11}$m کەواتە وەڵامەکە بەجێیە

هەوڵبدە ڕۆناکی چەند خولەکی پێویستە بۆ ئەوەی لە ڕۆژەوە بگاتە زەوی؟

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

**1** کەی دەبێت ژمارەیەك بەشێوەی زانستی بنووسرێت؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم بڕانە بەشێوەی درێژبڕی بنووسە.

**2** $4(a-b)^2$ **3** $(12xy)^4$ **4** $-x^2(-2y)^5$ **5** $\left(-\frac{1}{2}b\right)^3$

هەریەك لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

**6** $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$ **7** $5^0$ **8** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ **9** $10^{-1}$

هەریەك لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە، وا دابنێ هەموو گۆڕاوەکان جیان لە سفر.

**10** $\left(-3a^2b^3\right)^2$ **11** $c^3d^2\left(c^{-2}d^4\right)$ **12** $\frac{5uv^6}{u^2v^2}$ **13** $10\left(\frac{y^5}{x^2}\right)^2$

**14** $-2s^{-3}t\left(7s^{-8}t^5\right)$ **15** $-5m\left(mn^2\right)^3$ **16** $\frac{(4b)^2}{2b}$ **17** $\frac{x^{-1}y^{-2}}{x^3y^{-5}}$

هەریەك لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە بە نووسینی وەڵامەکان بەشێوەی زانستی.

**18** $(2.2\times10^5)\times(4.5\times10^{11})$ **19** $\frac{7.8\times10^8}{2.6\times10^{-3}}$ **20** $\frac{1.6\times10^{-3}}{4.0\times10^4}$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هەریەک لەم بڕانە بەشێوەی درێژبڕی بنووسەوە.

**21** $(m+2n)^3$ **22** $5x^3$ **23** $(-9uv)^3w^4$ **24** $2x(-y^2-x)^2$

هەریەک لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

**25** $(-4)^{-2}$ **26** ${\frac{3}{4}}^{-1}$ **27** ${\frac{5}{2}}^{-3}$ **28** $-6^0$

هەریەک لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە. وادابنێ هەموو گۆڕاوەکان جیان لە سفر.

**29** $\frac{-100u^3v^{-5}}{25u^{-2}v^6}$ **30** $\left(-x^4y^2\right)^5$ **31** $\left(16u^4v^6\right)^{-2}$ **32** $8a^2b^5\left(-2a^3b^2\right)$

هەریەک لەم بڕانە بەشێوەی زانستی بنووسە.

**33** $\left(3.2\times10^6\right)\left(1.7\times10^{-4}\right)$ **34** $\frac{5.1\times10^4}{3.4\times10^{-5}}$ **35** $\left(6.8\times10^3\right)\left(9.5\times10^5\right)$

**36** بژمێر پرۆسێسەری بژمێرێك خێراییەکەی 5.4 گێگا هێرتزە دەتوانێت $5.4\times10^9$ کرداری ژمێرەیی جێبەجێبکات لەیەك چرکەدا. گۆڕینی فایلێکی Mp3 بۆ فایلێکی دەنگی پێویستی بە $5.02\times10^{11}$ کرداری ژمارەیی هەیە. گۆڕینی ئەو فایلە لەلایەن بژمێرەکە چەند خولەك دەخایەنێت؟ وەلامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە؟

هەر یەك لەم ژمارانە بە شێوەی هێزی ژمارە 2 بنووسە پاشان ژمارەکانی هەر کۆمەڵەیەك لەبچووکترینەوە بۆ گەورەترین ڕیزبکە.

**37** $16^{-2}$، $2^{-1}$، $4^1$، $8^2$ **38** $8^{-2}$، $4^2$، $-4^3$، $2^{-1}$ **39** $2^{-2}$، $16^1$، $4^0$، $-8^2$

هەریەک لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە. وادابنێ هەموو گۆڕاوەکان جیان لە سفر.

**40** $\frac{27x^3y}{18x^2y^4}$ **41** $\left(\frac{3a^3b}{2a^{-1}b^2}\right)^2$ **42** $12x^0y^5\left(-2a^3b^2\right)$

**43** $\frac{72x^2y^3}{-24x^2y^5}$ **44** $\left(\frac{5ab}{-3a^2}\right)^{-2}$ **45** $\left(6x^5y^3\right)\left(-3x^2y^{-1}\right)$

**پێوەرەکان**: ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە.

**46** یاردە و ئینچ دوو پێوەرن بۆ درێژی لە بەریتانیا بەکاردێن. یەک یاردە دەکاتە 36 ئینچ. چەند ئینچی چوارگۆشە لە یاردەیەکی چوارگۆشەدا هەیە؟

**47** چەند سانتیمەتری چوارگۆشە لە مەترێکی چوارگۆشەدا هەیە؟

**48** لە بەریتانیا پێوەری سێیەم بۆ درێژی بەکاردێت، ئەویش پێیە هەر پێیەک دەکاتە 12 ئینچ. ژمارەی ئینجە سێجاکان لە پێیەکی سێجا چەندە؟

**49** ژمارەی مەترە سێجاکان لە کیلۆمەترێکی سێجا چەندە؟

هەریەک لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە. وادابنێ هەموو گۆڕاوەکان جیان لە سفر.

**50** $-a^2b^6\left(-7ab^{-4}\right)$

**51** $\dfrac{14x^{-2}y^3}{-8x^{-5}y^5}$

**52** $\left(\dfrac{20x^6}{2x^2}\right)^3$

**53** $\left(10x^{-2}y^0z^{-3}\right)^2$

**54** $\left(-3a^2b^{-1}\right)$

**55** $\left(8m^4n^{-2}\right)\left(-3m^{-2}n\right)^0$

**56** ناوەندە ژمێرەیی لێدانی دڵ لە ژیانی مرۆڤ چەندە، ئەگەر زانیت ناوەندی لێدانی دڵ لە چرکەیەک 1.2 و ناوەندی ژیانی مرۆڤ 75 ساڵە؟

**57** ناوەندە ژمێرەیی هەناسەدانی مرۆڤ چەندە، ئەگەر زانیت ناوەندی هەناسەکانی مرۆڤ لە خولەکێك 16یە و ناوەندی ژیانی مرۆڤ 75 ساڵە؟

**58** ناوەندە ژمێرەیی مووەکانی سەری مرۆڤ چەندە، ئەگەر زانیت ناوەندە ژمارەی لەیەک سانتیمەتر دووجا 254 مووە و ناوەندە ڕووبەری سەری مرۆڤ بریتییە لە$500cm^2$.

ئەو سیفەتانە دیاریبکە کە هەر یەکسانییەک دەریدەبڕێت.

**59** $\left(x^5\right)^3=x^{15}$

**60** $\left(m^2n^5\right)^4=m^8n^{20}$

**61** $\dfrac{3b^3}{b^{-2}}=3b^5$

**62** $\left(\dfrac{xy^5}{x^3}\right)^4=\dfrac{x^4y^{20}}{x^{12}}$

**63** **زمان** زۆر جار ڕستەیەکی لەم جۆرە بەکاردێت (ژمارەی دانیشتووانی ئەم وڵاتە 3.8 ملیۆن کەسە) بۆ دەربڕین لە ژمارەی دانیشتوان. ئەو ژمارەیە بەشێوەی زانستی بنووسە و باسی پەیوەندی نێوان نواندنی ژمارەکە لە بیرکاری و دەربڕینی زمان لەوبکە.

**64** **بیری ڕەخنەگر** سیفەتی دابەشکردنی هێزەکان بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی ئەو هۆیەی وادەکات هێزی $0^0$ پێناسە نەکراوبێت.

**65** کام لەم ژمارانە بەشێوەیەکی زانستی دروست نووسراوە.

أ $11\times0^5$    ب $58.5\times0^4$    ج $0.245\times10^{-7}$    د $7.25\times10^0$

**66** کام بڕ یەکسانە بە$(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)$ ؟

أ $5^{-6}$    ب $(-5)^{-6}$    ج $(-5)^6$    د $-5^6$

**67** ئەگەر گۆڕاوەکانی $x$ و $y$ و $z$ جیابن لە 0 ، کام بڕ دەکاتە $\frac{x^4y^{-3}}{x^2z^0}$ .

[أ] $\frac{x^2}{yz}$

[ب] $\frac{x^2z}{y^3}$

[ج] $\frac{x^{-2}}{y^{-3}z}$

[د] $\frac{x^2}{y^3}$

**68** سەرنجبدە $4^2 = 2^4$ . ئەگەر $x$ و $y$ دوو ژمارەی تەواوی موجەب بن، کە پاسەدانی $x < y$ دەکەن، سێ نموونە بهێنەوە بۆ بەهایەکانی $x$ و $y$ کە $x^y < y^x$ و سێ نموونەی تر بۆ بەهایەکانی $x$ و $y$ کە $x^y > y^x$.

## ڕوانینێك بۆ دواوە

**هاوکێشە دووجاکە لەسەر شێوەی گشتی $ax^2+bx+c=0$ بنووسە. بەهاکانی $a$ و $b$ و $c$ دیاریکە.**

**69** $11x(5-x)=0$

**70** $(2x-10)(x+1)=0$

**71** $4(x+5)(x-5)=0$

**72** $-(x+1)(3x+1)=0$

**هەریەکە لەم هاوکێشانەی خوارەوە شیکاریکە.**

**73** $x^2-5x=-6$

**74** $x^2+2x-15=0$

**75** $(x-2)(x+3)=5$

**ئەم یەکسانبووانە تەواوبکە** (پۆلەکانی پێشوو).

**76** $1= \blacksquare \times \frac{1}{3}$

**77** $4\times(-3+\blacksquare)=-12+32$

**78** $0=\sqrt{7}+\blacksquare$

**هەر بڕێك لەمانەی خوارەوە هەژماربکە**

**79** $\frac{2mn}{n^2-2n+5m}$ ، کاتێك $m=3$ و $n=-1$

**80** $2x(9y-x^2)$ ، کاتێك $x=-3$ و $y=10$

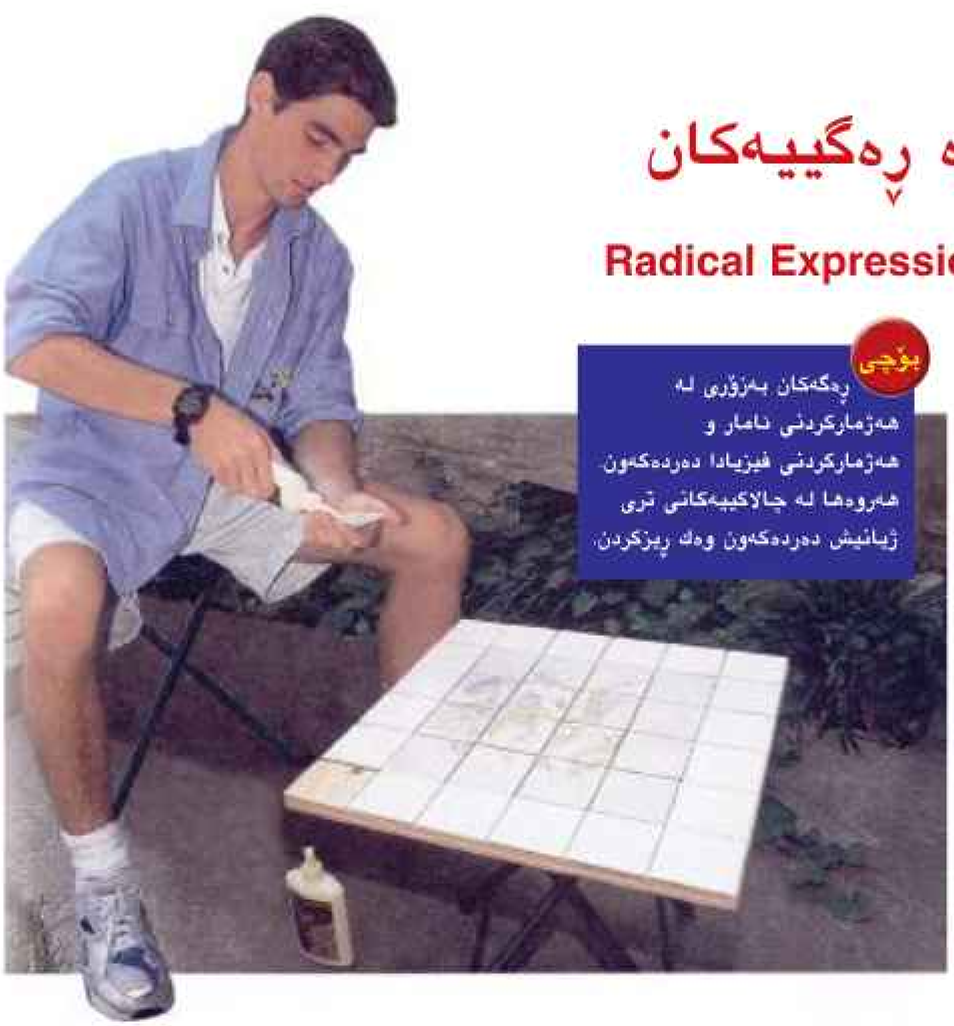
## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

[أ] هاوکێشەیەك بنووسە کە تەنها ژمارەی سروشتی تێدابێت و شیکارەکەی پێویستی بە ژمارەی سالب هەبێت.

[ب] هاوکێشەیەك بنووسە تەنها ژمارەی تەواوی تێدابێت، و شیکارەکەی پێویستی بەژمارەی ڕێژەی هەبێت.

وانەی 2

# بڕە ڕەگییەکان
# Radical Expressions



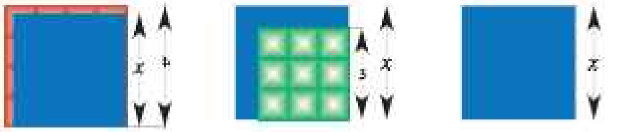
**بۆچی**
ڕەگەکان بەزۆری لە هەژمارکردنی ئامار و هەژمارکردنی فیزیادا دەردەکەون. هەروەها لە چالاکییەکانی تری ژیانیش دەردەکەون وەك ڕیزکردن.

### ئامانجەکان

- بەهای بڕێك هەژماردەکات کە ڕەگی تێدایە.
- ئەو بڕانە سادە دەکات کە ڕەگیان تێدایە.

## خەملاندنی ڕەگی دووجا Estimating Square Root

کارزان چوارگۆشەیەکی شینی لەبەردەستە ڕووبەرەکەی 12 یەکە دووجایە، چۆن درێژی لایەکی دیاریدەکات؟ بیرت بێت کە ڕێسای هەژمارکردنی ڕووبەری چوارگۆشە ڕێگات پێدەدات$x^2=12$ بنووسیت کاتێك $x$ هێمای درێژی لایەکی چوارگۆشە شینەکە بێت. کەواتە درێژی لایەکی چوارگۆشە شینەکە بریتییە لە ڕەگی دووجای ژمارە 12 لەبەرئەوەی 12 دووجایەکی تەواو نییە، لەسەرت پێویستە درێژی لایەکی $x$ بخەملێنیت. تێبینی ئەوە بکە کە 12 دەکەوێتە نێوان دوو ژمارەی 9 و 16.




ڕووبەری چوارگۆشە شینەکە لە 9 نزیکترە وەك لە 16. لەمەوە دەردەچێت کە درێژی لایەکی چوارگۆشەکە دەکەوێتە نێوان 3 و 4 و لەبەرئەوەی ڕووبەری چوارگۆشەکە 12 لەلای 3 نزیکترە لە نێوان ڕووبەری$9=3^2$ و $16=4^2$ کەواتە درێژی لایەکەی دەکەوێتە نێوان 3.4 و 3.5 .

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(3.43)^2=11.7649$ | $(3.42)^2=11.6964$ | $(3.41)^2=11.6281$ | $(3.4)^2=11.56$ |
| $(3.47)^2=12.0409$ | $(3.46)^2=11.9716$ | $(3.45)^2=11.9025$ | $(3.44)^2=11.8336$ |
| | $(3.5)^2=12.25$ | $(3.49)^2=12.1801$ | $(3.48)^2=12.1104$ |

کەواتە باشترین خەملاندن بۆ ڕەگی دووجای 12 بریتییە لە 3.46 کەواتە $\sqrt{12}\approx 3.46$ .

## ڕەگی دووجا Square Root

ئەگەر $a$ ژمارەیەکی ڕاستی سالب نەبێت، ئەوا دوو ڕەگی دووجای هەیە، یەکێکیان موجەبە وبە $\sqrt{a}$ دەنووسرێت، ئەوی تریان سالبە بە $-\sqrt{a}$ دەنووسرێت و ئەو دوو ژمارە ساغدەکەنەوە ئەو سیفەتە

$$\left(\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}\right)=a \qquad \left(-\sqrt{a}\right)\left(-\sqrt{a}\right)=a$$

## سادەکردنی برە ڕەگییەکان Simpligying Radical Expressions

برە ڕەگییەکان **Radical Expressions** ئەو برانەن کە ڕەگیان تێدایە، کاتێك دەتەوێت برە ڕەگییەکان کۆبکەیتەوە یان لێکیاندەربکەیت، دڵنیابە لە یەکسانبوونی ئەو ژمارانەی دەکەونە ژێر هێمای ڕەگەکان بۆ نموونە دەتوانیت دوو ژمارەی $2\sqrt{5}$ و $4\sqrt{5}$ کۆبکەیتەوە $2\sqrt{5}+4\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ دەستدەکەوێت.

### نموونە 1

ئەم برانە سادەبکە.

أ $5\sqrt{6}-2\sqrt{6}$

ب $5+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3$

ج $8\sqrt{3}+6\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

د $b\sqrt{x}+y\sqrt{x}$

**شیکار**

أ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە بۆ کۆکردنەوەی ڕادە لێکچووەکان، پاشان کۆڵکەی هاوبەش کە $\sqrt{6}$ هەژماربکە. $5\sqrt{6}-2\sqrt{6}=(5-2)\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

ب ڕادەکان ڕیزبکەوە بۆ ئەوەی سادەکردنەکە ئاسان بێت.

$$5+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3=5-3+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}=2+4\sqrt{7}$$

ج ڕادەکان ڕیزبکەوە بۆ ئەوەی سادەکردنەکە ئاسان بێت.

$$8\sqrt{3}+6\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}=8\sqrt{3}-\sqrt{3}+6\sqrt{2}+2\sqrt{2}=7\sqrt{3}+8\sqrt{2}$$

د وەك ژمارەکان لەگەڵ گۆڕاوەکان ڕەفتاربکە.

$$b\sqrt{x}+y\sqrt{x}=(b+y)\sqrt{x}$$

**هەوڵبدە** ئەم برانە سادەبکە. أ $4\sqrt{6}-\sqrt{6}$ ب $y+2\sqrt{x}-2y-3\sqrt{x}$

## چالاکی

## Operations with Radical Expressions — برە ڕەگییەکان و کردارەکان

پەیوەندی نێوان ڕەگەکان و هێزەکان بەکاربهێنە، بۆ جێبەجێکردنی کردارەکان.

**1.** بەدوو ڕێگا $\sqrt{9\times16}$ هەژماربکە.

أ $\sqrt{9\times16}=\sqrt{144}=?$ ب $\sqrt{9\times16}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}=?$

**2.** سێ نموونە بهێنەوە بۆ دڵنیابوون لە ڕاستی پەیوەندی. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

**3.** $\sqrt{9+16}$ و $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ هەژماربکە و دوو ئەنجامەکە بەراوردبکە.

**4.** سێ نموونە بهێنەوە دیاربکەن کە $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ هەموو کات ڕاست نییە.

خاڵی چاودێری ✔

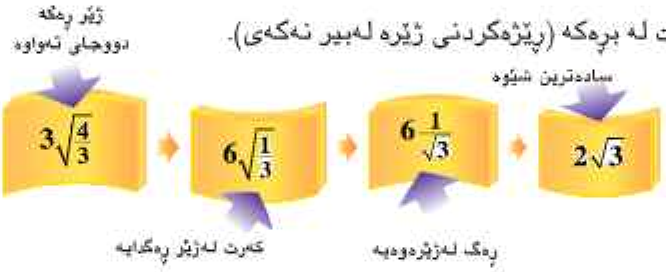
### Multiplying Square Roots لێکدانی ڕەگە دووجاکان

$a$ و $b$ دوو ژمارەی ڕاستی سالب نەبن ئەوا:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

ڕەفتارکردن لەگەڵ برە ڕەگییە دووجا سادەکراوەکان ئاسانترە لە ڕەفتارکردن لەگەڵ برە ڕەگییە دووجا سادەنەکراوەکان برێکی ڕەگی بە سادەترین شێوە **Simplist form** دەبێت ئەگەر ئەم مەرجانەی تێدابوو:

1. دووجای تەواو لە نێوان کۆلکەکانی ئەو ژمارەیە نەبێت کە دەکەوێتە ژێر هێمای ڕەگەکە.
2. کەرت لە ژێر هێمای ڕەگ نەبێت.
3. ڕەگ لەژێرەی هیچ کەرتێك نەبێت لە برەکە (ڕێژەکردنی ژێرە لەبیر نەکەی).




**نموونە 2** ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\sqrt{12}$ ب $\sqrt{400}$ ج $\sqrt{a^2}$ د $\sqrt{a^5b^{10}}$

**شیکار**

بەدوای دووجا تەواوەکان لە نێوان **هاوکۆلکەکاندا Factors** بگەڕێ، و سیفەتی لێکدانی ڕەگە دووجاکان بەکاربهێنە ڕەگە دووجاکانی ژمارە دووجاکان سادەبکە (واتا لەژێر ڕەگ بیانهێنە دەرەوە) کۆلکەکانی تر بەجێبهێڵە.

أ $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

ب $\sqrt{400}=\sqrt{4}\times\sqrt{100}=2\times10=20$

لەبەرئەوەی هێمای دووجا ڕەگێکی ناسالب نیشاندەدات ئەوا $\sqrt{a^2}$ سالب نییە بۆ نیشاندانی ئەوە. هێمای بەهای ڕووت بەکاربهێنە کاتێك توانی گۆڕاو لەژێر هێمای ڕەگی دووجا ژمارەی جووت بێت، و لە دەرەوەی هێماکە دەبێت دوای سادەکردن ببێتە ژمارەی تاك.

ج $\sqrt{a^2} = |a^1| = |a|$

د $\sqrt{a^5b^{10}} = \sqrt{a(a^2)^2(b^5)^2} = a^2|b^5|\sqrt{a}$

**هەوڵبدە** ئەم برە بە سادەترین شێوە بنووسە. $\sqrt{72m^2n^5}$

**بیری ڕەخنەگر** بۆچی بەکارهێنانی هێمای بەهای ڕووت لەمانەی دێت پێویست ناکات.

أ $\sqrt{b^3} = b\sqrt{b}$ ب $\sqrt{b^4} = b^2$

## نموونە

3 ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $(5\sqrt{3})^2$ ب $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$

ج $\sqrt{2}(6+\sqrt{12})$ د $(3-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})$

**شیکار**

أ لەبیرت بێت کە دووجای ژمارەیەك بریتییە لە ئەنجامی لێدانی ژمارەکە لە خۆی ئەم بیرۆکەیە جێبەجێبکە، پاشان کۆلکەکان ڕیزبکە پێش لێکدان.

$$(5\sqrt{3})^2 = (5\sqrt{3})(5\sqrt{3}) = (5\times5)(\sqrt{3}\times\sqrt{3}) = 25\times3 = 75$$

ب سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان بەکاربهێنە، ئەنجامی لێکدانەکەی کە لەژێر ڕەگەکەدایە شیتەڵبکە پاشان سادەیبکە. $\sqrt{3}\times\sqrt{6} = \sqrt{3\times6} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

ج سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە بۆ ئەوەی لێکدان و شیتەڵ و سادەکردن ئەنجامبدەیت.

$$\sqrt{2}(6+\sqrt{12}) = 6\sqrt{2} + \sqrt{2}\times\sqrt{12} = 6\sqrt{2} + \sqrt{2\times12}$$
$$= 6\sqrt{2} + \sqrt{24} = 6\sqrt{2} + \sqrt{6\times4} = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$$

د $(3-\sqrt{2})(4+\sqrt{2}) = 12 + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 2 = 10 - \sqrt{2}$

**هەوڵبدە** ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە أ $(2\sqrt{7})^2$ ب $\sqrt{2}(4-\sqrt{8})$

**دابەشکردنی ڕەگە دووجاکان Dividing Squar Roots**

با $a$ و $b$ دوو ژمارەی ڕاستی موجەب بن، ئەوا:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

**نموونە** 4 ئەم ڕرانە بە سادەترین شێوە بنووسە:

أ $\sqrt{\frac{16}{25}}$ ب $\sqrt{\frac{7}{16}}$ ج $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}}$ د $\sqrt{\frac{9}{5}}$

شیکار:

هەریەك لەم ڕەگە دووجایانە بنووسە، دوای بەکارهێنانی سیفەتی دابەشکردنی ڕەگەکان.

ئەنجامەکانی هەریەکە لەسەرەوژێرە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$ ب $\sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

ج $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}} = \frac{|a|b\sqrt{b}}{|c|}$ د $\sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

ژێرەی دوا وەڵام ڕەگی تێدایە. ئەگەر دەتەوێت لەو ڕەگە ڕزگاربیت، برەکە لە $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ بدە کە بریتییە لە1 بەکرداری دەربازبوون لە ڕەگی ژێرەکە دەوترێت بەڕێژەکردنی ژێرەکە.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

**هەوڵبدە** ئەم ڕرانە بەسادەترین شێوە بنووسە أ $\sqrt{\frac{4}{24}}$ ب $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ج $\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$

# ڕاهێـــــــــنان

## بەردەوامی لە بیرکاریدا

**1** ڕوونیبکەوە، چۆن کاغەزی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان بەکاردەهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕەگی دووجای ژمارە 16 (دووجای تەواو).

**2** ڕوونیبکەوە، چۆن لاپەڕەی چوارگۆشەکان بەکاردەهێنیت بۆ خەملاندنی ڕەگی دووجای ژمارە 19 (دووجای تەواو نییە).

**3** ڕوونیبکەوە، چۆن $\sqrt{7}$ دەخەملێنیت بەبێ بەکارهێنانی بژمێر و لاپەرەی چوارگشەکان.

**4** چۆن شیتەڵکردن بەکاردەهێنیت بۆ سادەکردنی بڕیکی ڕەگی وەک $5\sqrt{90x^3y^4}$ ؟

**5** سادەترین شێوەی بڕێکی رەگی چۆنە؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم ڕەگە دووجایانە هەژماربکە

**6** $\sqrt{36}$ **7** $-\sqrt{64}$ **8** $\pm\sqrt{81}$ **9** $-\sqrt{121}$

ئەم بڕانە بەسادەترین شێوە بنووسە.

**10** $8\sqrt{3}-6\sqrt{3}$ **11** $9+3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+4$

ئەم بڕانە بەسادەترین شێوە بنووسە.

**12** $\sqrt{32}$ **13** $\sqrt{x^2y^7}$ **14** $\sqrt{27x^2}$ **15** $\sqrt{a^7b^3}$

ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

**16** $\left(7\sqrt{11}\right)^2$ **17** $\sqrt{2}\times\sqrt{10}$ **18** $\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)$

**19** $\sqrt{\frac{9}{4}}$ **20** $\sqrt{\frac{6}{49}}$ **21** $\sqrt{\frac{225}{18}}$ **22** $\sqrt{\frac{x^7y^1}{z^3}}$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ڕەگی دووجا هەژماربکە ئەگەر دووجاکە ڕێژەیی نەبێت، بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

**23** $\sqrt{225}$ **24** $-\sqrt{169}$ **25** $-\sqrt{11}$ **26** $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **27** $-\sqrt{40}$

**28** $-\sqrt{27}$ **29** $\sqrt{1000}$ **30** $\sqrt{10000}$ **31** $-\sqrt{0.04}$ **32** $\sqrt{0.059}$

بە بەکارهێنانی شیتەڵکردن بە سادەترین شێوە بیانووسە.

33. $\sqrt{49}$ 34. $\sqrt{196}$ 35. $\sqrt{576}$ 36. $\sqrt{3600}$ 37. $\sqrt{192}$

38. $\sqrt{75}$ 39. $\sqrt{98}$ 40. $\sqrt{1620}$ 41. $\sqrt{264}$ 42. $\sqrt{648}$

ئەگەر هەریەک لە $a$ و $b$ ژمارەی موجەب بن، ڕاستی و ناڕاستی ئەم ڕستانە دیاربکە.

43. $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 44. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 45. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ئەم ڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

46. $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$ 47. $\sqrt{8}\times\sqrt{18}$ 48. $\sqrt{48}\times\sqrt{3}$ 49. $\sqrt{54}\times\sqrt{6}$

50. $\sqrt{\frac{64}{16}}$ 51. $\sqrt{\frac{96}{2}}$ 52. $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}$ 53. $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$

54. $\sqrt{5}\times\sqrt{15}$ 55. $\sqrt{98}\times\sqrt{14}$ 56. $\sqrt{\frac{56}{8}}$ 57. $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{8}}$

ئەم ڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە. وایدابنێ هەموو گۆڕاوەکان سالب نین، و هەموو ژێرەکان جیان لە **0**.

58. $\sqrt{a^4b^6}$ 59. $\sqrt{x^8y^9}$ 60. $\sqrt{\frac{a^6}{b^{10}}}$ 61. $\sqrt{\frac{x^3}{y^6}}$

ئەو کردارانە جێبەجێکە کە لە توانادایە و ئەنجام بە سادەترین شێوە بنووسە.

62. $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$ 63. $4\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\sqrt{5}$ 64. $\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

65. $(4+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})$ 66. $\frac{6+\sqrt{18}}{3}$ 67. $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

ئەم ڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

68. $(3\sqrt{5})^2$ 69. $(4\sqrt{25})^2$ 70. $\sqrt{12}\times\sqrt{6}$

71. $\sqrt{72}\times\sqrt{32}$ 72. $3(9+\sqrt{5})$ 73. $\sqrt{5}(6-\sqrt{15})$

74. $\sqrt{6}(6+\sqrt{18})$ 75. $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$ 76. $(\sqrt{3}-4)(\sqrt{3}+2)$

بەرەنگاری

77. $\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)^2$ 78. $\sqrt{12}(\sqrt{3}+8)^2$ 79. $\sqrt{5}(\sqrt{5}-4)^2$

بەستنەوە

ئەندازە درێژی لایەکی چوارگۆشەیەک بدۆزەوە ڕووبەرەکەی بریتییە لە:

**80** $250m^2$ **81** $144m^2$ **82** $28m^2$

جێبەجێکردنەکان

**83** باخچەکان لەبەر دەرگای ماڵی سوارە باخچەیەکی چوارگۆشە هەیە ڕووبەرەکەی بریتییە لە $676m^2$. درێژی لایەکی چەندە؟

## ڕوانینێک بۆ دواوە

ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

**84** $\left(-a^2b^2\right)^3\left(a^4b^2\right)^3$ **85** $\frac{x^5y^7}{x^2y^3}$ **86** $\left(\frac{20x^3}{-4x^2}\right)^3$

لێکبدە.

**87** $(2x-4)(2x-4)$ **88** $(3d+5)(2d-6)$ **89** $(6b+1)(3b-1)$

## ڕوانینێک بۆ پێشەوە

ئەو هێزانەی تونەکانیان ڕێژەییە بەکاردێن بۆ دەربڕینی ڕەگەکان و بەم شێوەیە $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ دەنووسرێت کاتێک $a$ ژمارەیەکی ڕاستی ناسالبە و $n$ ژمارەیەکی تەواوە لە 2 کەمتر نییە. بۆ نموونە: $\sqrt[3]{27}=3$ و $27=3^3$ و $\sqrt[4]{16}=2$ و $16=2^4$.

یاساکانی هێزەکان بەکاربهێنە بۆ نووسینی ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بۆ نموونە:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=x^{\frac{8}{2}}=x^4$$

سادەیان بکە.

**90** $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4\left(x^5\right)^{\frac{1}{3}}$ **91** $(xy)^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2$

**92** $\left(x^3y^{\frac{3}{2}}\right)^6(xy)^{\frac{1}{2}}$

وانەی 3

# لۆگاریتمەکان

## Logarithms

**بۆچی** لۆگارتمەکان بە شێوەیەکی فراوان بۆ پێوانەکان بەکاردێت، وەك پێوانی **pH** بۆ دیاریکردنی ترشی گیراوەکان

**ئامانجەکان**

- شێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگارتمی دەگۆڕێت.
- بڕی لۆگارتمی بە سادەترین شێوە دەنووسێت و بەهاکەی هەژماردەکات.

لەگەڵ پێشکەوتنی بازرگانی و باشتربوونی دەریاوانی، کرداری ژمیریاری ئالۆز گەشەیسەند، بەمەش ڕێگاکانی ژمێرەیی باشتر و کەم ئەرك بووە پێویستیەکی گەورە.
لەبیرکارییدا لۆگاریتمەکان دۆزرانەوە و نەخشەی لۆگارتمی و جێبەجێکردنی لە ئامار و زۆر بواری تر پێویستیەکی لە کاربوو.
لۆگاریتم کرداری پێچەوانەی هێزەکانە، هەروەك چۆن لێدەرکردن پێچەوانەی کۆکردنەوەیە، لۆگارتمیش پێچەوانەی هێزەکانە.

شێوەی توانی  شێوەی لۆگاریتمی

$$b^x = a \qquad \log_b a = x$$

$b > 0, b \neq 1$

بۆ نموونە نووسینی $\log_{10} 100 = 2$ هاوتای نووسینی $10^2 = 100$، بەم شێوەیە دەخوێندرێتەوە لۆگارتمی $a$ بۆ بنچینەی $b$ .

## گۆڕین لە شێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگارتمی و بەپێچەوانەوە

| شێوەی توانی | بنچینە | توان | شێوەی لوگارتمی |
|---|---|---|---|
| $2^6 = 64$ | 2 | 6 | $\log_2 64 = 6$ |
| $7^2 = 49$ | 7 | 2 | $\log_7 49 = 2$ |
| $3^5 = 243$ | 3 | 5 | $\log_3 243 = 5$ |
| $5^3 = 125$ | 5 | 3 | $\log_5 125 = 3$ |

## لۆگارتم Logarithm

بە ژمارەی ڕاستی $x$ دەوترێت لۆگارتمی ژمارەی موجەبی $a$ بە بنچینەی $b$ $(b \neq 1)$ و دەنووسرێت.

$x = \log_b a$ ئەگەر $b^x = a$.

**نموونە 1**

لە شێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگارتمی بگۆڕە.

أ $2^5 = 32$ ب $3^2 = 9$ ج $4^3 = 64$ د $5^0 = 1$

شیکار

أ $2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$

ب $3^2 = 9 \Leftrightarrow \log_3 9 = 2$

ج $4^3 = 64 \Leftrightarrow \log_4 64 = 3$

د $5^0 = 1 \Leftrightarrow \log_5 1 = 0$

هەوڵبدە لە شێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگارتمی بگۆڕە.

أ $2^{10} = 1024$ ب $5^1 = 5$ ج $100^0 = 1$

**نموونە 2**

لە شێوەی لۆگارتمی بۆ شێوەی توانی بگۆڕە

أ $\log_{10} 1000 = 3$ ب $\log_9 81 = 2$ ج $\log_5 125 = 3$ د $\log_{10} 1 = 0$

شیکار

أ $\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$

ب $\log_9 81 = 2 \Leftrightarrow 9^2 = 81$

ج $\log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$

د $\log_{10} 1 = 0 \Leftrightarrow 10^0 = 1$

هەوڵبدە $\log_{10} 0.01 = -2$ بەشێوەی توانی بنووسە.

**نموونە 3**

لە شێوەیەك بۆ ئەوی تریان بگۆڕە.

أ $6^2 = 36$ ب $5^{-3} = \frac{1}{125}$ ج $\log_{27} \frac{1}{9} = -\frac{2}{3}$ د $\log_{10} 10\sqrt{10} = \frac{3}{2}$

شیکار

أ $6^2 = 36 \Leftrightarrow \log_6 36 = 2$

ب $5^{-3} = \frac{1}{125} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{125} = -3$

ج $\log_{27}\frac{1}{9}=-\frac{2}{3}\Leftrightarrow 27^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{9}$

د $\log_{10}10\sqrt{10}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$

**هەوڵبدە** لە شێوەیەك بۆ ئەوی تریان بگۆڕە.

أ $7^2=49$ ب $\log_4\frac{1}{16}=-2$ ج $\log_5 25\sqrt{5}=\frac{5}{2}$

## نموونە 4

**ئەم شێوانە بۆ ئەوەی تریان بگۆڕە، بەهاکەی بدۆزەوە.**

أ $\log_2\frac{1}{16}$ ب $\log_3 3\sqrt{3}$ ج $\log_a a$ د $\log_a 1$

**شیکار**

أ ئەگەر $x=\log_2\frac{1}{16}$ ئەوا $2^x=\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}=2^{-4}$ بەمەش $x=-4$

ب ئەگەر $x=\log_3 3\sqrt{3}$ ئەوا $3^x=3\sqrt{3}=3^1\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}$ بەمەش $x=\frac{3}{2}$ .

ج ئەگەر $x=\log_a a$ ئەوا $a^x=a$ بەمەش $x=1$ .

د ئەگەر $x=\log_a 1$ ئەوا $a^x=1=a^0$ بەمەش $x=0$ .

**هەوڵبدە** ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە.

أ $\log_{10}10000$ ب $\log_2\frac{1}{8}$ ج $\log_{10}0.001$ د $\log_x x$

**بیری ڕەخنەگر**

**1.** بۆچی $\log_a a$ هەموو کات دەکاتە 1؟

**2.** کەی $\log_a b=\log_b a$ ؟ ڕوونیبکەوە.

**3.** ئایا لۆگارتمی ژمارەی سالب هەیە؟ ڕوونیبکەوە.

**لەبیرت بێت**

$$\log_a^b=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

## Logarithrm Rules سیفەتی لۆگاریتمەکان

لەبەرئەوەی لۆگارتم پێچەوانەی هێزەکانە، هەر سیفەتێك لە سیفەتەکانی هێزەکان دەبنە سیفەتێك لە سیفەتەکانی لۆگاریتم.

### Logarithrm properties سیفەتەکانی لۆگارتم

با هەریەك لە $a$ و $b$ و $c$ ژمارەی ڕاستی موجەب بن کاتێك $c \neq 1$ .

| بە جەبر | بە ژمارە | بە نووسین |
|---|---|---|
| $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$ | $\log_2 32 = \log_2 (4\times 8) = \log_2 4 + \log_2 8$ | لۆگارتمی ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارە بریتییە لە کۆی لۆگارتمی هەردوو ژمارەکە |
| $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ | $\log_7 \frac{16}{3} = \log_7 16 - \log_7 3$ | لۆگارتمی ئەنجامی دابەشکردنی ژمارەیەك بەسەر ژمارەیەکی تر بریتییە لە ئەنجامی لێدەرکردنی لۆگارتمی بەشدراو لە بەشکراو. |
| $\log_c a^b = b\log_c a$ | $\log_{10} 7^3 = 3\log_{10} 7$ | لۆگارتمی هێزی ژمارەی موجەب بریتییە لە لێکدانی توانی هێزەکە لە لۆگارتمی ژمارەکە. |
| $\log_c 1 = 0$ | $\log_{10} 1 = 0$ | لۆگارتمی 1 دەکاتە 0 بنچینە کە هەرچەند بێت. |
| $\log_a a = 1$ | $\log_{10} 10 = 1$ | لۆگارتمی $a$ بە بنچینەی $a$ دەکاتە 1. |

**نموونە 5** هەریەك لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\log_5 75$

ب $\log_4 2 + \log_4 32$

ج $\log_5 500 - \log_5 4$

د $\log_{10} 80 - \log_{10} 40 + \log_{10} 30 - \log_{10} 6$

**شیکار**

أ $\log_5 75 = \log_5 (3\times 25) = \log_5 3 + \log_5 25 = \log_5 3 + \log_5 5^2 = \log_5 3 + 2$

ب $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4 (2\times 32) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3\log_4 4 = 3$

ج $\log_5 500 - \log_5 4 = \log_5 \frac{500}{4} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

د $\log_{10} 80 - \log_{10} 40 + \log_{10} 30 - \log^{10} 6 = \log_{10} \frac{80\times 30}{40\times 6} = \log_{10} 10 = 1$

**هەوڵبدە** بڕی $\log_9 3 + \log_9 81$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

## نموونە

**6** ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

أ $\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 12$

ب $\log_{10}(2x+3) = 1$

**شیکار**

أ
$$\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 12$$
$$\log_2 3x = \log_2 12$$
$$3x = 12$$
$$x = 4$$

ب
$$\log_{10}(2x+3) = 1$$
$$\log_{10}(2x+3) = \log_{10} 10$$
$$2x+3 = 10$$
$$x = 3.5$$

**هەوڵبدە** ئەم هاوکێشەیە شیکاربکە. $\log_5 n + \log_5 7 = \log_5 35$

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

**1** باسی پەیوەندی نێوان بنچینەی هێز و بنچینەی لۆگارتم بکە.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**2** چی بەرامبەر توانە لە لۆگارتم؟

لەشێوەی لۆگارتمی بۆ شێوەی توانی بگۆڕە.

**3** $\log_3 9 = 2$

**4** $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

لەشێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگارتمی بگۆڕە؟

**5** $3^4 = 81$

**6** $7^0 = 1$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

لەشێوەی لۆگارتمی بۆ شێوەی توانی بگۆڕە.

**7** $\log_a a = 1$

**8** $\log_{10} 0.01 = -2$

لەشێوەی توانی بۆ شێوەی لۆگارتمی بگۆڕە.

**9** $7^1 = 7$

**10** $10^{-3} = 0.001$

ئەمانەی خوارەوە هەژماربکە.

**11** $\log_2 8$

**12** $\log_2 128$

**13** $\log_{10} 0.00001$

**14** $\log_9 9$

بە سادەترین شێوە بنووسە.

**15** $\log_2 4 + \log_2 8 - \log_2 32$

**16** $\log_{10} 12 + \log_{10} \frac{2}{3} - \log_{10} \frac{8}{10}$

بیسەڵمێنە کە:

17 $\log_{10}100+\log_{10}18-\log_{10}6-\log_{10}3=2$

18 $\log_a 5+\log_a 21-\log_a 7=\log_a 15$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە

19 $\log_3(2x+3)=3$

20 $\log_3\left(x+\frac{1}{5}\right)=-2$

21 $\log_2(2x+1)=2$

22 **بیری ڕەخنەگر** بەهای $b$ چەندە ئەگەر $\log_a b=0$؟ ڕوونیبکەوە.

23 **بیری ڕەخنەگر** ئەگەر $n$ ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت، ئایا دەتوانیت $\log_{10}10^n$ هەژماربکەیت بە ژماردنی سفرەکان لە $10^n$ ڕوونیبکەوە.

24 **بیری ڕەخنەگر** ئایا دەتوانی باسی ئەو هۆیە بکەیت کە ڕێگرە لە هەژمارکردنی $\log_0 3$ و $\log_1 3$؟

25 ڕوونیبکەوە کە $\log_7 7^{2x+3}=2x+3$ پاساو بۆ هەر هەنگاوێك دیاربکە.

## ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم برانە شیتەڵبکە.

26 $x^3+5x^2+6x$

27 $a^6-64$

28 $2x^2-11x-6$

ئەم هاوکێشانە بە ڕێگای گونجاو شیکاربکە.

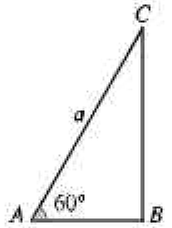
29 $x^2-11x-6=0$

30 $x^2+x-42=0$

31 $3x^2-12x+12=0$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

32 درێژی پارچە ڕاستەهێڵی $BC$ هەژماربکە.



بەشی 3

# ئەگەرەکان

## Probabilities

هەژمێرکردنی ئەگەرەکان لقێکە لە لقەکانی بیرکاری، بایەخ دەدات بە خوێندنی دیاردە هەرەمەکییەکان یان ئەو دیاردانەی کە پێشبینی ئەنجامەکانی ناکرێت. ئەگەری ڕووداو توانای ڕوودانی نیشاندەدات یان جێبەجێدەکات، کەچی هەندێك ڕووداو هەنە، ئەگەری ڕوودانیان زۆر بچوکە یان ئەستەمە. لەویش ڕووداوی وا هەیە، ئەگەری ڕوودانەکەی گەورەیە یان دڵنیایە. لەم بەشەدا یاسای بنچینەیی ژماردن بەکاردەهێنیت بۆ دیارکردنی ژمارەی ئەنجامەکە لە توانابووەکان بۆ تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی یان ئەو ئەنجامانەی کە ڕوودانی ڕووداوێك دەرببڕێت. (ئەگەر) بەکارهێنانی زۆری هەیە، بە تایبەتی لە کۆمپانیاکانی بارمتە، و دەزگاکانی توێژینەوە، وەك توێژینەوەی پزیشکی وهیتر، ولە جێبەجێکردنی یاساکان، ولە زانستە ڕامیارییەکان.

### وانەکان

1. دەروازەیەك بۆ ئەگەر
2. ئەگەرەکان
3. یاسای ژماردنی بنەڕەتی
4. گۆڕینەکان و ڕیزکراوەکان و گونجینەکان

وانەی 1

# دەروازەیەك بۆ ئەگەر

## Indroduction To Probability

**بۆچی** زۆر جار ئەگەرەکان بەبەکارهێنانی شتی ئەوتۆ دەخوێنرێت کە لە ژیانی رۆژانەدا بەکاردێن وەك بەردەزار و پارچە دراوی کانزایی و تیرەکان.

**ئامانجەکان**

- جیاکردنەوەی یەکە تاکەکانی ئەگەر و بەکارهێنانیان بەشێوەیەکی دروست.
- دیاریکردنی کۆمەڵەی ئەنجامە لەبارەکان بۆ تاقی کردنەوەیەکی هەرەمەکی.
- دیاریکردنی ئەو ئەنجامە لەبارانەی کە ڕووداوێك پێکدێنن.

زۆر جار وشەی ئەگەر دەبیستین یان بەکاری دێنین لە ژیانی ڕۆژانەماندا. ڕەنگە لە مامۆستای بیرکاری بیبیستیت کە ئەگەری دەرچوونی ڕوان لە بیرکاری دا بریتییە لە 80% ، ڕەنگە لە پێشکەشکاری بلاوکراوەی سەقا ببیستیت کە ئەگەری باران بارین لە ڕۆژی داهاتوودا بریتییە لە 50% . لەوانەیە یەکێك بە بیگومانی بلێت کۆمپانیای بارمتە ئەمساڵ قازانج دەکات و یەکێکی تر بلێت کە ئەستەمەهەرگیز بەفر لە مانگی ئاب لە هەولێردا ببارێت.

ئەم ڕستانە باسی چیدەکەن؟ باسی ڕووداوی ئەوتۆ دەکەن کە بەتەواوی نازانین ئایا ڕوو دەدەن یان نا، یان ڕووداوی تر کە لە ڕوودانی دڵنیاین، یان هەرگیز ڕوونادەن. بیرکاری یەکێك لە لقەکانی بۆ توێژینەوە دەربارەی ئەم شتانە تەرخان دەکات. کە هەژمێرکردنی ئەگەرە بێگومان دەزانیت کە زاناکان تاقیکردنەوەی زانستی وەك تاقیکردنەوەی فیزیایی و کیمیایی و هیتر دەکەن. لەوانەیە مرۆڤ دەستی هەبێت لە ئەنجامی ئەم تاقیکردنەوانە لە میانەی ڕێکخستنی بابەتەکان و مەرجەکانیان. و ڕەنگە زاناکە ئەنجامەکان پێشتر بزانیت. بەڵام تاقیکردنەوەی تر هەیە کە ناتوانین پێشەکی ئەنجامەکانی دیاری بکەین. لەکاتی هەڵدانی بەردە زارەکە دیاریدەکەوێت و لە کاتی هەڵدانی پارچە دراوێکی کانزایی، ناتوانیت پێشەکی شێر یان خەت دیاری بکەیت. هەریەك لەم تاقیکردنەوانە پێیدەوترێت تاقیکردنەوەی هەرەمەکی. بیردۆزی ئەگەر لەسەدەی حەڤدەمین دەستیکرد سەری هەڵدا لەسەر دەستی دوو زانای گەورە لە زانایانی، بیرکاری فێرما Fermat ( 1601 – 1665 ) و باسکال Pascal ( 1623 – 1662 ) . ئەم بیردۆزە لە چەرخەکاندا گەشەکرد تا ئەمڕۆ بووە لقێکی تەواو لە لقەکانی بیرکاری کە لەگەڵ ئامار ڕۆڵێکی گرنگ دەبینێت لە ژیانی هاوچەرخدا و لە چەندین زانستی تردا بەکاردێت هەر لە فیزیا بۆ کیمیا بۆ زیندوورزانی بۆ نوشداری تاکو ئابووری و بازرگانی و بارمتەکان و هیتر.

## پێناسەکان Definitions

لەم وانەیەدا زاراوەکانی ئەگەر دەناسین و فێری چۆنیەتی بەکارهێنانیان دەبین بەشێوەیەکی دروست. کرداری هەڵدانی بەردەزار بەکاردێنین بۆ هێنانەوەی نموونە بۆ ڕوونکردنەوەی پێناسەکان.

| زاراوە | پێناسە | نموونە |
|---|---|---|
| کاری هەرەمەکی **Trial** | کارێکە ناتوانین پێشەکی ئەنجامەکەی دیاریبکەین | هەڵدانی بەردەزارێك |
| تاقیکردنەوەی (هەرەمەکی) **Random Experiment** | کارێکی هەرەمەکی یان دووبارە کردنەوەی کارێکی هەرەمەکییە | هەڵدانی بەردەزارێك 3 جار |
| بۆشایی نموونە **Sample Space** S | کۆمەڵەی ئەو ئەنجامانەی کە لە توانادایە بۆ تاقیکردنەوەیەکی هەرەمەکی. | $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ |
| ڕووداو **Event** | کۆمەڵێکە لە ئەنجامێك یان لەچەند ئەنجامێك پێکدێت کە لە توانادابێت. | دەرکەوتنی ژمارەیەکی جووت<br>دەرکەوتنی ژمارەیەکی خۆیەش |

### نموونە 1

خەسرۆ بەردەزارێکی یەکجار هەڵدا، ئەم ڕوداوانە، بە شێوەی کۆمەڵە، بنووسە.

أ $A$ : دەرکەوتنی ژمارەیەکی تاك

ب $B$ : دەرکەوتنی ژمارەیەکی خۆبەش

ج $C$ : دەرکەوتنی ژمارەیەك لە 5 بچوکتر نەبێت.

د $D$ : دەرکەوتنی ژمارەیەکی خۆبەش یان 4 .

**شیکار**

أ $A=\{1, 3, 5\}$

ب $B=\{2, 3, 5\}$

ج $C=\{5, 6\}$

د $D=\{2, 3, 5, 4\}$

**هەوڵبدە** ڕووداوی دەرکەوتنی ژمارەیەك بنووسە توانای دابەشبوونی هەبێت بەسەر 3

### نموونە 2

شیرین پارچە دراوێکی کانزایی دووجار هەڵدا. بۆشایی نموونەکە بنووسە.

**شیکار**

ئەگەر $T$ هێمای شێر و $H$ هێمای خەت بێت، بۆشایی نموونەکە بریتییە لە

$$S = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$$

**هەوڵبدە** ئەو ڕووداوە بنووسە کە هەردوو جار شیرین هەمان ڕووی بۆ دەربچێت.

تێبینی لەکاتی بەکارهێنانمان ژمارەیەك کەمتر نەبێت لە 12 وەك نموونە، مەبەستمان لە ژمارەکە 12 وسەروترە، و ژمارەیەك لە 12 زیاتر نەبێت، مەبەستمان لە ژمارەکە 12 وخوارووترە.

**بەرەنگاری** بۆشایی نموونەکە بنووسە کاتێك شیرین پارچە دراوەکە 3 جار هەڵبدات.

**نموونە 3**

**شنە گۆیەکی لە سندوقێك راکێشا کە 5 گۆی هاوشێوەی تێدایە. دووانیان سوور و سێیان سەوزن بۆشایی نموونەکە بنووسە.**

**شیکار**

هێمای $R_1$ و $R_2$ بۆ دوو گۆیە سوورەکە و هێمای $G_1$ و $G_2$ و $G_3$ بۆ هەرسێ گۆیە سەوزەکە دادەنێن،
بۆشایی نموونەکە بریتییە لە $S = \{R_1, R_2, G_1, G_2, G_3\}$

**هەوڵبدە** کاروان گۆیەکی لە سندوقێك ڕاکێشا کە 10 گۆی هاوشێوەی تێدایە، 4 ی سوور و 6 ی سەوزن، بۆشایی نموونەکە بنووسە.

**نموونە 4**

**شونی دوو بەردەزاری هەڵدا یەکێکیان سوور و ئەوەیتریان شین بوو، بۆشایی نموونەی ئەم تاقیکردنەوە هەرەمەکییە چییە و ڕووداوی دەرکەوتنی دوو ژمارە سەرجەمیان 10 بێت چییە؟**

**شیکار**

هەروەك لە شێوەی بەرامبەردا دیارە، بۆشایی نموونە لە 36 دانە پێکدێت، هەریەکێکیان جووتە ڕێکخراوێکە ژمارەی دەرکەوتوو لەسەر بەردەزاری سوور ژمارەی دەرکەوتوو لەسەر بەردەزاری شێن دیاردەخات. ڕووداوەکەش لە 3 دانە پێکدێت کە ئەو دانانەن لە شێوەی بەرامبەردا دەورە دراون.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 1 | 1 2 | 1 3 | 1 4 | 1 5 | 1 6 |
| 2 1 | 2 2 | 2 3 | 2 4 | 2 5 | 2 6 |
| 3 1 | 3 2 | 3 3 | 3 4 | 3 5 | 3 6 |
| 4 1 | 4 2 | 4 3 | 4 4 | 4 5 | [illegible] |
| 5 1 | 5 2 | 5 3 | 5 4 | [illegible] | 5 6 |
| 6 1 | 6 2 | 6 3 | [illegible] | 6 5 | 6 6 |

**هەوڵبدە** ئەو ڕووداوە بنووسە کە دەستکەوتنی سەرجەمی 14 دەردەبڕێت.

**نموونە 5**

**رزگار بەردەزارێکی یەك جار هەڵدا، ئەم ڕووداوانە بنووسە:**

1. $A$ : دەرکەوتنی ژمارەیەکی تاك.
2. $B$ : دەرکەوتنی ژمارەیەکی گەورەتر لە 5 .
3. $C$ : دەرکەوتنی ژمارەیەکی بچووکتر لە 1 .
4. $D$ : دەرکەوتنی ژمارەیەکی بچووکتر لە 8 .

**شیکار**

1. $A=\{1, 3, 5\}$
2. $B=\{6\}$
3. $B=\{\ \}=\phi$
4. $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

**هەوڵبدە** ئەو ڕووداوە بنووسە کە ژمارەیەك دەنوێنێت لە 6 بچووکتر بێت و لە 2 بچوکتر نەبێت

ئەنجامەکانی نموونەی ڕابردوو بەکاردێنین بۆ دانانی چەند پێناسەیەك:

| نموونە | پێناسە | زاراوە |
|---|---|---|
| $B=\{6\}$ | ڕووداوێکە ئەنجامێك لە ئەنجامەکانی بۆشایی نموونەکە دەگرێتەخۆ | ڕووداوی سادە (بنەڕەتی) **Simple event** |
| $A=\{1, 3, 5\}$ | ڕووداوێکە زیاتر لەئەنجامێك لە ئەنجامەکانی بۆشایی نموونەکە دەگرێتەخۆ. | ڕووداوی ناوێتە **Complex event** |
| $C=\{\ \}=\phi$ | ڕووداوێکە هیچ ئەنجامێك ناگرێتەوە لەتوانادابێت. | ڕووداوی ستەم **Impossible event** |
| ڕووداوی $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ | ڕووداوێکە هەموو ئەنجامەکان دەگرێتەوە کە لەتوانادابێت. | ڕووداوی دڵنیایی **Certain event** |
| هەردوو ڕووداوی $B=\{6\}$ $A=\{1, 3, 5\}$ | دوو ڕووداون هیچ ئەنجامی هاوبەشیان لە نێواندا نییە کە لە توانادابێت. | ڕووداوی جیا **Mutually exclusive events** |

هەوڵبدە دوو ڕووداوی جیا بڵێ لە تاقیکردنەوەی هەڵدانی بەردەزارێك.

## ڕووداوی تەواوکەر Complementry event

ئەگەر لەدوو ڕووداوی جیادا ڕووداوێکیان هاتەدی، ئەوا ڕووداوەکەی تر نایەتەدی، ئەمەش ئەوە ناگەێنێت کە یەکێکیان دێتە دی. بۆ نموونە:
لەکاتی هەڵدانی بەردە زارێك هەردوو ڕووداوی $A=\{1, 2, 3\}$ ، $B=\{6\}$ کە دوو ڕووداوی جیان، ئەوا لە دەرکەوتنی 2 هیچ کام لە A یان B نایەنەدی.

دەڵێین ڕووداوی $A$ ڕووداوی تەواوکەرە بۆ ڕووداوی $B$ ئەگەر $A$ لەگشت ئەو ئەنجامانە پێکبێت کە لە توانادایە و سەر بە $B$ نییە ئەمە ئەوە دەگەینێت دوو ڕووداوەکە جیان و یەکێکیشیان هەر ڕوودەدات هێمای $\overline{B}$ بەکاردێنین بۆ دەربڕینی ڕووداوی تەواوکەری ڕووداوی $B$ .

**نموونە 6** **لەکاتی هەڵدانی بەردەزارێك ڕووداوی تەواوکەری ڕووداوی $A$ چییە؟ ئەگەر $A$ بریتیی بێت لە ڕووداوی دەرکەوتنی ژمارەی تاك؟**

**شیکار**

بۆشایی نموونەکە بریتییە لە$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و ڕووداوەکە بریتییە لە $A=\{1, 3, 5\}$
ڕووداوی تەواوکەر بریتییە لە$\overline{A}=\{2, 4, 6\}$ واتە دەرکەوتنی ژمارەی جووت.

هەوڵبدە لەکاتی هەڵدانی دوو بەردەزاری دوو ڕەنگ جیاواز ئەگەر $A$ ڕووداوی دەرکەوتنی دوو ژمارە بێت سەرجەمیان 10 بێت، ئایا ڕووداوی تەواوکەری ڕووداوی$A$ چییە؟
دەتوانین ڕووداوی نوێ دروست بکەین لە چەند ڕووداوێك کە لامان هەیە بۆ نموونە ئەگەر$A$ ، $B$ دوو ڕووداو بن لە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی ئەوا هێمای$A\cap B$ دادەنێین بۆ ڕووداوی$A$ و $B$ کە دێتە دی تەنیا ئەگەر هەردوو ڕووداو پێکەوە ڕووبدەن هەروەها هێمای $A\cup B$ دادەنێین بۆ ڕووداوی$A$ یان $B$ . کە دێتەدی ئەگەر بەلایەنی کەمەوە یەکێك لەدوو ڕووداوەکە ڕووبدەن.

**نموونە** 7

بەردەزارێك یەكجار هەڵدرا هەردوو ڕووداوی $A=\{1, 3, 5\}$ و $B=\{2, 3, 4\}$ بەكاربێنە بۆ نووسینی هەریەكە لەم ڕووداوانە:

1. $\overline{A}$
2. $A\cup B$
3. $A\cap B$

شیكار

1. $\overline{A}=\{2, 4, 6\}$
2. $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. $A\cap B=\{3\}$

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیركاریدا

**1** هەریەك لەم دوو هێمایە $\cap$ و $\cup$ چ مانایەكت پێدەبەخشێت؟ لە دوو نموونەدا بەكاریان بێنە كە ڕووداویان تێدابێت.

**2** چۆن $A\cup B$ و $A\cap B$ دەدۆزیتەوە ئەگەر $A=\{1, 2, 3, 4\}$ و $B=\{2, 4, 6\}$؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو

**3** سندوقێك 5 پەپكی هاوشێوەی تێدایە 3 یان ڕەش و دووانیان سپین بۆشایی نموونەی هەر تاقیكردنەوەیەكی هەڕەمەكی بنووسە.

أ ڕاكێشانی یەك پەپك    ب ڕاكێشانی دوو پەپك    ج ڕاكێشانی 3 پەپك.

**4** سامان پارچە دراوێكی كانزایی 3 جاری یەك لەدوای یەك هەڵدا بۆشایی نموونەی ئەم تاقیكردنەوەیە بنووسە.

**5** 5 پارچەكاغەزی ڕەنووسكراو لە 1 تا 5 لەناو تورەگەیەكی ناڕوون دانرا یەك كاغەز بە هەڕەمەكی ڕاكێشرا هێمای $A$ دابنێ بۆ ڕووداوی هەڵگرتنی كاغەزە ڕاكێشراوەكە بۆ ژمارەیەك لە 4 كەمتر نەبێت و $B$ بۆ ڕووداوی هەڵگرتنی كاغەزە ڕاكێشراوەكە بۆ ژمارەیەك لە 3 كەمتر نەبێت ئەم ڕووداوانە بنووسە:

$$\overline{A}\cap\overline{B}, A\cap B, A\cup B, \overline{A}, B, A$$

**6** لەكاتی هەڵدانی بەردەزارێك ناری هێمای $A$ بۆ ڕووداوی (دەركەوتنی ژمارەیەكی جووت) و $B$ بۆ ڕووداوی (دەركەوتنی ژمارەیەكی خۆیەش) و $C$ بۆ ڕووداوی (دەركەوتنی ژمارەیەكی تاك) و $D$ بۆ ڕووداوی (دەركەوتنی ژمارەیەكی بچووكتر لە 7 ) دانا.

أ هەموو ڕووداوەكان بنووسە.

ب ئایا لەنێو ڕووداوەكاندا دوو ڕووداوی جیا هەیە؟ دوو ڕووداوی جیا بڵێ ئەگەر وەڵامت بەڵێ بوو.

ج ئەم ڕووداوانە بنووسە: $A\cup B$ و $A\cap B$ و $C\cap D$ .

**7** خوێندکارانی پۆلی دەیەم بۆ چاوپێکەوتنێك لەگەڵ بەڕێوەبەردا لە نێوان ۳ کەس دا: شیروان وهاوڕێ ومحمەد دوو کەسیان هەڵبژارد، بۆشایی نموونەکە بنووسە، ئایا هەر دانەیەك لە جووتە ڕێکخراوێك پێکدێت؟ ڕوونیبکەوە.

**8** پێویستە چەند ژمارەیەکی دوو ڕەنووسی لە ڕەنووسەکانی 1 و 2 و 3 پێکبهێنرێت، بۆشایی نموونەکە بنووسە ئایا هەردانەیەك لە جووتە ڕێکخراوێك پێکدێت؟ ڕوونبکەرەوە.

**9** داواکراوپێکهێنانی لێژنەیەکی سێ کەسی لەنێو خوێندکاران سامان و بڕوا و هونەر و بارام و لەیلا و نەسرین بۆشایی نموونەکە بنووسە ئەگەر:

أ پێویست بێت لێژنەکە بەلایەنی کەم کچێکی تێدابێت.

ب پێویست بێت لێژنەکە بەلایەنی زۆر کچێکی تێدابێت.

**10** سەوسەن دوو بەردەزاری ڕەنگ جیاوازی هەڵدا ئەم ڕووداوانە بنووسە.

أ دەرکەوتنی هەمان ژمارە لەسەر هەردوو بەردەزارەکە.

ب دەرکەوتنی دوو ژمارە سەرجەمیان 5 بێت.

ج دەرکەوتنی ژمارە 3 بەلایەنی کەم لەسەر یەکێك لە دوو بەردەکان.

**11** ڕووداوی دەرکەوتنی دوو ژمارە سەرجەمیان 9 بێت لەکاتی هەڵدانی دوو بەردەزاری ڕەنگ جیاواز بنووسە

**لەبیرت بێت** ژمارەکان لە ڕەنووسەکان پێکدێن هەروەك کە وشەکان لە پیتەکان پێکدێن ڕەنووسەکان لە سیستمی دەیی لە 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 پێك دێن و ژمارەیان دەیە.

## ڕوانینێك بۆ دواوە

**12** چۆن $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ بەسادەترین شێوە دەنووسێت.

**13** چۆن $\frac{1}{36}+...+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}$ و 36 جار، بەسادەترین شێوە دەنووسیتەوە؟

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

**14** کەسێك هەڵبژێردرا لەنێو خوێندکارانی پۆلێك لە 13 کچ و 26 کوڕ پێك هاتبوو بۆ ئەوەی ببێتە نوێنەری پۆل. ئەگەری ئەوەی نوێنەرەکە کچ بێت چەندە؟

# وانەی 2

# ئەگەر

## Probability

**بۆچی** زۆر لە کۆمپانیاکان پێویستیان بە بەکارهێنانی ئەگەر دەبێت لە پلاندانان بۆ کارەکانیان وەك کۆمپانیاکانی فڕین کە بەدوای چاکترین شێواز دەگەڕێت بۆ خزمەتکردنی گەشتیارانی

**ئامانجەکان**

- ئەگەری تیۆری و ئەگەری تاقیکردنەوەیی دەناسێت.
- ئەگەری ڕووداو هەژماردەکات.
- ئەگەری تەواوکەر دەناسێت و هەژماری دەکات.

چۆن هەندێك کۆمپانیای بازرگانی کە کارەکانی بەستراوە بە هەندێك کاروبار کە لە تواناداا نییە پێشبینی ڕوودانی بکرێت وەك کۆمپانیاکانی بارمتە دەتوانێت قازانج بکات؟ وەڵامەکە لەوەدایە کە دەکرێ هەندێ توانست بدۆزێتەوە یان ئەگەری ڕوودانی کارێك لەمیانەی چاودێری کردنی ئەنجامی ژمارەیەکی زۆر لە بارەکانی دەبێتە هۆی ڕوودانی بۆ نموونە: لەوانەیە ئەگەری مردنی مرۆڤێکی کە هۆگری جگەرەکێشانە دیاربکرێت لە میانەی چاودێری کردنی ڕێژەی ئەوانەی بەهۆی هۆگری جگەرە دەمرن.

**نموونە** 1

**ئەگەری چەندە کە نەخۆشێکی شێرپەنجەی سییەکان چاکبێتەوە ئەگەر زانیت کە توێژینەوەیەك لەسەر 5000 کەس کرابێت. لەوانە 250 کەسیان چاکبوونەوە.**

**شیکار**

دەتوانیت بۆشایی نموونەکە بە 5000 کەس دابنرێت لەوانە 5000 − 250 = 4750 چاکنەبوونەوە دەنوێنێت، بەمەش ئەگەری چاکبوونەوە دەبێتە:

$$\frac{250}{5000}=\frac{1}{20}=0.05=5\%$$

**هەوڵبدە** ئەگەری چاکنەبوونەوەی نەخۆشەکە چەندە؟

**نموونە** 2

**دونیا بەردەزارێکی هەڵدا ئەگەری دەرکەوتنی یەکێك لە چەند جارەکانی 3 چەندە؟**

**شیکار**

بۆشایی نموونەکە بریتییە لە $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ڕووداوەکە ڕوودەدات ئەگەر دونیا 3 یان 6 ی بۆ دەرچێت، واتە ڕووداوەکە بریتییە لە $\{3, 6\}$ بەمەش دەردەکەوێت کە ئەگەری هاتنەدی داواکراو بریتییە لە $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$ .

**هەوڵبدە** ئەگەری دەرکەوتنی 1 یان ژمارەیەکی گەورەتر لە 3 چەندە؟

**دوو نموونەی پێشوو دوو ڕێگای هەژمێرکردنی ئەگەرمان بۆ دەستنیشان دەکات.**

**ڕێگای یەکەم**

ئەم ڕێگایە بەندە لەسەر هەژمارکردنی ئەگەری ڕووداوێك لە ڕێگای دووبارەکردنەوەی تاقیکردنەوەکە(زۆری ژمارەی بارەکانی شێرپەنجە توێژینەوەی لەسەرکراوە) و تۆمارکردنی ئەنجامی هەربارێك (چاکبوونەوە یا نا) ئەگەری ڕووداوی (چاکبوونەوە) لەم ڕێگایەدا بە ئەنجامی تاقیکردنەوە دووبارەبووەکان دیاردەکرێت و بەکەرتێك دەردەبڕێت کە سەرەکەی ژمارەی ئەو بارانەیە کە ڕووداوەکەی تێدادێتەدی (بارەکانی چاکبوونەوە) ژێرەکەی ژمارەی هەموو بارەکانە بەم جۆرە ئەگەرە دەوترێت ئەگەری **تاقیکردنەوەیی Experimental Probability**

**ڕێگای دووەم**

ئەم ڕێگایە بەندە لەسەر هەژمێرکردنی ئەگەری ڕوودانی ڕووداوەکە کە (دەستکەوتنی یەکێك لەچەندجارەکانی ژمارە 3 ) بەشێوەی تیۆری بەبێ ئەنجامدانی تاقیکردنەوەی (هەڵدانی بەردەزار) ئەگەری ڕووداوەکە (دەستکەوتنی یەکێك لەچەندجارەکانی ژمارە 3 ) لەم ڕێگایەدا پێشەکی دیاردەکرێت و بەکەرتێك دەردەبڕێت سەرەکەی ژمارەی ئەو ئەنجامانەی کە ڕووداوەکە دێنێتەدی (دوو ئەنجام کەبریتیین لە 3 و 6 ) و ژێرەکەی بریتییە لە ژمارەی هەموو ئەو ئەنجامانەی لە توانادایە( 6 )بەم جۆرە ئەگەرە دەوترێت **ئەگەری تیۆری Theoritical Probability**

**بەرەنگاری** دڵدار گۆیەکی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 4 گۆی سوور و 7 گۆی ڕەشی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە شین بێت چەندە؟

**بەرەنگاری** دڵدار گۆیەکی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 4 گۆی سوور و 7 گۆی ڕەشی تێدابوو، لەنێو ڕووداوەکانی ئەم تاقیکردنەوە هەڕەمەکییە، ڕووداوێکی دڵنیا دیاریکە.

## ئەگەر Probability

بەگەڕانەوە بۆ تاقیکردنەوەی هەڵدانی بەردە زارەکە:

- دەتوانین هەموو ڕووداوە سادەکان دیاریکەین کە ئەمانەن $A=\{1\}$ و $B=\{2\}$ و $C=\{3\}$ و $D=\{4\}$ و $E=\{5\}$ و $F=\{6\}$ (لەبیرت بێت کە ڕووداوی سادە تەنیا لەیەك ئەنجام پێکدێت کە لەتوانادابێت).
- هەموو ئەو ڕووداوانە لە ئەگەردا یەکسانن .
- سەرجەمی ئەگەرەکانی ڕووداوە سادەکان یەکسانە بە 1 .

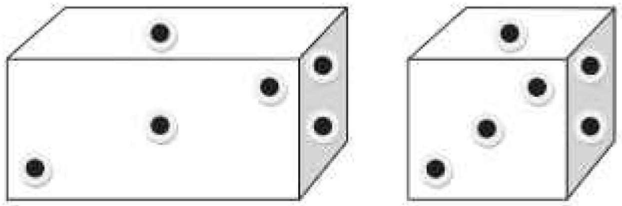
**ئەگەر Probability**

ئەگەری ڕووداوێك $A$ دەپێورێت و دەنووسرێت $P(A)$ بەژمارەیەکی ڕاستی کە دەکەوێتە نێوان 0 و 1 واتە $0 \le P(A) \le 1$، ئەگەر ڕووداوی $A$ ئەستەم بێت ئەوا ئەگەرەکەی $P(A)=0$ .

ئەگەر ڕووداوی $A$ دڵنیایی بێت ئەوا ئەگەرەکەی $P(A)=1$ .

سەرجەمی هەموو ئەنجامی ئەگەوەکانی لەتوانادابوو بریتییە لە 1 .

دەربارەی تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی دەڵێین ئەنجامەکانی سنووردراوە ئەگەر ژمارەی ئەنجامە لە توانابووەکانی سنوورکراوین ئەوا بۆشایی نموونەکە لەم بارەدا لە ژمارەیەکی دیاریکراو لە دانە پێکدێت.



**نموونە 3**

**سامان بەردەزارێکی هەڵدا، و سەیرانی خوشکیشی بەردەزارێکی شێوە لەگۆڕاندا هەڵدا کە شێوەکەی کرابوو بە رووولاکێشە تەریب لەجیاتی شەشپاڵو وەکو لە وێنەی سەرەوە دیارە هەریەك لەبەردەزارەکان لە 1 بۆ 6 رەنووسکراون ئایا گۆڕینی بەردەزاری سەیران بۆشایی نموونەکە دەگۆڕێت ئایا ئەگەری هەموو ئەنجامەکان دەگۆڕێت کە لەتوانادایە؟**

**شیکار**

گۆڕینی شێوەی بەردەزاری سەیران بۆشایی نموونەکە ناگۆڕێت کە لە هەردوو تاقیکردنەوەدا بریتییە لە $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ بەڵام ئەگەری هەموو ئەنجامە لەتوانابوەکان دەگۆڕێت. ئەنجامەکان لە تاقیکردنەوەی سامان یەکسانن لەبەر یەکسانبوونی ڕوە ڕووبەرەکان بەڵام لە تاقیکردنەوەی سەیران یەکسان نین لەبەر جیاوازی ڕوە ڕووبەرەکانی لاکێشە تەریبەکە.

بە تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی دەڵێین ڕێکە **Equiprobable** ئەگەر تیایدا ئەگەرەکانی ئەنجامەکان کە لە توانادایە یەکسان بن.

## ئەگەری تیۆری **Theoritical Probability**

ئەگەر تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی سنووردار و ڕێکبوو ئەوا ئەگەری ڕووداوێك $A$ لە ڕووداوەکانی بریتییە لە ژمارەی ڕاستی:

$$P(A) = \frac{\text{ژمارەی ئەنجامەکانی کە پاسەدانی ڕووداوەکە دەکەن}}{\text{ژمارەی هەموو ئەنجامەکان کە لە توانادایە}}$$

**نموونه** **4**

**مەروان پەپکێکی کۆمپیوتەری لە قوتوویەك ڕاکێشا کە دوو پەپکی سوور و 4 پەپکی شین و 3 پەپکی زەردی تێدابوو ئەگەر چەندە کە پەپکە ڕاکێشراوەکە زەرد بێت؟**

**شیکار**

ئەم تاقیکردنەوەیە هەڕەمەکی و دیاریکراو ڕێکە بۆشایی نموونەکەی بریتییە لە: $S=\left\{R_1, R_2, B_1, B_2, B_3, B_4, Y_1, Y_2, Y_3\right\}$

با $R$ هێما ڕەنگی سوور و $B$ ڕەنگی شین و $Y$ ڕەنگی زەرد بێت

دیارە 3 ئەنجام ڕووداوەکە دێنێتەدی لەنێو 9 ئەنجامەکە لە تواناداابوو.

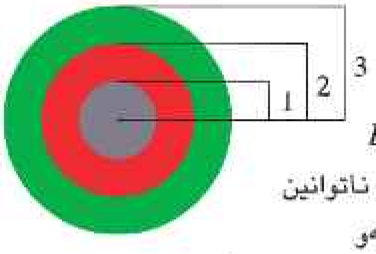
بۆیە ئەگەری ئەوەی پەپکە ڕاکێشراوەکە زەرد بێت بریتییە لە 3 لە 9 یان $P(Y)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

**هەوڵبدە** هاوڕێ پەپکێکی کۆمپیوتەری لە قوتوویەك ڕاکێشا کە 3 پەپکی سوور و 5 پەپکی شین و 7 پەپکی زەردی تێدابوو، ئەگەر چەندە کە پەپکە ڕاکێشراوەکە شین بێت؟

چۆن ئەگەرەکانی تاقیکردنەوەیی هەڕەمەکی دیارینەکراو هەژماردەکەین؟ وەڵامەکانمان تەنیا لە بواری تاقیکردنەوە هەڕەمەکییە ڕێکەکان دەبێت دوو جۆر لەم بارانە دەخوێنین.

**نموونه** **5**

**فەیرۆز تیرێکی هاوێشت ولە پەپکە بازنەییە دارەکەیدا کە بەدیوارەوە هەڵوسراوە. ئایا ئەگەری ڕووداوی $B$ چەندە کە بریتییە لەوەی تیرەکە ناوچە سەوزەکە بپێکێت؟**




**شیکار**

هەر خاڵێك لە خاڵەکانی پەپکە بازنەییە کە ئەنجامێك دەنوێنێت کە لە توانادایە. لەکاتێکدا ئەو خاڵانەی ڕووداوی $B$ بەدیدێنن بریتین لە خاڵەکانی ناوچە سەوزەکە. لەبەر ئەوەی ناتوانین ژمارەی ئەنجامەکان بدۆزینەوە کە لە تواناداان و ژمارەی ئەو ئەنجامانەی کە ڕووداوەکە دێننە دی، بۆیە ڕووبەری ئەو ناوچەیەی کە خاڵەکانی ڕووداوەکە پێکدەهێنن واتە ناوچە سەوزەکە، دابەشی ڕووبەری ئەو ناوچەیە دەکەین کە خاڵەکانی بۆشایی نموونەکە پێکدەهێنن واتە ڕووبەری هەموو تەختەکە.

$$P(B)=\frac{\text{ڕووبەری ناوچە سەوزەکە}}{\text{ڕووبەری هەموو ناوچەکە}}$$

$$P(B)=\frac{\pi(3)^2-\pi(2)^2}{\pi(3)^2}=\frac{5\pi}{9\pi}=\frac{5}{9}=0.556=55.6\%$$

**هەوڵبدە** ئەگەر چەندە کە تیرەکە ناوچە سورەکە بپێکێنێت.

**نموونه** **6**

هەموو ڕۆژێ کەمال لە نێوان کاتژمێر 1:00 و 2:00 ی پاش نیوەڕۆ سەیری پۆستە ئەلیکترۆنییەکەی دەکات. **ئایا ئەگەری ڕووداوی $E$ چەندە کە ئەنجامدانی کارەکە دەنوێنێت لەنێوان کاتژمێر 1:30 و 1:40 ؟**

**شیکار**

بۆشایی نموونەکە لە هەر ساتێك پێك دێت لە نێوان 1:00 و 2:00 لە کاتێکدا ڕووداوەکە بریتییە لە کۆمەڵەی ساتەکانی نێوان 1:30 و 1:40 بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ڕووداوی $E$ ماوەی نێوان 1:00 و 2:00 بۆ چەند ماوەیەکی 10 خولەکی بەشدەکەین (درێژی ماوەی نێوان 1:30 و 1:40).

ماوە سوورەکە ڕووداوەکە دەنوێنێت کەواتە، ئەگەری ڕووداوەکە بریتییە لە یەك ماوە لە نێوان 6 ماوەی یەکسان واتە

$$P(E)=\frac{1}{6}\approx 0.167\approx 16.7\%$$

**هەوڵبدە** ئەگەر چەندە کە کارەکە لە نێوان 1:30 و 1:35 ئەنجامبدات؟

## Probability of the Complement of an event ئەگەری ڕووداوی تەواوکەر

**نموونە 7**

**ئەگەر $B$ بریتی بێت لە ڕووداوی دەرکەوتنی ژمارەیەك گەورەتر نەبێت لە 2 لەکاتی هەڵدانی بەردەزارێك، ئەوا ڕووداوی تەواوکەر $\overline{B}$ بنووسە وئەگەرەکەی هەژماربکە. پەیوەندي نێوان ئەگەری ڕووداوی $B$ وئەگەری ڕووداوی تەواوکەر $\overline{B}$ چییە؟**

شیکار

$$\overline{B}=\{3, 4, 5, 6\} \quad B=\{1, 2\}$$

$$P(\overline{B})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ئەوە تێبینی دەکەین $P(B)+P(\overline{B})=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$ یان $P(\overline{B})=1-P(B)$.

دەبینین لە ڕاستیدا ئەو ئەنجامەی کە لە نموونەی ڕابردوودا پێگەیشتین دەربارەی پەیوەندی نێوان ئەگەری ڕووداوێك $B$ وئەگەری ڕووداوی تەواوکەر $\overline{B}$ ئەنجامێکی گشتییە وەدەتوانرێت لەهەر تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی بەکاربهێنرێت.

**نموونە 8**

**سندوقێك 52 کاغەزی هاوشێوەی تێدایە. 10 سوور و 12 شین و 14 سپی و 16 سەوزە. سیروان کاغەزێکی ڕاکێشا وگەڕاندیەوە ناو سندوقەکە پاشان کاغەزێکی تری ڕاکێشا. ئەگەری ڕووداوی $B$ کە کاغەزی یەکەم شین بێت وڕووداوی $O$ کە کاغەزی دووەم شین نەبێ چین؟**

شیکار

بۆشایی نموونە لە 52 دانە پێك دێت چونکە ڕاکێشانی هەر کاغەزێك ئەنجامێکی لەتوانادابوو دەنوێنێت و ڕووداوی B لە 12 دانە پێکدێت چونکە هەر کاغەزێك لە 12 کاغەزە شینەکە ئەنجامێك پێکدێنێت کە ڕووداوەکە دێنێتەدی.

$$P(B)=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$$

بەهەمان ڕێگا دەتوانیت ئەگەری ڕوداووی O بدۆزیتەوە. ڕووداوی O کە هەموو کاغەزە سوور وسپی وسەوزەکان پێکدێنێت واتە لە 40 دانە پێکدێت کەواتە

$$P(O)=\frac{40}{52}=\frac{10}{13}$$

بەڵام دەتوانیت سەرەنجی ئەوە بدەیت کە ڕووداوی O بریتییە لە تەواوکەری ڕووداوی B وئەگەرەکەی بەم جۆرە هەژمێر دەکەیت:

$$P(O)=1-P(B)=1-\frac{3}{13}=\frac{10}{13}$$

**بەرەنگاری** چ گۆڕانێك لە ئەنجامی نموونەی پێشوو ڕوودەدات ئەگەر سیروان کاغەزی یەکەم نەگڕێنێتەوە ناو سندووقەکە پێش ڕاکێشانی کاغەزی دووەم؟

**نموونە** 9

فەرهاد بەردەزارێکی سەیری هەیە، لە **1** تا **6** ڕەنووسکراوە،ئەگەری دەرکەوتنی هەر ژمارەیەك تیایدا جگە لە **1** بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ئەو ژمارەیە لە ئەگەری دەرکەوتنی **1** ئەگەری دەرکەوتنی هەریەك لە شەش ژمارەکە چەندە؟

شیکار

بە پێی پێدراوەکانی پرسیارەکە دەتوانیت ئەمانەی خوارەوە بنووسییت:

$P(6)=6P(1)\quad P(5)=5P(1)\quad P(4)=4P(1)\quad P(3)=3P(1)\quad P(2)=2P(1)$

لەبەر ئەوەی سەرەجەمی ئەگەرەکانی هەموو ئەنجامە لە تواناداوبوەکان یەکسانە بە $1$ ئەوا دەتوانین بنووسین کە:

$$\begin{aligned}1&=P(1)+P(2)+p(3)+p(4)+P(5)+P(6)\\&=P(1)+2P(1)+3P(1)+4P(1)+5P(1)+6P(1)\\&=(1+2+3+4+5+6)P(1)\\&=21P(1)\end{aligned}$$

لەدواییشدا: $P(1)=\frac{1}{21}\quad P(2)=\frac{2}{21}\quad P(3)=\frac{3}{21}\quad P(4)=\frac{4}{21}\quad P(5)=\frac{5}{21}\quad P(6)=\frac{6}{21}$

**هەوڵبدە** ئەگەری دەرکەوتنی ژمارەیەکی خۆیەش لە نموونەی ڕابردوودا چەندە؟

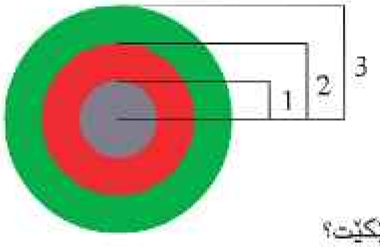
# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەگەری کەوتنی ئەبەز لە تاقیکردنەوەی بیرکاریدا چەندە ئەگەر ئەگەری دەرچوونی 90% بێت؟

2 ڕوونبکەرەوە چۆن ڕووبەرەکان لە هەژمارکردنی ئەگەرەکان بەکاردێنیت.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو




3 کارزان گۆیەکی شووشەیی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 5 گۆی شین و 3 گۆی سوور ،گۆیەکی سپی تێدابوو،ئەگەر چەندە کە گۆیە ڕاکێشراوەکە سوور بێت؟

4 لە یلا تیرێکی هاوێشتە تەختەیەکی داری هەڵواسراو بەدیوارێکەوە ئەگەر چەندە کە تیرەکە ناوچە شینەکە بپێکێت؟

5 دڵشاد ڕۆژانە لە کاتژمێر حەوت تا هەشتی بەیانی سەیری پۆستە ئەلیکترۆنییەکەی دەکات. ئەگەر چەندە کاتێك کارکە لە ماوەی 7:30 و 7:45 ئەنجامبدات؟

6 کۆمەڵەیەکی خێرخواز بلیت ڕاکێشانێك ڕێکدەخەن لە پێناو دابینکردنی بوودجە بۆ چالاکییەکانیان، بلیتەکان لە ژمارە 0000 تا ژمارە 9999 ڕەنووسکراوبوون.ئەگەر چەندە کە ژمارەی بلیتی دەرچوو بە ڕەنووسی 3 دەستپێبکات وبە ڕەنووسی 2 یان 1 کۆتایی بێت؟

## ڕاهێنان وجێبەجێکردن

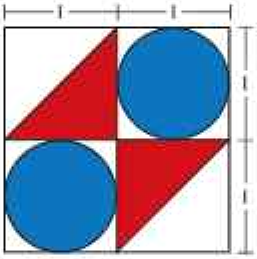
تورەگەیەک 3 بلیتی سپی و 2 بلیتی ڕەش 5 بلیتی سووری تێدایە، هەموو بلیتەکان هاوشێوەن ڕێبوار بلیتێکی ڕاکێشا ئەگەر کە چییە کە بلیتە ڕاکێشراوەکە:

**7** سپی بێت **8** ڕەش بێت **9** سوور بێت

پاسێك لە نێوان کاتژمێر هەشت و هەشت و 5 خولەکی بەیانی دەگاتە وێستگەی نزیك ماڵی سامان.ئەگەر چەندە هاوڕێ سواری پاسەکە بێت ئەگەر لەم کاتانە گەیشتە وێستگەکە:

**10** 8:04 **11** 8:02 **12** 8:01 **13** 8:03

**ئەندازە** سامی تیرەکانی دەگرێتە تەختەیەکی داری وەك ئەوەی لە شێوەی بەرامبەردا دیارە.ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە هەژمێر بکە:



**14** تیرەکە ناوچە بازنەییەکە بپێکێت.

**15** تیرەکە یەکێك لە دوو سێگۆشە سوورەکە بپێکێت.

**16** تیرەکە یەکێك لە دوو سێگۆشە سپییەکە بپێکێت.

**17** تیرەکە ناوچە سپییەکە بپێکێت.

جێبەجێکردن

**دیمۆگرافیا** خشتەی خوارەوە ژمارەی دانیشتوان جگە لە منداڵ لە شارێك پیشاندەدات، بە پێی تەمەن ورەگەز.

| تەمەن | نێر | مێ |
| --- | --- | --- |
| 17 – 14 | 38 | 39 |
| 19 – 18 | 1 224 | 1 416 |
| 21 – 20 | 1 294 | 1 414 |
| 24 – 22 | 1 260 | 1 263 |
| 29 – 25 | 950 | 1 058 |
| 34 – 30 | 661 | 811 |
| 35 بەرەوژوور | 955 | 1 824 |

یەکێك لە دانیشتووان بەهەڕەمەکی هەڵبژێردرا. ئەگەر چەندە کە تەمەنی ئەو کەسە لەم چەشنە دابێت؟

**18** 24-18 **19** 29-25 **20** 34-30 **21** 30 بەرەوژوور

**22** ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە هەژمێربکە لە کاتی هەڵدانی دوو بەربەزاری ڕەنگ چیا:

أ دوو ژمارە دەرکەوتووەکە یەکسان بن.

ب سەرجەمی دوو ژمارە دەرکەوتووەکە 12 بێت.

ج بەلایەنی کەم ژمارە 3 لەسەر یەکێك لە دوو ڕووەکە دەردەکەوێت.

د سەرجەمی دوو ژمارە دەرکەوتووەکە لە 5 کەمتر بێت.

**23** نوێنەری پۆلێك هەڵبژێردرا كە لە 8 كچ و 12 كوڕ پێكدێت. ئەگەر چییە:

أ نوێنەرەكە كوڕبێت.

ب نوێنەرەكە كچ بێت؟

ج نوێنەرەكە كچ بێت ئەگەر دوو كوڕ وكچێك ئارەزووی خوێنە پالاَوتنیان دەربڕی؟

**24** لە پرسیاری پێشوو، كەی ئەگەری ئەوەی نوێنەرەكە كوڕ بێت یان كچ یەكسان دەبن؟

**25** تاقیكردنەوەیەكی هەڕەمەكی سێ ئەنجامی لە تواناداًبووی تێدایە كە ئەمانەن $A,B,C$ ئەگەر $P(A)=0.2$ ، $P(B)=0.5$ ، ئەوا $P(C)$ بدۆزەرەوە.

## تێروانینێك بۆ دواوە

**26** بۆشایی نموونەی تاقیكردنەوەی هەڵدانی پارچەدراوێكی كانزایی 3 جاری یەك لە دوای یەك بنووسە.ڕووداوی A بنووسە كە بریتییە لە دەركەوتنی هەمان ڕوو لەهەر سێ جاردا.

**27** ئەم ڕووداوانە بنووسە لە تاقیكردنەوەی هەڵدانی دووبەردەزاری ڕەنگ جیاوان:

أ دوو ژمارە دەركەوتووەكە یەكسان بن.

ب سەرجەمی دوو ژمارە دەركەوتووەكە خۆبەش بێت.

ج سەرجەمی دوو ژمارە دەركەوتووەكە ژمارەیەكی جووتی گەورەتر بێت لە 2 .

**28** ئایا لە نێو ڕووداوەكانی پرسیاری 27 دوو ڕووداوی جیا هەیە، ئەگەر هەیە چین؟

**29** تەواوكەری ڕووداوی A لە پرسیاری 26 چەندە چەند دانەی تێدایە؟

## تێروانینێك بۆ پێشەوە

**30** كاڵێ دوو گۆی پێكەوە لە توورەگەیەك ڕاكێشا كە 5 گۆی تێدابوو، 3 سوور و 2 سپی.ئەگەر چییە هەردوو گۆ سوور بن؟

وانەی 3

# یاسای ژماردنی بنەڕەتی
# Fundamental Counting Principle

**بۆچی** زۆرجار ڕێگایەکمان پێویستدەبێت بۆ ژماردنی هەندێك ئەنجام لە تاقیکردنەوەیەکدا.

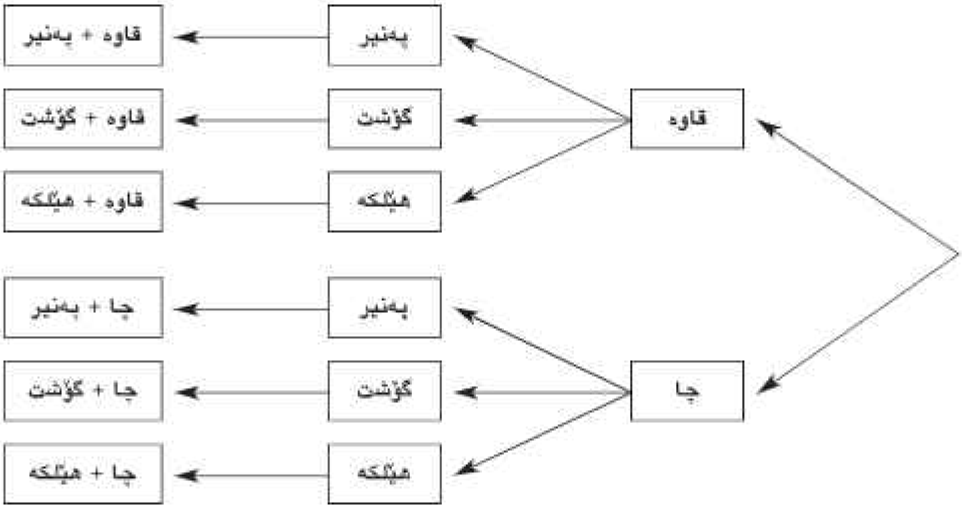
**ئامانجەکان**

- بۆ تواندنی بارێك هێڵکاری درەخت دروستدەکان.
- یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاردەهێنێت.

لەوانەی پێشوویینیمان کە هەژمێرکردنی ئەگەری ڕووداوێك لە ڕووداوەکانی تاقیکردنەوەیەکی دیاریکراو پێویستی  بە دۆزینەوەی هەموو ئەنجامەکان دەبێت کە لە توانادایە وهەموو ئەو ئەنجامانەی لە توانا دان بۆ هاتنەدی ڕووداوەکە. لەم وانەیە ولەوانەی داهاتوودا چەند ڕێگاکانی ژماردن فێردەبین کە یارمەتیدەرن لە ژماردنی ئەوەی ئارەزووی ژماردنیمان هەبێت.

## یاسای ژماردنی بنەڕەتی Fundamental Counting Principle

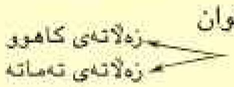
ڕێگای یەکەم فێری دەبین بریتییە لە بەکارهێنانی هێڵکاری درەخت. بۆ نموونە ژەمی بەیانی لە یەکێك لە ئوتێلەکان وەربگرە هەرکەسێك بۆی هەیە هەڵبژاردن  لە نێوان چا وقاوە بکات لە لایەك ولە نێوان سێ جۆرە خواردن: پەنیر یان گوشت یان هێلکە لە لایەکی تر. هێلکاری خوارەوە هەموو ڕێگاکان پیشاندەدات کە لە توانادایە بۆ هەڵبژاردنی ژەمی بەیانی.



## چالاکی

## دۆزینەوەی هێڵکاری درەخت Exploring Tree Diagram

چێشتخانەیەك دوو جۆرە ژەمی ئێوارە دەخاتە ڕوو بۆ میوانانی هەر ژەمێك لە قاپێك زەلاتە وقاپێك گۆشت پێكدێت هەركەسێك دەتوانێت هەڵبژاردن لە نێوان دوو جۆر سەلاتە بكات. سەڵاتەی كاهوو و زەلاتەی تەماتە. هەروەها دەتوانێت هەڵبژاردن لە نێوان سێ جۆرە گۆشت بكات: برژاو یان سووركراوە یان مریشك.




1. سەرەتا هێڵكارییەكی درەخت بكێشە بۆ دیاركردنی هەڵبژاردەی هەردوو جۆرە سەلاتە وەك لە بەرامبەر دیارە.
2. لەهەر هەڵبژاردنێكی زەلاتە هێلكارییەكی دەرخت بكێشە بۆ هەڵبژاردنی سێ جۆرە گۆشت.
3. ئەو ژەمانە چین كە لەتوانادایە ڕێكبخرێت؟ ژمارەیان چەندە؟
4. ئێستا چێشتخانەكە دەیەوێت پیازی برژاویان ببەری برژاو بخاتە سەر گۆشتەكە.

ئاستی سێیەم بۆ هێلكارییەی درەختەكە زیادبكە بۆ ئەوەی بتوانێت ئەو ژەمانە بژمێرێت كە ئێستا پێكدەهێنرێت ژمارەكەی چەندە؟

**خاڵی چاودێری ✓**

هێلكارییەكی درەخت بۆ نموونەی پێشوو بكێشە بە دەستپێكردن بە خواردن وەك هەڵبژاردنی یەكەم.ئایا ئەم گۆڕانكارییە لە ڕێكخستنی هەردوو هەڵبژاردەكە دەبێتە هۆی گۆڕانی ئەنجامەكان؟ بەتێڕوانین لە هێلكاری درەخت وتێگەیشتن لە چونیەتی دروستكردنی یاسای بنەڕەتی ژماردن ڕووندەبێتەوە.

## یاسای ژماردنی بنەڕەتی Fundamental Counting Principle

ئەگەر m ڕێگا لە توانادابوو بۆ هاتنەدی ڕووداوێك و n ڕێگا لە توانادابوو بۆ هاتنەدی ڕووداوێكی تر، ئەوا mn ڕێگا لە توانادایە بۆ هاتنەدی هەردوو ڕووداوەكە پێكەوە.

**نموونە 1**

**سامی دەیەوێت وشەی نهێنی تایبەت بۆخۆی هەڵبژێرێت بۆ چوونە ناو ئینتەرنێت.ئەم وشەیە لە دوو پیتی نووسینی ئینگلیزی پێكدێت.چوار ڕەنووسی بەدوادادێت.ئایا دەتوانێت چەند وشەی نهێنی پێكبهێنێت بەمەرجێك ناتوانێت پیتی o و ڕەنووسی 0 بەكاربێنێت؟**

شیكار

سامی دەتوانێت هەر پیتێك لە نێو 25 پیتدا بەكاربێنێت وهەر ڕەنووسێك لە نێو 9 ڕەنووسدا.جا ئەگەر یاسای ژماردنی بنەڕەتیمان بەكارهێنا ئەمەی خوارەوەمان دەستدەكەوێت:

| پیتی یەكەم | | پیتی دووەم | | ڕەنووسی یەكەم | | ڕەنووسی دووەم | | ڕەنووسی سێیەم | | ڕەنووسی چوارەم |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | × | 25 | × | 9 | × | 9 | × | 9 | × | 9 |

بەمەش ژمارەی وشە نهێنییەكان كە لەتوانادایە دەبێتە

$25^2 \times 9^4 = 4\ 100\ 625$

نموونە

2 تابلۆی ئۆتۆمبێل لە سێ پیت پێکدێت کە سێ ڕەنووسی بەدوادێت.ژمارەی تابلۆکان چەندە کە لە توانادایە؛ ئەگەر چییە کە پیتەکانی تابلۆی ئۆتۆمبیلەکەت هەرسێ پیتی سەرەتای ناوی خۆت بێت بەهەمان ڕێکخستن.

شیکار

دەست بەژماردنی دانەکانی بۆشایی نموونەکە بکە.

| پیتی یەکەم | | پیتی دووەم | | پیتی سێیەم | | ڕەنووسی یەکەم | | ڕەنووسی دووەم | | ڕەنووسی سێیەم |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | × | 28 | × | 28 | × | 10 | × | 10 | × | 10 |

بەمەش ژمارەی تابلۆکانی کە لە تواناداان دەبێتە $28^3 \times 10^3 = 21\ 952\ 000$ تابلۆ.

پاشان ژمارەی تابلۆکانی مەرجەکە دێنێتەدی هەژمێربکە.

| پیتی یەکەم | | پیتی دووەم | | پیتی سێیەم | | ڕەنووسی یەکەم | | ڕەنووسی دووەم | | ڕەنووسی سێیەم |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | 1 | × | 1 | × | 10 | × | 10 | × | 10 |

بەمەش ژمارەی تابلۆکان کە مەرجەکە دێنێتەدی بریتییە لە $1000 = 10^3$ تابلۆ.

بەم جۆرە ئەگەری ئەوەی پیتەکانی تابلۆی ئوتۆمبێلەکەت هەرسێ پیتی سەرەتای ناوی خۆت بێت.بەهەمان ڕێکخستن بریتییە لە

$\frac{1000}{21\ 952\ 000} = 0.000045$ بەمانای 45 لە ملیۆن.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 شرۆڤە بکە چۆن هێڵکاری درەخت یارمەتیت دەدات لە تێگەیشتنی یاسای بنچینەیی ژماردن.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

2 فەرهاد دەیەوێت وشەی نهێنی تایبەت بە خۆی هەڵبژێرێت بۆ چوونە ناو ئەنتەرنێت.ئەم وشەیە لە دوو پیتی ئەبجەدی پیتەکانی ئینگلیزی پێکدێت، سێ ڕەنووسی بەدوادادێت. ئایا دەتوانێت چەند وشەی نهێنی پێکبێنێت بەمەرجێك ناتوانێت پیتی o و ڕەنووسی 0 بەکاربێنێت. هێڵکاری درەخت پێکبهێنە بۆ تۆمارکردن لەتوانادابوو لە چالاکییە دەرەکییەکاندا.

3 تۆمارکردن لەهەموو چالاکییە دەرەکییەکان

- **وەرزشی** تۆپی پێ، تۆپی باسکە، تۆپی سەرمێز.
- **هونەرەکان**: میوزیك، وێنە
- **یانەکان**: زانستەکان، بیرکاری

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هێڵکارییەکی درەخت دروستبکە، کە هەموو تواناکانی خولیاکان لەناو ماڵ ولەدەرەوە دیاربکات.

4 خوولیاکان
- لەناو ماڵ: خوێندنەوە، سەیرکردنی تەلەفزیۆن، گوێگرتن لە میوزیك.
- لەدەرەوەی ماڵ: ڕاکردن، سەیران، یانە.

**ژمارەی وشە نهێنییەکان دیار بکە کە لە تواناداییە پێکبهێندرێت بە بەکارهێنانی هەموو پیتە ئەبجەدییەکانی ئینگلیزی وهەموو ڕەنووسەکان لە هەر بارێکدا.**

5 دوو ڕەنووس سێ پیتی بەدوادا بێت وڕەنووسێکی بەدوادا بێت.

6 سێ ڕەنووس دوو پیتی بەدوادا بێت وڕەنووسێکی بەدوادابێت.

7 سێ پیت سێ ڕەنووسی بەداودابێت.

8 دوو پیت چوار ڕەنووسی بەدوادابێت.

9 **بڵاوکردنەوەی کتێب** هەر کتێبێکی بڵاوکراوە ڕەنووسکراوێکی جیهانی هەڵدەگرێت کە بە ISBN ناو دەبرێت.ئەم ژمارەیە لە 10 ڕەنووس پێکدێت کە زانیاری دەربارەی کتێبەکە دەگرێتە خۆ وەك زمانی کتێب وناوی بڵاوکەر. چەند ڕەنووسکردن لە توانادایە؟

10 **تاقیکردنەوە** ئەزموونێکی هەڵبژاردنی وەڵامی ڕاست 15 پرسیاری تێدایە هەر پرسیارێك چوار وەڵامی هەیە، خوێندکاریەکێکیان هەڵدەبژێرێت.ژمارەی وەڵامەکانی هەموو پرسیارەکان کە لە توانادایە چەندە.

11 ئاسایش پسپۆڕێکی بواری ئاسایش کار لەسەر دانانی کلیلێك دەکات بۆ سیستمی ئاسایش، ئەم کلیلە سێ پیتی $A, B, C$ بەکار دێنێت لەوانەیە هەر یەکێکیان پتر لە جارێك دووبارە بێتەوە.ئەم پسپۆڕە دەیەوێت ئەگەری سەرکەوتن لە هەوڵی کردنەوەی کلیلەکە کەمتر بێت لە 0.001 ئایا کەمترین ژمارەی پیتەکانی ئەم کلیلە چەندە؟

## تێروانینێك بۆ دواوە

12 لەبیرت بێت کە کاغەزی یاری لە 52 کاغەز پێکدێت کە بەیەکسانی بەشدەبێتە سەرچەشنەکانی ♥ و ♦ و ♣ و ♠ .دڵدار کاغەزێکی لەوانە ڕاکێشا. ژمارەی ئەنجامەکان چەندە کە لە توانادایە وژمارەی ئەنجامەکان چەندە کە ڕووداوی ( کاغەزی ڕاکێشراوەکە سووربێت).

13 ئارام دوو کاغەزی یاری یەك لە دوای یەك ڕاکێشا ئەگەر چییە کە هەردوو کاغەز ♣ بێت ئەگەر ئارام کاغەزەکە بگەڕێنێتەوە و تێکەڵیان بکاتەوە پێش ڕاکێشانی کاغەزی دووەم.

14 ئارام سەیریکرد کاغەزی یەکەم ♠ بوو کاغەزی دووەمی ڕاکێشا بە بێ ئەوەی یەکەمیان بگەڕێنێتەوە.ئەگەر چییە کە کاغەزی دووەم ♠ بێت.

## تێروانینێك بۆ پێشەوە

15 دوو کەس هەڵبژێردران لە نێو 3 کچ و 4 کوڕ.ئەگەری ئەوە ئەم دوو کەسە کوڕ بن چەندە؟

# گۆڕینەکان و ڕیزبەندییەکان* و گونجێنەکان

## Permutations, Arrangements and Combinations

**وانەی 4**

**بۆچی**
لەزۆر باردا باس لە ڕێکخستنی ژمارەیەکی دیاریکراو لە دانەکانی کۆمەڵەیەک دەکات بە ڕیزبەندی یان بێ ڕیزبەندی

**ئامانجەکان**

- گۆڕینەکانی کۆمەڵەیەک دەنووسێت و ژمارەیان دیاردەکات.
- ژمارەی گۆڕینەکانی $r$ شت لەنێو $n$ شت هەژماردەکات.
- ژمارەی گونجێنەکانی $r$ شت لەنێو $n$ شت هەژماردەکات.

لەوانەی ڕابردوودا بینیمان چۆن یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاردێنین بۆ دۆزینەوەی ئەودانانەی کە بۆشایی نموونەکە پێکدێنن و ژمارەی ئەو دانانەی کە ڕووداوێك پێکدێنن. لەم وانەیەدا ڕێگاکانی تری ژماردن فێردەبین بە پێناسەیەکی ئاسان و گرنگ دەستپێدەکەین لەهەمان کاتدا.

### لێکدراوی $n$   n Factorial

ئەگەر $n$ ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت ئەوا لێکدراوی $n$ بریتییە لە ئەنجامی لێکدانی ژمارە تەواوەکان لە 1 تا $n$ و بیرکاری زانەکان ئەم پێناسەیە فراوان دەکەن تا باری $n=0$ دەگرێتەوە بۆ ئەوەی بزانین $0!=1$ واتا کاتێك $n$ ژمارەیەکی تەواوی سالب نەبێت.

$$n!=\begin{cases}1\times 2\times \ldots \times n & : \ n>0\\ 1 & : \ n=0\end{cases}$$

## گۆڕینەکان   permutations

گۆڕین بریتییە لە ڕێکخستنی ژمارەیەك شت بە ڕیزبەندێکی دیاریکراو.

**نموونە 1**

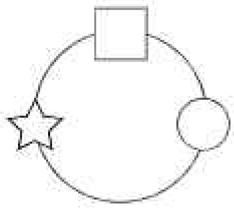
وێنەی هەموو گۆڕینەکانی ئەم شتانە بکێشە: ☆، ○، □

**شیکار**

| | | |
|---|---|---|
| ○ ☆ □ | ☆ □ ○ | □ ○ ☆ |
| ☆ ○ □ | □ ☆ ○ | ○ □ ☆ |

* ڕیزبەندییەکان = تراتیب

دەتوانین شتەکان لەسەر ڕاستەهێڵێك ڕێکبخەین وەك لە نموونەی پێشوو هەروەها دەتوانین لەسەر بازنەیەك ڕێکیانبخەین هەروەك لەشێوەی بەرامبەردا دیارە.



ڕێکخستنی شتەکان لە باری یەکەم گۆڕینی هێڵیە.

ڕێکخستنی شتەکان لە باری دووەم گۆڕینی بازنەییە.

**نموونە** 2

**شیکارکردنی پرسیارەکان**

**دروستکردنی لیستێکی ڕێك:** خشتەی خوارەوە هەموو گۆڕینەکانی لە توانادایە پیشاندەدات بۆ ئەم پیتە لاتینیانە $D$، $C$، $B$، $A$. چۆن دەتوانیت یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی ژمارەی گۆڕینەکان؟

| | | | |
|---|---|---|---|
| *DABC* | *CABD* | *BACD* | *ABCD* |
| *DACB* | *CADB* | *BADC* | *ABDC* |
| *DBAC* | *CBAD* | *BCAD* | *ACBD* |
| *DBCA* | *CBDA* | *BCDA* | *ACDB* |
| *DCAB* | *CDAB* | *BDAC* | *ADBC* |
| *DCBA* | *CDBA* | *BDCA* | *ADCB* |

**شیکار**

دەتوانیت ژمارەی ئەم گۆڕینانە بە بەکارهێنانی یاسای ژماردنی بنەڕەتی دیاربکەیت هەروەك لە خوارەوە پیشاندراوە.

| | | | |
|---|---|---|---|
| لەتوانادایە پیتی چوارەم هەڵبژێردرێت لە نێو | لەتوانادایە پیتی سێیەم هەڵبژێردرێت لە نێو | لەتوانادایە پیتی دووەم هەڵبژێردرێت لە نێو | لەتوانادایە پیتی یەکەم هەڵبژێردرێت لە نێو |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

کەواتە ژمارەی هەموو گۆڕینەکان بریتییە لە: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$

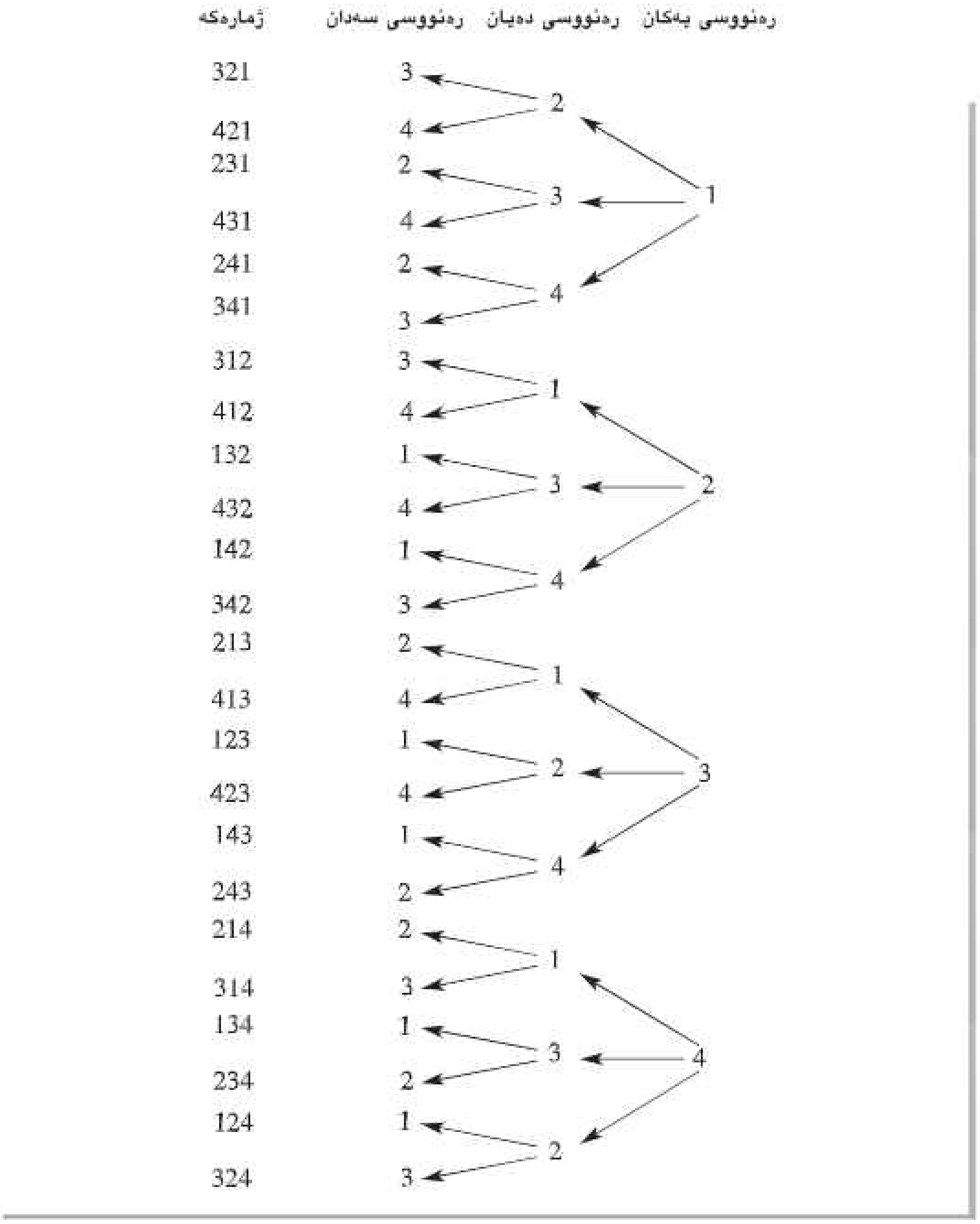
## ڕیزبەندییەکان Arrangements

**نموونە** 3

**دەتوانیت چەند ژمارەی 3 ڕەنووسی پێکبهێنێت لە ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4، بەبێ دووبارەبوونەوە؟ ئەم ژمارانە بنووسە.**

**شیکار**

هێلکاری درەخت بەکاربهێنە لە لاپەڕەی دواتر هەموو هەڵبژاردنەکانی توانادایە پیشانبدات بۆ هەڵبژاردنی ڕەنووسی یەکان پاشان ڕەنووسی دەیان پاشان ڕەنووسی سەدان هەروەها ئەو ژمارەیە پیشاندەدات کە لە هەر بارێکدا دەینووسێت.




ئەوەی لە نموونەی ڕابردوو کردت بەوتە وا دەردەبڕێت (3 ڕەنووست ڕێکخست لە نێوان 4 ڕەنووس) هەروەها بە دەستکەوتەکەت دەڵێیت ڕیزبەندییەکانی **Arangements** 3 شت لەنێو 4 شت بۆ دەستکەوتنی ژمارەی ئەو ڕیزبەندییانە یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربهێنە:

| لەتوانادایە ڕەنووسی سێیەم هەڵبژێردرێت لە نێو | | لەتوانادایە ڕەنووسی دووەم هەڵبژێردرێت لە نێو | | لەتوانادایە ڕەنووسی یەکەم هەڵبژێردرێت لە نێو |
|---|---|---|---|---|
| 2 | × | 3 | × | 4 |

بەم جۆرە ژمارەیان دەبێتە $24 = 2 \times 3 \times 4$ ڕیزکردن.

هەوڵبدە دەتوانیت چەند ژمارەی 4 ڕەنووسی بە بەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4، 5 پێکبهێنیت بەبێ دووبارە بوونەوە؟

**نموونە** 4

باوکی هاوڕێ 10 CD میوزیکی کردە دیاری بۆ کوڕەکەی. هاوڕێ ویستی گوێبیستی سێ لەوانە بێت یەک لەدوای یەک

**ئایا هاوڕێ چەند هەڵبژاردنی لە پێشە؟**

**شیکار**

هاوڕێ دەتوانێت پەپکی یەکەم لەنێو 10 پەپک هەڵبژێرێت و دووەم لەنێو 9 پەپک، و سێیەم لەنێو 8 پەپک جا ئەگەر یاسای بنەڕەتی هەڵبژاردن بەکاربهێنێت دەبینێت کە هاوڕێ $10 \times 9 \times 8 = 720$ هەڵبژاردنی لە پێشە؟

**هەوڵبدە** مەڕوان پێنج چیرۆکی کڕی بۆ ئەوەی سێ لەوانە لە پشووی هاویندا بخوێنێتەوە ئایا مەڕوان چەند هەڵبژاردنی لە پێشە؟

**ڕیزبەندکردنی $r$ شت لەنێو $n$** — **Arangements of n Objects r at Time $n$**

ژمارەی ڕیزبەندییەکان $r$ شت لەنێو $n$ کاتێک $r \le n$ بریتییە لە

$$P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**نموونە** 5

سەلما دەیەوێت 4 کتێب بخاتە ناو کتێبخانەکەی کە لە 10 ڕەف پێکهاتووە بە مەرجێک پتر لە یەک کتێب لەسەر هەر ڕەفەیەک دانەنێت. **ئایا چەند هەڵبژاردنی لەپێشە؟**

**شیکار**

پرسیارەکە بریتییە لە ڕێکخستنی 4 ڕەف لەنێو 10 ڕەف، سەلما ڕەفی یەکەم لەناو 10 هەڵدەبژێرێت دووەم لەنێو 9 ، سێیەم لەنێو 8 ، چوارەم لەنێو 7 ، بەمەش ژمارە هەڵبژاردنەکان دەبێتە: $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

**هەوڵبدە** دڵشاد 5 گۆی ڕەنگ جیاوازی لایە دەیەوێت بەسەر 8 سندووقی ڕەنووسکراو دابەشبکات، بەمەرجێ لەیەک گۆ پتر نەخاتە ناو هەر سندوقێك **ئایا چەند هەڵبژاردنی لە پێشە؟**

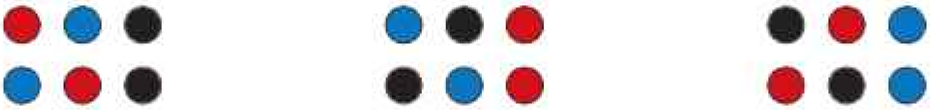
## گۆڕینە بازنەییەکان — Circular Permutations

**نموونە** 6

لە باخچەیەکدا 3 کورسی هەیە لەیلا دەیەوێت ئەم کورسییانە لە دەوری مێزێکی بازنەیی ڕێکبخات. **ئایا هەڵبژاردنەکانی بەردەم لەیلا چین و ژمارەیان چەندە؟**

**شیکار**

ئەگەر سەیری گۆڕینە هێڵییەکانی پێش لەیلا بکەیت ئەمەی خوارەوە دەبینێت:



سەرنجبدە هەرسێ گۆڕینە هێڵییەکانی لەڕیزی یەکەمدا (شین، سوور، رەش) یەك گۆڕینی بازنەیی پێکدێنن و گۆڕینە هێڵییەکان کە لە ڕیزی دووەمدا (شین، رەش، سوور) یەك گۆڕینی بازنەیی پێکدێنن کەواتە لەیلا دوو هەڵبژاردنی لەپێشە بۆ دانانی کورسییەکان لە دەوری مێزەکە.

هەوڵبدە ژمارەی هەڵبژاردنەکان چییە بۆ ڕیزکردنەکانی 4 جۆر زەلاتە لە قاپێکی بازنەییدا؟

**گۆڕینە بازنەییەکان Circular Permutations**

ژمارەی گۆڕینە بازنەییەکانی $n$ شت بریتییە لە $(n-1)!$.

## گونجێنەکان Combinaition

بینیمان کە گۆڕین بریتییە لە ڕێکخستنی $r$ شت لە نێو $n$ لە ڕیزکردنی دیارکراو ئەگەر ڕێکخستنەکە لە ریزبەندییەکە گرنگ نەبوو، شتێك بەدەست دێنێت کەپێی دەوترێت **گونجێن** گونجێنی $r$ شت لەنێو $n$ شت، کە $r \leq n$ زۆر بەسادەیی بریتییە لە کۆمەڵەیەك لە $r$ **Combinations** شت لەنێو $n$ شت. ئەگەر ئەم ژمارانەت هەبوو: 1، 2، 3، 4، 5، ئەوا دانەکانی 2، 3، 5 گونجێنی 3 دانە لە بنچینەی 5 پێکدێنێت سەرنجبدە کە دانەکانی 2 ، 3، 5، هەمان گونجێن دەنوێنێت بە پێچەوانەی ئەوەی لە گۆڕین روودەدات.

**نموونە** 7

**جێبەجێکردن**

**وەرزش**

ئەندامەکانی یانەیەکی وەرزشی دەستەیەکی 7 کارگێری پێکهاتوو لە سەرۆك و جێگیری سەرۆك و رازگر و بەرپرسی دارایی و بەرپرسی پەیوەندییەکان بە ڕاکێشانی نهێنی هەڵدەبژێرن لە نێو 7 پاڵێوراودا بۆ ئەوەی کارەکانی دەستەی کارگێڕی یانەکە ڕاپەڕێنن.

**ژمارەی پێکهاتەکان چەندە کە لە توانادایە؟**

**شیکار**

بۆ هەژمێرکردنی ژمارەی پێکهاتەکان کە لە توانادایە دەبینین کە:

| دەتوانین بەرپرسی پەیوەندییەکان هەڵبژێرین لە نێو | | دەتوانین بەرپرسی دارایی هەڵبژێرین لە نێو | | دەتوانین رازگر هەڵبژێرین لە نێو | | دەتوانین جێگری سەرۆك هەڵبژێرین لە نێو | | دەتوانین سەرۆك هەڵبژێرین لە نێو |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | × | 4 | × | 5 | × | 6 | × | 7 |

بەم جۆرە ژمارەی پێکهاتەکان کە لە توانادایە بریتیە لە $2520 = \frac{7!}{(7-5)!} = 7\times6\times5\times4\times3$

## نموونە 8

شیکاری پرسیارەکان

یانەکە ڕێگای هەڵبژاردنی دەستەی کارگێڕی گۆڕی، و پێویستە لەسەر ئەندامان 5 پاڵێوراو لە 7 هەڵبژێرین بۆ پێکهێنانی دەستەکە، بێ دیاریکردنی کارەکانیان و بەشکردنی کارەکانیان بۆ لێژنە هەڵبژێردراوەکە بەجێهێشت.

أ ژمارەی ڕێگاکانی دابەشکردنی کارەکان لەنێو پێنج ئەندامەکە چەندە؟

ب ژمارەی دەستە کارگێرییەکان چەندە کە دەتوانرێ لەلایەن ئەندامەکان هەڵبژێرین بەرێگای هەڵبژاردنی نوێ؟

**شیکار**

أ ژمارەی ئەو ڕێگایانەی کە پێنج ئەندامەکە لەنێو خۆیاندا دەتوانن کارەکانی پێدابەش بکەن بریتییە لە گۆڕینی کۆمەڵەیەکی 5 دانەیی $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

ب بۆ هەژمێرکردنی ژمارەی ئەو دەستە کارگێڕیانەی کە ئەندامەکان دەتوانن هەڵیانبژێرن بەڕێگای نوێی، سەرنجی هەڵبژاردنەکەبدە کە هەر دەستەیەك کۆمەڵەیەکی 5 ئەندامییە لە نێو 7 لە لایەکی تریش هەر دەستەیەکی هەڵبژێردراو 120 ڕێکخستن لە دەستەی کارگێڕی پێکدێنن، دوای ئەوە ژمارەی ڕێکخستنە لەتوانابووەکان بریتییە لە ژمارەی ڕیزکردنەکانی 5 شت لە 7 ، واتە $\frac{7!}{(7-5)!} = 21\ 570$ جا ئەگەر یاسای ژماردنی بنەڕەتیت بەکارهێنا دەردەچێت.

ژمارەی ڕێکخستنەکان= ژمارەی دەستە هەڵبژێردراوەکان×ژمارە گۆڕینەکانی هەر دەستەیەك

2520 = ژمارەی دەستە هەڵبژێردراوەکان× 120

ژمارەی دەستەکان کە لە تواندایە هەڵبژێردرێن بریتییە لە: $21 = \frac{2520}{120}$

## چالاکی

## بەراوردکردنی ڕیزبەندییەکان و گونجێنەکان

## Comparing arrangements and Combinations

یانەیەك یارییەکی لەنێو ئەندامانی ڕێکخست کە بەم شێوەیە بوو:

- یاریزان 3 ڕەنووسی لەنێو دە ڕەنووسەکانی (0 تا 9)هەڵدەبژێرێت و لەسەر تەختە دەینووسێت.
- یاریزانەکە 3 گۆ لە تورەگەیەکی ناروون ڕادەکێشێت یەك لە دوای یەك کە گۆی ڕەنووسکراوی لە ( 0 تا 9 ) تێدایە.
- بۆ ئەوەی یاریزانەکە بباتەوە دەبێ ئەو ڕەنووسانە ڕابکێشێت کە لەسەر تەختەکە نووسیویەتی و بەهەمان ڕێکخستن.

خاڵی چاودێری ✔

1. هیوا ڕەنووسەکانی 8 – 4 – 1 ی هەڵبژارد یەك لەدوای یەك ئەو ئەنجامانە چین کە بەرەو بردنەوەی دەبەن؟
2. ڕێکخەری یارییەکە ڕێساکانی گۆڕی مەرجی بردنەوەی یاریزانی کرد بەوەی سێ ڕەنووسەکە ڕابکێشێت بە هەر ڕێکخستنێك بێت هیوا یارییەکەی دووبارە کردەوە بەهەمان ڕەنووسەکان ئەو ئەنجامانە چین کە بەرەو بردنەوەی دەبەن؟
3. کام لە دوو یارییەکان دەرفەتی گەورەتری بردنەوەیان تێدایە: یەکەم یان دووەم؟ ڕاڤەبکە.

دەتوانیت گوێبیستی دوو شریتی میوزیکی بیت، یەك لەدوای یەك لەنێو 5 شریت بەڕێگای جیاوازەکان کە ژمارەیان $20 = 5 \times 4$ ڕێگایە ئەگەر ویستت ژمارەی ڕێگاکانی کە دەتوانیت دوو شریتی موزیکی پێ بکڕێت لە نێو 5 بدۆزیەوە ، ئەوا ڕێکخستن ڕۆڵ نابینێت دیارە ڕێکخستن لە کڕینی شریتێکی حەسەن زیرەك و شریتێکی عەلی مەردان کاریگەری نابێت چونکە لیستی ژمێرارییەکە هەردوو شریتی پێکەوە تێدا دەبێت بۆ دیاریکردنی ژمارەی ڕێگاکانی کڕینی دوو شریت لە نێو 5 ژمارەی ڕیزکردنەکانی دوو شریت لەنێو5 دابەش 2 بکە چونکە هەر شریتێك دوو جار دەژمێردرێت ئەمە ژمارەکەیە. $10 = \frac{4 \times 5}{2}$

## گونجێنەکانی $r$ شت لە نێو $n$ Combination of n Ohjects r at time

ژمارەی گونجێنەکانی $r$ شت لە نێو $n$ ، کە $r \leq n$ ، بریتیە لە. $C^n_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$

سەرنجبدە کە ژمارەی گونجینەکانی $r$ شت لە نێو $n$ یەکسانە بە ئەنجامی دابەشکردنی ڕیزکردنەکانی $r$ شت لە نێو $n$ بەسەر ژمارەی گۆڕینەکانی $r$ شت. $C^n_r = \frac{P^n_r}{r!}$

**نموونە** 9

دڵشاد دەیەوێت 3 پەرداخ هەڵبژێرێت لە نێو 5 پەرداخی گوشراوی میوەکانی: لیمۆ، سێو، ترێ مۆز، ئەنەناس. **ژمارەی ئەو هەڵبژاردنانەی کە لە توانایدایە چەندە؟**

**جێبەجێکردنەکان**

**بازرگانی**

**شیکار**

دڵشاد دەتوانێت پەرداخی یەکەم لە نێو 5 پەرداخ هەڵبژێرێت، دووەم لەناو 4 پەرداخ، و سێیەم لەناو 3 پەرداخ. بەڵام هەڵبژاردنی گوشراوی لیمۆ و گوشراوی مۆز و گوشراوی ترێ جیاوازی نییە لەگەڵ هەڵبژاردنی گوشراوی مۆز و گوشراوی ترێ و گوشراوی لیمۆ. واتە ئەو ریزکردنەی دڵشاد پەیرەوی دەکات لە هەڵبژاردنی پەرداخەکان، هیچ ڕۆڵێکی لەم پرسیارەدا نییە. لێرەوە هەڵبژاردنەکان کە لە پێش دڵشادە بریتییە لە دابەشکردنی ژمارەی ریزکردنەکانی 3 لە 5 بەسەر ژمارەی گۆڕینەکانی 3 شت واتە. $\frac{5!}{(5-3)!} \div 3! = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$

**هەوڵبدە** ژمارەی هەڵبژاردەکان چەندە ئەگەر دڵشاد بیەوێت 4 پەرداخ هەڵبژێرێت؟

کامیان گەورەترە ڕیزکردنەکانی 3 لە پێنج، یان گونجێنەکانی 3 لە 5 ؟

**بیری ڕەخنەگر** لە دوو نموونەی پێشوودا بۆمان دەردەکەوێت کە پەیوەندییەك هەیە لە نێوان ژمارەی ڕێکخستنەکانی $r$ شت لە $n$ ، و ژمارەی گونجێنەکانی $r$ شت لە $n$ .

## پەیوەندی لە نێوان گۆڕینەکان و گونجێنەکان

ژمارەی ڕیزبەندییەکانی $r$ شت لە $n$ = ژمارەی گونجێنەکانی $r$ شت لە $n$ × ژمارەی گۆڕینەکانی $r$ شت.

لەکاتی شیکارکردنی پرسیارێکدا، زۆر جار پێویست دەکات شێوازی گونجاو بۆ ڕیزبەندییەکان هەڵبژێرێت: یان گونجێنەکان.

نموونــــــه 10 نموونەی گونجاو هەڵبژێرە، ئینجا ژمارەکە هەژمێربکە.

[أ] بەچەند ڕێگا سەرۆك و جێگیری سەرۆك و رازگر هەڵدەبژێردرێت لە نێو 5 پاڵێوراو؟

[ب] بەچەند ڕێگا لێژنەیەکی پێکهاتوو لە 3 ئەندام هەڵدەبژێردرێت لەنێو 5 پاڵێوراو؟

شیکار

[أ] نموونە لێرەدا نموونەی ڕیزکردنەکانە، چونکە کەسێك پێویستە بۆ سەرۆکایەتی، و یەکێکی تر بۆ جێگری سەرۆکایەتی، و سێیەم بۆ ڕازگری. ژمارەی پێکهێنەرەکان بریتیە لە:

$\frac{5!}{(5-3)!}=5\times4\times3=60$

[ب] شێواز لێرەدا شێوازی گونجێنەکانە، چونکە داواکراو هەڵبژاردنی کۆمەڵەیەکی 3 کەسییە.

ژمارەی ڕێکخستنەکان بریتییە لە: $C^5{}_3=\frac{5!}{3!\times(5-3)!}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

هەوڵبدە چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی لێژنەیەکی 2 کەسی لەنێو 7 کەس؟ چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی سەرۆك و جێگری لەنێو ئەندامانی لێژنەیەکی 7 کەسی؟

## بەکارهێنانی گونجێنەکان لە هەژمێرکردنی ئەگەر

نموونــــــه 11 لەیلا دوو گۆی لە توورەگەیەك ڕاکێشا کە پێنج گۆی سوور و سێ گۆی شینی تێدایە. ئەگەر چییە کە هەردوو گۆیەکە سوور بن؟

شیکار

ئەم ئەگەرە یەکسانە بە ڕێژەی ئەگەری ژمارەی ئەو ئەنجامەی کە گۆیەکان تێدا سوور دەبێت لەسەر ژمارەی هەموو ئەنجامەکان کە لە توانادان. ژمارەی یەکەم بریتییە لە گونجێنەکانی 2 لە 5. و ژمارەی دووەم بریتییە لە گونجێنەکانی 2 لە 8 ( 8 ژمارەی گشت گۆیەکانە).

ژمارەی یەکەم $C^5{}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$ ژمارەی دووەم $C^8{}_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

کەواتە، ئەگەری ئەوەی هەردوو گۆ سوور بن بریتییە لە: $\frac{10}{28}\approx0.3\,571=35.71\%$

هەوڵبدە ئەگەر چییە دوو گۆیەکە لە دوو ڕەنگی جیاوازبن.

# ڕاهێنـــــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

**1** ڕاڤەبکە چۆن یاسای ژماردنی بنەڕەتی یارمەتیدەر دەبێت لەدیاریکردنی ژمارەی گۆڕینەکانی چوار شت.

**2** ڕاڤەبکە چۆن یاسای بنچینەیی ژماردن یارمەتیدەر دەبێت لەدیاریکردنی ژمارەی ڕیزبەندییەکانی چوارشت لە نێو پێنج.

**3** جیاوازی نێوان ڕیزبەندییەکان و گونجێنەکان ڕاڤە بکە. نموونەیەك بێنەوە وەك پاڵپشت بۆ ڕاڤەکەت.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**4** دەتوانیت چەند ژمارە بنوسیت بە بەکارهێنانی شەش ڕەنووسی، جیا لە 0، بێ دووبارە کردنەوە

**5** ژمارەی هەڵبژاردنەکانی سەیرکردنی 3 شریتی ڤیدیۆ یەك لەدوای یەك چەندە لە نێو 7 شریت؟

**6** ژمارەی هەڵبژاردنەکان لە پێش 12 کەس چەندە بۆ دانیشتن لەسەر مێزێکی بازنەیی بۆ خوان؟

**7** ژمارەی ڕێگاکان چەندە بۆ هەڵبژاردنی سەرۆك وجێگری سەرۆك وبڕازگر لەنێو لێژنەیەکی 6 کەسی؟

**8** ژمارەی ڕێگاکانی کڕینی 3 کتێب و 4 شریتی میوزیك چەندە لەکتێبخانەیەك 9 کتێب و 7 شریتی میوزیکی تێدایە؟

**9** لە ڕاپرسییەك دەربارەی ڕێکخستنی هاتوچۆ لە شەقامێکی شاردا، 10 کەس هەڵیانبژارد کە شەقامەکە لەهەردوولا کراوەبێت، و 8 کەس هەڵیانبژارد کە شەقامەکە لەیەك لا کراوەبێت. دوای ڕاپرسییەکە دووکەس هەڵبژێردران لەوانە لە ڕاپرسییەکەدا دەنگیان داوە. ئەگەر چییە کە هەردووکیان لەگەڵ کردنەوەی شەقامەکە بن لەدوولا؟

هەژماربکە.

**10** $7!-5!$ **11** $6!-4!$ **12** $(7-5)!$ **13** $(6-4)!$

**14** $\frac{8!}{5!\times 3!}$ **15** $P_4^{10}$ **16** $P_5^{10}$ **17** $P_2^{7}$

**18** $C_4^{7}$ **19** $C_4^{8}$ **20** $C_7^{10}$ **21** $C_5^{9}$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

**سارا 8 پلیتی ڕەنووسکراوی هەیە لە 1 تا 8 . لە هەر پرسیارێکدا دەتوانیت چەند ژمارە بنووسێت بە بەکارهێنانی پلیتەکانی کە لایەتی؟**

**22** لە 5 ڕەنووس **23** لە 3 ڕەنووس **24** لە 4 ڕەنووس

**25** لە 6 ڕەنووس **26** لە یەك ڕەنووس **27** لە 8 ڕەنووس

ژمارەی ئەو لیژنانە چەندن کە لەتوانا دایە هەڵبژێردرێن؟

28 3 ئەندام لە نێو 5 پاڵێوراو

29 7 ئەندام لە نێو 8 پاڵێوراو

30 8 ئەندام لە نێو 12 پاڵێوراو

31 6 ئەندام لە نێو 10 پاڵێوراو

**کارگێڕی دامەزراوەکان یەکێك لە کۆمپانیاکان پێشوازی لە 8 فەرمانبەری نوێ کرد. ژمارەی هەڵبژاردنەکان بۆ دابەشکردنیان بەسەر پۆستە بەتاڵەکاندا لەهەر بارێکدا دیاریکە**

32 8 پۆست

33 9 پۆست

34 10 پۆست

35 15 پۆست

**توورەگەیەکی ناڕوون 5 گۆی سپی و3 گۆی سەوزی تێدایە. ئەگەر چییە ئەمانە پێکەوە ڕابکێشیت:**

36 دوو گۆی ڕەنگ جیاواز

37 3 گۆ دووانیان سپی و سێیەمیان سەوز.

38 4 گۆ، دووانیان سپی و دووانیان سەوز.

39 6 گۆ، سێیان سەوز.

40 چاویلکە فرۆشێك دەیەوێت 7 چاویلکەی جیا لەسەر بنکەیەکی بازنەیی نمایش بکات، ئایا چەند هەڵبژاردنی لەپێشە بۆ ڕیزبەندکردنیان؟

41 یەکێك لە کۆمپانیاکان دەیەوێت فەرمانبەرانی ڕیزبەند بکات، هەر یەکێکیان بە ژمارەیەکی ڕیزبەندی کە لە 4 ڕەنووسی پێکهاتبێت. ژمارەی ڕیزبەندییەکان چەندە کە لەتوانادابێت ئەگەر بتوانین ڕەنووسەکان لە 0 تا 9 بەکاربێنین و دووبارەبوونە وە ئاسایی بێت؟ ژمارەیان چەندە ئەگەر دووبارە بوونەوە قەدەغە بێت؟

42 مستەفا چەرخێکی میلداری دروستکرد کە ڕەنووسەکانی لە 1 تا 3 ی لەسەربێت. مستەفا چەرخەکەی کردە سێ بەشی یەکسان. بە چەند ڕێگا دەتوانێت سێ ڕەنووسەکان لەسەر بەشەکان بنووسێت؟

**نموونەکە دیاریکە لەهەر بارێك لەبارەکانی پرسیار 43-46 .**

43 هەڵبژاردنی 4 کتێب بۆ بڵاوکردنەوە لە نێو 302 کتێب.

44 هەڵبژاردنی 9 یاریزان لە نێو 15 یاریزان، بۆ دامەزراندنی تیپی تۆپی باسکە.

45 هەڵبژاردنی چوار پاڵێوراو لە نێو 200 بۆ بردنەوەی دیاری 100 هەزار دینار و 200 هەزار دینار و 500 هەزار دینار و ملیۆنێك دینار.

46 هەڵبژاردنی سەرۆك و جێگری سەرۆك بۆ سەندیکایەکی 100 ئەندامی.

## تێڕوانینێك بۆ دواوە

**47** سندوقێك 20 كتێبی تێدایە، 14 یان لەبابەتی ئابووری و 6 یان لە بابەتی جوگرافیا. دوو كتێب بەشێوەیەكی هەڕەمەكی لە سندوقەكە ڕاكێشرا.

ژمارەی دانەكانی بۆشایی نموونەكە چەندە؟

ئەگەر چییە هەردوو كتێب لەبابەتی ئابووری بن؟

ئەگەر چییە یەكێكیان لەبابەتی ئابووری و ئەویتریان لە بابەتی جوگرافیا بێت؟

ئەگەر چییە هەردووكیان لەهەمان بابەت بن (ئەگەری تەواوكەرت لەبیر بێت)؟

## تێڕوانینێك بۆ پێشەوە

**48** كاروان لە سەرەتای ساڵی خوێندنەوە 10 تاقیكردنەوەی بیركاری كردووە و نمرەكانی یەك لەدوای یەك ئەمانەن: 35 ، 52 ، 66 ، 52 ، 48 ، 70 ، 52 ، 48 ، 58 ، 60. ناوەند و ناوەڕاستە و باو بۆ ئەم نمرانە بدۆزەرەوە.

# پێوەرەکانی ئامار

## Statistical measurements

بەشی

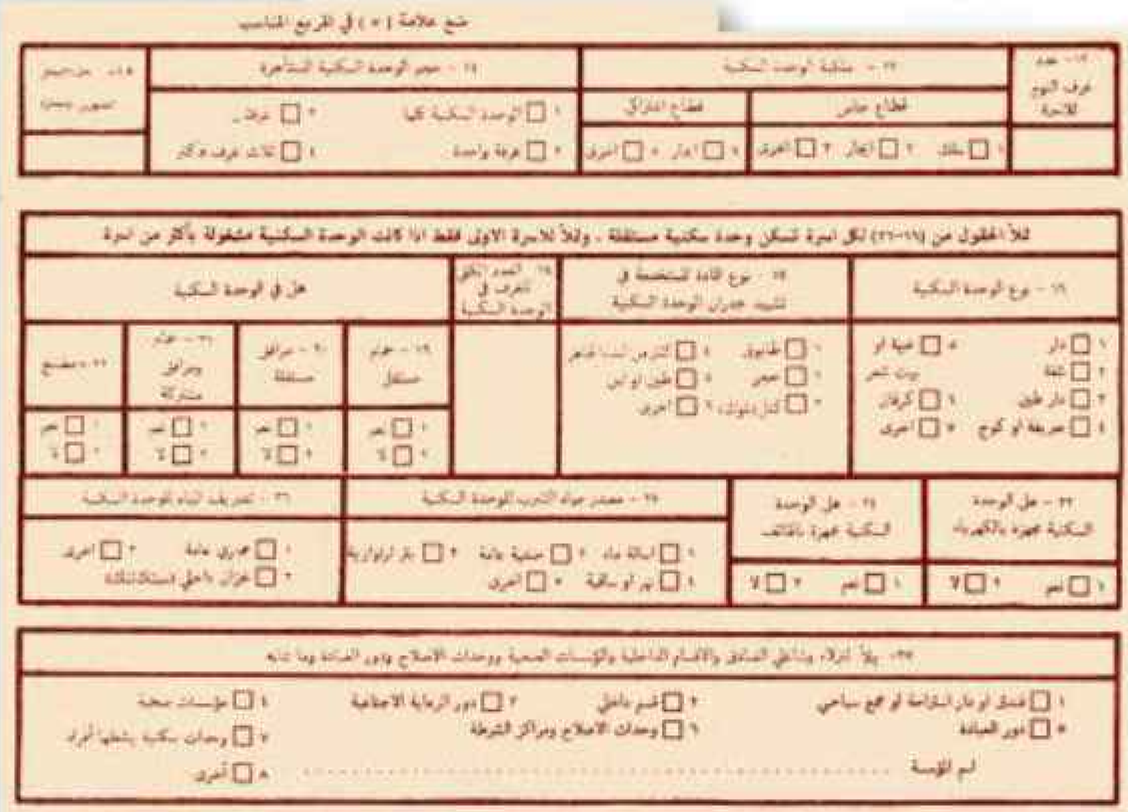
4

وەزارەتەکانی پلاندانان لە وڵاتانی جیهان هەڵدەستن بە سەرژمێری خولی بۆ دانیشتوان.لەم کردارەدا فۆڕمی تایبەت پڕدەکرێتەوە کە زانیاری دەربارەی هەموو لایەنەکانی ژیانی ڕۆژانەی دانیشتووان دەگرێتە خۆ. پێدراوە کۆکراوەکان دەکەونە ژێر زینجیرەیەک چارەسەرکە تێیدا ژمارەیەک لە پێوەرەکانی ئامار بەکاردێت بۆ دەستکەوتنی چەند ئاماژەیەک بە ئامانجی پلاندانان وخۆ ئامادەکردن بۆ هێنانەدی پێداویستییەکانی گەشەکردنی کۆمەڵایەتی وئابووری. دەتوانین پێوەرەکانی ئامار بە شێوەیەکی گشتی بۆ دوو جۆر بەش بکەین: پێوەرەکانی رووکردنەوە چەق (بریتییە لە نزیکبوونەوەی پێدراوەکان لە بەهایەکی ڕووەو چەقە ناوەند) وپێوەرەکانی پەرتبوون (بریتییە لە دوورکەوتنەوەی پێدراوەکان لە بەهایەکی ڕووەو چەق کە ناوەندە).

الجمهورية العراقية
وزارة التخطيط
الجهاز المركزي للاحصاء
مديرية الاحصاء السكاني

استمارة ت / س / ٢

إستمارة التعداد العام للسكان



ضع علامة ( × ) في المربع المناسب

### وانەکان

1. پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق.
2. پێوەرەکانی پەرتبوون.

# وانەی 1

# پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق

## Measures of central tendency

**بۆچی**

لەتوانادایە پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق لە شیکردنەوەی چەندین باری ژیانی ڕۆژانە بەکاربێت وەك ژمارەی ئەو خولەکانەی کە وێستگەکانی تەلەفزیۆن تەرخانی دەکەن بۆ ڕیکلام.

**ئامانجەکان**

- پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق دەناسێت.
- ناوەند وناوەندی قورسکراو بۆ پێدراوەکان وپێدراوە خڕکراوەکان هەژماردەکات.
- ناوەڕاستە بۆ کۆمەڵێك پێدراو هەژماردەکات.
- باو بۆ پێدراوەکان وپێدراوە خڕکراوەکان هەژماردەکات

ئامارزانەکان چەندین پێوەری ڕووکردنە چەق بەکاردێنن لەم وانەیەدا ناوەند وناوەڕاستە وباو بۆ کۆمەڵێك لە پێدراوەکان فێردەبیت وفێری چۆنییەتی دۆزینەوەیان دەبیت.

## ناوەند Mean

لەوانەیە ناوەند وهەندێك جار پێیدەوترێت ناوەندی ژمێرەیی بەربڵاوترین پێور بێت لە پێوەرەکانی ڕووکردنە چەق وزیاترین بەکارهێنانی هەبێت، کە ڕۆژانە بەکاریدێنین بۆ نموونە مامۆستا ناوەندی ئەو نمرانە هەژمێر دەکات کە خوێندکاران لەهەر تاقیکردنەوەیەکدا دەستیاندەکەوێت، ئەم بەهایە بە پێوەرێك دادەنێت بۆ سەرکەوتنی لە گەیاندنی زانیاری وکارامەییەکان.

**نموونە 1**

**دڵشاد 5 کراسی لە دوکانی جیا وبەنرخی جیاکڕی.کراسی یەکەمی بە 7.5 هەزار دینار ودووەمی بە 8 هەزار دینار وسێیەمی بە 7 هەزار دینار وچوارەمی بە 9 هەزار دینار وپێنجەمی بە 8.5 هەزار دینار کڕی ئایا ناوەندی نرخی کراسەکان چەندە؟**

**شیکار**

بۆ هەژمارکردنی ناوەندی نرخی کراسێك نرخی کراسەکان کۆدەکەنەوە وسەرەجەمەکە دابەشی ژمارەی کراسەکان دەکەن ناوەندی نرخی کراسێك بریتییە لە 8 هەزار دینار.

$$\frac{7.5+8+7+9+8.5}{5}=\frac{40}{8}=8$$

## ناوەند Mean

ناوەندی کۆمەڵە بەهایەک وەک $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ کە ئەگەر لە جیاتی هەموو بەهاکان لە کۆمەڵەکە دابنرێن سەرجەمی بەهاکانی کۆمەڵەکە ناگۆڕێت.ناوەندی کۆمەڵێك بەها بە ڕێگای کۆکردنەوەی هەموو بەهاکان و دابەشکردنی سەرجەمەکە بەسەر ژمارەی بەهاکان دەدۆزرێتەوە.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

**نموونە 2**

نمرەکانی شیرین لە هەندێك بابەتی خوێندن بەم جۆرە بوو

| زمانی کوردی | زمانی عەرەبی | زمانی ئینگلیزی | بیرکاری | مێژوو | زانستەکان |
|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 72 | 76 | 81 | 65 | 64 |

**ئایا ناوەندی نمرەکانی ئەم بابەتانە چەندە؟**

**شیکار**

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{80+72+76+81+65+64}{6} = \frac{438}{6} = 73$$

هەوڵبدە

ناوەندی پلەکانی گەرمی لە هەفتەی ڕابردوو چەند بووە؟ ئەگەر پلەکانی گەرمی ڕۆژەکان بەم شێوەیە بووبن 1,1,0,-2,4,5,7-

**نموونە 3**

ژمارەی ڕۆژانی پشووی کارگەکان لە ساڵی ڕابردوودا بەم شێوەیە بوو:

| مانگ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ڕۆژەکان | 6 | 4 | 3 | 4 | 2 | 5 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 |

**ئایا ناوەندی ژمارەی ڕۆژەکانی پشوو لە هەر مانگێك چەند بووە؟**

**شیکار**

$$\frac{6 + 4 + 3 + 4 + 2 + 5 + 3 + 4 + 5 + 2 + 3 + 4}{12} = \frac{45}{12} = 3.75$$

ناوەندی ژمارەی ڕۆژەکانی پشوو لەهەر مانگێکدا بریتی بووە لە 3.75 ڕۆژ.

هەوڵبدە

سەردار بە ئۆتۆمبێلەکەی لە شارێك چوو بۆ شارێکی تر ولەهەر کاتژمێریکی خایەنراوی گەشتەکەی خێراییەکەی بە ئەگۆڕی هێشتەوە، خێراییەکانی بەم جۆرە بوون:

| کاتژمێر | یەکەم | دووەم | سێیەم | چوارەم | پێنجەم |
|---|---|---|---|---|---|
| خێرایی | 80 | 100 | 106 | 93 | 121 |

پاش هەفتەیەك سەردار گەڕایەوە بۆ شاری یەکەم وهەموو دوورییەکەی بە خێراییەکی ئەگۆڕ بڕی گەشتی گەڕانەوەش ئەوەندەی گەشتی چوون کاتی خایاند. ئایا خێراییەکەی لە گەڕانەوەدا چەند بووە.

**ناوەندی قورسکراو**

ئەگەر $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ چەند پێدراوێکی دووبارە بوون و ئەگەر $m_1$ دووبارەی $x_1$ و $m_2$ دووبارەی $x_2$ و $m_3$،... و $m_n$ دووبارەی $x_n$ بێت ئەوا ناوەندی قورسکراوبۆ پێدراوەکانی $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

$$\overline{X_0} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

## Weighted mean — ناوەندی قورسکراو

### ڕوونکردنەوە

ئەگەر تەمەنی خوێندکارانی پۆلی دەیەم بریتیە بێت لە:

16, 15, 15, 14, 17, 15, 17, 14, 16, 14, 15, 17, 16, 15, 16, 14, 17, 15, 16, 15

ئەوا دەتوانین ناوەندی خوێندکاران لەم پۆلەدا، وەك پێشتر فێربووین، بدۆزینەوە:

$$\overline{x} = \frac{15+16+15+17+14+16+15+16+17+15+14+16+14+17+15+17+14+15+15+16}{20}$$

$$= \frac{309}{20} = 15.45$$

ناوەندی تەمەنی خوێندکار لەم پۆلەدا بریتییە لە 15.45 ساڵ.

ئەگەر بەوردی لە پێدراوەکان وردبنەوە، دەبینیت هەریەکێکیان لە جارێك پتر دووبارە دەبێتەوە. ئەوەتا تەمەنی 14 ساڵی 4 جار دووبارە دەبێتەوە. خشتەی خوارەوە ئەو بەهایانە پیشاندەدات کە لە کۆمەڵەی پێدراوەکاندا هاتووە و هەریەکیان چەند چەندجار دووبارە بووتەوە:

| تەمەن | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|
| دووبارە | 4 | 7 | 5 | 4 |

ئەم خشتەیە پێیدەوترێت خشتەی دووبارە بوونەوەی کۆمەڵەی پێدراوەکان **Frequency Table**

ئەم خشتەیە پێیدەوترێت خشتەی دووبارەبوونەوەی کۆمەڵەی پێدراوەکان ئەگەر 14+14+14+14 مان بە 4×14 گۆڕی لە هەژمێرکردنی ناوەندەکە ئەوا ئامانجەکە ناگۆڕێت بەم جۆرە دەتوانیت بنووسیت $\overline{x} = \frac{(4\times14)+(7\times15)+(5\times16)+(4\times17)}{4+7+5+4} = \frac{309}{20} = 15.45$ دەڵێین ناوەندی قورسکراوی 14، 15، 16، 17 مان هەژمێرکرد کە یەك لەدوای یەك بە 4، 7، 5، 4، قورسکراون.

### نموونە 4

لێژنەی هەڵسەنگاندن لە فیستیڤاڵێکی سینەمایی فیلمی هەڵسەنگاند و ژمارەیەك ئەستێرەی بە هەر فیلمێك بەخشی خشتەی خوارەوە ئەنجامەکانی هەڵسەنگاندن نیشاندەدات.

| هەڵسەنگاندنی فیلمەکان | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| هەڵسەنگاندن | **** | *** | ** | * | بێ ئەستێرە |
| ژمارەی فیلم | 8 | 12 | 7 | 2 | 1 |

**ئایا ناوەندی هەڵسەنگاندنی هەر فیلمێك چەندە؟**

**شیکار**

هەر فیلمێك 2.8 ئەستێرەی وەرگرت وەك ناوەند، ناوەندی هەڵسەنگاندنیهەر فیلمێك 2.8 ئەستێرە بوو.

$$\overline{x} = \frac{(8\times4)+(12\times3)+(7\times2)+(2\times1)+(1\times0)}{8+12+7+2+1} = \frac{84}{30} = 2.8$$

**هەوڵبدە**

درێژی خوێندکارانی پۆلی دەیەم بریتییە لە:
178، 160، 153، 160، 187، 182، 153، 160، 156، 160 ناوەندی درێژی خوێندکارانی پۆلی دەیەم چەندە؟

**بەرەنگاری**

نمرەکانی نەسرین لە هەریەك لە وەرزەکانی یەکەم و دووەمی خوێندن بەم شێوەیە بوو:
وەرزی یەکەم: 65، 80، 70، 50، 50، 70، 50، 70، 80، 70، 80.
وەرزی دووەم: 67، 86، 72، 60، 60، 86، 72، 80، 60، 74، 86.
خشتەیەکی دووبارەبوونەوە بۆنمرەکانی نەسرین لە وەرزی یەکەم دروستبکە و بەکاربهێنە بۆ هەژمێرکردنی ناوەندی نمرەکانی لەو وەرزەدا پاشان خشتەیەکی دووبارەبوونەوە بۆ نمرەکانی نەسرین لە وەرزی دووەم دروستبکە و بەکاری بێنە بۆ ئەژمێرکردنی ناوەندی نمرەکانی لەو وەرزەدا. چۆن ناوەندی نمرەکانی نەسرین دەدۆزیتەوە لە ساڵەکە بەگشتی؟ ئەم ناوەندە بدۆزەرەوە؟

## ناوەندی قورسکراو بۆ پێدراوە کۆکراوەکان Weighted mean for grouped data

143 مامۆستا بەشداربوون لە خولێکی پەروەردەیی لە دهۆك، وەزارەتی پەروەردە داوای لە بەرێوەبەری خولەکە کرد توێژینەوەیەکی ئامارگەری ئامادەبکات دەربارەی تەمەنی بەشداربووانی خولەکە. بۆ نووسینی ڕاپۆرتەکە لەلایەن بەرێوەبەر ئەم هەنگاوانەی ئەنجامدا.

1. نووسینی ناوی مامۆستاکان و تەمەنەکانیان و هاوپێچکردنی لەگەڵ تەمەنی بچووکترین مامۆستا و گەورەترین مامۆستا و ناوەندی تەمەنەکانیان هاوپێچی ڕاپۆرتەکەی بکات بەڵام خوێندنەوەی ئەم ڕاپۆرتە ئاسان نییە و بیرۆکەیەك دەربارەی دابەشبوونی مامۆستاکان بەپێی تەمەنەکانیان پێشکەش ناکات.

2. دروستکردنی خشتەیەکی دووبارەبوونەوەی تەمەنەکانی مامۆستاکان هاوپێچکردنی لەگەڵ تەمەنی بچووکترین مامۆستا و گەورەترین مامۆستا و ناوەندی تەمەنەکانیان بەڵام ستوونەکانی خشتەکە زۆر دەبن( 39 ستوون بەناوی 20، 21، ...، 57، 58).

3. ڕێکخستنی تەمەنەکان لەچەند چەشنێك مەودای هەریەکێکیان 5 ساڵ بێت و دروستکردنی خشتەیەك بەم چەشنانە و ژمارەی مامۆستایان لەهەر چەشنێك.

بەرێوەبەرەکە ڕێگای سێیەمی هەڵبژارد و ئەم خشتەیەی هەناردە وەزارەت:

| چەشن | [20, 25[ | [25, 30[ | [30, 35[ | [35, 40[ | [40, 45[ | [45, 50[ | [50, 55[ | [55, 60[ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ژمارە | 12 | 23 | 25 | 36 | 24 | 12 | 9 | 2 |

ئەم زانیاریانەش هاوپێچ بوون:

**بچووکترین تەمەن:** 20 ساڵ **گەورەترین تەمەن:** 58 ساڵ **ناوەندی تەمەن:** 36.66 ساڵ

ئایا بەڕێوبەرەکە چۆن ناوەندی تەمەنەکانی دۆزییەوە؟

دۆزینەوەی ناوەندەکە پێدراوەکان لەچەند چەشنێکدا ڕێکخرابن بەم شێوەیە دەبێت:

**1.** دیارکردنی چەقی هەر چەشنێك کە بریتییە لە ناوەندی لایەکانی.

**2.** لێکدانی چەقی هەرچەشنێك لە ژمارەی دانەکان لە چەشنەکە.

**3.** کۆکردنەوەی ئەنجامەکانی هەموو لێکدانەکان لەلایەك وژمارەی دانەکانی هەموو چەشنەکان لەلایەکی تر.

**4.** دابەشکردنی سەرجەمی یەکەم بەسەر سەرجەمی دووەم.

خشتەی خوارەوە پوختەی ئەم هەنگاوانە دەخاتە ڕوو:

| چەشنەکان | دووبارەبوونەوە (ژمارەی دانەکان) | چەقی چەشن | دووبارەبوونەوە (ژمارەی دانەکان) |
|---|---|---|---|
| [20, 25[ | 12 | 22.5 | 270 |
| [25, 30[ | 23 | 27.5 | 632.5 |
| [30, 35[ | 25 | 32.5 | 812.5 |
| [35, 40[ | 36 | 37.5 | 1350 |
| [40, 45[ | 24 | 42.5 | 1020 |
| [45, 50[ | 12 | 47.5 | 570 |
| [50, 55[ | 9 | 52.5 | 472.5 |
| [55, 60[ | 2 | 57.5 | 115 |
| سەرجەم | 143 | | 5242.5 |

**ئاگاداریە !**

چەشنی]20, 25[ ئەو تەمەنانە دەگرێتەوە کە بچووکتر نییە لە 20 و بچووکترە لە 25

**تێبینی** دەتوانین(0,10] بەکاربهێنین لە جیاتی]0,10] وە هەر وەها.....

**بەرەنگاری** مانای 0.66 ساڵ چی دەگەێنێت؟

**نموونە** 5

مامۆستایەکی بیرکاری لە زانکۆی سەلاحەدین ئەنجامی تاقیکردنەوەیەکی خوێندکارەکانی لەم خشتەیەدا پوختەکرد:

| چەشنەکان | [0, 10[ | [10, 20[ | [20, 30[ | [30, 40[ | [40, 50[ | [50, 60[ | [60, 70[ | [70, 80[ | [80, 90[ | [90, 100[ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| دووبارە | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 11 | 11 | 12 | 4 | 1 |

**ئایا ناوەندی نمرەکان چەندە؟**

شیکار

| چەشنەکان | دووبارەبوونەوە (ژمارەی وانەکان) | چەقی چەشن | دووبارە × چەقی چەشن |
|---|---|---|---|
| [0, 10[ | 2 | 5 | 10 |
| [10, 20[ | 3 | 15 | 45 |
| [20, 30[ | 4 | 25 | 100 |
| [30, 40[ | 5 | 35 | 175 |
| [40, 50[ | 7 | 45 | 315 |
| [50, 60[ | 11 | 55 | 605 |
| [60, 70[ | 11 | 65 | 715 |
| [70, 80[ | 12 | 75 | 900 |
| [80, 90[ | 4 | 85 | 34 |
| [90,100] | 1 | 95 | 95 |
| سەرجەم | 60 | | 3300 |

ناوەندی نمرەکانی خوێندکارەکان: $\overline{x} = \frac{3300}{60} = 55$

**هەوڵبدە** ناوەندی پێدراوەکانی ئەم خشتەیە بدۆزەرەوە:

| چەشنەکان | [0, 10[ | [10, 20[ | [20, 30[ | [30, 40[ | [40, 50[ | [50, 60[ | [60, 70[ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| دووبارە | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 11 | 11 |

## ناوەڕاستە Median

**نموونە** 6

لە نمایشی تیپە وەرزشییەکان ڕاهێنەری تیپی بەرزکردنەوەی قورسایی ویستی کۆترێك لەبەردەم پێگەی سڵاو هەڵبدات ئەندامانی تیپەکە بەپێی درێژییەکانیان ڕێکخرابوون ڕاهێنەرەکە بڕیاریدا یاریزانی ناوەڕاست کۆترەکە هەڵبدات. بەپێی پێدراوەکانی ئەم خشتەیە کێ کۆترەکە هەڵدەدات؟

| ناو | ڕزگار | تۆما | مەحمود | دارا | سرود | عبدالله | شێرزاد |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| درێژی (cm) | 154 | 177 | 165 | 149 | 180 | 172 | 159 |

شیکار

پێویستە خشتەکە بەجۆرێك ڕێکبخەینەوە کە هاوتا بێت لەگەڵ ڕێکخستنی یاریزانەکان لە نمایشەکەدا یاریزانەکان بەپێی درێژی ڕێکخرابوون لە درێژترینییان تا کورتترین:

| ناو | سرود | تۆما | عبدالله | مەحمود | شێرزاد | ڕزگار | دارا |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| درێژی (cm) | 180 | 177 | 172 | 165 | 159 | 154 | 149 |

مەحمود دەکەوێتە ناوەڕاست چونکە ژمارە ئەندامەکانی تیپەکە کە کەوتوونەتە پێشی یەکسانە بە ژمارەی ئەندامانی تیپەکە کەوتوونەتە دوای کەواتە مەحمود کۆترەکە هەڵدەدات.

لە نموونەی پێشوودا دەڵێین مەحموود **ناوەڕاستەی Median** تیپەکەیە.
بەشێوەیەکی گشتی ناوەڕاستەی کۆمەڵێك بەها ئەو بەهایەیە کە پاش ڕێکخستنی کۆمەڵەکە دەکات بە دوو بەشی یەکسان لەژمارەی دانەکاندا ئەگەر ژمارەی دانەکان تاك بێت ئەوا ناوەڕاستە بریتییە لەو بەهایەی کەوتووەتە ناوەڕاست ئەگەر ژمارەی دانەکان جووت بێت ئەوا ناوەڕاستە بریتییە لە ناوەندی ئەو دوو بەهایەی دەکەونە ناوەڕاست.

**نموونە** 7

نمرەکانی خوێندکارانی پۆلی دەیەم لە تاقیکردنەوەی بیرکاریدا بەم شێوەیە بوو:
**77, 85, 35, 69, 82, 49, 66, 74, 57, 32, 65 . ناوەڕاستەی ئەو نمرانە چییە؟**

**شیکار** **32,35, 49, 57, 65, 66, 69, 74, 77, 82, 85**

بەڕێکخستنی نمرەکان دەستپێدەکەین لە بچووکترینەوە بۆ گەورەترین ریزیان دەکەین لەبەرئەوەی ژمارەی بەهاکان تاکە کەواتە ناوەڕاستە ئەو بەهایەیە کە دەکەوێتە ناوەڕاست واتە بریتییە لە 66

**بەرەنگاری**

ئازاد هەستا بە دۆزینەوەی ناوەڕاستەی ئەم بەهایانە: 37، 21، 59، 43، 60 و 59 ی دەرهێنا ئایا ئەنجامەکەی ئازاد ڕاستە یان هەڵەیە؟ هەڵەکەی ئازاد ڕاڤەبکە ئەگەر هەیە.

## باو (مۆد) Mode

پێڵاوفرۆشێك فرۆشتنەکانی لەمانگی رابردوو لەخشتەی پێوانەکاندا نووسی کە پێوانەی 41 زۆرتر فرۆشراوە بەوە دەڵێین باو بۆ کۆمەڵەی پێدراوەکان دەربارەی ئەو پێڵاوانەی کە فرۆشیارەکە لەمانگی رابردوودا فرۆشتوویەتی **باو Mode** بۆ کۆمەڵێك پێدراو بریتییە لەو پێدراوەی کە پتر لە

| پێوانە | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ژمارە | 1 | 3 | 5 | 26 | 41 | 45 | 44 | 12 | 8 |

پێدراوەکانی تر دووبارە دەبێتەوە لەوانەیە کۆمەڵێك بەها باویان نەبێت هەروەها لەوانە لە باوێك پتریان هەبێت.

**نموونە** 8

دارا ڕاپرسییەکی لەنێوان خوێندکارانی پۆلەکەی ئەنجامدا دەربارەی ڕەنگی پەسندکراویان و ئەنجامەکەی لەم خشتەیەدا ڕێکخست: **ئایا باو بۆ ئەم کۆمەڵە پێدراوانە چییە؟**

| ڕەنگ | سوور | زەرد | شین | سەوز | قاوەیی | ڕەش | سپی |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ژمارە | 8 | 3 | 10 | 8 | 10 | 6 | 1 |

**شیکار**

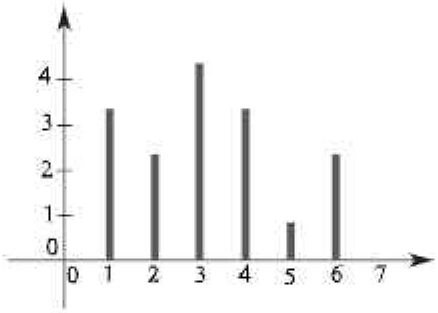
دەبینین هەردوو ڕەنگی شین و قاوەیی زیاتر پەسەندکراون لەلایەن خوێندکارانی پۆلەکەدا واتە دوو باو لەو کۆمەڵە پێدراوەدا هەیە بریتیین لە ڕەنگی شین و ڕەنگی قاوەیی.

**نموونە** 9 پلەی گەرمی لەهەفتەی یەکەمی مانگی شوبات لە هەولێر بەم شێوەیە بوو 3، 1-، 0، 2، 2-، 4، 6 باوی ئەم بەهایانە چییە؟

**شیکار**

باو بۆ ئەم پێدراوانە نییە، چونکە دووبارەبوونەوەی تێدا نییە.

**بەرەنگاری** باو چییە لەم کۆمەڵە پێدراوەی بەم ستوونە ڕوونکردنەوەییانە نوێنراون؟




## باو بۆ پێدراوە کۆکراوەکان — Mode for grouped data

بە گەڕانەوە بۆ ئەو خشتەیەی بەڕێوەبەری خولی مامۆستایان لە دهۆك هەناردی

| چەشنی تەمەن | [20, 25[ | [25, 30[ | [30, 35[ | [35, 40[ | [40, 45[ | [45, 50[ | [50, 55[ | [55, 60[ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ژمارەی مامۆستا | 12 | 23 | 25 | 36 | 24 | 12 | 9 | 2 |

دەتوانین قسە دەربارەی چەشنی باو بکەین کە بە ئاسانترین شێوە بریتییە لەو چەشنەی گەورەترین دووبارەی هەیە، چەشنی باو بۆ تەمەنەکانی بەشداربووان بریتییە لە چەشنی [35, 40[.

**نموونە** 10 چەشنی باو بۆ ئەم پێدراوە خڕکراوانە چییە؟

| چەشن | [8, 15[ | [15, 22[ | [22, 29[ | [29, 36[ | [36, 43] |
|---|---|---|---|---|---|
| ژمارە | 2 | 8 | 4 | 5 | 1 |

**شیکار**

چەشنی باو بریتییە لە [15,22[ چونکە گەورەترین دووبارەی هەیە.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 کام پێوەر دیاریکردنی ئاسانترە: ناوەند یان ناوەڕاستە یان باو؟ کامیان دیاریکردنی قورسترە؟ ڕوونیبکەرەوە.

2 گریمان گەورەترین و بچووکترین بەهات لە کۆمەڵە بەهایەك لادا، ئایا ناوەڕاستە دەگۆڕێت؟ ئایا ناوەند دەگۆڕێت؟ ڕوونیبکەرەوە.

3 لەهەرسێ پێوەری، ناوەند و ناوەڕاستە و باو، کامەیان چاکتر ئەو نمرانە دەنوێنێت کە خوێندکارانی پۆلی دەیەم بەدەستیانهێناوە: 85، 83، 80، 88، 21، 79، 12، 90 ڕوونیبکەرەوە

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**ناوەند و ناوەڕاستە و باو بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێك بدۆزەرەوە:**

4 {55 ، 90، 83، 70، 65، 77، 50}

5 {8،7، 6، 6، 6، 4، 4، 2}

6 {26، 22، 18، 14، 10}

7 ژمارەی کاتژمێرەکانی ئیشکردنی دە کرێکار لە کارگەیەکدا بەم شێوەیە بوو: 36، 40، 34، 38، 33، 0، 40، 32، 35، 37.

أ ناوەند و ناوەڕاستە و باو، بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە.

ب کام لەم سێ پێوەرە بەچاکترین شێوە ژمارەی کاتژمێرەکانی ئیشکردنی نموونەیی دەنوێنێت؟ ڕوونبکەرەوە.

8 ناوەندی قورسکراو بۆ کرێی ڕۆژانە بدۆزەرەوە کە بەم خشتەیە نوێنراوە.

| کرێ بە هەزاران دینار | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ژمارەی کرێکاران | 4 | 6 | 10 | 8 | 5 | 7 |

9 ناوەند و چەشنی باو بۆ ئەم پێدراوە کۆکراوانە بدۆزەرەوە.

| چەشن | [30, 35[ | [35, 40[ | [40, 45[ | [45, 50[ | [50, 55[ |
|---|---|---|---|---|---|
| ژمارە | 6 | 3 | 10 | 7 | 4 |

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

**ناوەند و ناوەڕاستە و باو، بۆ هەر کۆمەڵە پێدراوێك بدۆزەوە.**

10 { 20، 31، 45، 28، 7، 5، 12، 28}

11 { 78،32، 45، 10، 15، 13، 10، 32}

12 {17، 5، 10، 12، 7، 9، 5، 12، 4 }

13 {83، 44، 67، 39، 58، 63، 82، 76}

14 ژمارەی قوتابیانی نەهاتوو لە ڕۆژانی ڕابردوو بەم شێوەیە بوو: 1، 0، 3، 4، 1، 0، 2، 0، 3، 4، 1، 3، 4، 1، 2، 0، 1، 2، 0، 4، 3، 1، 2، 2، 1، 3، 1، 1، 2 ئەم پێدراوانە لە خشتەیەکی دووبارە ڕێکبخە پاشان ناوەندی قورسکراو و ناوەڕاستە و باو بدۆزەرەوە.

15 ئەم پێدراوانە ژمارەی ئەو میلانە دەنوێنن کە هەندێك ئۆتۆمبێل بە گالۆنێك سوتەمەنی دەیبڕن: 30، 21، 18، 19، 23، 24، 26، 32، 30، 22، 12، 15، 21، 28، 27، 18، 16، 19، 23، 29، 24، 25، 16. ئەم پێدراوانە لە خشتەیەکی چەشنەکانی دووبارەبوونەوەی کۆکراوە، پاشان ناوەند و چەشنی باو بدۆزەرەوە.

**16** ئامێرێك خواردنەوە تێدەكاتە ناو پەرداخ پێویستە 8 ئۆنسە بكاتە ناو هەر پەرداخێك، ئەو كۆمپانیایەی ئەو ئامێرە دروستدەكات بڕی تێكڕای 40 پەرداخی پێوا، كە بە ئامێرەكە تێكرابوون بۆ دڵنیابوون لە دروستی كاركردنی ئەم ئامێرە.

ئەنجامەكانی ئەم تاقیكردنەوەیە بەم شێوەیە بوو:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8.0 | 8.0 | 7.6 | 7.9 | 8.0 | 7.8 | 8.0 | 7.6 | 7.9 | 7.8 |
| 8.0 | 7.6 | 7.9 | 8.2 | 8.0 | 7.8 | 7.9 | 7.8 | 7.9 | 7.5 |
| 8.2 | 8.0 | 7.8 | 7.8 | 8.0 | 7.5 | 7.9 | 8.1 | 8.1 | 7.6 |
| 8.2 | 8.0 | 7.8 | 7.8 | 8.0 | 7.5 | 7.9 | 8.1 | 8.1 | 7.9 |

أ ناوەند و ناوەڕاستە و باو، بۆ ئەم پێدراوانە بدۆزەوە و هەرسێ پێوانە بەراوردبكە.

ب بەڕای تۆ وتەی كۆمپانیاكە كە ئامێرەكە نزیكەی 8 ئۆنس لەهەر پەرداخێك دەكات، ڕاستە؟

**17** نمرەكانی سەردار لە تاقیكردنەوەكانی پێشوو بریتییە لە 86، 72، 85، 90 ناوەندی نمرەكانی تا ئێستا چەندە؟ كەمترین نمرە كە پێویستە لە تاقیكردنەوەی داهاتوویدا وەریبگرێت بۆ ئەوەی ناوەندی نوێی نمرەكانی لە 80 كەمتر نەبێت؟

**18** خشتەی خوارەوە ڕێژەی سەدی دابەشكردنی هێزی كار نیشاندەدات بەپێی تەمەن لە یەكێك لە وڵاتەكاندا.

| تەمەن | 1979 | 1992 | 2005 |
|---|---|---|---|
| [16, 25[ | 24% | 16% | 16% |
| [25, 35[ | 27% | 28% | 21% |
| [35, 45[ | 19% | 27% | 25% |
| [45, 55[ | 16% | 18% | 24% |
| [55, 65[ | 14% | 12% | 14% |

أ خشتەیەك بۆ هەر ساڵێكدا ڕێكبخە.

ب ناوەندی تەمەنی هێزی كار لەهەر ساڵێك بدۆزەوە.

ج بەراورد لەنێوان هەرسێ ناوەند بكە، چ دەرەنجامێكت دەستدەكەوێت.

## ڕوانین بۆ دواوە

**19** زانا 3 جاری یەك لەدوای یەك پارچە دراوێكی كانزایی هەڵدا هێلكارییەكی درەخت دروستبكە بۆ نیشاندانی ئەنجامە جۆراوجۆرەكانی لەتوانادایە ئەگەری دەركەوتنی هەمان ڕوو چییە لە هەرسێ جاردا؟

## ڕوانین بۆ پێشەوە

**20** زانا 3 جار یەك لەدوای یەك پارچە دراوێكی كانزایی هەڵدا، هێلكارییەكی درەخت دروستبكە بۆ نیشاندانی ئەنجامە جۆراوجۆرەكانی لە توانادایە ئەگەری دەركەوتنی شێر دووجار چییە ئەگەر جاری یەكەم شێر دەركەوتبێت؟

وانەی 2

# پێوەرەکانی پەرتبوون

## Measures of dispersion

**بۆچی**

دەتوانیت پێوەرەکانی پەرتبوون بەکاربهێنیت بۆ بەراوردکردن لە نێوان دوو کۆمەڵە پێدراو وەک هێندەکانی بارانی باریو لە دوو شاردا.

**ئامانجەکان**

- پێوەرەکانی پەرتبوون وەک مەوداو لادانی ناوەندی و لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی و هەژمارەکات و بەکاریاندەهێنێت.

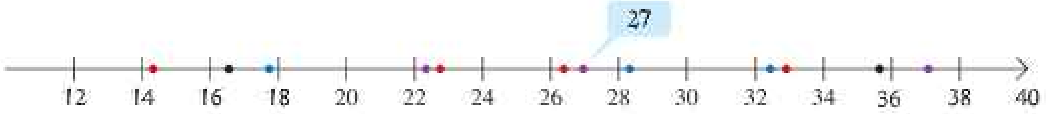
## Concept of Dispersion — چەمکی پەرتبوون

**جێبەجێکردنەکان**

ئەو دوو خشتەی بەرامبەر ناوەندی پلەکانی گەرمی لە ماوەی 12 مانگ لە هەردوو شاری ریاز و جەددە پیشاندەدات. ناوەندی بەهاکانی خشتەی یەکەمی دەگاتە 27 لە کاتێکدا ناوەندی بەهاکانی خشتەی دووەم دەگاتە 28.51 ئەگەر بەهاکانی هەردوو ئەخشە لەسەر ڕاستەهێڵی ژمارەکان بنوێنین دەبینین:

| ناوەندی پلەکانی گەرمی شاری ریاز | |
|---|---|
| کانوونی دووەم | 16.63 |
| شوبات | 17.8 |
| ئادار | 22.94 |
| نیسان | 26.37 |
| ئایار | 32.61 |
| حوزەیران | 35.62 |
| تەمموز | 37.06 |
| ئاب | 36.81 |
| ئەیلول | 33.06 |
| تشرینی یەکەم | 28.34 |
| تشرینی دووەم | 22.5 |
| کانونی یەکەم | 14.35 |

| ناوەندی پلەکانی گەرمی شاری جەددە | |
|---|---|
| کانوونی دووەم | 23.32 |
| شوبات | 23.77 |
| ئادار | 25.8 |
| نیسان | 28.08 |
| ئایار | 30.51 |
| حوزەیران | 31.25 |
| تەمموز | 32.7 |
| ئاب | 32.25 |
| ئەیلول | 31.27 |
| تشرینی یەکەم | 30.1 |
| تشرینی دووەم | 28.2 |
| کانونی یەکەم | 24.9 |




نواندنی پێدراوەکانی خشتەی یەکەم لەسەر ڕاستەهێڵی ژمارەکان

نواندنی پێدراوەکانی خشتەی دووەم لەسەر ڕاستەهێڵی ژمارەکان.

سەرنجبدە کە ناوەندی خشتەی دووەم (28.51) کۆمەڵەی بەهاکانی دەردەبڕێت چونکە بەهاکان لەناوەندە نزیکن بەڵام ناوەندی خشتەی یەکەم 27 کۆمەڵەی بەهاکان دەرنابڕێت تەنها یەکەمی نەبێت چونکە زۆربەی بەهاکان دوورن لە ناوەندەکە بۆیە دەڵێین کە کۆمەڵەی بەهاکانی خشتەی یەکەم پەرتترن لە بەهاکانی خشتەی دووەم.

## پێوەرەکانی پەرتبوون Measures of Dispersion

ئامارناسان ژمارەیەك لە پێوەرەکان بەکاردێنن بۆ پێوانی مەودای پەرتبوونی کۆمەڵێك بەها.
مەودا **Range** مەودا بریتییە لە جیاوازی نێوان گەورەترین و بچووکترین بەها لە کۆمەڵەکەدا.

**مەودا = گەورەترین بەها − بچووکترین بەها**

بیری ڕەخنەگر

ئایا مەودا پەرتبوونی کۆمەڵێك بەها دەردەبڕێت؟

**لادانی ناوەندی Mean Deviation** : بریتییە لە ناوەندی لادانی یان دوورکەوتنەوەی بەهاکانی کۆمەڵێك لە ناوەندەکەیان بۆ هەژمێرکردنی لادانی ناوەندی کۆمەڵەیەك $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ لەبەها لادانی هەر یەکێکیان لەناوەند $\overline{x}$ هەژمێردەکەین، واتە $|x_1-\overline{x}|$ $|x_2-\overline{x}|$ ... $|x_n-\overline{x}|$ پاشان ناوەندی ئەم لادانانە هەژمێردەکەین.

**لادانی ناوەندی** = $\frac{1}{n}\left(|x_1-\overline{x}|+|x_2-\overline{x}|+...+|x_n-\overline{x}|\right)$

بیری ڕەخنەگر

بۆچی ئامار ناسەکان بڕی $|x_k-\overline{x}|$ بەکاردێنن بۆ هەژمارکردنی لادانی بەهای $x_k$ لەناوەندی $\overline{x}$ و $x_k-\overline{x}$ بەکارناهێنن؟

نموونە 1

یەکێك لە کۆمپانیاکانی بەرهەمهێنانی تایەی ئۆتۆمبێل 5 تاقیکردنەوەی لەسەر دوو جۆرە تایە کرد و ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی تۆمارکرد کە تایەکان کاریان کردووە پێش ئەوەی لەکارکەون خشتەی خوارەوە ئەنجامەکانی ئەم تاقیکردنەوانە نیشاندەدەن بە هەزاران کیلۆمەتر.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| تایەی 1 | 66 | 43 | 37 | 50 | 54 |
| تایەی 2 | 54 | 49 | 47 | 48 | 52 |

أ مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ژمارەی کیلۆمەترەکانی هەرجۆرە تایەیەك هەژمێربکە.

ب ئەم پێوەرانە چی نیشاندەدەن دەربارەی هەرجۆرێك لە تایەکان، ڕاڤەی بکە.

شیکار

أ

**تایەی 1**

مەودا: $66 - 37 = 29$

واتە $29000\ km$ بۆ هەژمارکردنی لادانی ناوەندی، بە هەژمارکردنی ناوەند دەستپێکە:

$$\bar{x} = \frac{54 + 50 + 37 + 43 + 66}{5} = 50$$

پاشان لادانی هەر بەهایەك لەناوەندەکە هەژماربکە، بۆ ئەمە ئەم خشتەیە دروستبکە.

| $x_k$ | $\lvert\bar{x} - x_k\rvert$ |
|---|---|
| 66 | 16 |
| 43 | 7 |
| 37 | 13 |
| 50 | 0 |
| 54 | 4 |

پاشان ناوەندی لادانەکە هەژماربکە ئەمەت دەستدەکەوێت:

لادانی ناوەندی $= \frac{16+7+13+0+4}{5} = 8$

واتە $8000\ km$

**تایەی 2**

مەودا: $54 - 47 = 7$

واتە $7000\ km$ بۆ هەژمارکردنی لادانی ناوەندی بە هەژمارکردنی ناوەند دەستپێکە:

$$\bar{x} = \frac{52 + 48 + 47 + 49 + 54}{5} = 50$$

پاشان لادانی هەر بەهایەك لەناوەندەکە هەژماربکە، بۆ ئەمە ئەم خشتەیە دروستبکە.

| $x_k$ | $\lvert\bar{x} - x_k\rvert$ |
|---|---|
| 54 | 4 |
| 49 | 1 |
| 47 | 3 |
| 48 | 2 |
| 52 | 2 |

پاشان ناوەندی لادانەکە هەژماربکە ئەمەت دەستدەکەوێت:

لادانی ناوەندی $= \frac{4+1+3+2+2}{5} = 2.4$

واتە $2400\ km$

ب سەرنجبدە کە لادانی ناوەندی تایەی 2 کەمترە لەلادانی ناوەندی تایەی 1، ئەمەش ڕێگات پێدەدات بڵێیت کە ناوەندی پێدراوەکانی تایەی 2 بە متمانەترە بەم جۆرە خەملاندنی ئەو دوورییەی تایەی 2 دەیبڕێت پێش لەکارکەوتن بە متمانەترە.

**هەوڵبدە** مەودا و لادانی ناوەندی پێدراوەکانی تایەی 3 هەژماربکە بەراوردیبکە لەگەڵ بۆشایی پێوەرەکانی هەردوو تایەی پێشوو.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| تایەی 3 | 64 | 52 | 50 | 49 | 35 |

**خاڵی چاودێری** ✓

ئایا دەبێ دوو کۆمەڵە پێدراو هەمان مەودا و هەمان لادانی ناوەندییان هەبێت؟
هۆی وەلامەکەت بە هێنانەوەی نموونەیەك بێت.

**لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی**: بریتیین لەدوو پێوەری پەرتبوون بۆ بەراوردکردنی پێدراوەکان و شیکردنەوەیان بەکاردێن.

**لێکنەچوون Variance** $\sigma^2 = \frac{1}{n}\left((x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2\right)$

**لادانی پێوانەیی Stantard Deviation** $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

## نموونە 2

لادانی پێوانەیی دوورییەکانی دوو تایەی نموونەی پێشوو بدۆزەوە:

**شیکار**

**تایەی 1**

خشتەی خوارەوە دروست بکە بۆ رێکخستنی ئەوەی هەژماری دەکەیت:

$\overline{x} = \frac{54+50+37+43+66}{5} = 50$

| $x_k$ | $(x_k-\overline{x})$ | $(x_k-\overline{x})^2$ |
|---|---|---|
| 66 | 16 | 256 |
| 43 | −7 | 49 |
| 37 | −13 | 169 |
| 50 | 0 | 0 |
| 54 | 4 | 16 |
| سەرجەم | 0 | 490 |

لێکنەچوون: $\sigma^2 = \frac{490}{5} = 98$

لادانی پێوانەیی: $\sigma = 9.9$ بەواتای 9900km

**تایەی 2**

خشتەی خوارەوە دروست بکە بۆ رێکخستنی ئەوەی هەژماری دەکەیت:

$\overline{x} = \frac{52+48+47+49+54}{5} = 50$

| $x_k$ | $x_k-\overline{x}$ | $(x_k-\overline{x})^2$ |
|---|---|---|
| 54 | 4 | 16 |
| 49 | −1 | 1 |
| 47 | −3 | 9 |
| 48 | −2 | 4 |
| 52 | 2 | 4 |
| سەرجەم | 0 | 34 |

لێکنەچوون: $\sigma^2 = \frac{34}{5} = 6.8$

لادانی پێوانەیی: $\sigma = 2.6$ بەواتای 2600km

ئەم ئەنجامانە جەخت لەو دەرەنجامانە دەکاتەوە کە لە نموونەی پێشوو پێگەیشتیت وتێیدا لادانی پیوانەیی تایەی 2 کەمترە لە لادانی پێوانەی تایەی 1.

**هەوڵبدە** لادانی پێوانەیی تایەی 3 چەندە؟

**خاڵی چاودێری** ✓

ئەگەر لادانی پێوانەیی تایەی چوارەم بریتی بێت لە 1500 km ئایا دەتوانیت چی بڵێیت دەربارەی ئەم تایەیە بەگوێرەی هەردوو تایەی 1 و 2.

**بیری ڕەخنەگر**

بە بۆچوونی تۆ کام پێوەر پتر بەکاردێت: لێکنەچوون یان لادانی پێوانەیی؟ بۆچی؟ بەگەڕانەوە بۆ تێکڕاکانی پلەکانی گەرمی لەهەردوو شاری ڕیاز و جەددە، خشتەی خوارەوە پێوەرەکانی پەرتبوونی تێکڕاکانی پلەکانی گەرمی لەم دوو شارە نیشاندەدات.

| پێوەر | ڕیاز | جەددە |
|---|---|---|
| مەودا | 22.71 | 9.38 |
| لادانی ناوەندی | 6.91 | 2.83 |
| لێکنەچوون | 60.92 | 10.27 |
| لادانی پێوانەیی | 7.81 | 3.20 |

بەم جۆرە دەبینین کە پەرتبوونی تێکڕاکانی پلەی گەرمی لە جەددە کەمترە لەوەی لە ڕیاز، چونکە لادانی پێوانەیی بۆ شاری یەکەم کەمترە لە لادانی پێوانەیی بۆ شاری دووەم.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ڕاڤەبکە بۆچی هەریەك لەلادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی ژمارەیەکی سالب نین؟

2 پەیوەندی نێوان لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی ڕاڤەبکە ئایا لادانی پێوانەیی بەردەوام لە لێکنەچوون کەمترە؟

3 ڕاڤەبکە بۆچی هەریەك لە لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی پەرتبوون دەردەبڕێت زیاتر لەمەودا؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**جێبەجێکردنەکان**

4 **پەروەردە و فێرکردن** خشتەی بەرامبەر نمرەکانی دوو خوێندکار لە 5 تاقیکردنەوەدا نیشاندەدات، مەودا و لادانی ناوەندی نمرەکانی هەریەك لە دوو خوێندکارەکە هەژماربکە و ئاماژکاری ئەم پێوەرانە ڕاڤەبکە.

5 لادانی پێوانەیی نمرەکانی هەریەك لەدوو خوێندکارەکە بدۆزەوە.

| هێمن | هاوار |
|---|---|
| 81 | 98 |
| 84 | 68 |
| 88 | 99 |
| 82 | 59 |
| 85 | 96 |

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

**مەودا و لادانی ناوەندی بدۆزەوە.**

**6** 8؛ 10؛ 3؛ 9؛ 10

**7** 1؛ 2؛ 4؛ 2؛ 6

**8** 31؛ 103؛ 34؛ 98؛ 107؛ 32

**9** 32؛ 23؛ 68؛ 74؛ 26؛ 93

**10** 32؛ 23؛ 68؛ 74؛ 26؛ 93

**11** 11.1؛ 14.2؛ 8.4؛ 12.2؛ 15.2؛ 10.9

**12** -1.22؛ 4.53؛ -2.42؛ 2.33؛ 4.66

**13** 8.72؛ 7.43 ؛ -2.92؛ -3.56؛ 5.78

**لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بدۆزەوە**

**14** 9؛ 10؛ 10؛ 8؛ 7؛ 11؛ 12؛ 9

**15** 8.1؛ 10.3؛ 3.4؛ 9.8؛ 10.7

**16** -3؛ 2؛ -5؛ 4؛ -2؛ 8؛ 9؛ -1

**17** 2؛ 4؛ -8؛ 8؛ 7؛ -2؛ -4؛ 3؛ 7

**لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی بدۆزەوە کام لەم دوو پێوەرە کاریگەری بەهای پەڕگی کەمتر بەسەرەوە دیاردەکەوێت؟**

**18** 20؛ 30؛ 40؛ 500

**19** 0؛ 500؛ 510؛ 520

**20** دوو کۆمەڵە بەها بنووسە هەمان مەودایان هەبێت لە کاتێکدا لادانە پێوانەییەکانیان جیاوازبێت.

**بەرەنگاری**

**21** ئایا دەبێت لادانی پێوانەیی کۆمەڵە بەهایەك یەکسان بێت بە سفر؟ ئەگەر ئەوە بێت، مەرجەکانی هاتنەدی ئەم بارە دیاریکە نموونەیەك لە ڕاڤەکردنت بەکاربێنە.

**بەستنەوە**

**22** ڕاپرسی داوا لە 30 کەس کرا بۆچوونیان دەربارەی جۆرێك ساردەمەنی دەرببڕن لە ڕێگای دانانی نمرە لە 1 تا 10 مەودا و لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی ئەنجامەکانی ڕاپرسییەکە کە لە خشتەی بەرامبەردا پیشاندراوە بدۆزەوە.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 8 | 6 | 9 | 7 | 5 |
| 8 | 7 | 9 | 8 | 8 | 7 |
| 8 | 6 | 9 | 7 | 8 | 10 |
| 10 | 10 | 8 | 9 | 10 | 8 |
| 9 | 7 | 7 | 8 | 9 | 7 |

**جێبەجێکردنەکان**

وەرزش خشتەی خوارەوە ژمارە پێوانەییەکان (بە خولەك و چرکە و بەشەکان لەسەدی چرکە) پیشاندەدات بۆ پیاوان و ئافرەتان لە خلیسکێنی سەر سەهۆڵ، لە ژمارەیەك لە خولەکانی یارییەکانی ئۆلۆمپی:

| | 1976 | 1980 | 1984 | 1988 | 1992 | 1994 | 1998 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| پیاوان | 1:59.38 | 1:55.44 | 1:58.36 | 1:52.06 | 1:54.81 | 1:51.29 | 1:47.87 |
| ئافرەتان | 2:16.58 | 2:10.95 | 2:03.42 | 2:00.68 | 2:05.87 | 2:02.19 | 1:57.58 |

**23** ناوەندو ناوەڕاستەی ژمارە پێوانەییەکانی پیاوان و ئافرەتان بدۆزەوە.

**24** مەودا و لادانی ناوەندی پیاوان و ئافرەتان هەژمێربکە ئەم پێوەرانە چیمان پێ ڕادەگەیەنن دەربارەی ژمارە پێوانەییەکانی پیاوان و ئافرەتان؟

**25** لادانی پێوانەیی پیاوان و ئافرەتان هەژمێربکە. ئەم پێوەرانە چیمان پێ ڕادەگەیەنن دەربارەی ژمارە پێوانەییەکانی پیاوان و ئافرەتان؟

## ڕوانین بۆ دواوە

بدۆزەوە.

**26** $C_3^8$ **27** $C_3^{10}$ **28** $p_3^{17}$ **29** $p_3^{21}$

## ڕوانین بۆ پێشەوە

**30** زۆر جار ئامار ناسەکان پەنا دەبەنە بەر بەکارهێنانی نموونەیەك بۆ ئەنجامدانی توێژینەوە لەسەر کۆمەڵەیەکی گەورە لە بەها، و پشت بە پێوەرە ئامارییەکانی نموونەکەوە دەبەستن بۆ خەملاندنی پێوەرە ئامارییەکانی کۆمەڵەکە بەگشتی چونکە ئەوان ناوەندی نموونەکە بە دەربڕی ناوەندی کۆمەڵەکە دەزانن لەکاتێکدا بۆ هەژمێرکردنی لادانی پێوانەیی لێکنەچوونی نموونەکە بە یاسایەك هەژمێردەکەن کە تۆزێك جیایە لە هەژمێرکردنی لێکنەچوون لە کۆمەڵەکە بەتەواوەتی ئەوان ئم یاسایە بەکاردێنن:
لێکنەچوونی نموونەکە: $\sigma^2 = \frac{1}{(n-1)}\left((x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2\right)$

أ لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی ئەم نموونەیە بدۆزەوە: 15؛ 18؛ 7؛ 16؛ 5؛ 12.

ب بۆ دۆزینەوەی ناوەندی ژمارەی ئۆتۆمبێلەکان لەیەك خێزاندا ئەنجومەنی شارەوانی یەکێك لەشارەکان نموونەیەکی وەرگرت لە 10 خێزان کە بەشێوەیەکی هەڕەمەکی هەڵبژێردران ڕاپرسی ئەم نموونەیە ئەم ژمارانەی لێدەرچوو: 2؛ 3؛ 2؛ 1؛ 1؛ 4؛ 2؛ 1؛ 3؛ 4. ناوەندی ژمارەی ئوتومبیلەکان لەیەك خێزاندا بخەملێنەو لادانی پێوانەیی بخەملێنە.

# سێگۆشەزانی Trigonometry

بەشی 5

سێگۆشەزانی زانستێکی کۆن و نوێیە، لەو پەیوەندییە گرنگە دەکۆڵێتەوە کە لە نێوان لایەکانی سێگۆشە و گۆشەکانی هەیە، لە کۆنەوە مرۆڤ گرنگی بە سێگۆشەزانی داوە، هەروەک لەم وێنەی خوارەوە دەردەکەوێت. جێبەجێکردنەکانی سێگۆشەزانی گەلێک فراوانە لە فیزیا و گەردوونزانی و تەلارسازی و ئەندازە و ئەوانی تر.

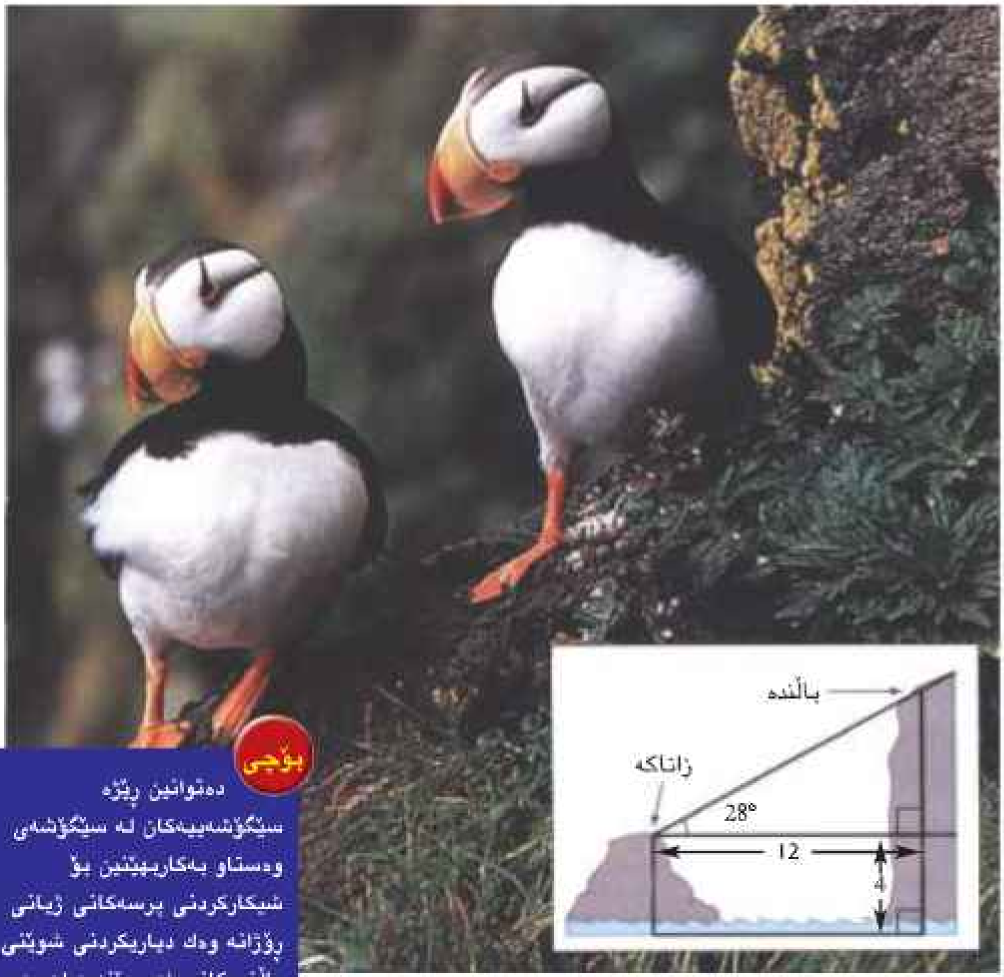
### وانەکان

1. ڕێژە سێگۆشەییەکان و شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو.

وانەی 1

# ڕێژە سێگۆشەییەکان وشیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو

## Trigonametric Ratios and Solving Right Triangle




**بۆچی**

دەتوانین ڕێژە سێگۆشەییەکان لە سێگۆشەی وەستاو بەکاربهێنین بۆ شیکارکردنی پرسەکانی ژیانی ڕۆژانە وەك دیاریکردنی شوێنی باڵندەکانی ئەو وێنەیە لەسەر ڕووی ئاو.

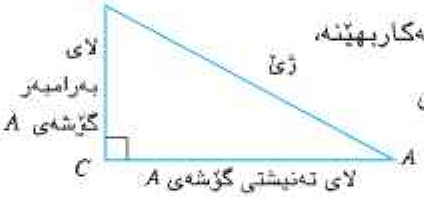
**ئامانجەکان**

- ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەیەکی تیژ دەناسێت و جیادەکاتەوە.
- سێگۆشەیەکی وەستاو و بە بەکارهێنانی ڕێژە سێگۆشەییەکان شیکار دەکات.

**جێبەجێکردنەکان**

**باڵندەکان**

زانایەك هەڵدەستێت بە وێنەگرتنی کۆمەڵە باڵندەیەك کە لە قەد پاڵی شاخێکدا وەستابوون، بە مەبەستی هەژمارکردنی بەرزی ئەو باڵندانە لەسەر ڕووی ئاو. زاناکە ئەو گۆشەی پێوا کە دروست دەبێت لە نێوان هێڵی بینین بۆ باڵندەکان و هێڵی ئاسۆیی و بینی $28°$ یە. چۆن زانایەکە بەرزی باڵندەکان لەسەر ڕووی ئاو هەژمار دەکات؟ ئەگەر زانیت لەبەرزی 4 مەتر وەستاوە و دووری نێوان زاناکە و قەدپاڵی شاخەکە 12 مەتربێت.




بۆ هەژمارکردنی بەرزی شوێنی باڵندەکان، سێگۆشەزانی بەکاربهێنە،

دەتوانیت سێگۆشەزانی بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەیەك لە گۆشەکانی سێگۆشەیەکی وەستاو، یان درێژی لایەك لە لایەکانی سێگۆشەکە لەبیر نەکەی

ژێی سێگۆشە بریتییە لە لای بەرامبەری گۆشەی وەستاو لەم سێگۆشەیە لای $\overline{AB}$ ژێ یە **Hypotenuse** و $\overline{AC}$ لای تەنیشتی **Adjacent** گۆشەی A یە و $\overline{BC}$ لای بەرامبەرییەتی **Opposite**.

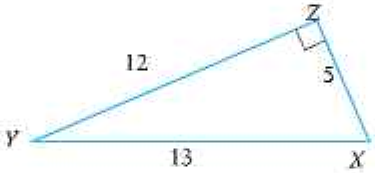
**خاڵی چاودێری ✓**

لای تەنیشت و لای بەرامبەری گۆشەی B دیاریبکە.

## Trigonometric Ratios of $\hat{A}$ — ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $\hat{A}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| پێناسە | $\sin A = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{ژێ}}$ | $\cos A = \frac{\text{تەنیشت}}{\text{ژێ}}$ | $\tan A = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{تەنیشت}}$ |
| نووسین | $\sin A = \frac{BC}{AB}$ | $\cos A = \frac{AC}{AB}$ | $\tan A = \frac{BC}{AC}$ |

### نموونە 1




هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی $X$ لە سێگۆشەی بەرامبەر هەژماربکە با وەڵامەکەت بە تەواوی بێت و هەندێ وەڵام بە نزیککردنەوە بۆ نزیکترین بەشی دە هەزاری بێت.

شیکار

$\sin X = \frac{12}{13} \approx 0.923$

$\cos X = \frac{5}{13} \approx 0.3846$ $\qquad \tan X = \frac{12}{5} = 2.4$

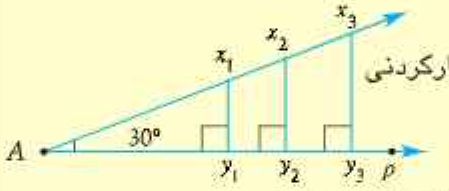
**هەوڵبدە** هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی $Y$ لە سێگۆشەکەی سەرەوە هەژماربکە، با وەڵامەکەت بە تەواوی بێت و هەندێ وەڵام و بە نزیککردنەوە بۆ نزیکترین بەشی دەهەزاری بێت.

## چالاکی

### Exploring Trigonometric Ratios — دۆزینەوەی ڕێژە سێگۆشەییەکان

پێویستیت بە پرگالێك و ڕاستیەکی سانتیمەتری و بژمێرێك هەیە.

خشتەیەکی وەك خشتەکەی خوارەوە دروستبکە.



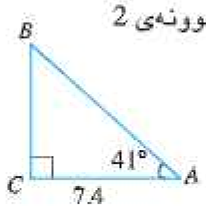

1. ئەوەی لە خشتەکەدا هاتووە بینووسەوە، لە دواییدا تەواوی بکە بە پێوانی لایە دیاریکراوەکان و هەژمارکردنی ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $A$.
2. ئایا ئەو بەهایانەی نوسیوتە لە ستونی $\sin A$ بەنزیکەیی یەکسانن؟ لە ستوونی $\cos A$ وایە؟ لە ستونی $\tan A$ وایە؟

| سێگۆشە | بەرامبەر $\hat{A}$ | تەنیشت $\hat{A}$ | ژێ | $\sin A = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{ژێ}}$ | $\cos A = \frac{\text{تەنیشت}}{\text{ژێ}}$ | $\tan A = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{تەنیشت}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Ax_1y_1$ | | | | | | |
| $Ax_2y_2$ | | | | | | |
| $Ax_3y_3$ | | | | | | |

3. ئەو ئەنجامانەی دەستتکەوتووە بەراوردیبکە لەگەڵ ئەنجامەکانی هاوڕێکانت لە پۆلەکەتدا.
4. ئایا دەتوانیت گریمانەیەك دابڕێژیت دەربارەی هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $A$.

خاڵی چاودێری ✓

بەهای رێژە سێگۆشەیی گۆشەیەکی تیژ ناگۆڕێت بە گۆڕانی ئەو سێگۆشە وەستاوەی کە بەکارهاتووە بۆ هەژمارکردنی هەروەك لە چالاکی سەرەوە بۆت دەرکەوت، بەهای ئەو رێژانە تەنها بە پێوانەکردنی گۆشەکە دەبێت. دەتوانی بەهای رێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەیەکی پێوانە زانراو بەدەست بهێنێت، بە بەکارهێنانی بژمێری زانستی و دەتوانیت رێژە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی هەندێك لەلایەکانی سێگۆشەی وەستاو وەك لە نموونەی 2 دەردەکەوێت.




**نموونە** 2 درێژی لاکانی سێگۆشەی بەرامبەر هەژماربکە.

**شیکار**

لەبەرئەوەی درێژی وە$\overline{AC}$ زانراوە پێویستە درێژی هەریەك لە $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ بدۆزەوە.

$\cos A$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی $\overline{AB}$ .

$\tan A$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی $\overline{BC}$.

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \qquad \tan A = \frac{BC}{AC}$$

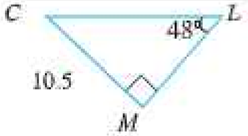
$$\cos 41^\circ = \frac{7.4}{AB} \qquad \tan 41^\circ = \frac{BC}{7.4}$$

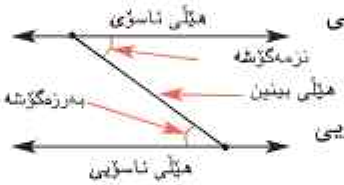
$$AB = \frac{7.4}{\cos 41^\circ} \qquad BC = 7.4 \times \tan 41^\circ$$

$$BC \approx 7.4 \times 0.8693$$

$$AB \approx \frac{7.4}{0.7547} \approx 9.8 \qquad BC \approx 6.4$$

**هەوڵبدە** درێژی لایەکانی سێگۆشەی بەرامبەر هەژماربکە.




بەرزە گۆشە **Angle of Elevation** ئەو گۆشەیە کە هێڵی ئاسۆیی پێکیدەهێنێت لەگەڵ هێڵی بینینی خاڵێك لەخۆی بەرزتربێت.

نزمە گۆشە **Angle of Depression** ئەو گۆشەیە کە هێڵی ئاسۆیی پێکیدەهێنێت لەگەڵ هێڵی بینینی خاڵێك لە خۆی نزمتربێت.

سەرنجبدە پێوانەی بەرزە گۆشە یەکسانە بە پێوانەی نزمە گۆشە.

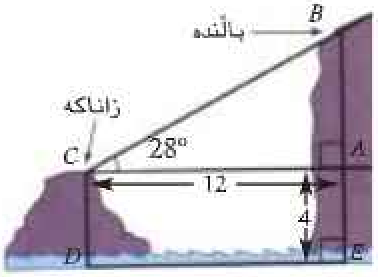
**نموونە** 3 **بەگەڕانەوە بۆ پرسیاری باسکراو لە سەرەتای وانەکە، بەرزی شوێنی باڵندەکان لەسەر رووی ئاوەکە هەژماربکە.**

**جێبەجێکردنەکان**

**باڵندەکان**

**شیکار**

$BE = BA + AE$




درێژی پارچە راستەهێڵی $BE$ بەرزی شوێنی باڵندەکان دەنوێنێت لەرووی ئاوەکە. لەبەرئەوەی هەروەها $AE=CD=4$.

ئەوا پێویستە هەژماری $AB$ بکەیت.

$$\tan 28^\circ = \frac{AB}{12}$$

$$AB = 12 \times \tan 28^\circ$$

$$AB \approx 6.38$$

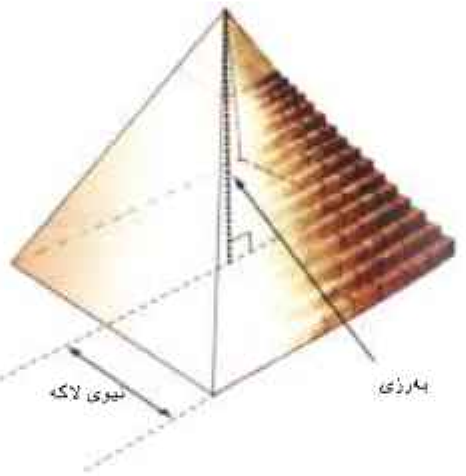
$$BE = BA + AE \approx 6.38 + 4 \approx 10.3$$

بەرزی باڵندەکان لەسەر رووی ئاو= $10.38$ m بەنزیکەیی

دەتوانیت بژمێرەی زانستی بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەیەک، ئەگەر یەکێك لە ڕێژە سێگۆشەییەکانی زانراو بێت، بە بەکارهێنانی دوگمەکانی

**TAN⁻¹** **COS⁻¹** **SIN⁻¹**

ئەگەر $\tan A = \frac{4}{3}$ ئەوا پێوانەی گۆشەی $A$ بریتییە لە $\tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 56^\circ$.




### دەروازەیەك لەسەر ڕۆشنبیری فیرعەونییەکان

فیرعەونییەکان پەیوەندییەکی سێگۆشەییان بەکارهێناوە و ناویان ناوە سیکد کە لاری ڕووی هەرەمەکەی دەنواند.

$$1 \text{ سکید} = \frac{\text{نیوەی پێوانەی لایەکی بنکەی هەرەمەکە» بەبست«}}{\text{بەرزی هەرەمەکە بەکیوبت»کیوبت = 7 بست«}}$$

سەرنجبدە کە سکید هەڵگەڕاوەی tan گۆشەیە کە پێی دەوترێت Cotangent یان بە کورتی cot ی گۆشەکە.

**جێبەجێکردن**
**ئەندازە**

بۆ ئەوەی سێگۆشەیەکی **وەستاو شیکاربکەیت Solve a Right Triangle** واتا پیوانەی گۆشەکانی سێگۆشەکە و درێژی لایە نەزانراوەکانی سێگۆشەکە هەژماربکەیت بژمێری زانستی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی ئەو گۆشەی کە یەکێك لە ڕێژە سێگۆشەییەکانی دەزانیت ئەو ڕاستییە بەکاربهێنە کە کۆی گۆشەکانی ناوەوەی سێگۆشە دەکاتە$180^\circ$ واتە کۆی هەردوو گۆشە تیژەکە لە سێگۆشە وەستاوەکە دەکاتە$90^\circ$.

## نموونە 4

**سێگۆشەی بەرامبەر شیکاربکە بە هەژمارکردنی پێوانەی گۆشەکانی بەنزیکراوەیی لە نزیکترین پلە و درێژی ژێیەکەی نزیکبکەیتەوە بۆ نزیکترین بەش لە دە.**

**شیکار**

1. $\tan R = \frac{3.8}{6.8}$

$$R = \tan^{-1}\frac{3.8}{6.8} \approx 29^\circ$$

2. لەبەرئەوەی کۆی پێوانەی دووگۆشە تیژەکە دەکاتە $90^\circ$ پێوانەی گۆشەی $S$ بریتییە لە $90^\circ - 29 = 61^\circ$ بە نزیکەیی.

3. بیردۆزی فیتاگۆرس بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی درێژی ژێیەکە.

$$(RS)^2 = (6.8)^2 + (3.8)^2$$

$$RS = \sqrt{(6.8)^2 + (3.8)^2}$$

$$RS \approx 7.8$$

**هەوڵبدە**

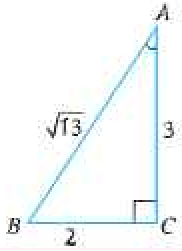
سێگۆشەی بەرامبەر شیکاربکە بە هەژمارکرنی پێوانەی گۆشەکانی بە نزیککراوەیی لە نزیکترین پلە و درێژی ژێیەکەی نزیکبکەوە بۆ نزیکترین بەش لە دە.

**بیری ڕەخنەگر**

1. چۆن سێگۆشەی نموونەی 4 شیکاردەکەیت بە هەژمارکردنی ژێیەکەی دەستپێبکە، پاشان *sin* یان *cos* بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی پێوانەی گۆشەکانی؟
2. لەدوای هەژمارکردنی پێوانەی $\hat{R}$ ئایا دەتوانی درێژی ژێیەکە هەژماربکەیت بێ بەکارهێنانی بیردۆزی فیتاگۆرس؟

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

**1** چۆن ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $A$ لە سێگۆشەی بەرامبەر هەژماردەکەیت.

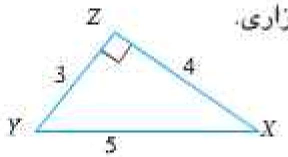



**2** چۆن پێوانەی دوو گۆشەی $A$ و $B$ لەسێگۆشەی بەرامبەر دەدۆزیتەوە.

**3** جیاوازی چییە لە نێوان $\sin^{-1} A$ ، $\frac{1}{\sin A}$؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

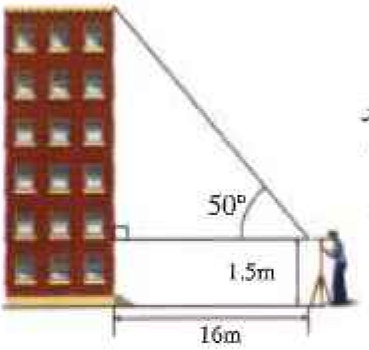
**4** ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی X هەژماربکە لەسێگۆشەی لای چەپ، با وەڵامەکانت تەواو بن و نزیکبکرێنەوە بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزاری.



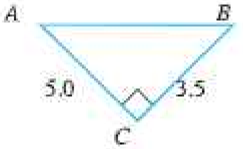

**5** درێژی هەردوو لای $\overline{AC}$ ، $\overline{BA}$ لە سێگۆشەی لای ڕاست هەژماربکە.

جێبەجێکردن

**6** ئەندازە ئەندازیارێك لە دووری 16 m لە تەلارێك وەستاوە، بە دووربینێك کە لە بەرزی 1.5m لەزەوییەوە دانرابوو سەیری بەرزترین خاڵی تەلارەکەی دەکرد ئەگەر پێوانەی بەرزە گۆشەکە $50°$ بێت بەرزی تەلارەکە چەندە؟

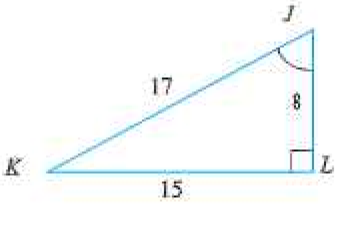



**7** ئەم سێگۆشەیەی خوارەوە شیکاربکە پێوانەی گۆشەی A هەژماربکە بە نزیککراوەیی بۆ نزیکترین پلە و درێژی لای $\overline{AB}$ بە نزیککراوەیی بۆ نزیکترین بەش لە دە.




## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

سێگۆشەی $J\,K\,L$ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی بەهای داواکراو وەڵامەکەت بە تەواوی بدەوە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە دە هەزاری نزیکیبکەوە.

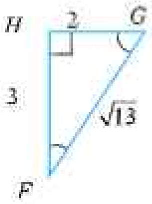



**8** $\sin K$ **9** $\sin J$

**10** $\cos J$ **11** $\cos K$

**12** $\tan K$ **13** $\tan J$

سێگۆشەی $F\,G\,H$ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی بەهای داواکراو وەڵامەکەت بە تەواوی بدەوە پاشان بۆ نزیکترین بەش لە دە هەزاری نزیکیبکەوە.




**14** $\sin G$

**15** $\sin F$

**16** $\cos G$

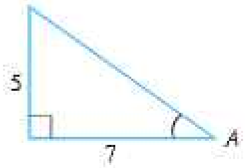
**17** $\cos F$

**18** $\tan G$

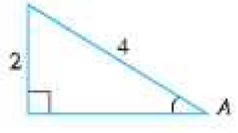
**19** $\tan F$

پێوانەی گۆشەی $A$ هەژماربکە بە بەکارهێنانی بژمێر.

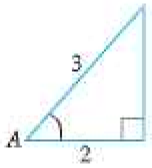
**20**



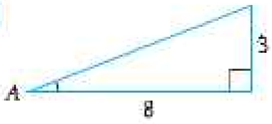

**21**



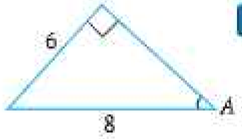

**22**



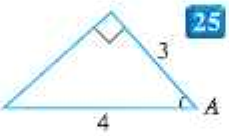

**23**




**24**

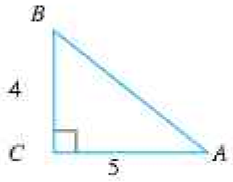



**25**

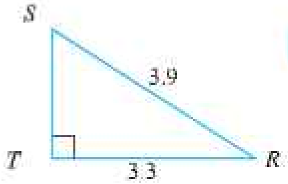



ئەم سێگۆشانە شیکاربکە پێوانەی گۆشەکانیان هەژماربکە بە نزیکراوەیی لە نزیکترین پلە و درێژی لایەکانییان بۆ نزیکترین بەش لە دەیەك نزیکبکەوە.

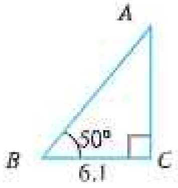
**26**



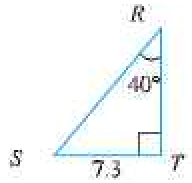

**27**



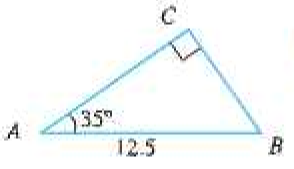

**28**



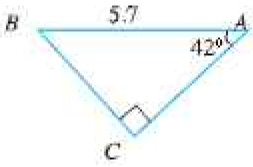

**29**

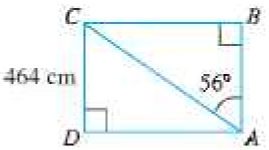



**30**




**31**






32 بیسەڵمێنە کە پەیوەندی $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ هەمیشە ڕاستە.

33 **ئەندازە** درێژی هەریەك لە لای $AD$ و تیرە $AC$ لە لاکێشەی بەرامبەر هەژماربکە.

**جێبەجێکردنەکان**

34 **جوانکاری ماڵەکان** باوکی ژیکەڵە ئارەزوو دەکات باڵەکۆنێك دروستبكات لەشێوەی سێگۆشەی وەستاو کەژێی سێگۆشەکە 6 مەتر بێت و دوولای سێگۆشە وەستاوەکە لە درێژیدا یەکسان بن.

أ درێژی هەریەکە لە دوو لای گۆشە وەستاوەکە هەژماربکە.

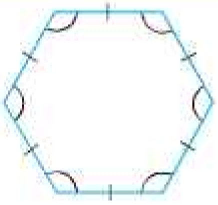
ب ڕووبەری باڵەکۆنەکە هەژماربکە.

**فڕۆکەوانی فڕۆکەیەك لە بەرزی 6.5 km دەفڕێت. بە مەبەستی نیشتنەوەیەکی ئارام، کاپتنەکە بڕیاریدا دەستبەجێ دەست بە نیشتنەوە بکرێت.**

35 پێوانەی ئەو گۆشەیە هەژماربکە کە هێڵی نیشتنەوە پێکدەهێنێت لەگەڵ هێڵی ئاسۆ، ئەگەر زانیت فڕۆکەوانەکە دەستی بە نیشتنەوە کرد لەدووری 186 km لە فڕۆکەخانەکە (پێوانەکە لە زەوییەوە پێوراوە)

36 لەدووری چەند لە فڕۆکەخانەکەوە پێویستە فڕۆکەوانەکە دەست بە نیشتنەوە بکات، ئەگەر پێوانەی گۆشەی نێوان هێڵی نیشتنەوە و هێڵی ئاسۆی $5^\circ$ هەڵبژارد؟

**بەرەنگاری**



37 **بیناکردن** بەڕێوەبەری باخچەیەکی گشتی ئارەزوی دروستکردنی شوێنێکی حەسانەوەی کرد، بنکەکەی بە شێوەی شەشلایەکی ڕێك بێت، درێژی لایەکی 10 مەتر بێت. کاشی کردن بنکەکەی 17 هەزار دیناری تێدەچێت بۆهەر مەتر دووجایەك. ڕێژە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی تێچوونی کاشیکردنەوەی.

## ڕوانینێك بۆ دواوە

**ئەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە، پاش ڕێژەکردنی ژێرە**

38 $\frac{3}{\sqrt{2}}$ 39 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 40 $\frac{5}{1-\sqrt{2}}$ 41 $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

**ناوەندی هەر کۆمەڵە بەهایەك هەژماربکە، پاشان لادانی پێوانەیی هەژماربکە.**

42 12، 34، 18، 25، 53، 46، 17، 14، 25، 36، 24، 19، 17، 28، 26، 22

43 102، 107، 122، 99، 103، 121، 113، 100، 78، 130، 125، 119، 110

## ڕوانین بۆ پێشەوە

44 **ئەندازە** ئەگەر خاڵێك بە دەوری چەقی سوورانەوەکەیدا بسوڕێتەوە، ئەندازگەکەی بازنەیەکی تەواوە، ئەو گۆشەیە چەندە ئەندازگەکەی نیوە بازنەبێت؟ چارەکە بازنەبێت؟